Annales de l'institut Fourier

André Unterberger

Ouverts stablement convexes par rapport à un opérateur différentiel

Annales de l'institut Fourier, tome 22, nº 3 (1972), p. 269-290

<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1972__22_3_269_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
22,3 (1972) 269-290

OUVERTS STABLEMENT CONVEXES PAR RAPPORT A UN OPÉRATEUR DIFFÉRENTIEL

par André UNTERBERGER

Introduction.

Soit P(D) un opérateur différentiel à coefficients constants sur $\mathbf{R}^n$. Rappelons qu'un ouvert Ω de $\mathbf{R}^n$ est dit P(– D)-convexe si pour tout compact K de Ω, il existe un compact L de Ω tel que pour toute fonction $u \in \mathcal{D}(\Omega)$, l'inclusion $\mathrm{supp}(\mathrm{P(D)}u) \subset \mathrm{K}$ implique l'inclusion $\mathrm{supp}(u) \subset \mathrm{L}$. Disons de même que Ω est P(– D)-singulier-convexe si pour tout compact K de Ω il existe un compact L de Ω tel que l'inclusion $\mathrm{supp.sing}(\mathrm{P(D)}u) \subset \mathrm{K}$ implique l'inclusion supp. $\mathrm{sing}(u) \subset \mathrm{L}$ pour toute distribution $u \in \mathcal{E}'(\Omega)$. On sait qu'aucune des deux propriétés précitées n'implique l'autre, et lorsqu'elles sont toutes deux vérifiées on dit que Ω est P(– D)-fortement convexe.

Notre propos est de caractériser, en termes de propriétés de convexité, les ouverts Ω de $\mathbf{R}^n$ pour lesquels il existe "suffisamment", en un sens qui sera précisé, de couples de fonctions ρ et σ pour lesquels l'inégalité

$$\int e^{2\tau\rho(x)} |u(x)|^2 dx \leqslant \mathrm{C} \int e^{2\tau\sigma(x)} |\mathrm{P(D)}u(x)|^2 dx + \mathrm{C}\|u\|_{\mathrm{N}}^2 \qquad (1)$$

est valable pour N assez grand.

On sait que ces inégalités jouent un rôle fondamental dans la théorie des équations aux dérivées partielles, où, entre multiples autres usages, elles peuvent servir d'instrument à l'étude de la propagation du support, i.e. aux problèmes de P(– D)-convexité (cf. Trèves, (2)).

Dans (3), nous avons montré comment l'on pouvait déduire d'inégalités du type (1) des théorèmes du genre suivant :

$$\text{si} \quad u \in \mathcal{E}'(\Omega) \quad \text{et si} \quad P(D)u \in H^{\sigma} , \tag{2}$$

alors $u \in H^{\rho}$.

La méthode reposait sur une certaine estimation de la norme dans les espaces H^{ρ}, que nous avons généralisée dans (4) : nous reproduisons ici cette généralisation, qui n'est pas parue dans une publication régulière auparavant. Un des traits caractéristiques de cette méthode est qu'elle est stable par addition de coordonnées, ce qui signifie que si l'on suppose (1), (2) restera valable si l'on prend $u \in \mathcal{E}'(\Omega \times \mathbf{R}^k)$.

On est ainsi conduit à la notion d'ouverts stablement P(– D)-convexes : ce sont ceux qui restent singulier-convexes après multiplication par $\mathbf{R}^k$, et ceci quel que soit l'entier positif k.

Nous donnons ici une formule qui permet le passage d'hypothèses du genre (2) à des inégalités du type (1) : mais précisément il est indispensable pour faire ce passage de supposer (2) valable après addition d'au moins une coordonnée.

La conclusion de ce travail est que l'existence de suffisamment d'inégalités (1) est équivalente au fait pour Ω d'être stablement P(– D)-convexe.

1. Une formule permettant le passage des inégalités L^2 avec poids aux inégalités dans les espaces H^{ρ}.

Nous renvoyons à (3) pour la définition et les propriétés générales des espaces de Sobolev d'ordre variable $H^{\rho,s}$. La formule pour l'évaluation de la norme dans les espaces $H^{\rho,s}$ que nous allons donner ici est une nouvelle version, d'usage plus souple dans les applications, d'une formule que nous avions donnée dans (3). Dans le cas particulier où ρ est une constante et où $s = 0$, elle avait précédemment été obtenue par M. Hörmander (2).

Dans tout ce travail, ρ appartient à l'espace $S^\infty(\mathbf{R}^n, \mathbf{R})$ des fonctions à valeurs réelles sur $\mathbf{R}^n$ qui sont sommes d'une fonction de $S(\mathbf{R}^n)$ et d'une constante ; s est un nombre réel.

Il est commode, pour les démonstrations qui suivent, d'introduire la classe de symboles suivante :

DÉFINITION 1.1. – *On désigne par* $S^{\rho,s}$ *l'espace des fonctions* f *de classe* C^∞ *sur* $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n$, *satisfaisant les propriétés suivantes :*

a) *quels que soient les multi-indices* α *et* β, *et quel que soit l'entier positif* M, *il existe* $C > 0$ *telle que*

$$(1 + |x|^2)^{M|\alpha|} |D_x^\alpha \partial_\xi^\beta f(x, \xi)| \leqslant C(1 + |\xi|^2)^{1/2(\rho(x) - |\beta|)} [1 + \operatorname{Log}(1 + |\xi|^2)]^{s + |\alpha|}.$$

b) *il existe une fonction de classe* C^∞ *sur* $\mathbf{R}^n$, *notée* $f(\infty, \xi)$, *telle que, pour tout multi-indice* β, $\partial^\beta f(x, \xi)$ *tende vers* $\partial^\beta f(\infty, \xi)$ *lorsque* $|x| \to \infty$, *et pour tout* β *il existe* $C > 0$ *telle que*

$$|\partial^\beta f(\infty, \xi)| \leqslant C(1 + |\xi|^2)^{1/2(\rho(\infty) - |\beta|)} [1 + \operatorname{Log}(1 + |\xi|^2)]^s.$$

Remarques. – $\rho(\infty)$ désigne la limite de $\rho(x)$ quand $|x| \to \infty$. Il est facile de voir que si $m > \sup \rho$, et si $f \in S^{\rho,s}$, alors l'opérateur $\Theta[f]$ de symbole f opère de $H^k(\mathbf{R}^n)$ dans $H^{k-m}(\mathbf{R}^n)$ pour tout k. On voit aussi que si $f \in S^{\rho,s}$ et $g \in S^{\sigma,t}$, et si # désigne la composition des symboles correspondant à la composition des opérateurs associés

$$(\text{i.e.} \quad (f \# g)(x, \xi) = \int e^{2i\pi \langle x, \eta \rangle} f(x, \xi + \eta) \hat{g}^1(\eta, \xi) \, d\eta),$$

alors pour tout $k \geqslant 0$,

$$f \# g - \sum_{|r| \leqslant k-1} \frac{1}{r!} \partial_\xi^r f \, D_x^r g \in S^{\rho+\sigma-k, s+t+k}.$$

De même, le reste à l'ordre k de la série usuelle qui donne le développement du symbole de l'adjoint de $\Theta[f]$ appartient à $S^{\rho-k,s+k}$: une conséquence de ce fait, dont on se sert dans le lemme qui suit, est que si $\Theta[f]$ est autoadjoint, alors $\operatorname{Im} f \in S^{\rho-1,s+1}$.

LEMME 1.1. – *Soit* $f \in S^{2\rho,2s}$ *et supposons que l'opérateur* $A = \Theta[f]$ *soit autoadjoint ; supposons de plus qu'il existe* $C > 0$

et $R > 0$ *tels que* $\operatorname{Re} f(x, \xi) \geqslant C(1 + |\xi|^2)^{\rho(x)} [1 + \operatorname{Log}(1 + |\xi|^2)]^{2s}$ *pour* $|\xi| \geqslant R$. *Il existe alors une suite* $(b_j)_{j \geqslant 0}$, $b_j \in S^{\rho - j, s+j}$, *telle que, si l'on pose* $B_j = \Theta[b_j]$, *et si l'on appelle* B_j^* *l'adjoint de* B_j, *le symbole de l'opérateur* $A - (B_0^* + \cdots + B_{j-1}^*)(B_0 + \cdots + B_{j-1})$ *appartienne à* $S^{2\rho - j, 2s+j}$ *pour tout* $j \geqslant 1$. *En particulier, quel que soit l'entier* N, *il existe* $C_1 > 0$ *telle que l'on ait, quelle que soit* $u \in S(R^n)$: $(Au, u) \geqslant -C_1 \|u\|^2_{-N}$.

La deuxième partie (la seule qui nous intéresse) du lemme est une conséquence immédiate de la première. Celle-ci se prouve par récurrence. On choisit $b_0(x, \xi) = [\operatorname{Re} f(x, \xi)]^{1/2}$ en dehors d'un certain voisinage de $\xi = 0$, avec un prolongement C^∞ dans ce voisinage. Puis, si c_j est le symbole de

$$A - (B_0^* + \cdots + B_{j-1}^*)(B_0 + \cdots + B_{j-1}),$$

on pose $b_j = \dfrac{c_j}{2b_0}$ en dehors d'un voisinage de $\xi = 0$; on se sert pour conclure de la remarque qui précède immédiatement l'énoncé du lemme.

THEOREME 1.1. – *Soient* $\rho \in S^\infty(R^n, R)$ *et* $s \in R$. *Soit* $\varphi \in \mathcal{D}(R^n)$, *à valeurs réelles, vérifiant les propriétés suivantes :*

a) *il existe* $M > 0$, $M > \sup \rho$, $M > 2 \sup \rho - 1$, *tel que*

$$\hat{\varphi}(\xi) = 0(|\xi|^M) \quad \textit{quand} \quad |\xi| \to 0.$$

b) $\hat{\varphi}$ *ne s'annule identiquement sur aucune demi-droite issue de l'origine.*

Pour tout t *réel positif, on pose* $\varphi_t(x) = t^{-n}\varphi(x/t)$. *Soit enfin* $a < 1/2$. *Il existe alors trois constantes positives* C_1, C_2, C *telles que, pour toute fonction* $u \in \mathcal{D}(R^n)$, *on ait*

$$C_1 \int_0^{1/2} \left(\operatorname{Log} \frac{1}{t}\right)^{2s} \frac{dt}{t} \int t^{-2\rho(x)} |(\varphi_t * u)(x)|^2 dx \leqslant \|u\|^2_{\rho,s}$$

$$\leqslant C_2 \int_0^{1/2} \left(\operatorname{Log} \frac{1}{t}\right)^{2s} \frac{dt}{t} \int t^{-2\rho(x)} |(\varphi_t * u)(x)|^2 dx + C \|u\|^2_{\rho - a}.$$

La preuve de ce théorème nécessite plusieurs lemmes. La condition $M > 2 \sup \rho - 1$ peut certainement être améliorée sinon supprimée complètement : nous n'avons pas cherché à préciser ce point ; bien entendu, l'hypothèse $a < 1/2$ peut être supprimée en fin de compte.

LEMME 1.2. — *Supposons les hypothèses du théorème* 1.1 *vérifiées. Posons* $\psi = \varphi * \check{\varphi}$, d'où $\hat{\psi} = |\hat{\varphi}|^2$ (*conformément à la notation usuelle,* $\check{\varphi}(x) = \varphi(-x)$), *et*

$$f(x, \xi) = \int_0^{1/2} \left(\operatorname{Log} \frac{1}{t}\right)^{2s} t^{-2\rho(x)} \hat{\psi}(t\xi) \frac{dt}{t}.$$

Il existe deux constantes $C > 0$ *et* $R > 0$ *telles que l'on ait*

$$\frac{1}{C} f(x, \xi) \leqslant (1 + |\xi|^2)^{\rho(x)} [1 + \operatorname{Log}(1 + |\xi|^2)]^{2s} \leqslant C f(x, \xi)$$

pour $|\xi| \geqslant R$. *De plus, l'opérateur* $S_{\rho,s}$ *défini par*

$$S_{\rho,s} u(x) = \int f(x, \xi) e^{2i\pi\langle x, \xi\rangle} \hat{u}(\xi) d\xi$$
$$= \int_0^{1/2} \left(\operatorname{Log} \frac{1}{t}\right)^{2s} t^{-2\rho(x)} (\psi_t * u)(x) \frac{dt}{t}$$

opère continûment de $H^{2M+k}(\mathbf{R}^n)$ *dans* $H^k(\mathbf{R}^n)$, *ceci pour tout entier* $k \geqslant 0$.

Remarquons d'abord que l'intégrale qui définit $f(x, \xi)$ est convergente pour $\xi \neq 0$, en vertu de l'inégalité $\hat{\psi}(t\xi) \leqslant C t^{2M} |\xi|^{2M}$. Après le changement de variable défini par $t|\xi| = \theta$, et en posant $\eta = \xi / |\xi|$, on obtient, pour $|\xi| > 1$,

$$f(x, \xi) = |\xi|^{2\rho(x)} (\operatorname{Log} |\xi|)^{2s} g(x, \xi),$$

avec

$$g(x, \xi) = \int_0^{|\xi|/2} \left[1 + \frac{\operatorname{Log} \frac{1}{\theta}}{\operatorname{Log} |\xi|}\right]^{2s} \theta^{-2\rho(x)} \hat{\psi}(\theta\eta) \frac{d\theta}{\theta}.$$

Dans l'intervalle d'intégration, on a toujours $1 + \dfrac{\operatorname{Log}\dfrac{1}{\theta}}{\operatorname{Log}|\xi|} > 0$.

Par ailleurs, si $s \geqslant 0$, on écrira, pour $|\xi| \geqslant 2$,

$$1 + \frac{\operatorname{Log}\dfrac{1}{\theta}}{\operatorname{Log}|\xi|} \leqslant 1 + \frac{\operatorname{Log}\dfrac{1}{\theta}}{\operatorname{Log} 2} \quad \text{pour} \quad \theta \leqslant 1 \quad , \quad \text{et} \quad \leqslant 1 \quad \text{pour} \quad \theta \geqslant 1 \ ,$$

et si $s < 0$, on écrira

$$1 + \frac{\operatorname{Log}\dfrac{1}{\theta}}{\operatorname{Log}|\xi|} \geqslant 1 \quad \text{pour} \quad \theta \leqslant 1 \quad , \quad \text{et} \quad \geqslant \frac{\operatorname{Log} 2}{\operatorname{Log}(2\,\theta)} \quad \text{pour} \quad \theta \geqslant 1$$

Dans les deux cas, on conclut par le théorème de convergence dominée que la fonction $g(x\ ,\ \xi)$ tend, lorsque $|\xi| \to \infty$ et que η a une limite ainsi que $\rho(x)$, vers l'intégrale $\int_0^\infty \theta^{-2\rho(x)} \ \hat{\psi}(\theta\eta) \dfrac{d\theta}{\theta}$, laquelle est une fonction continue et strictement positive de $\rho(x)$ et de η ; la double inégalité annoncée en résulte.

Pour estimer $\|S_{\rho,s} u\|_0$, choisissons M' tel que $\sup \rho < M' < M$, et écrivons

$$(S_{\rho,s} u\ ,\ v) = \int_0^{1/2} \left(\operatorname{Log}\frac{1}{t}\right)^{2s} \ t^{2M-2M'} (t^{-2M} (\psi_t * u) \ , \ t^{2M'-2\rho(x)} v) \frac{dt}{t} \ .$$

On a
$$\|t^{-2M} (\psi_t * u)\|_0^2 = t^{-4M} \int (\hat{\psi}(t\xi))^2 \ |\hat{u}(\xi)|^2 d\xi$$
$$\leqslant C \int |\xi|^{4M} \ |\hat{u}(\xi)|^2 \ d\xi \leqslant C \, \|u\|_{2M}^2 \, .$$

D'où $\quad |(S_{\rho,s}\, u\ ,\ v)| \leqslant C\, \|u\|_{2M} \|v\|_0 \quad$ et $\quad \|S_{\rho,s}\, u\|_0 \leqslant C\, \|u\|_{2M}$.

En itérant la formule

$$\frac{\partial}{\partial x_j} S_{\rho,s} = S_{\rho,s} \frac{\partial}{\partial x_j} + 2 \frac{\partial \rho}{\partial x_j} \ S_{\rho,s+1/2} \ ,$$

on tire de là l'inégalité $\|S_{\rho,s}\, u\|_k \leqslant C\, \|u\|_{2M+k}$ annoncée dans le lemme.

LEMME 1.3. – *Avec les hypothèses du théorème* 1.1, *il existe deux constantes* $C_1 > 0$ *et* $C_2 > 0$ *telles que l'on ait, pour toute fonction* $u \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^n)$:

$$\frac{1}{C_1} \operatorname{Re} \int_0^{1/2} \left(\operatorname{Log} \frac{1}{t}\right)^{2s} \frac{dt}{t} \int t^{-2\rho(x)} (\psi_t * u)(x)\, \overline{u}(x)\, dx \leqslant \|u\|^2_{\rho,s}$$

$$\leqslant C_1 \operatorname{Re} \int_0^{1/2} \left(\operatorname{Log} \frac{1}{t}\right)^{2s} \frac{dt}{t} \int t^{-2\rho(x)} (\psi_t * u)(x)\, \overline{u}(x)\, dx + C_2 \|u\|^2_{\rho-a}$$

Soit en effet α une fonction de classe C^∞ sur $\mathbf{R}^n$, égale à 0 pour $|\xi| \leqslant 1/2$ et à 1 pour $|\xi| \geqslant 1$: la fonction $h(x, \xi) = \alpha(\xi) f(x, \xi)$ (cf. lemme 1.2) appartient à l'espace $S^{2\rho, 2s}$ comme il résulte facilement du lemme 1.2 et l'inégalité

$$\frac{1}{C} h(x, \xi) \leqslant (1 + |\xi|^2)^{\rho(x)} [1 + \operatorname{Log}(1 + |\xi|^2)]^{2s} \leqslant C\, h(x, \xi)$$

reste valable pour $|\xi|$ assez grand.

Soit H l'opérateur autoadjoint $\frac{1}{2} [\Theta[h] + \Theta[h]^*]$: son symbole diffère de $h(x, \xi)$ par un élément de $S^{2\rho-1, 2s+1}$; par ailleurs, le symbole de l'opérateur $(A^{\rho,s})^* A^{\rho,s}$ appartient à $S^{2\rho,2s}$ et diffère de $(1 + |\xi|^2)^{\rho(x)} [1 + \operatorname{Log}(1 + |\xi|^2)]^{2s}$ par un élément de $S^{2\rho-1, 2s+1}$. Si $C_1 > C$, et si K est l'un des deux opérateurs $C_1 H - (A^{\rho,s})^* A^{\rho,s}$ et $(A^{\rho,s})^* A^{\rho,s} - \frac{1}{C_1} H$, il résulte alors du lemme 1.1 que l'on a $(Ku, u) \geqslant - C_3 \|u\|^2_{\rho-a}$.

Enfin, si $b(x, \xi) \in S^{2\rho-1, 2s+1}$, on a

$$|(\Theta[b] u, u)| \leqslant C_4 \|u\|^2_{\rho-\frac{1}{2}, s+\frac{1}{2}} \leqslant C_4 \|u\|^2_{\rho-a}.$$

Il résulte de tout cela que l'on a

$$\frac{1}{C_1} \operatorname{Re}(\Theta[h] u, u) - C_5 \|u\|^2_{\rho-a} \leqslant \|u\|^2_{\rho,s}$$

$$\leqslant C_1 \operatorname{Re}(\Theta[h] u, u) + C_5 \|u\|^2_{\rho-a}.$$

Comme $\Theta[h] = S_{\rho,s}\ \Theta[\alpha]$, où $S_{\rho,s}$ est défini dans le lemme 1.2, et comme $\Theta[\alpha - 1]$ opère continûment de $H^{-\infty}(\mathbf{R}^n)$ dans $H^{\infty}(\mathbf{R}^n)$ et $S_{\rho,s}$ de $H^{\infty}(\mathbf{R}^n)$ dans $H^{\infty}(\mathbf{R}^n)$ (d'après le lemme 1.2), le lemme 1.3 est prouvé

En partant du lemme 1.3, en écrivant

$$t^{-2\rho(x)}\ \psi_t * u = \check{\varphi}_t * (t^{-2\rho(x)}\ (\varphi_t * u)) + L_t(t^{-2\rho(x)}\ \varphi_t * u),$$

avec

$$L_t v = t^{-2\rho(x)}\check{\varphi}_t * (t^{2\rho(x)}\ v) - \check{\varphi}_t * v\ ,$$

et en notant que l'adjoint de $\check{\varphi}_t *$ est $\varphi_t *$, on voit que pour terminer la preuve du théorème 1.1 il suffit d'établir le lemme suivant :

LEMME 1.4. – *Avec les hypothèses du théorème* 1.1, *posons*

$$L_t = t^{-2\rho(x)}\check{\varphi}_t * (t^{2\rho(x)}\ .\ ) - \check{\varphi}_t *$$

Il existe $\varepsilon > 0$ *et* $C > 0$ *tels que l'on ait, pour tout* $t > 0$ *assez petit et toute fonction* $u \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^n)$, *l'inégalité*

$$\| L_t(t^{-2\rho(x)}\ \varphi_t * u)\|_{-\rho+a} \leqslant Ct^{\epsilon}\ \|u\|_{\rho-a}.$$

Toutes les constantes qui figurent dans la démonstration de ce lemme seront indépendantes de t (t assez petit).

Choisissons $\varepsilon = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{2} - a\right)$. On peut, par une partition finie de l'unité (ρ tend vers une constante à l'infini), se ramener au cas où l'oscillation de ρ est strictement inférieure à ε ; on pose alors $\rho(x) = \rho_0 + \sigma(x)$, avec $\sigma(x) \geqslant 0$ pour tout $x \in \mathbf{R}^n$ et $\sup \sigma(x) < \varepsilon$.

En écrivant, comme dans (3),

$$(L_t v)\ (x) = \int \varphi(z)\ [t^{2\rho(x+tz)-2\rho(x)} - 1]\ v(x+tz)\ dz$$

et $\quad |t^{2\rho(x+tz)-2\rho(x)} - 1| \leqslant t\ \mathrm{Log}\ \dfrac{1}{t}\ \exp\left|\dfrac{2}{t}\ (\rho(x+tz) - \rho(x))\right|,$

on obtient

$$|(L_t v)\ (x)| \leqslant Ct\ \mathrm{Log}\ \frac{1}{t}\ (\check{\varphi} * |v|)\ (x) \quad \text{d'où} \quad \|L_t v\|_0 \leqslant Ct\ \mathrm{Log}\ \frac{1}{t}\ \|v\|_0\ .$$

En itérant la formule

$$\frac{\partial}{\partial x_j} L_t = L_t \frac{\partial}{\partial x_j} + 2\frac{\partial \rho}{\partial x_j} \operatorname{Log}\frac{1}{t}\,[L_t + \check{\varphi}_t *]$$

$$- 2 \operatorname{Log}\frac{1}{t}\,[L_t + \check{\varphi}_t *]\left(\frac{\partial \rho}{\partial x_j}\right)$$

$$= L_t \frac{\partial}{\partial x_j} + 2 \operatorname{Log}\frac{1}{t}\frac{\partial \rho}{\partial x_j} L_t - 2 \operatorname{Log}\frac{1}{t} L_t\left(\frac{\partial \rho}{\partial x_j}\cdot\right) + 2 \operatorname{Log}\frac{1}{t} M_t \quad ,$$

avec

$$M_t = \frac{\partial \rho}{\partial x_j}\,\check{\varphi}_t * - \check{\varphi}_t * \left(\frac{\partial \rho}{\partial x_j}\cdot\right),$$

et en tenant compte des inégalités faciles $\|M_t v\|_k \leqslant Ct\|v\|_k$, on obtient pour k entier positif l'inégalité $\|L_t v\|_k \leqslant Ct\left(\operatorname{Log}\frac{1}{t}\right)^{|k|+1} \|v\|_k$. Cette inégalité reste valable pour k entier négatif étant donné que le transposé de L_t est $-[t^{2\rho(x)}\,\varphi_t * (t^{-2\rho(x)}\ .\ ) - \varphi_t *]$, donc pour tout k réel par interpolation.

Ceci permet d'écrire

$$\|L_t v\|_{-\rho+a} \leqslant \|L_t v\|_{-\rho_0+a} \leqslant C\,t^{1-\epsilon}\,\|v\|_{-\rho_0+a} \quad ,$$

et il suffit pour terminer d'établir l'inégalité

$$t^{1-\epsilon}\,\|t^{-2\rho(x)}\,(\varphi_t * u)\|_{-\rho_0+a} \leqslant C\,t^{\epsilon}\,\|u\|_{\rho_0-a}\,,$$

ou encore

$$\|t^{-2\sigma(x)+2\epsilon}\,t^{-2\rho_0+1-4\epsilon}\,\varphi_t * u\|_{-\rho_0+a} \leqslant C\,\|u\|_{\rho_0-a}\,.$$

Comme $\inf(-2\sigma(x) + 2\varepsilon) > 0$, l'opérateur de multiplication par $t^{-2\sigma(x)+2\epsilon}$ a une norme, en tant qu'opérateur de $H^k(R^n)$ dans $H^k(R^n)$ ($k \in R$) bornée indépendamment de t : cela est évident pour $k = 0$, puis pour k entier positif, puis pour k arbitraire par interpolation et dualité. Pour finir, on écrit

$$\|t^{-2\rho_0+1-4\epsilon}\,\varphi_t * u\|^2_{-\rho_0+a} = \int (1 + |\xi|^2)^{\rho_0-a}\,|\hat{u}(\xi)|^2\,\beta(t\,,\xi)\,d\xi \quad ,$$

avec

$$\beta(t\,,\xi) = (1 + |\xi|^2)^{-2\rho_0+2a}\ t^{-4\rho_0+2-8\epsilon}|\hat{\varphi}(t\xi)|^2$$

$$= (1 + |\xi|^2)^{-2\rho_0+2a}\ t^{-4\rho_0+4a}\,|\hat{\varphi}(t\xi)|^2 \quad ,$$

et on utilise l'inégalité $|\hat{\varphi}(t\xi)| \leqslant C\,t^M\,|\xi|^M$, avec $M > 2\rho_0 - 1$, soit $M > 2\rho_0 - 2a$ si a est choisi suffisamment proche de 1/2.

Ceci termine la preuve du lemme 1.4, ainsi que du théorème 1.1.

2. Une formule pour passer des inégalités dans les espaces H^ρ aux inégalités L^2 avec poids.

Dans ce paragraphe, nous allons considérer une fonction $\rho \in S^\infty(\mathbf{R}^n\,,\mathbf{R})$ et évaluer la norme H^ρ de fonctions $v \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^k)$, k étant un entier $\geqslant 1$. Tant que nous nous limitons aux fonctions dont la projection du support sur $\mathbf{R}^k$ reste dans un compact fixe, il n'y a pas d'ambiguité possible sur le sens de cette norme : il n'en serait pas de même globalement, car ρ n'appartient pas à $S^\infty(\mathbf{R}^{n+k}\,,\mathbf{R})$; quand nous emploierons la notation $S^{\rho,s}$ (cf. § 1) pour désigner des classes de symboles sur $\mathbf{R}^{n+k}$, il sera entendu que nous nous limitons à ceux dont la projection du support sur le deuxième facteur de $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^k \times \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^k$ reste dans un compact fixe : ils constituent une classe stable pour les opérations usuelles sur les symboles.

LEMME 2.1. – *Soit* $N \in \mathbf{R}$ *tel que* $-N < \inf \rho$, *et soit* Ω *un ouvert relativement compact de* $\mathbf{R}^k$. *Soit* α *une fonction* $\in \mathcal{D}(\mathbf{R}^k)$, *égale à* 1 *dans un voisinage de* $\overline{\Omega}$. *Soit* $\beta(\xi\,,\eta)$ *une fonction* C^∞ *sur* $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^k$, *à valeurs dans* $[0\,,1]$, *homogène de degré* 0 *pour* $|\xi|^2 + |\eta|^2 \geqslant 1$, *telle que* $\beta(\xi\,,\eta) = 0$ *pour* $|\xi| \leqslant |\eta|$ *et* $\beta(\xi\,,\eta) = 1$ *pour* $|\xi| \geqslant 2\,|\eta|$. *Soit* B *l'opérateur pseudo-différentiel* (sur $\mathbf{R}^{n+k}$) *défini par*

$$B = B_1 + B_2 = \Theta[b_1] + \Theta[b_2]\ ,$$

avec

$$b_1(x\,,y\,,\xi\,,\eta) = \alpha(y)\,\beta(\xi\,,\eta)\,(1 + |\xi|^2)^{\rho(x)}[1 + \mathrm{Log}\,(1 + |\xi|^2)]^{2s}$$

et

$$b_2(x\,,y\,,\xi\,,\eta) = \alpha(y)\,[1-\beta(\xi\,,\eta)]\,(1+|\eta|^2)^{\rho(x)}\,[1+\mathrm{Log}(1+|\eta|^2)]^{2s}.$$

Il existe deux constantes strictement positives C_1 *et* C_2 *telles que, pour toute fonction* $v \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^n \times \Omega)$, *on ait*

$$C_1\,\mathrm{Re}(Bv\,,v) \leqslant \|v\|^2_{\rho,s} \leqslant C_2\,[\mathrm{Re}(Bv\,,v) + \|v\|^2_{-N}].$$

Preuve. – Remarquons d'abord que b_1 et b_2 sont des symboles appartenant à $S^{2\rho,2s}$ puisque sur le support de β on a

$$1+|\xi|^2 \geqslant 1+\frac{|\xi|^2}{2}+\frac{|\eta|^2}{2}$$

et que sur le support de $1-\beta$ on a

$$1+|\eta|^2 \geqslant 1+\frac{|\eta|^2}{2}+\frac{|\xi|^2}{8}.$$

Sur $\mathcal{D}(\mathbf{R}^n \times \Omega)$, le carré de la norme $\|v\|_{\rho,s}$ est équivalent à

$\mathrm{Re}(Av\,,v) + \|v\|^2_{-N}$, avec $A = A_1 + A_2 = \Theta[a_1] + \Theta[a_2]$, où

$a_1(x\,,y\,,\xi\,,\eta) =$

$$\alpha(y)\,\beta(\xi\,,\eta)\,(1+|\xi|^2+|\eta|^2)^{\rho(x)}\,[1+\mathrm{Log}(1+|\xi|^2+|\eta|^2)]^{2s}$$

et

$a_2(x\,,y\,,\xi\,,\eta) =$

$$\alpha(y)\,(1-\beta(\xi\,,\eta))\,(1+|\xi|^2+|\eta|^2)^{\rho(x)}\,[1+\mathrm{Log}(1+|\xi|^2+|\eta|^2)]^{2s}.$$

Posons aussi $a = a_1 + a_2$.

Il existe des constantes C'_1 et C'_2 strictement positives telles que

$$C'_1 b_1 \leqslant a_1 \leqslant C'_2 b_1 \qquad \text{et} \qquad C'_1 b_2 \leqslant a_2 \leqslant C'_2 b_2.$$

Les symboles $C'_2 b_1 + \varepsilon a - a_1$, $a_1 + \varepsilon a - C'_1 b_1$, $C'_2 b_2 + \varepsilon a - a_2$ et $a_2 + \varepsilon a - C'_1 b_2$ remplissent alors les conditions du lemme 1.1, ce qui permet d'écrire

$$C'_2\,\mathrm{Re}(B_1 v\,,v) + \varepsilon\,\mathrm{Re}(Av\,,v) - \mathrm{Re}(A_1 v\,,v) \geqslant -C\,\|v\|^2_{-N}$$

$$C'_2\,\mathrm{Re}(B_2 v\,,v) + \varepsilon\,\mathrm{Re}(Av\,,v) - \mathrm{Re}(A_2 v\,,v) \geqslant -C\,\|v\|^2_{-N}$$

$$Re(A_1 v , v) + \varepsilon \, Re(Av , v) - C_1' \; Re(B_1 v , v) \geqslant - C \, \|v\|^2_{-N}$$

et $\quad Re(A_2 v , v) + \varepsilon \, Re(Av , v) - C_1' \; Re(B_2 v , v) \geqslant - C \, \|v\|^2_{-N}$

(notons que pour obtenir, grâce au lemme 1.1, la conclusion $Re(Av , v) \geqslant - C \|v\|^2_{-N}$, il n'est pas nécessaire de supposer A auto-adjoint, puisqu'on peut de toute manière appliquer le lemme à l'opérateur $\frac{1}{2}(A + A^*)$).

En additionnant ces inégalités, on obtient d'une part

$$(1 - 2\varepsilon) \; Re(Av , v) \leqslant C_2' \; Re(Bv , v) + 2C\|v\|^2_{-N} ,$$

et de l'autre

$$(1 + 2\varepsilon) \; Re(Av , v) \geqslant C_1' \; Re(Bv , v) - 2C\|v\|^2_{-N} .$$

Comme $\|v\|^2_{\rho,s}$ équivaut à $Re(Av , v) + \|v\|^2_{-N}$, le lemme 2.1 en résulte.

THEOREME 2.1. — *Soit ρ une fonction C^∞ sur $\mathbf{R}^n$, partout > 0. Soit k un entier $\geqslant 1$. Soit $\psi \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^k)$, à valeurs réelles, non nulle. Pour toute fonction $u \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^n)$, définissons la fonction $u \otimes \psi^t$ sur $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^k$ au moyen de la formule $(u \otimes \psi^t)(x , y) = t^{-k/2} \, u(x) \, \psi\left(\frac{y}{t}\right)$.*

Alors pour tout ouvert W relativement compact de $\mathbf{R}^n$ il existe trois constantes strictement positives C_1, C_2 et ε telles que, pour toute fonction $u \in \mathcal{D}(W)$, et tout t tel que $0 < t < \varepsilon$, on ait l'inégalité

$$C_1 \, \|u \otimes \psi^t\|^2_{\rho,s} \leqslant \left(\operatorname{Log} \frac{1}{t}\right)^{2s} \int t^{-2\rho(x)} \, |u(x)|^2 \, dx + \|u\|^2_{\rho,s}$$
$$\leqslant C_2 \, [\, \|u \otimes \psi^t\|^2_{\rho,s} + \|u\|^2_{\rho,s}] .$$

Preuve. — Posons $v_t(x , y) = (u \otimes \psi^t) \; (x , y) = t^{-k/2} \, u(x) \, \psi\left(\frac{y}{t}\right)$ (attention : contrairement au § 1, on met ici un facteur $t^{-k/2}$, et non t^{-k}, de façon à conserver la norme L^2 de ψ^t, et non la norme L^1). En posant $b = b_1 + b_2$, on a

$$(Bv_t , v_t) = \int \overline{v_t}(x , y) \, dx dy \int b(x , y , \xi , \eta) \, \hat{v}_t(\xi , \eta) \, e^{2i\pi(x\xi + y\eta)} \, d\xi \, d\eta .$$

Après intégration par rapport à y et changement de variable $\left(\eta = \frac{\zeta}{t}\right)$, cela devient (noter que l'on peut se débarrasser du facteur $\alpha(y)$ puisque ψ^t a son support dans un compact fixe pour $t < 1$) :

$$(\mathrm{B}v_t\,,\,v_t) = \int \bar{u}(x)\,dx \int e^{2i\pi x\xi}\; k(x\,,\,\xi)\;\hat{u}(\xi)\,d\xi \;=\; (\Theta[k]u\,,u)$$

($\Theta[k]$ étant cette fois un opérateur pseudo-différentiel sur $\mathbf{R}^n$), avec $k = k_1 + k_2$, où

$$k_1(x\,,\xi) = (1 + |\xi|^2)^{\rho(x)}\,(1 + \operatorname{Log}(1 + |\xi|^2))^{2s}\int \beta\left(\xi\,,\frac{\zeta}{t}\right)|\hat{\psi}(\zeta)|^2\,d\zeta \quad \text{et}$$

$$k_2(x\,,\xi) = \int \left(1 - \beta\left(\xi\,,\frac{\zeta}{t}\right)\right)\left(1 + \frac{|\zeta|^2}{t^2}\right)^{\rho(x)} \left(1 + \operatorname{Log}\left(1 + \frac{|\zeta|^2}{t^2}\right)\right)^{2s} |\hat{\psi}(\zeta)|^2 d\zeta.$$

Posons aussi

$$k_3(x\,,\xi) = \int \beta\left(\xi\,,\frac{\zeta}{t}\right)\left(1 + \frac{|\zeta|^2}{t^2}\right)^{\rho(x)} \left(1 + \operatorname{Log}\left(1 + \frac{|\zeta|^2}{t^2}\right)\right)^{2s} |\hat{\psi}(\zeta)|^2\,d\zeta,$$

et faisons les remarques suivantes :

L'intégrale $\int \beta\left(\xi\,,\frac{\zeta}{t}\right)|\hat{\psi}(\zeta)|^2\,d\zeta$ est une fonction C^∞ de ξ, majorée par une constante indépendante de t, et dont la dérivée p-ème (p étant un multi-indice) est majorée par $C|\xi|^{-|p|}$ uniformément par rapport à t (en effet, pour $|\xi| \geqslant 1$,

$$\int \partial_\xi^p\,\beta\left(\xi\,,\frac{\zeta}{t}\right)|\hat{\psi}(\zeta)|^2\,d\zeta = |\xi|^{-|p|}\int (\partial_\xi^p\,\beta)\left(\frac{\xi}{|\xi|}\,,\frac{\zeta}{t\,|\xi|}\right)|\hat{\psi}(\zeta)|^2\,d\zeta\,,$$

et toutes les dérivées de β sont bornées).

Cette fonction de ξ reste donc, lorsque t tend vers 0, dans une partie bornée de l'espace des symboles d'ordre 0. Il résulte de cela que l'on a $|(\Theta[k_1]u, u)| \leqslant C \|u\|^2_{\rho,s}$. Par ailleurs k_3, qui est pour tout t un symbole d'ordre 0, reste lorsque t tend vers 0 dans une partie bornée de l'espace des symboles d'ordre $(2\rho, 2s)$, muni de sa topologie évidente, pourvu que l'on ait inf $\rho > 0$. En effet, sur le support de $\beta(\xi, \xi/t)$, on a pour $|\xi|$ assez grand l'inégalité

$$\left(1 + \frac{|\zeta|^2}{t^2}\right)^{\rho(x)} \left[1 + \operatorname{Log}\left(1 + \frac{|\zeta|^2}{t^2}\right)\right]^{2s}$$

$$\leqslant (1 + |\xi|^2)^{\rho(x)} (1 + \operatorname{Log}(1 + |\xi|^2))^{2s},$$

et on laisse au lecteur le soin de majorer les dérivées de k_3.

On peut conclure de cela l'inégalité

$$|(\Theta[k_3]u, u)| \leqslant C \|u\|^2_{\rho,s}.$$

Enfin, examinons

$$(\Theta[k_2 + k_3]u, u) = \int (k_2 + k_3)(x)\, |u(x)|^2\, dx,$$

où $$(k_2 + k_3)(x) = t^{-2\rho(x)} \left(\operatorname{Log}\frac{1}{t}\right)^{2s} c(x, t),$$

avec

$$c(x, t) = \int (|\zeta|^2 + t^2)^{\rho(x)} \left[2 + \frac{1 + \operatorname{Log}(|\zeta|^2 + t^2)}{\operatorname{Log}\frac{1}{t}}\right]^{2s} |\hat{\psi}(\zeta)|^2\, d\zeta.$$

Supposons par exemple $s \geqslant 0$. On écrit, pour $|\zeta| \geqslant t$:

$$(|\zeta|^2 + t^2)^{\rho(x)} \left[2 + \frac{1 + \operatorname{Log}(|\zeta|^2 + t^2)}{\operatorname{Log}\frac{1}{t}}\right]^{2s}$$

$$\leqslant 2^{\rho(x)}\, |\zeta|^{2\rho(x)} \left(\frac{1 + \operatorname{Log} 2}{\operatorname{Log}\frac{1}{|\zeta|}}\right)^{2s},$$

fonction sommable sur $\mathbf{R}^k$. Et pour $|\zeta| \leqslant t$:

$$(|\zeta|^2 + t^2)^{\rho(x)} \left[2 + \frac{1 + \operatorname{Log}(|\zeta|^2 + t^2)}{\operatorname{Log} \dfrac{1}{t}} \right]^{2s}$$

$$\leqslant 2^{\rho(x)}\ t^{2\rho(x)} \left(\operatorname{Log} \frac{1}{t} \right)^{2s} (1 + \operatorname{Log} 2)^{2s},$$

d'où l'on conclut par le théorème de Lebesgue que $c(x\,,t)$ tend lorsque t tend vers 0 vers $2^{2s} \int |\zeta|^{2\rho(x)}\ |\hat{\psi}(\zeta)|^2\ d\zeta$, fonction continue et strictement positive de x. On laisse au lecteur le soin d'examiner le cas $s < 0$.

Ceci termine la preuve du théorème 2.1.

3. Ouverts stablement convexes par rapport à un opérateur différentiel.

Soient Ω un ouvert de $\mathbf{R}^n$ et $\mathrm{P(D)}$ un opérateur différentiel à coefficients constants sur $\mathbf{R}^n$.

DÉFINITION 3.1. – *Nous dirons que* Ω *est stablement* $\mathrm{P}(-\mathrm{D})$-*convexe si pour tout compact* $\mathrm{K} \subset \Omega$ *il existe un compact* $\mathrm{L} \subset \Omega$ *tel que, pour tout entier* $k \geqslant 0$ *et toute distribution* $u \in \mathcal{E}'(\Omega \times \mathbf{R}^k)$ *telle que la projection sur* Ω *du support singulier de* $\mathrm{P(D)}u$ *soit contenue dans* K, *la projection sur* Ω *du support singulier de* u *soit contenue dans* L.

Ω, $\mathrm{P(D)}$ et k étant fixés, considérons les assertions suivantes :

(A) : pour tout compact $\mathrm{K} \subset \Omega$, il existe un compact $\mathrm{L} \subset \Omega$ tel que, pour tout $x_0 \in \Omega \setminus \mathrm{L}$ et tout compact $\mathrm{M} \subset \Omega$ contenant $\mathrm{K} \cup \{x_0\}$, il existe deux fonctions ρ et $\sigma \in \mathrm{C}^\infty(\mathrm{M})$ (i.e. C^∞ dans un voisinage de M) à valeurs réelles, un nombre $\tau_0 > 0$ et un nombre $\mathrm{C} > 0$ vérifiant les propriétés suivantes :

a) $\rho(x_0) > \sup_{\mathrm{K}} \sigma(x)$ et $\rho(x_0) > 0$

b) pour toute fonction $u \in \mathcal{D}_{\mathrm{M}}(\Omega)$ et tout nombre $\tau \geqslant \tau_0$, on a l'inégalité

$$\int e^{2\tau\rho(x)}\ |u(x)|^2\ dx \leqslant \mathrm{C} \left[\int e^{2\tau\sigma(x)}\ |\mathrm{P(D)}\,u(x)|^2\ dx + \|u\|^2_{\tau_0} \right]$$

(B_k) : pour tout compact $K \subset \Omega$, il existe un compact $L \subset \Omega$ tel que, pour tout $x_0 \in \Omega \setminus L$ et tout compact $M \subset \Omega$ contenant $K \cup \{x_0\}$ il existe deux fonctions ρ et $\sigma \in C^\infty(M)$, à valeurs réelles, vérifiant les propriétés suivantes :

a) $\rho(x_0) > \sup_K \sigma(x)$

b) pour toute distribution $u \in \mathcal{E}'(\Omega \times \mathbf{R}^k)$ dont le support est contenu dans $M \times [-1, 1]^k$ telle que $P(D)\, u \in H^\sigma(\Omega \times \mathbf{R}^k)$, u appartient à $H^\rho(\Omega \times \mathbf{R}^k)$.

(C_k) (resp (C'_k)) : $\Omega \times \mathbf{R}^k$ est $P(-D)$-fortement convexe (resp. $P(-D)$-singulier-convexe).

THEOREME 3.1. – *La validité de* (A) *entraîne celle de* (B_k), *de* (C_k) *(et de* (C'_k)*) pour tout entier* $k \geq 0$; *la validité de* (B_k) *ou de* (C'_k) *(ou de* (C_k)*) pour un entier* $k \geq 1$ *entraîne celle de* (A) ; (A) *équivaut à dire que* Ω *est stablement* $P(-D)$*-convexe.*

Nous allons prouver que (A) entraîne (B_k) pour tout $k \geq 0$, ainsi que le fait que Ω est stablement $P(-D)$-convexe (ce qui implique évidemment (C'_k) pour tout $k \geq 0$) ; puis que (C'_k) entraîne (C_{k-1}) pour $k \geq 1$, que (C'_k) entraîne (B_k) pour $k \geq 0$, et enfin que (B_k) entraîne (A) pour $k \geq 1$.

Preuve que (A) entraîne (B_k) *et la stable* $P(-D)$*-convexité de* Ω.

Soit K un compact de Ω ; prenons pour L le compact défini dans (A) ; soient $x_0 \in \Omega \setminus L$ et M un compact de Ω_0 contenant $K \cup \{x_0\}$. Choisissons un compact M_1 de Ω tel que $M \subset M_1$ et définissons deux fonctions ρ et $\sigma \in C^\infty(M_1)$ satisfaisant les propriétés requises dans (A). Compte tenu d'une inégalité classique, on a donc pour toute fonction $u \in \mathcal{D}_{M_1}(\Omega)$ et tout $t > 0$ assez petit, l'inégalité

$$\int t^{-2\rho(x)}\, |u(x)|^2\, dx \leq C \left[\int t^{-2\sigma(x)}\, |P(D)\, u(x)|^2\, dx + \|P(D)\, u\|^2_{\tau_0} \right].$$

On peut ici supposer τ_0 entier pair, $\tau_0 = 2m$; en notant Δ_x le laplacien sur $\mathbf{R}^n$ on a donc

$$\int t^{-2\rho(x)}\, |u(x)|^2\, dx$$
$$\leq C \left[\int t^{-2\sigma(x)}\, |P(D)\, u(x)|^2\, dx + \int |(1-\Delta_x)^m\, P(D)\, u(x)|^2\, dx \right].$$

Si $v(x, y) \in \mathcal{D}(\Omega \times \mathbf{R}^k)$ a son support dans $M_1 \times [-2, 2]^k$, on peut pour tout $y \in [-2, 2]^k$ écrire cette inégalité pour la fonction $x \to v(x, y)$, puis intégrer par rapport à y, ce qui donne

$$\int t^{-2\rho(x)} |v(x, y)|^2 \, dx \, dy$$
$$\leqslant C \left[\int t^{-2\sigma(x)} |P(D) v(x, y)|^2 \, dx \, dy + \|P(D) v\|_{2m}^2 \right] \qquad (1)$$

Nous allons prouver en même temps (B_k) et le fait que Ω est stablement $P(-D)$-convexe : pour prouver ce dernier point il faut se donner une distribution $w \in \mathcal{E}'(\Omega \times \mathbf{R}^k)$ à support dans $M \times [-1, 1]^k$ telle que $P(D) w$ soit la classe H^s dans $\Omega \times \mathbf{R}^k$ et de classe C^∞ en dehors de $K \times [-1, 1]^k$ et prouver que pour tout nombre réel t, que l'on peut supposer supérieur à s, w est de classe H^t dans un voisinage de $\{x_0\} \times \mathbf{R}^k$. Posons $\mu = \sup_K \sigma$: on a par hypothèse $\rho(x_0) > \mu$ et $\rho(x_0) > 0$. Puis choisissons a réel,

$$a > \sup \left(\frac{t-s}{\rho(x_0) - \mu} , \frac{t - s + 2m}{\rho(x_0)} \right) :$$

la première de ces inégalités permet de choisir b réel satisfaisant $t - a\rho(x_0) < b < s - a\mu$; la deuxième permet d'exiger en outre $b < s - 2m$. Après avoir remplacé t par t^a et multiplié par t^{-2b}, l'inégalité (1) permet d'écrire

$$\int t^{-2\rho'(x)} |v(x, y)|^2 \, dx \, dy$$
$$\leqslant C \left[\int t^{-2\sigma'(x)} |P(D) v(x, y)|^2 \, dx dy + t^{-2b} \|P(D) v\|_{2m}^2 \right] (2)$$

où l'on a posé $\rho' = a\rho + b$ et $\sigma' = a\sigma + b$.

Soit φ une fonction $\in \mathcal{D}(\mathbf{R}^{n+k})$ permettant d'appliquer le théorème 1.1 pour les espaces $H^{\rho'}$ et $H^{\sigma'}$. Soit $M_{1/2}$ un compact tel que $M \subset \overset{\circ}{M}_{1/2} \subset M_{1/2} \subset \overset{\circ}{M}_1$, et soit $v \in \mathcal{D}(\Omega \times \mathbf{R}^k)$ à support dans $M_{1/2} \times [-3/2, 3/2]^k$.

Dans (2), substituons $\varphi_t * v$ à v, et intégrons de 0 à 1/2 par rapport à la mesure $\dfrac{dt}{t}$. En appliquant le théorème 1.1, on peut écrire, pour tout N :

$$\|v\|_{\rho'}^2 - C_1 \|v\|_{-N}^2 \leqslant C \|P(D)\,v\|_{\sigma'}^2 + C \int_0^{1/2} t^{-2b} \frac{dt}{t} \; \|P(D)\,(\varphi_t * v)\|_{2m}^2.$$

Comme

$$\|P(D)\,(\varphi_t * v)\|_{2m}^2 = \|(1-\Delta)^m\, P(D)\,(\varphi_t * v)\|_0^2$$

$$= \|\varphi_t * (1-\Delta)^m\, P(D)\,v\|_0^2\,,$$

on a, grâce au théorème 1.1 :

$$\int_0^{1/2} t^{-2b}\, \|P(D)\,(\varphi_t * v)\|_{2m}^2 \frac{dt}{t} \leqslant C\, \|(1-\Delta)^m \; P(D)\,v\|_b^2$$

$$\leqslant C \|P(D)\,v\|_{2m+b}^2\,.$$

Par conséquent

$$\|v\|_{\rho'}^2 \leqslant C[\,\|v\|_{-N}^2 + \|P(D)v\|_{\sigma'}^2 + \|P(D)\,v\|_{2m+b}^2\,]$$

pour toute fonction $v \in \mathcal{D}(\Omega \times \mathbf{R}^k)$ à support dans $M_{1/2} \times [-3/2\,,\,3/2]^k$.

Pour tout $\varepsilon > 0$, on peut trouver une fonction σ'' de classe C^∞ dans un voisinage de $M_{1/2}$ et telle que l'on ait partout

$$\sup\,(\sigma'\,, 2m+b) < \sigma'' < \sup\,(\sigma'\,, 2m+b) + \varepsilon\,.$$

On a alors l'inégalité

$$\|v\|_{\rho'}^2 \leqslant C\,[\,\|v\|_{-N}^2 + \|P(D)\,v\|_{\sigma''}^2\,]\,,$$

d'où résulte par régularisation que toute distribution $v \in \mathcal{E}'(\Omega \times \mathbf{R}^k)$ dont le support est contenu dans $M \times [-1\,,1]^k$ et telle que $P(D)v \in H^{\sigma''}$ appartient à $H^{\rho'}$. Etant donné que

$$\sup_K \sigma'' < \sup(2m+b\,,\, \sup_K \sigma') + \varepsilon = \sup(2m+b\,, a\mu + b) + \varepsilon,$$

que $\rho'(x_0) = a\rho(x_0) + b$ est strictement supérieur à $a\mu + b$ en vertu de la double inégalité $t - a\rho(x_0) < b < s - a\mu$ et de l'inégalité $s < t$, et enfin étant donné que $a\rho(x_0) + b > t - s + 2m + b > 2m + b$, on voit que pour ε assez petit on a $\rho'(x_0) > \sup_K \sigma''$, ce qui prouve la validité de (B_k).

Revenons à la distribution w telle que $P(D)w$ appartient à H^s, et est C^∞ en dehors de $K \times [-1, 1]^k$, et dont il s'agit de prouver qu'elle est de classe H^t dans un voisinage de $\{x_0\} \times \mathbf{R}^k$. Comme $\sup_K \sigma'' < \sup(2m + b, a\mu + b) + \varepsilon$ et que l'on a les inégalités $2m + b < s$ et $a\mu + b < s$, on voit que si ε est assez petit $P(D)w$ appartient à $H^{\sigma''}$; il en résulte que $w \in H^{\rho'}$: comme

$$\rho'(x_0) = a\rho(x_0) + b > t,$$

on a prouvé que Ω est stablement $P(-D)$-convexe.

Preuve que (C'_k) *implique* (C_{k-1}) *pour* $k \geqslant 1$:

Elle résulte de la formule

$$\operatorname{Supp\,sing}(u \otimes v) = \operatorname{supp\,sing}(u) \times \operatorname{supp}(v) \cup \operatorname{supp}(u) \times \operatorname{supp\,sing}(v).$$

Preuve que (C'_k) *implique* (B_k) *pour tout* $k \geqslant 0$:

Le compact K étant donné, choisissons L tel que $v \in \mathcal{E}'(\Omega \times \mathbf{R}^k)$ et $\operatorname{supp\,sing}(P(D)v) \subset K \times [-2, 2]^k$ entraînent

$$\operatorname{supp\,sing}(v) \subset L \times [-2, 2]^k.$$

Fixons $x_0 \in \Omega \setminus L$ et un compact M de Ω contenant $K \cup \{x_0\}$. Soit M_1 un compact de Ω tel que $M \subset \overset{\circ}{M}_1$. Soit μ un nombre réel arbitraire. L'application identique de l'espace

$$H^\mu_{M_1 \times [-2, 2]^k}(\Omega \times \mathbf{R}^k) \cap P(D)^{-1}(C^\infty((\Omega \setminus K) \times \mathbf{R}^k)),$$

muni de sa topologie de Fréchet naturelle, dans l'espace

$$C^\infty((\Omega \setminus L) \times \mathbf{R}^k),$$

est continue d'après le théorème du graphe fermé.

Soient $s > \mu$ et $\alpha \in \mathcal{D}(\Omega \setminus L)$, égale à 1 en x_0. Il existe une fonction $\beta \in \mathcal{D}(\Omega \setminus K)$, un nombre $t > \mu$ et une constante $C > 0$ tels que pour toute fonction $v \in \mathcal{D}_{M_1 \times [-2, 2]^k}(\Omega \times \mathbf{R}^k)$, on ait l'inégalité $\|\alpha v\|_s^2 \leqslant C[\|v\|_\mu^2 + \|\beta P(D)v\|_t^2]$.

Choisissons $\rho \in C^\infty(M_1)$ égale à μ aux points x tels que $|\alpha(x)| \leqslant 1/3$, partout inférieure ou égale à s, et égale à s aux points x tels que $|\alpha(x)| \geqslant 2/3$. Puis choisissons $\sigma \in C^\infty(M_1)$ telle que σ soit égale à

t dans un voisinage du support de β, soit partout $\geqslant \mu$, et soit strictement inférieure à s dans un voisinage de K. On a alors, pour toute fonction $v \in \mathcal{D}_{M_1 \times [-2, 2]^k}(\Omega \times \mathbf{R}^k)$, l'inégalité

$$\|v\|_\rho^2 \leqslant C[\|v\|_\mu^2 + \|P(D)v\|_\sigma^2],$$

et comme $\mu \leqslant \inf \sigma$, on a aussi $\|v\|_\mu^2 \leqslant C_1 \|P(D)v\|_\sigma^2$ d'après une inégalité classique. Par suite $\|v\|_\rho^2 \leqslant C \|P(D)v\|_\sigma^2$, d'où résulte (B_k) par régularisation (pour tout $x \in K$, on a $\sigma(x) < s = \rho(x_0)$).

Preuve que (B_k) *entraîne* (A) :

Avec, comme toujours, $M \subset \mathring{M}_1$, supposons que les hypothèses $v \in \mathcal{E}'(\Omega \times \mathbf{R}^k)$, supp $v \subset M_1 \times [-1, 1]^k$ et $P(D)v \in H^\sigma(\Omega \times \mathbf{R}^k)$ entraînent $v \in H^\rho(\Omega \times \mathbf{R}^k)$; ici, ρ et σ appartiennent à $C^\infty(M_1)$ et l'on a $\rho(x_0) > \sup_K \sigma(x)$. Notons d'abord que, à condition de remplacer si besoin est $M_1 \times [-1, 1]^k$ par $M_{1/2} \times \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]^k$ avec $M \subset \mathring{M}_{1/2} \subset \mathring{M}_{1/2} \subset M_1$, on peut supposer que ρ et σ sont strictement positives (sur $M_{1/2}$) : en effet, soit $s < \inf(\inf_{M_1} \rho, \inf_{M_1} \sigma)$, et soit A^{-s} un opérateur de convolution par une distribution à support compact suffisamment petit, différant de l'opérateur

$$\Theta[(1 + |\xi|^2 + |\eta|^2)^{-s/2}]$$

par un opérateur d'ordre $-\infty$. Si $v \in \mathcal{E}'_{M_{1/2} \times [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]^k}(\Omega \times \mathbf{R}^k)$ et si $P(D)v \in H^{\sigma - s}$, on a

$$A^{-s} v \in \mathcal{E}'_{M_1 \times [-1, 1]^k}(\Omega \times \mathbf{R}^k) \quad \text{et} \quad P(D) A^{-s} v = A^{-s} P(D) v \in H^\sigma,$$

d'où $A^{-s} v \in H^\rho$, et $v \in H^{\rho - s}$. On supposera donc, désormais, $\rho > 0$ et $\sigma > 0$.

Le théorème du graphe fermé fournit l'inégalité

$$\|v\|_\rho^2 \leqslant C[\|P(D)v\|_\sigma^2 + \|v\|_0^2] \tag{3}$$

valable quelle que soit $v \in \mathcal{D}_{M_{1/2} \times [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]^k}(\Omega \times \mathbf{R}^k)$. On a aussi, pour tout $\varepsilon > 0$, l'inégalité

$$\|u\|_{\rho - \epsilon}^2 \leqslant C_1 [\|P(D)u\|_\sigma^2 + \|u\|_0^2] \tag{4}$$

lorsque $u \in \mathcal{D}_{M_{1/2}}(\Omega)$, grâce à l'argument suivant, où nous n'avons pas cherché à raffiner les estimations (on pourrait prendre en fait $\varepsilon = 0$) : si $w \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^k)$ est non nulle et si s est un nombre réel $\geqslant 0$, on a, pour toute fonction $u \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^n)$:

$$\|u \otimes w\|_s^2 = \int (1 + |\xi|^2 + |\eta|^2)^s \, |\hat{u}(\xi)|^2 \, |\hat{w}(\eta)|^2 \, d\xi \, d\eta$$

$$\geqslant \int (1 + |\xi|^2)^s \, |\hat{u}(\xi)|^2 \, d\xi \int |\hat{w}(\eta)|^2 \, d\eta = C \|u\|_s^2.$$

Avec une partition de l'unité, on a alors, pour tout $\varepsilon > 0$, $\varepsilon < \inf \rho$:

$$\|u\|_{\rho-\epsilon}^2 \leqslant C \|u \otimes w\|_\rho^2 \leqslant C[\|P(D)\, u \otimes w\|_\sigma^2 + \|u \otimes w\|_0^2] ,$$

et comme le théorème 2.1, appliqué avec t constant, fournit l'inégalité

$$\|P(D) u \otimes w\|_\sigma^2 \leqslant C \| P(D) u\|_\sigma^2 \quad \text{et que} \quad \|u \otimes w\|_0^2 \leqslant C \|u\|_0^2,$$

on en déduit l'inégalité (4).

L'inégalité (3) reste bien entendu valable si l'on y remplace ρ par $\rho - \varepsilon$, et pour ε assez petit on aura $\rho(x_0) - \varepsilon > \sup_K \sigma(x)$. On suppose donc l'inégalité $\|v\|_\rho^2 \leqslant C[\|P(D)\, v\|_\sigma^2 + \|v\|_0^2]$ valable aussi bien lorsque $v \in \mathcal{D}_{M_{1/2} \times [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]^k}(\Omega \times \mathbf{R}^k)$ et lorsque $v \in \mathcal{D}_{M_{1/2}}(\Omega)$.

Appliquons enfin le théorème 2.1 :

$$\int t^{-2\rho(x)} \, |u(x)|^2 \, dx \leqslant C[\|u \otimes \psi^t\|_\rho^2 + \|u\|_\rho^2]$$

$$\leqslant C[\|P(D)\, u \otimes \psi^t\|_\sigma^2 + \|u \otimes \psi^t\|_0^2 + \|P(D)\, u\|_\sigma^2 + \|u\|_0^2]$$

$$\leqslant C\left[\int t^{-2\sigma(x)} \, |P(D)\, u(x)|^2 \, dx + \|P(D) u\|_\sigma^2 + \|u\|_0^2\right].$$

En posant $t = e^{-\tau}$, le théorème 3.1 est démontré.

BIBLIOGRAPHIE

[1] L. Hormander, Linear Partial Differential Operators, Springer-Verlag, (1964).

[2] F. Treves, Linear Partial Differential Equations, Gordon and Breach, (1970).

[3] A. Unterberger, Résolution d'équations aux dérivées partielles dans des espaces de distributions d'ordre de régularité variable, *Ann. Inst. Fourier, Grenoble,* t. 21, fasc. 2, (1971).

[4] A. Unterberger, Espaces de Sobolev d'ordre variable et applications, Séminaire Goulaouic-Schwartz, Ecole Polytechnique, Paris (1971).

Manuscrit reçu le 11 octobre 1971
accepté par B. Malgrange

André Unterberger
39 rue Pigalle
PARIS 9ème