A.. Inst. Fourier, Grenoble
23, 2 (1973), 97-108.

LE THÉORÈME DE PRÉPARATION DIFFÉRENTIABLE EN CLASSE P

par Guy LASSALLE

---

1. Soit U un ouvert de $\mathbf{R}^n$, soit

$$B(x, z) = z^d + \sum_{i=1}^{d} a_i(x) z^{d-i}$$

un polynôme à coefficients définis et indéfiniment dérivables sur U, et soit $X = \overset{-1}{B}(0) \subset U \times \mathbf{C}$.

Le sujet de cette note est le théorème suivant :

Théorème 1. — *Il existe une application linéaire* R *(reste) de* $\mathscr{E}^{d+1}(U \times \mathbf{R})$ *dans* $[\mathscr{E}^0(U)]^d$ *et une application linéaire* Q *(quotient) de* $\mathscr{E}^{d+1}(U \times \mathbf{R})$ *dans* $\mathscr{E}^0(U \times \mathbf{R})$ *telles que, pour tout* p *supérieur ou égal à* d, *fini ou non,*

1) *Pour toute fonction* $f \in \mathscr{E}^{p+1}(U \times \mathbf{R})$, *on ait sur* $U \times \mathbf{R}$ *l'égalité*

$$f(x, t) = B(x, t) Q(f)(x, t) + \sum_{i=1}^{d} r_i(x) t^{d-i},$$

avec $\qquad R(f) = (r_1, \ldots, r_d).$

2) R *induise sur* $\mathscr{E}^{p+1}(U \times \mathbf{R})$ *une application à valeurs dans* $[\mathscr{E}^k(U)]^d$ *continue pour la topologie de ces deux espaces, avec* $k = \left[\frac{p+1}{d}\right] - 1$. ($[n]$ = *partie entière de* n).

3) Q *induise sur* $\mathscr{E}^{p+1}(U \times \mathbf{R})$ *une application à valeurs dans* $\mathscr{E}^h(U \times \mathbf{R})$ *continue pour la topologie de ces deux espaces, avec* $h = \left[\frac{p-d}{d}\right]$.

De plus, si $a_1, \ldots a_d$ *sont à valeurs réelles, il est possible de choisir* R *et* Q *de sorte que* $R(f)$ *et* $Q(f)$ *soient à valeurs réelles quand* f *est à valeurs réelles.*

(Dans cet énoncé, $\mathcal{E}^r(\omega)$ désigne l'espace vectoriel des fonctions complexes définies et r fois continûment dérivables sur l'ouvert ω, muni de la topologie de la convergence uniforme des dérivées sur tout compact de ω.)

Pour p infini, ce théorème est dû à J. Mather ([1)]. La démonstration de [1] est d'ailleurs valable pour p fini et donne un théorème analogue au théorème 1, mais avec des valeurs moins bonnes pour k et h.

La méthode suivie ici permet également de démontrer le

Théorème 1 *bis*. — *Soit* p *un entier supérieur ou égal à* d. *Il existe une application linéaire continue* R_p *de* $\mathcal{E}^p(U \times \mathbf{R})$ *dans* $[\mathcal{E}^k(U)]^d$ *et une application linéaire continue* Q_p *de* $\mathcal{E}^p(U \times \mathbf{R})$ *dans* $\mathcal{E}^h(U \times \mathbf{R})$ *telles que, pour toute fonction* $f \in \mathcal{E}^p(U \times \mathbf{R})$, *on ait sur* $U \times \mathbf{R}$ *l'égalité*

$$f(x, t) = B(x, t)Q_p(f)(x, t) + \sum_{i=1}^{d} r_i(x)t^{d-i},$$

avec $R_p(f) = (r_1, \ldots, r_d)$, *pour* $k = \left[\frac{p+1}{d}\right] - 1$ *et et* $h = \left[\frac{p-d}{d}\right]$

Pour une fonction f donnée, sans hypothèses supplémentaires, le résultat du théorème 1 *bis* est le meilleur possible, comme on le montre à la fin.

La démonstration du théorème 1 comporte deux étapes (A et B), dont on trouvera ici l'esquisse (1). Pour obtenir le théorème 1 *bis*, il suffit, dans la seconde étape, de substituer à l'emploi des séries de Fourier, nécessaire pour construire un système projectif d'applications R_p et Q_p, la méthode de prolongement de Whitney, à partir de la famille (φ_i) du lemme 3.

Il sera commode de supposer que les fonctions a_i sont bornées sur U ainsi que leurs dérivées premières, cas auquel on peut toujours se ramener par des partitions de l'unité.

(1) Un article sur le même sujet dans « Topology » donne des démonstrations complètes.

Notations :

Pour toute fonction f définie sur un ouvert ω de $\mathbf{R}^n \times \mathbf{C}$ (ou $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}$) et pour tout point $x \in \mathbf{R}^n$, on note f_x la fonction définie sur $pr_2(\omega \cap n(\{x\} \times \mathbf{C}))$ par :

$$f_x(z) = f(x, z).$$

Pour toute fonction $f(x, z)$ définie sur un ouvert de $\mathbf{R}^n \times \mathbf{C}$, pour toute suite $k_1 = \alpha_1, \ldots, \alpha_n$ de n entiers positifs ou nuls, et pour toute suite $k_2 = \beta_1, \beta_2$ de deux entiers positifs ou nuls, on pose :

$$\partial^{k_1, k_2} f = \frac{\partial^{|k_1|+|k_2|} f}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_n^{\alpha_n} \partial z^{\beta_1} \partial \bar{z}^{\beta_2}} \quad |k_1| = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i, \; |k_2| = \beta_1 + \beta_2.$$

Enfin, on définit les fonctions $b_i (1 \leqslant i \leqslant d)$ par l'identité :

$$\frac{\mathrm{B}(x, \zeta) - \mathrm{B}(x, z)}{\zeta - z} = \sum_{i=1}^{d} b_i(x, \zeta) z^{d-i} \quad (x \in \mathrm{U}, \zeta \in \mathbf{C}, z \in \mathbf{C}).$$

2. La démonstration du théorème 1 est celle, convenablement raffinée, du théorème analogue, classique, concernant les fonctions analytiques complexes : pour tout ouvert ω d'un espace numérique complexe, désignons par $\mathrm{H}(\omega)$ l'espace vectoriel des fonctions analytiques complexes sur ω muni de la topologie de la convergence uniforme sur tout compact ; le théorème en question s'énonce :

« Soit U un ouvert de $\mathbf{C}^n$ et soit B un polynôme en Z, à coefficients dans H(U), unitaire de degré d. Toute fonction $f \in \mathrm{H}(\mathrm{U} \times \mathbf{C})$ peut s'écrire de façon unique dans $\mathrm{H}(\mathrm{U} \times \mathbf{C})$:

$$f = \mathrm{B}.\mathrm{Q} + \mathrm{R} \tag{1}$$

où R est un polynôme en Z à coefficients dans H(U) de degré inférieur ou égal à $d - 1$. De plus Q et R dépendent linéairement et continûment de f. »

La démonstration se réduit à constater qu'on peut prendre pour Q et R les fonctions définies par les formules :

$$\mathrm{R}(x, z) = \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{f(x, \xi)}{\mathrm{B}(x, \xi)} \frac{\mathrm{B}(x, \xi) - \mathrm{B}(x, z)}{\xi - z} d\xi,$$

$$\mathrm{Q}(x, z) = \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{f(x, \xi)}{\mathrm{B}(x, \xi)} \frac{d\xi}{\xi - z}$$

où γ désigne le bord orienté de n'importe quel disque du plan complexe contenant dans son intérieur le nombre z et les racines du polynôme $B(x, Z)$.

Dans cet énoncé, on remarque :

a) qu'on peut remplacer l'ouvert U de $\mathbf{C}^n$ par un ouvert U de $\mathbf{R}^n$, et supposer f et B p fois continûment dérivables sur $U \times \mathbf{C}$, f restant séparément analytique complexe en la dernière variable : Q et R sont alors p fois continûment dérivables, et dépendent continûment de f pour la topologie de la convergence uniforme de toutes les dérivées sur tout compact de $U \times \mathbf{C}$;

b) que si les coefficients de B sont bornés sur U, on peut choisir un compact convexe C de $\mathbf{C}$ tel que $U \times C$ contienne X dans son intérieur, et supposer toutes les fonctions définies seulement sur un voisinage Ω donné de $U \times C$;

c) que le polynôme R ne dépend que du germe de f au voisinage de X, car, plus précisément, pour tout $x \in U$, R_x est l'unique polynôme de degré inférieur ou égal à $d - 1$ qui, en chaque racine t de B_x, de multiplicité λ, ait les mêmes dérivées que f_x jusqu'à l'ordre $\lambda - 1$.

Pour obtenir le théorème 1 (resp 1 *bis*), il suffit d'introduire pour chaque entier $p \geqslant d$ un espace vectoriel topologique convenable de fonctions sur Ω tel que :

A) à toute fonction de cet espace soient attachés, de manière linéaire et continue, un reste $R \in \mathscr{E}^k(\Omega)$ et un quotient $Q \in \mathscr{E}^h(\Omega)$ $\left(k = \left[\frac{p+1}{d}\right] - 1, h = \left[\frac{p-d}{d}\right]\right)$ vérifiant l'égalité (1) et la condition *c*) ;

B) à toute fonction de $\mathscr{E}^{p+1}(U \times \mathbf{R})$ (resp $\mathscr{E}^p(U \times \mathbf{R})$) soit attaché, de manière linéaire et continue, un prolongement à Ω appartenant à l'espace en question, de telle sorte que, dans le cas du théorème 1, ces opérateurs de prolongement forment un système projectif lorsque p varie.

La remarque *c*) conduit aux définitions suivantes :

Définition 1. — *Pour tout entier p, on désigne par $\mathscr{P}^p(\Omega)$ le sous-espace vectoriel de $\mathscr{E}^p(\Omega)$ constitué par les fonctions f pour lesquelles il existe un voisinage ouvert $\mathscr{U}$ de*

X *dans* Ω *(dépendant de* f*) tel que, pour tout* $x \in \mathrm{U}$, *la fonction* $z \longmapsto f(x, z)$ *soit analytique complexe sur la projection de* $\mathscr{U} \cap (\{x\} \times \mathbf{C})$ *dans* $\mathbf{C}$; *on munit* $\mathscr{P}^p(\Omega)$ *de la topologie définie par les semi-normes*

$$f \longmapsto \sup_{(x, u) \in \mathrm{K}} (|\partial^{k_1, k_2} f(x, u)|) \quad (f \in \mathscr{P}^p(\Omega))$$

où K *parcourt l'ensemble des compacts de* Ω *et* (k_1, k_2) *l'ensemble des couples vérifiant* $d|k_1| + |k_2| \leqslant p$. *On désigne par* $\mathscr{P}^\infty(\Omega)$ *la limite projective des* $\mathscr{P}^p(\Omega)$.

DÉFINITION 2. — *Pour toute fonction* $f \in \mathscr{P}^0(\Omega)$, *et pour toute fonction* χ *indéfiniment dérivable sur* $\mathrm{U} \times \mathbf{C}$, *valant* 1 *au voisinage de* X, *et telle que, pour tout* $x \in \mathrm{U}$, χ_x *ait un support compact contenu dans l'ensemble des points où* f_x *est analytique, on définit les fonctions* $\mathrm{R}_0(f)$ *et* $\mathrm{Q}_0(f)$ *par les formules :*

$$\mathrm{R}_0(f)(x, z) = \frac{1}{2i\pi} \iint_{\mathbf{C}} \frac{\partial \chi}{\partial \bar{u}}(x, u) \frac{f(x, u)}{\mathrm{B}(x, u)} \frac{\mathrm{B}(x, u) - \mathrm{B}(x, z)}{u - z} du \, d\bar{u}$$

$$\mathrm{Q}_0(f)(x, z) = \frac{1}{2i\pi} \iint_{\mathbf{C}} \frac{\partial \chi}{\partial \bar{u}}(x, u) \frac{f(x,u)}{\mathrm{B}(x,u)} \frac{du \, d\bar{u}}{u - z} \quad \textit{pour} \quad (x, z) \in \widehat{\overset{-1}{\chi}(1)}$$

$$= \frac{f(x, z) - \mathrm{R}_0(f)(x, z)}{\mathrm{B}(x, z)} \quad \textit{ailleurs.}$$

On voit facilement, à l'aide de la formule de Stokes, que $\mathrm{R}_0(f)$ et $\mathrm{Q}_0(f)$ sont indépendantes de la fonction χ, que $\mathrm{R}_0(f)$ est un polynôme en z possédant les propriétés *c*), et qu'on a :

$$f = \mathrm{B} \cdot \mathrm{Q}_0(f) + \mathrm{R}_0(f).$$

Enfin, pour chaque entier p, R_0 et Q_0 induisent sur $\mathscr{P}^p(\Omega)$ deux applications linéaires à valeurs dans $\mathscr{E}^p(\Omega)$.

Les espaces $\mathscr{P}^p(\Omega)$ ne sont pas assez grands pour la démonstration visée.

DÉFINITION 3. — *Pour tout* p $(0 \leqslant p \leqslant \infty)$, *on désigne par* $\overline{\mathscr{P}^p(\Omega)}$ *le sous-espace vectoriel de* $\mathscr{E}^0(\Omega)$ *constitué par les fonctions qui sont limite dans* $\mathscr{E}^0(\Omega)$ *d'une suite de fonctions de* $\mathscr{P}^p(\Omega)$ *qui est une suite de Cauchy dans* $\mathscr{P}^p(\Omega)$; *on* *munit* $\overline{\mathscr{P}^p(\Omega)}$ *de la topologie définie par les semi-normes*

$$f \longmapsto \sup_{(x,u)\in K} (|\partial^{k_1,k_2} f(x,u)|) \quad (f \in \overline{\mathscr{P}^p(\Omega)})$$

où K *parcourt l'ensemble des compacts de* Ω *et* (k_1, k_2) *l'ensemble des couples vérifiant* $d|k_1| + |k_2| \leqslant p$. *(L'existence et la continuité de ces dérivées pour toute* $f \in \overline{\mathscr{P}^p(\Omega)}$ *résultent d'un théorème élémentaire.)*

Il est clair que, pour tout $p(0 \leqslant p \leqslant \infty)$, $\overline{\mathscr{P}^p(\Omega)}$ est isomorphe au complété de $\mathscr{P}^p(\Omega)$. La définition 3 est justifiée par la proposition suivante, qui constitue la première étape de la démonstration :

A. Proposition 1. — *Quel que soit* $p \geqslant d$, *fini ou non.*

1) R_0 *induit sur* $\mathscr{P}^p(\Omega)$ *une application à valeurs dans* $\mathscr{E}^k(\Omega)$ *continue pour la topologie de* $\mathscr{E}^k(\Omega)$, *avec*

$$k = \left[\frac{p+1}{d}\right] - 1.$$

2) Q_0 *induit sur* $\mathscr{P}^p(\Omega)$ *une application à valeurs dans* $\mathscr{E}^h(\Omega)$ *continue pour la topologie de* $\mathscr{E}^h(\Omega)$, *avec* $h = \left[\frac{p-d}{d}\right]$.

En effet, $\mathscr{E}^h(\Omega)$ et $\mathscr{E}^k(\Omega)$ étant complets, il résulte du théorème classique de prolongement d'une application uniformément continue à valeurs dans un espace complet que, pour tout $p \geqslant d$, fini ou non, les restrictions de R_0 et de Q_0 à $\mathscr{P}^p(\Omega)$ admettent chacune un prolongement linéaire continu à $\overline{\mathscr{P}^p(\Omega)}$, induits respectivement par les prolongements de $R_0|\mathscr{P}^d(\Omega)$ et de $Q_0|\mathscr{P}^d(\Omega)$ à $\overline{\mathscr{P}^d(\Omega)}$ (qu'on notera encore R_0 et Q_0).

Démonstration de la proposition 1. — Elle s'appuie sur deux lemmes.

Lemme 1. — *Soit* C *un ensemble convexe compact de* **C**. *Pour tout entier* $p \geqslant 1$, *il existe un nombre* M_p *tel que, pour tout* $t_0 \in C$ *et pour toute fonction* φ p *fois continûment dérivable (au sens réel) au voisinage de* C, *analytique complexe* *au voisinage de* t_0, *on ait:*

$$\sup_{\substack{|k|\leqslant p-1\\ u\in C}} (|\partial^k\psi(u)|) \leqslant M_p.\sup_{\substack{|k|\leqslant p\\ u\in C}} (|\partial^k\varphi(u)|),$$

où ψ *est définie par* $\psi(u) = \dfrac{\varphi(u)-\varphi(t_0)}{u-t_0}$.

(Le lemme 1 est une conséquence facile de la formule de Taylor, qui permet d'écrire ψ sous la forme :

$$\psi(t) = \int_0^1 \frac{\partial\varphi}{\partial u}(t_0+\theta(t-t_0))\,d\theta \\ + \frac{\overline{t-t_0}}{t-t_0}\int_0^1 \frac{\partial\varphi}{\partial \overline{u}}(t_0+\theta(t-t_0))\,d\theta).$$

Lemme 2. — *Soit* C *un ensemble convexe compact de* **C**. *Pour tout entier* $p \geqslant 1$, *il existe un nombre* L_p *tel que, pour toute suite* $t_1, \ldots, t_p$ *de points de* C, *pour toute fonction* φ $p-1$ *fois continûment dérivable (au sens réel) au voisinage de* C, *analytique complexe au voisinage de l'ensemble* $\{t_1, \ldots, t_p\}$, *et pour toute fonction* χ *indéfiniment dérivable sur* **C**, *valant* 1 *au voisinage de* $\{t_1, \ldots, t_p\}$ *et à support compact contenu dans l'ensemble des points où* φ *est analytique, on ait:*

$$\left|\frac{1}{2i\pi}\iint_C \frac{\partial\chi}{\partial\overline{u}}\frac{\varphi}{D}\,du\,d\overline{u}\right| \leqslant L_p \sup_{\substack{|k|\leqslant p-1\\ u\in C}} (|\partial^k\varphi(u)|),$$

où D *est le polynôme défini par* $D(u) = \prod_{i=1}^{i=p}(u-t_i)$.

Démonstration. — L'intégrale du membre de gauche dépend de φ et de la suite $t_1, \ldots, t_p$, mais non de χ; notons-la $A(\varphi; t_1, \ldots, t_p)$. Pour $2 \leqslant p$, on a la relation de récurrence :

$$A(\varphi;\, t_1, \ldots, t_p) = A(\psi;\, t_1, \ldots, t_{p-1}) \left(\psi(u) = \frac{\varphi(u)-\varphi(t_p)}{u-t_p}\right).$$

(En effet, la différence vaut $\varphi(t_p)\left(\dfrac{1}{2i\pi}\displaystyle\iint_C \frac{\partial\chi}{\partial\overline{u}}\frac{1}{D}\,du\,d\overline{u}\right)$, et est nulle d'après le théorème des résidus.)

On en déduit le lemme 1 par récurrence :

$$L_1 = 1,\ L_{p+1} = L_p \times M_p.$$

On obtient alors la continuité du reste en remarquant que le coefficient de z^{d-i} dans $R_0(f)$ est donné par l'intégrale

$$\frac{1}{2i\pi}\iint_C \frac{\partial\chi}{\partial\bar{u}}\frac{fb_i}{B}\,du\,d\bar{u},$$

où χ est une fonction convenable, que chaque dérivée $\partial^a r_i(f)$ est donnée par

$$\frac{1}{2i\pi}\iint_C \frac{\partial\chi}{\partial\bar{u}}\,\partial^{a,0}\left(\frac{fb_i}{B}\right)du\,d\bar{u}$$

et en majorant toutes ces intégrales à l'aide du lemme 2.

La continuité du quotient s'en déduit par applications réitérées du lemme 1.

B. On prend désormais $\Omega = U \times (\mathcal{I} \times i\mathbf{R})$, où $\mathcal{I}$ est un intervalle ouvert et borné de $\mathbf{R}$ tel que $\mathcal{I} \times i\mathbf{R}$ soit un voisinage de C. La proposition suivante constitue la seconde étape de la démonstration du théorème 1.

Proposition 2. — *Il existe une application linéaire continue* ρ *de* $\mathcal{E}^1(U \times \mathbf{R})$ *dans* $\overline{\mathcal{P}^0(\Omega)}$ *telle que:*

1) *Pour tout* p *supérieur ou égal à* 0 *(fini ou non),* ρ *induise sur* $\mathcal{E}^{p+1}(U \times \mathbf{R})$ *une application à valeurs dans* $\overline{\mathcal{P}^p(\Omega)}$, *continue pour la topologie de* $\overline{\mathcal{P}^p(\Omega)}$.

2) *Pour toute* $f \in \mathcal{E}^1(U \times \mathbf{R})$, f *et* $\rho(f)$ *coïncident sur* $U \times \mathcal{I}$.

Le théorème 1 en résulte; il suffit de prendre:

$$R(f) = R_0(\rho(f))|U \times \mathbf{R}, \quad Q(f) = \frac{f - R(f)}{B}.$$

Démonstration de la proposition 2. — Elle utilise une construction inspirée du procédé de prolongement de Whitney. Les espaces numériques qui interviennent sont munis de la distance $d(x, y) = \sup_i (|x_i - y_i|)$.

Lemme 3. — *Il existe une famille* $(\varphi_i)_{i\in I}$ *de fonctions de* $\mathcal{E}^\infty(U \times \mathbf{C})$, *un entier* N, *et deux suites de nombres réels* (A_k) *et* (B_k) $(0 \leqslant k)$ *possédant les propriétés suivantes:*

1) *Pour tout* $y \in U \times \mathbf{C}$, *et pour tout* $i \in I$, *l'inégalité*

$\varphi_i(y) \neq 0$ implique que le diamètre du support de φ_i est inférieur ou égal à $5d(y, \mathbf{R}^n \times \mathbf{R})$.

2) *Tout point de $U \times \mathbf{C} - U \times \mathbf{R}$ possède un voisinage sur lequel toutes les fonctions φ_i sont nulles sauf N au plus.*

3) *Pour tout $i \in I$, φ_i est positive ou nulle; la somme $\sum_{i \in I} \varphi^i$ est inférieure ou égale à 1 et vaut 1 en tout point $y = (x, z)$ de $U \times \mathbf{C} - U \times \mathbf{R}$ vérifiant*

$$d(y, \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}) < \frac{7}{8};\ 35d(y, \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}) < d\left(x, \complement U\right).$$

4) *Pour tout $y \in U \times \mathbf{C}$, pour tout $i \in I$, pour toute suite k_1 de n entiers positifs ou nuls et pour toute suite k_2 de deux entiers positifs ou nuls, on a l'inégalité:*

$$|\partial^{k_1, k_2}\varphi_i(y)| \leqslant A_{|k_1|}B_{|k_2|}\, d(y, \mathbf{R}^n \times \mathbf{R})^{-d|k_1|-|k_2|}.$$

5) *Pour tout $i \in I$, la restriction de φ_i à Ω appartient à $\mathscr{P}^\infty(\Omega)$.*

La proposition 2 découle immédiatement du lemme 3. En effet, soit $[a, b]$ un intervalle fermé de longueur T contenant $\mathscr{I}$ dans son intérieur, soit θ une fonction de $\mathscr{E}^\infty(U \times \mathbf{R})$ valant 1 sur $U \times \mathscr{I}$ et 0 hors de $U \times [a, b]$, et soit, pour tout $m \in \mathbf{Z}$, Φ_m la fonction de $\mathscr{P}^\infty(\Omega)$ définie par:

$$\Phi_m(x, z) = 1 \text{ si } z \text{ est réel},$$
$$\Phi_m(x, z) = \sum_{\operatorname{supp}(\varphi_i) \subset \left\{(x, z) \,|\, |\operatorname{Im}(z)| < \frac{1}{6m}\right\}} \varphi_i.$$

Il est élémentaire de vérifier qu'on peut prendre pour $\rho(f)$ la fonction définie par:

$$\rho(f)(x, z) = \sum_{m \in \mathbf{Z}} c_m((\widetilde{\theta f})_x)e^{im\frac{2\pi}{T}z}\,\Phi_{|m|}(x, z),$$

où $\widetilde{\theta f}$ désigne la fonction de période T sur $U \times \mathbf{R}$ qui coïncide avec θf sur $U \times [a, b]$, et $c_m((\widetilde{\theta f})_x)$ le m-ième coefficient de Fourier de $(\widetilde{\theta f})_x$.

Démonstration du lemme 3. — Indiquons seulement, sans entrer dans les détails, qu'on part, comme dans la démonstration de Whitney, d'un recouvrement de

$\mathbf{R}^n \times \{z | 0 < |\mathrm{I}m(z)| \leqslant 2\}$ par une famille de cubes K_i fermés d'intérieurs disjoints possédant les propriétés suivantes, où e_i désigne le côté de K_i et K'_i l'image de K_i par l'homothétie de rapport $\frac{5}{4}$ ayant pour centre le centre de K_i:

a) $\mathbf{R}^n \times \{z | 1 \leqslant |\mathrm{I}m(z)| \leqslant 2\}$ est la réunion des cubes de côté 1 de la famille.

b) $\frac{1}{2} e_i \leqslant d(K_i, \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}) \leqslant 3e_i$.

c) $y \in K'_i$ implique $\frac{1}{4} e_i \leqslant d(y, \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}) \leqslant \frac{17}{4} e_i$.

d) Tout point de $\mathbf{R}^n \times \mathbf{C} - \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}$ possède un voisinage rencontrant au plus N cubes K'_i.

Chaque fonction φ_i est ensuite construite par convolution d'une fonction de $\mathscr{E}^\infty(\mathbf{R}^n \times \mathbf{R})$ positive d'intégrale 1 à support suffisamment petit et d'une fonction caractéristique d'ensemble χ_i convenable.

Pour tout $y = (x, z) \in X$ et pour tout $r > 0$, soit $Q(z, r)$ le cube de $\mathbf{C}$ de côté r centré en z, et soit

$$C(y, r) = \{x\} \times Q(z, r).$$

Afin de réaliser la condition 5) du lemme 3, on choisit χ_i de telle sorte que cette fonction soit égale à 0 ou à 1 sur tout cube $C(y, 4ae_i)$, où a est un nombre assez petit $\left(a = \frac{1}{192(1+d)} \text{ convient}\right)$

Ainsi la fonction χ_i est indépendante de z au voisinage de X, et il suffit de préserver cette propriété par convolution.

3. Le résultat du théorème 1 *bis* est, pour le reste, le meilleur possible dans le sens suivant : Pour tout entier d et pour tout entier p, il existe un ouvert U d'un espace numérique, un polynôme unitaire B de degré d à coefficients indéfiniment dérivables sur U et une fonction f de classe p sur $U \times \mathbf{R}$, tels que, quelle que soit l'expression de f sous la forme $B.Q + R$ (où R est un polynôme de degré inférieur ou égal à $d - 1$ à coefficients définis sur U), R ne soit pas de classe $\left[\frac{p+1}{d}\right]$ sur $U \times \mathbf{R}$.

En effet, on va voir que pour tout entier d et pour tout entier k, il existe un ouvert U, un polynôme B et une fonction f de classe $dk + d - 2$ sur $U \times \mathbf{R}$, tels que, quelle que soit l'expression de f sous la forme $B.Q + R$, R ne soit pas de classe k sur $U \times \mathbf{R}$. (Ceci suffit, car p étant donné, la fonction f donnée par ce dernier résultat lorsque k est le plus petit entier vérifiant $p \leqslant dk + d - 2$ fournit l'exemple désiré).

Le cas $d = 1$ étant trivial, supposons $2 \leqslant d$.

Prenons pour U un voisinage de l'origine O dans $\mathbf{R}^d$ et pour B le polynôme générique de degré d:

$$B(x, z) = z^d + \sum_{i=1}^{d} x_i z^{d-i}.$$

Soit $V \subset U$ l'ouvert constitué par les points x où les racines $\alpha_1, \ldots, \alpha_d$ de B_x sont toutes réelles et distinctes. Quelle que soit la fonction f, mise sous la forme $B.Q + R$, le polynôme R_x est déterminé en tout point $x \in V$.

On va utiliser des formules donnant explicitement R ainsi que ses dérivées sur $V \times \mathbf{R}$. Ces formules résultent, pour une fonction f analytique, de la forme intégrale du reste indiquée au début du paragraphe 2, et de l'identité:

$$\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{\varphi(u)}{D(u)}\,du = \iint \cdots \iint_{\substack{0\leqslant\lambda_i\\ \Sigma\lambda_i=1}} \frac{d^{r-1}\varphi}{du^{r-1}}\left(\sum_{1}^{r}\lambda_i t_i\right) d\lambda_2 \ldots d\lambda_r$$

dans laquelle $t_1, \ldots, t_r$ est une suite de nombres complexes (distincts ou non), γ un lacet différentiable d'indice 1 par rapport à chaque t_i, φ une fonction analytique complexe au voisinage de l'enveloppe convexe de l'ensemble $\{t_1, \ldots, t_r\}$ et D le polynôme défini par $D(u) = \prod_{i=1}^{r}(u - t_i)$; on passe au cas d'une fonction f différentiable par approximation.

Ainsi, si f est au moins de classe $d - 1$:

$$r_i(x) = \iint \cdots \iint_{\substack{0\leqslant\lambda_i\\ \Sigma\lambda_i=1}} \frac{d^{d-1}}{dt^{d-1}}(fb_i)_x\left(\sum_{i=1}^{d}\lambda_i\alpha_i\right) d\lambda_2 \ldots d\lambda_d$$
$$i = 1, \ldots, d$$

Pour une fonction f de classe $dk + d - 1$ sur $V \times \mathbf{R}$, on a de même :

$$\frac{\partial^k r_1}{\partial x_d^k}(x) = \sum_{i=0}^{k} (-1)^{k-i}\frac{k!}{i!}$$
$$\iint_{\substack{0\leq\lambda_i\\ \Sigma\lambda_i=1}} \cdots \iint \frac{\partial^{i+kd+d-1-id}}{\partial x_d^i\, \partial t^{(k-i+1)d-1}} f\left(\sum_{j=1}^{j=d(k-i+1)} \lambda_j \alpha_{i,j}\right) d\lambda_2 \ldots d\lambda_{d(k-i+1)}$$

où $\alpha_{i,1}, \ldots, \alpha_{i,d(k-i+1)}$ désigne la suite des racines de $(B_x)^{k+1-i}$, chacune figurant un nombre de fois égal à sa multiplicité.

Soit alors f une fonction de classe $dk + d - 2$ sur $U \times \mathbf{R}$, de classe $dk + d - 1$ sur un ouvert $W \times \mathbf{R}$, avec $W \subset V$ et $O \in \overline{W}$, dont les dérivées $\frac{\partial^{i+kd+d-1-id}}{\partial x_d^i\, \partial t^{(k-i+1)d-1}} f$ $(i \neq 0)$ sont continues en $(O, O) \in U \times \mathbf{R}$, tandis que la dérivée $\frac{\partial^{kd+d-1} f}{\partial t^{kd+d-1}}(x, t)$ tend vers l'infini quand (x, t) tend vers (O, O). La formule précédente montre que $\frac{\partial^k r_1}{\partial x_d^k}(x)$ tend vers l'infini quand x tend vers $O (x \in W)$, et R ne peut donc pas être de classe k sur $U \times \mathbf{R}$.

Un exemple d'une telle fonction f est donné par une primitive d'ordre $dk + d - 1$ en t de la fonction :

$$(x_1, \ldots, x_d, t) \longmapsto \frac{1}{x_d^2 + \left(\frac{1}{\log |t|}\right)^2}$$
$$(W = V - \{(x_1, \ldots, x_d, t) | x_d = t = 0\}).$$

On montrerait de la même manière que le théorème 1 *bis* donne le meilleur résultat possible pour le quotient.

BIBLIOGRAPHIE

[1] J. Mather, Stability of C^∞-mappings : I, *Annals of Maths*, 1968.

Guy Lassalle,
28 *bis*, rue d'Estienne-d'Orves,
92-Fontenay-aux-Roses.