Ann. Inst. Fourier, Grenoble
23, 2 (1973), 1-2.

SUR LA MONODROMIE DES SINGULARITÉS ISOLÉES D'HYPERSURFACES COMPLEXES

par Norbert A'CAMPO

Soit $P : \mathbf{C}^{n+1} \to \mathbf{C}$ un polynôme tel que l'hypersurface $H = \{P(z) = 0\} \subset \mathbf{C}^{n+1}$ présente en O une singularité isolée. Pour $\varepsilon > 0$, ε assez petit, la sphère

$$S_\varepsilon = \{z \in \mathbf{C}^{n+1} \| z_0|^2 + \cdots + |z_n|^2 = \varepsilon\}$$

rencontre transversalement la partie régulière de H. Donc $L_\varepsilon = S_\varepsilon \cap H$ est une sous-variété de codimension 2 de $S_\varepsilon \xrightarrow{\sim} S^{2n+1}$. L'application

$$p : z \in S_\varepsilon - L_\varepsilon \to \text{argument}\,(P(z)) \in S^1$$

est la fibration de Milnor associée au point O [2]. La fibre $F_\theta = p^{-1}(\theta)$, $\theta \in S^1$, est une sous-variété de S_ε.

Un homéomorphisme caractéristique

$$f : F_\theta \to F_\theta$$

de la fibration p est appelé la *monodromie géométrique de* H *en* O.

L'automorphisme induit

$$h = f_* : H_n(F_\theta) \to H_n(F_\theta), \text{ coefficient } \mathbf{Z},$$

est appelé la *monodromie de* H *en* O.

Brieskorn demande si la monodromie h est d'ordre fini, donc s'il existe un entier $e > 0$ tel que $h^e = \mathrm{Id}$?

Milnor demande si l'on peut réduire le groupe structural de la fibration p à un groupe compact?

En étudiant le cas des hypersurfaces complexes de $\mathbf{C}^2 (n=1)$, nous avons pu traiter ces questions. Dans ce cas S_ε est la sphère S^3 et L_ε est difféomorphe à une union d'exemplaires de S^1. Le nombre de composantes de L_ε est égal au nombre de facteurs d'une décomposition en facteurs analytiquement irréductibles dans $\mathbf{C}\{X, Y\}$ de $P(X, Y)$, si l'on suppose que les facteurs apparaissent avec la multiplicité 1.

Lorsque L_ε est connexe (donc $L_\varepsilon \subset S_\varepsilon = S^3$ est un nœud), nous donnons une description de la fibration de Milnor. Elle permet de calculer la monodromie des hypersurfaces $H = \{P(X, Y) = 0\} \subset \mathbf{C}^2$ en O lorsque $P(X, Y)$ est analytiquement irréductible et de constater que la monodromie est d'ordre fini dans ce cas.

Ce résultat de finitude a été obtenu auparavant par Lê Dũng Tráng [2]. Cette description permet aussi de démontrer que l'on ne peut pas réduire le groupe structural de la fibration de Milnor à un groupe compact, lorsque le nœud $L_\varepsilon \subset S_\varepsilon$ n'est pas un nœud torique; en effet, soit $(F_{\theta+}, \infty)$ le compactifié d'Alexandrov de F_θ pointé par ∞, et soit $f_+ : F_{\theta+} \to F_{\theta+}$ le prolongement continu de la monodromie géométrique f, alors l'automorphisme induit

$$(f_+)_\natural : \pi_1(F_{\theta+}, \infty) \to \pi_1(F_{\theta+}, \infty)$$

n'est pas d'ordre fini, lorsque le nœud $L_\varepsilon \subset S_\varepsilon$ n'est pas un nœud torique.

Nous étudions le polynôme non irréductible

$$P(x, y) = (x^3 + y^2)(x^2 + y^3).$$

L'hypersurface $H = \{P(x, y) = 0\} \subset \mathbf{C}^2$ présente en O une singularité isolée. Nous donnons une description de la fibration de Milnor de H en O. Elle permet de calculer la monodromie. Nous constatons que la monodromie n'est pas d'ordre fini.

Les détails apparaîtront aux Inventiones Mathematicae.

BIBLIOGRAPHIE

[1] Lê Dũng Tráng, Thèse, Paris, 1971.

[2] J. Milnor, Singular points of Complex Hypersurfaces. *Ann. of Math. St.*, Princeton 1968.

Norbert A' Campo,
Université de Paris-Sud,
Centre d'Orsay,
91405-Orsay.