ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

LOUIS BOUTET DE MONVEL

Opérateurs pseudo-différentiels analytiques et opérateurs d'ordre infini

Annales de l'institut Fourier, tome 22, nº 3 (1972), p. 229-268

<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1972__22_3_229_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
22.3 (1972), 229-268

OPÉRATEURS PSEUDO-DIFFERENTIELS ANALYTIQUES ET OPÉRATEURS D'ORDRE INFINI

par Louis BOUTET DE MONVEL

Le but de cet article est de présenter une théorie des opérateurs pseudo-différentiels analytiques plus complète que celle de [1], et de la généraliser de façon à englober certains opérateurs d'ordre infini.

Les propriétés qu'on attend des opérateurs pseudo-différentiels (d'ordre fini) analytiques sont en gros les suivantes :

1) Un tel opérateur P est un opérateur pseudo-différentiel (au sens de [3], [6]). En outre il n'augmente pas le support singulier analytique, autrement dit $\mathrm{P}f$ est analytique dans tout ouvert où f l'est.

2) Si P et Q sont deux tels opérateurs, on peut définir de façon raisonnable un composé $\mathrm{P} \circ \mathrm{Q}$, qui est lui même un opérateur pseudo-différentiel analytique.

3) Si P est un opérateur pseudo-différentiel analytique elliptique, il possède une parametrix analytique (i.e. il existe un opérateur pseudo-différentiel analytique Q tel $\mathrm{P} \circ \mathrm{Q} - 1$ et $\mathrm{Q} \circ \mathrm{P} - 1$ soient des opérateurs à noyau analytique). P a alors la propriété suivante : f est analytique dans tout ouvert où $\mathrm{P}f$ l'est (c'est le cas en particulier si P est un opérateur différentiel elliptique à coefficients analytiques).

On constate alors que P opère aussi sur les fonctionnelles analytiques réelles (à support compact) : si f est une telle fonctionnelle, $\mathrm{P}f$ est une hyperfonction (au sens de M. Sato) analytique en dehors du support de f. Les résultats 1 et 3 valent encore dans ce cas.

Suivant les idées de [5], il est commode de définir ces opérateurs au moyen d'une intégrale oscillante :

$$< \mathrm{P}u , v > = (2\pi)^{-n} \iiint e^{i(x-y,\xi)} \, p(x, y, \xi) \, v(x) \, u(y) \, dx \, dy \, d\xi$$

où le symbole $p(x, y, \xi)$ est une fonction analytique qui se prolonge analytiquement dans un voisinage conique de l'espace réel où varie ξ. Il est alors commode de déplacer le cycle d'intégration dans le domaine complexe et de le remplacer par un autre, le long duquel l'exponentielle décroît rapidement. Ceci permet d'utiliser des symboles $p(x, y, \xi)$ qui croissent plus rapidement que les symboles usuels, et d'étudier ainsi une classe d'opérateurs "pseudo-différentiels" d'ordre infini. On dispose pour ces opérateurs d'ordre infini du même calcul symbolique que pour les opérateurs d'ordre fini, et plusieurs des constructions faites pour les opérateurs d'ordre fini marchent encore pour ces nouveaux opérateurs. Nous ne connaissons cependant pas pour le moment de condition satisfaisante "d'ellipticité" assurant dans un cas suffisamment général qu'un opérateur possède une parametrix.

La méthode utilisée permet encore (§ 2.2), sans modifications, de remplacer l'exposant $< x - y, \xi >$ dans la formule ci-dessus par des fonctions phase plus générales, telles que celles qu'on trouve dans [5].

On trouvera aussi une théorie des opérateurs pseudo-differentiels d'ordre infini dans un travail de T. Kawaï (à paraître dans Lecture Notes, Springer).

Notations.

On a utilisé les notations usuelles pour les espaces numériques $\mathbf{R}^n$, en particulier pour les multi-indices de dérivation.

$\mathcal{D}(\Omega)$ est l'espace des fonctions C^∞ à support compact dans Ω

$\mathcal{H}(\Omega)$ est l'espace des fonctions analytiques sur Ω

$\mathcal{H}'_0(\Omega)$ est l'espace des fonctionnelles analytiques réelles à support compact sur Ω

$\mathcal{H}'(\Omega)$ est l'espace des hyperfonctions sur Ω

$\mathcal{K}(\Omega, \complement K)$, $\mathcal{K}_0(\Omega, K)$ sont les espaces d'hyperfonctions définis en (2.1), (2.2)

$\mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$ est l'espace de Schwartz des fonctions C^∞ à décroissance rapide SH, SH^Λ, SH^0 sont les espaces de symboles définis en (1.5), 1.15).

1. Symboles analytiques.

1. Fonctions poids.

Dans toute la suite, $\Lambda(r)$ désigne une fonction vérifiant

(1.1) $\Lambda(r)$ *est définie pour* $r \geqslant 0$, *positive, monotone, continue et pour tout* $\varepsilon > 0$ *on a* :

$$\lim_{r \to \infty} e^{-\epsilon r} \Lambda(r) = 0 \quad , \quad \lim_{r \to \infty} e^{\epsilon r} \Lambda(r) = +\infty$$

Si Λ est croissante, il sera parfois commode de la remplacer par :

$$\widetilde{\Lambda}(r) = \inf_{\epsilon > 0} M_\epsilon e^{\epsilon r} \quad \text{avec} \quad M_\epsilon = \sup_{r > 0} e^{-\epsilon r} \Lambda(r)$$

Si $\Lambda(0) \geqslant 1$, donc $M_\epsilon \geqslant 1$ pour tout ϵ , $\widetilde{\Lambda}$ vérifie

$$(1.2) \qquad \begin{aligned} &\widetilde{\Lambda}(r+s) \leqslant \widetilde{\Lambda}(r)\,\widetilde{\Lambda}(s) \\ &\widetilde{\Lambda}(\rho r) \leqslant \widetilde{\Lambda}(r)^\rho \end{aligned}$$

[Cependant, $\displaystyle\int_1^\infty \operatorname{Log} \widetilde{\Lambda}(t) \frac{dt}{t^2}$ peut être infinie, même si

$$\int_1^\infty \operatorname{Log} \Lambda(t) \frac{dt}{t^2} < \infty .$$

Aussi, pour certaines questions, on n'a pas intérêt à remplacer Λ par $\widetilde{\Lambda}$].

2. Notations.

(1.3) *On notera* $C_{\epsilon,a}$ *l'ouvert de* C^n *des vecteurs* $\zeta = \xi + i\eta$ *tels que* $\eta^2 - \varepsilon\ \xi^2 + a < 0$.

On notera $C_\epsilon = C_{\epsilon,-\epsilon}$ *l'ouvert de* C^n *des vecteurs* $\zeta = \xi + i\eta$ *tels que* $\eta^2 - \varepsilon(\xi^2 + 1) < 0$.

Soit Ω un ouvert de $\mathbf{R}^\nu$ (plus généralement une variété analytique réelle). Si K est un compact de Ω, $K^\epsilon \subset \mathbf{C}^\nu$ désigne l'ensemble des $x \in \mathbf{C}^\nu$ tels que $d(x, K) < \varepsilon$ (plus généralement, K^ϵ désigne une suite décroissant vers K de voisinages complexes de K).

(1.4) *On notera* $K(\varepsilon) = K^\epsilon \times C_\epsilon \subset \mathbf{C}^\nu \times \mathbf{C}^n$ *l'ensemble des couples* $(x, \zeta) \in \mathbf{C}^\nu \times \mathbf{C}^n$ *tels que* :

$$d(x, K) < \varepsilon \quad , \quad \eta^2 < \varepsilon(\xi^2 + 1)$$

On notera encore $\quad K(\varepsilon, a) = K^\epsilon \times C_{\epsilon,a}$.

[La matrice de Levy $\dfrac{\partial^2 \psi}{\partial\zeta_i\, \partial\zeta_j}$ de la fonction $\psi(\zeta) = \eta^2 - \varepsilon\,\xi^2$ est $\dfrac{1-\varepsilon}{2}$ fois la matrice identité. De sorte que $C_{\epsilon,a}$ est pseudo-convexe si $\varepsilon \leqslant 1$. $K(\varepsilon), K(\varepsilon, a)$ le sont aussi si K^ϵ est pseudo-convexe].

[Pour tout a, $C_{\epsilon,a}$ contient les points assez grands d'un voisinage cônique de $\mathbf{R}^n$ dans $\mathbf{C}^n$. En outre, pour $a < 0$, c'est aussi un voisinage de 0 dans $\mathbf{C}^n$. C'est essentiellement cette propriété qui servira].

3. Symboles analytiques.

(1.5) DEFINITION. – *On note* $SH^\Lambda(\Omega, \mathbf{R}^n)$ *et on appelle espace des symboles analytiques d'ordre* Λ (cf. (1.1)) *sur* Ω *l'espace des fonctions* $a(x, \xi)$ *analytiques sur* $\Omega \times \mathbf{R}^n$, *qui vérifient la condition suivante : pour tout compact* $K \subset \Omega$, *il existe des constantes* $\varepsilon, c > 0$ *telles que* $a(x, \xi)$ *soit holomorphe dans* $K(\varepsilon)$ (cf. (1.4)) *et que*

$$(1.6) \qquad |a(x, \xi)| \leqslant c\, \Lambda(|\xi|) \quad \text{dans} \quad K(\varepsilon).$$

On note $SH(\Omega, \mathbf{R}^n) = \cup\, SH^\Lambda(\Omega, \mathbf{R}^n)$ la réunion : ses éléments sont les symboles analytiques.

Si $\Lambda = (1 + r)^d$, on dira aussi que a est de degré d.

Par abus de langage, nous dirons qu'une fonction $a(x, \xi)$ est un symbole analytique pour $|\xi|$ grand si elle est définie et vérifie (1.6) pour $|\xi| > \alpha(x)$, où α est une fonction continue positive sur Ω : alors pour tout compact $K \subset \Omega$, il existe des constantes positives ε, a, c, telles que $a(x, \xi)$ soit holomorphe dans $K(\varepsilon, a)$ et y vérifie

$$|a(x, \xi)| \leqslant c\, \Lambda(|\xi|).$$

4. Symboles formels analytiques.

Soit $a_k(x, \xi)$ une suite de symboles analytiques.

On suppose que pour tout compact $K \subset \Omega$, il existe $\varepsilon > 0$, tel que les a_k soient tous holomorphes dans $K(\varepsilon)$. Soit enfin Λ une fonction comme dans (1.1).

(1.7) DEFINITION. – *On dit que la série formelle $\Sigma\, a_k(x, \xi)$ est un symbole analytique formel d'ordre Λ si pour tout compact $K \subset \Omega$, il existe des constantes ε, c, A, telles que les a_k soient holomorphes dans $K(\varepsilon)$* (cf. (1.4)) *et y vérifient* :

(1.8) $$|a_k(x, \xi)| \leqslant c\, A^k\, k!\, (1 + |\xi|)^{-k}\, \Lambda(|\xi|).$$

La série formelle $\Sigma\, a_k$ sera appelée symbole analytique formel si c'est un symbole analytique formel d'ordre Λ pour une fonction Λ convenable. On dira (par abus de langage) que c'est un symbole analytique formel (d'ordre Λ) pour ξ grand si les a_k sont définis et vérifient (1.6) pour $|\xi| \geqslant \alpha(x)$ (où α est une fonction continue sur Ω).

(1.9) *Exemple.* – A un symbole analytique a, on associe le symbole analytique formel $\Sigma\, a_k$ défini par $a_0 = a$, $a_k = 0$ pour $k > 0$.

Dans la suite, nous identifions le symbole a et le symbole formel qu'il définit.

(1.10) *Exemple.* – (on suppose $n = \nu$). *Soit $a(x, \xi)$ un symbole analytique. Posons*

$$a_k(x, \xi) = \sum_{|\alpha|=k} \frac{i^{-k}}{\alpha!} \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^{\alpha} \left(\frac{\partial}{\partial \xi}\right)^{\alpha} a(x, \xi)$$

Alors $\Sigma\ a_k$ *est un symbole analytique formel.*

Preuve. – Le nombre de termes dans la somme qui définit a_k est un polynôme de k. Il suffit donc de majorer chacun des termes. On utilise la formule de Cauchy :

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^{\alpha}\left(\frac{\partial}{d\xi}\right)^{\alpha} a(x\,,\xi) = \alpha\,!^2\ (2\,i\,\Pi)^{-n} \iint_{\substack{|Z_j|=\epsilon \\ |\zeta_j| = \epsilon(1+|\xi|)}} a(x+z\,,\xi+\zeta)$$

$$\ldots Z^{-\alpha_1-1} \ldots Z_n^{-\alpha_n-1}\ \zeta_1^{-\alpha_1-1}\ \zeta_n^{-\alpha_n-1}\ dZ_1 \ldots d\zeta_n$$

qui montre qu'on a (avec $|\alpha| = k$, donc $\alpha! \leqslant k\,!$)

$$\left|\left(\frac{1}{\alpha\,!}\right)\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^{\alpha}\left(\frac{\partial}{\partial\xi}\right)^{\alpha} a(x\,,\xi)\right| \leqslant c\ \varepsilon^{-2k}\ k\,!\ (1+|\xi|)^{-k}\ \ \Lambda(|\xi|)$$

pourvu que ε soit assez petit, c et Λ assez grands pour que

$$a(x+z\ ,\ \xi+\zeta)$$

soit holomorphe et majoré par $c\ \Lambda(|\xi|)$ sur le domaine d'intégration.

(1.11) *Nous dirons que deux symboles analytiques formels sont équivalents et nous noterons* $\Sigma\ a_k \sim \Sigma\ b_k$ *si pour tout compact* $K \subset \Omega$ *il existe des constantes* ε, A *et une fonction* Λ (comme dans (1.1)) *telles que les* a_k , b_k *soient tous holomorphes dans* $K(\varepsilon)$ *et qu'on y ait pour tout* N

$$(1.12) \qquad \left|\sum_{0}^{N-1} (a_k - b_k)\right| \leqslant A^k\ k\,!\ \ (1+|\xi|)^{-k}\ \Lambda(|\xi|)$$

Exemples. – (1.13) *Soit a un symbole analytique. Alors* $a \sim 0$ *si et seulement si pour tout compact* $K \subset \Omega$, *il existe des constantes* ε, c *telles que a soit holomorphe dans* $K(\varepsilon)$ *et y vérifie* :

$$|a(x\,,\xi)| \leqslant c\ \exp - \varepsilon|\xi|\,.$$

Preuve. – On fait $k = \left[\dfrac{1+|\xi|}{A}\right]$ (partie entière) dans (1.11), la formule de Stirling montre alors qu'on a :

$$|a| \leqslant C_1\ \exp\left(-\ \frac{1+|\xi|}{A}\right)\cdot\ \Lambda(|\xi|)\ \cdot\ (1+|\xi|)$$

si C_1 est assez grand, dans $K(\varepsilon)$. Si $\varepsilon < \frac{1}{A}$, comme

$$\exp\left(\varepsilon - \frac{1}{A}\right)|\xi| \cdot \Lambda(|\xi|)$$

est bornée, on a, avec une nouvelle constante c

$$|a| \leqslant c \exp - \varepsilon\ |\xi|\,.$$

(1.14) *Soit a un symbole analytique. On suppose $a \sim \Sigma\, b_k$, où $\Sigma\, b_k$ est un symbole analytique formel d'ordre Λ_0. Alors* A *est d'ordre Λ_0.*

Preuve. – Quitte à remplacer a par $a - b_0$, on peut supposer $b_0 = 0$. Puis quitte à décaler les b_k et à modifier les constantes c, A de (1.8), (1.12), on peut supposer qu'on a dans $K(\varepsilon)$, pour tous k, N :

$$|b_k| \leqslant c\ A^{k+1}\ k!\ (1 + |\xi|)^{-k-1}\ \Lambda_0(|\xi|)$$

$$\left|a - \sum_0^{N-1} b_k\right| \leqslant c\ A^{N+1}\ N!\ (1 + |\xi|)^{-N-1}\ \Lambda(|\xi|)$$

(la fonction Λ peut être beaucoup plus grande que Λ_0 – sans quoi il n'y a pas de problème).

Faisons alors $N = \left[\frac{1 + |\xi|}{A}\right]$ (partie entière) ; il vient :

$$|a| \leqslant c\ N!\ \left(\frac{1 + |\xi|}{A}\right)^{-N-1} \Lambda(|\xi|) + c \sum_0^{N-1} k!\ \left(\frac{1 + |\xi|}{A}\right)^{-k-1} \Lambda_0(|\xi|).$$

Dans le second membre de cette inégalité, le premier terme est à décroissance exponentielle (d'après la formule de Stirling) ; il est donc majoré par un multiple de $\Lambda_0(|\xi|)$ car $\lim \frac{e^{-\varepsilon r}}{\Lambda_0(r)} = 0$ pour $\varepsilon > 0$.

Quant au deuxième terme, il est somme de $N = \left[\frac{1 + |\xi|}{A}\right]$ termes, tous inférieurs à $c\ \Lambda_0(|\xi|) \left(\frac{1 + |\xi|}{A}\right)^{-1} \leqslant \frac{c\ \Lambda_0(|\xi|)}{N}$. Il est donc majoré par $c\ \Lambda_0(|\xi|)$. (En poussant le calcul ci-dessus, on vérifie en fait sans trop de peine qu'on peut remplacer Λ par Λ_0 dans l'inégalité (1.12) qui définit l'équivalence $a \sim \Sigma\ b_k$).

5. Les espaces SH^Λ, $\mathrm{SH} = \cup\ \mathrm{SH}^\Lambda$, $\mathrm{SH}^\circ = \cap\ \mathrm{SH}^\Lambda$ sont munis de topologies localement complexes évidentes, pour lesquelles ils sont complets. (SH et SH° sont nucléaires, SH^Λ ne l'est pas).

(1.15) PROPOSITION. – SH° *est dense dans* SH.

Preuve. – Si $a \in \mathrm{SH}^\Lambda$ et si $\lim\limits_{r\to\infty} \dfrac{\Lambda'(r)}{\Lambda(r)} = +\infty$, on voit immédiatement que

$$\exp - \varepsilon\ \xi^2 \cdot a$$

tend vers a dans $\mathrm{SH}^{\Lambda'}$ quand $\varepsilon \to +0$. (On a posé $\xi^2 = \xi_1^2 + \cdots + \xi_n^2$)

6. Norme formelle(¹).

On suppose ici $\nu = n$. Soit $a = \Sigma\ a_k$ un symbole formel. Notons

$$|a_{k,\alpha,\beta}| = \left| \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^\alpha \left(\frac{\partial}{\partial \xi}\right)^\beta a_k(x\,,\,\xi) \right| .$$

Soit $\Lambda(r)$ une fonction poids comme dans (1.1). On pose

(1.16) $\quad \mathrm{N}_\Lambda\,(\Sigma\ a_k\ ,\ \mathrm{T}) =$

$$\Sigma\ \mathrm{C}_{k,\alpha,\beta}\ \ (1 + |\xi|)^{k+|\beta|}\ \Lambda(|\xi|)^{-1}\ |a_{k,\alpha,\beta}|\ \ \mathrm{T}^{2k+|\alpha|+|\beta|}$$

avec

$$\mathrm{C}_{k,\alpha,\beta} = \frac{2\,(2\,n)^{-k}\ k\,!}{(k + |\alpha|)\,!\ (k + |\beta|)\,!} . \tag{1.17}$$

Nous laissons au lecteur le soin de vérifier (en utilisant la formule de Cauchy comme dans (1.10)) que $\Sigma\ a_k$ est un symbole formel analytique si et seulement si pour tout compact $\mathrm{K} \subset \Omega$, il existe une fonction Λ et des constantes $c\,,\varepsilon$ telles que la série $\mathrm{N}_\Lambda\ (\Sigma\, a_k\ ,\mathrm{T})$ converge pour $x \in \mathrm{K}$, $\mathrm{T} < \varepsilon$, et que pour $x \in \mathrm{K}$ ($\xi \in \mathbf{R}^n$ quelconque) la somme soit inférieure à c.

(¹) Ceci est repris sans modification de [1].

Pour $\Lambda = 1$, on omettra Λ dans la notation :

$$N(\Sigma\, p_k\, ,\, T) = N_1(\Sigma\, p_k)\,.$$

Si $\Sigma\, p_k$, $\Sigma\, q_k$ sont deux symboles formels, on définit le symbole composé $\Sigma\, r_k = \Sigma\, p_k \circ \Sigma\, q_k$ par

$$(1.18)\quad r_m = \sum_{k+\ell+|\gamma|=m} \frac{i^{-|\gamma|}}{\gamma\,!} \left(\frac{\partial}{\partial \xi}\right)^{\gamma} p_k \cdot \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^{\gamma} q_\ell$$

(1.19) THEOREME. — *On a*

$$N_{\Lambda\Lambda'}\,(\Sigma\, p_k \circ \Sigma\, q_\ell\, ,\, T) \ll N_\Lambda\,(\Sigma\, p_k\, ,\, T)\,\ldots\ldots\, N_{\Lambda'}\,(\Sigma\, q_\ell\, ,\, T)$$

(le signe $\ll$ signifie que le coefficient de T^k dans le membre de droite majore celui de T^k dans le membre de gauche).

Preuve. — On a

$$|r_{m,a,\beta}| \leqslant \sum_{\substack{k+\ell+|\gamma|=m\\ a'+a''=a\\ \beta'+\beta''=\beta}} \frac{1}{\gamma!} \binom{\alpha}{\alpha'} \binom{\beta}{\beta''}\, |p_{k,a',\beta'+\gamma}|\; |q_{\ell,a''+\gamma,\beta''}|$$

d'où

$$N_{\Lambda\Lambda'}\,(\Sigma\, r_m\, ,\, T) = \sum_{m,a,\beta} c_{m,a,\beta}\,(1+|\xi|)^{m+|\beta|}\,\Lambda\Lambda'(|\xi|)^{-1}\,|r_{m,a,\beta}|\,T^{2m+|a|+|\beta|}$$

$$\ll \sum_{\substack{k\,a_1\,\beta_1\\ \ell\,a_2\,\beta_2}} \mu^{k\,a_1\,\beta_1}_{\ell\,a_2\,\beta_2} \cdot C_{k\,a_1\,\beta_1}\,(1+|\xi|)^{k+|\beta_1|}\,\Lambda(|\xi|)^{-1}\,|\,p_{k\,a_1\,\beta_1}|\,T^{2k+|a_1|+|\beta_1|}$$

$$C_{\ell\,a_2\,\beta_2}\,(1+|\xi|)^{\ell+|\beta_2|}\,\Lambda'(|\xi|)^{-1}\,|q_{\ell\,a_2\,\beta_2}|\,T^{2\ell\,|a_2|+|\beta_2|}$$

avec

$$(1.20)\quad \mu^{k\,a_1\,\beta_1}_{\ell\,a_2\,\beta_2} = \sum_{\gamma\leqslant\beta_1\,,\,a_2} \frac{1}{\gamma\,!} \binom{\alpha}{\alpha_1} \binom{\beta}{\beta_2} \frac{c_{m\,a\,\beta}}{c_{k\,a_1\,\beta_1\,\ell\,a_2\,\beta_2}}$$

(Dans la dernière somme, on a posé

$$m = k+\ell+|\gamma|\ ,\ \ \alpha = \alpha_1+\alpha_2-|\gamma|\ ,\ \ \beta = \beta_1+\beta_2-|\gamma|).$$

Après simplification on trouve :

$$\mu_{\ell \alpha_2 \beta_2}^{k \alpha_1 \beta_1} = \sum_{\gamma \leqslant \alpha_2, \beta_1} \frac{1}{2} (2n)^{-|\gamma|} \frac{m!}{k!\, \ell!\, \gamma!} \binom{\alpha}{\alpha_1} \binom{\beta}{\beta_2} \binom{m + |\alpha|}{k + \alpha_1}^{-1} \binom{m + |\beta|}{\ell + \beta_2}^{-1}$$

Comme on a :

$$\binom{\alpha}{\alpha_1} \binom{m}{k} \leqslant \binom{m + |\alpha|}{k + |\alpha_1|} , \quad \binom{\beta}{\beta_2} \binom{m}{\ell} \leqslant \binom{m + |\beta|}{\ell + |\beta_2|}$$

et
$$\frac{m!}{k!\, \ell!\, \gamma!} \binom{m}{k}^{-1} \binom{m}{\ell}^{-1} \leqslant \frac{|\gamma|!}{\gamma!}$$

il vient finalement

$$\mu_{\ell \alpha_2 \beta_2}^{k \alpha_1 \beta_1} \leqslant \sum_{\gamma} \frac{1}{2} (2n)^{-|\gamma|} \frac{|\gamma|}{\gamma!} = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2n} \cdots \frac{1}{2n}\right) = 1$$

ce qui démontre le théorème.

(1.21) Corollaire. – *Soit h un symbole (ou un symbole formel) analytique de degré* -1 (i.e. d'ordre $\Lambda = (1 + |\xi|)^{-1}$). *Alors la série géométrique $\Sigma\, h^n$ est un symbole formel analytique de degré* 0 (i.e. d'ordre $\Lambda = 1$), (les puissances h^n sont prises au sens du produit de composition (1.15)).

Preuve. – On a $\mathrm{N}(\Sigma\, h^n , \mathrm{T}) \leqslant \Sigma\, \mathrm{N}(h , \mathrm{T})^n$.

Or la série $\mathrm{N}(h , \mathrm{T})$ converge et n'a pas de terme constant.

En d'autres termes, le symbole formel $1 - h$ possède un inverse qui est encore un symbole formel analytique.

(1.22) *Remarque.* – Si h est un symbole (formel) analytique de degré $-\varepsilon$ avec $\varepsilon > 0$ (i.e. d'ordre $\Lambda = (1 + |\xi|)^{-\varepsilon}$), comme $(1 - h)\ (1 + h + h^2 + \cdots h^{k-1}) = 1$ et comme h^k est de degré -1 dès que $k\varepsilon \geqslant 1$, le symbole formel analytique $(1 - h)$ est encore inversible.

7. Construction d'un symbole à partir d'un symbole formel.

(1.23) Théorème. – *Soit $\Sigma\, a_k(x , \xi)$ un symbole analytique formel, défini pour ξ assez grand, sur Ω. Pour tout compact* K *de Ω, il existe un symbole analytique $a(x , \xi)$ défini pour ξ grand et tel que $a \sim \Sigma\, a_k$ au voisinage de* K.

La preuve repose sur un théorème de moments de Carleson [2]. Elle figure dans [1] § 2, n° 4, dans un cas un peu moins général.

Notons S_A l'espace des suites $S = (S_p)_{p=0,1,\dots}$ telles que

$$\|S\|^2 = \Sigma \left|\frac{S_p}{A^p\, p\,!}\right|^2 < \infty.$$

Notons H l'espace des fonctions $f(\lambda)$ holomorphes dans l'angle $|\mathrm{Im}\,\lambda| < |\varepsilon\, \mathrm{Re}\,\lambda|$, telles que $e^{\epsilon\sqrt{|\lambda|}} f$ soit bornée.

(1.24) LEMME. – *Pour tout* A *il existe une constante* $\varepsilon > 0$ *et une application linéaire continue* $V = S_A \to H_\epsilon$ *telle que avec* $f = V(S)$, *on ait* :

$$\frac{i^p}{p\,!}\int_{-\infty}^{+\infty} \lambda^p\ f(\lambda)\, d\lambda = S_p$$

$$\sup_{|im\,\lambda| < \epsilon |Re\,\lambda|} e^{\epsilon\sqrt{|\lambda|}}\ f \leqslant C\, \|S\|$$

Preuve. – (Nous reprenons les notations de [2]).

Posons $w(\lambda) = \exp - 2B\sqrt{|\lambda|}$.

Soit $P_m(\lambda) = \sum_0^m \alpha_{mp}\, \lambda^p$ la suite de polynômes uniquement déterminés par les conditions :

$$P_m \text{ est réel} \quad ; \quad \alpha_{mm} > 0$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} w(\lambda)\, P_m(\lambda)\, P_n(\lambda)\, d\lambda = \begin{cases} 0 & \text{si } m \neq n \\ 1 & \text{si } m = n \end{cases}$$

posons $u(z) = B\ re\sqrt{-2iz}$, pour $\mathrm{Im}\, z \geqslant 0$ (on choisit la détermination de $\sqrt{-2iz}$ qui est réelle positive sur l'axe imaginaire). u est harmonique, et $u(\lambda) = w(\lambda)$ pour λ réel.

Posons enfin $\mu(r) = B\sqrt{2r} = \sup_{\substack{|z| \leqslant r \\ \mathrm{Im}\, z \geqslant 0}} u(z)$.

D'après Carleson [2], si Q est un polynôme et

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |Q^2(\lambda)|\ w(\lambda) \leqslant 1$$

on a

$$|Q(z)| \leqslant e^{1/2\pi e}\ |y|^{-1/2}\ e^{\mu(r)} \cdot (y = im\, z\ ,\ r = |z|)\,.$$

La formule de Cauchy implique donc :

$$\left|\frac{Q^{(p)}(0)}{p\,!}\right| = \left|\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{Q(re^{i\theta})}{r^p}\,d\theta\right| \leqslant \frac{e^{1/2\pi e}}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{e^{\mu(r)}}{r^{p+1/2}}\,\frac{d\theta}{|\sin\theta|^{1/2}}$$

D'où, avec

$$M_p = \sup_{r>0}\ r^{p+1/2}\,e^{-\mu(r)} = \left(\frac{2p+1}{Be\sqrt{2}}\right)^{2p+1}$$

$$k = e^{1/2\pi e}\cdot\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{d\theta}{|\sin\theta|^{1/2}}$$

$$\left|\frac{Q^{(p)}(0)}{p\,!}\right| \leqslant \frac{k}{M_p}$$

Il en résulte qu'on a

$$\sum_0^\infty \left|\frac{P_m^{(p)}(0)}{p\,!}\right|^2 = \sum_{m=0}^\infty \left|\frac{\alpha_{mp}}{p!}\right|^2 \leqslant \frac{k^2}{M_p{}^2}\,.$$

On cherche f sous la forme $f = w\cdot\Sigma\ b_m\ P_m$:

Posons $b_m = \Sigma\ \alpha_{mp}\ i^{-p}\ p\,!\ \ S_p$.

On a alors

$$\sum|b_m|^2 \leqslant \sum_m\left(\sum_p |p\,!^2\ A^p\,\alpha_{mp}|^2\right)\left(\sum_p\left|\frac{S_p}{A^p\,p\,!}\right|^2\right)$$

$$\leqslant k^2\,\|S\|^2\sum_{p=0}^\infty\left(\frac{A^p\,p\,!^2}{M_p}\right)^2$$

Si on a choisi B assez petit, la somme

$$k'^2 = \sum_0^\infty\left(\frac{A^p\,p\,!^2}{M_p}\right)^2$$

est finie.

Remarquons enfin que si $\varphi(z) = \Sigma\, b_m\, P_m(z) = \Sigma\, a_p\, z^p$, on a :

$$a_p = \sum_m b_m\, \alpha_{mp} \quad , \quad \text{donc} \quad |a_p| \leqslant \frac{kk'\,\|S\|}{M_p} \cdot$$

Il en résulte, avec $c = kk'\ \|S\|$

$$|\varphi(z)| \leqslant C\left(\frac{1}{M_0} + \sqrt{|z|}\, \sum_1^\infty \frac{|z|^{p-1/2}}{M_p}\right) \leqslant C\left(\frac{1}{M_0} + \sqrt{|z|}\, e^{\mu(|z|)} \sum_1^\infty \frac{M_{p-1}}{M_p}\right).$$

Comme $\sum_1^\infty \frac{M_{p-1}}{M_p}$ est fini, et comme $\mu(z) = B\sqrt{2|z|} < 2B\sqrt{|z|}$, la fonction $f = e^{-2B\sqrt{|\lambda|}}\ \varphi(\lambda)$ se prolonge bien en une fonction holomorphe dans l'angle $|im\,\lambda| < \varepsilon\,|re\,\lambda|$ et y vérifie l'inégalité

$$|f(\lambda)| \leqslant C\ \|S\|\ \exp[-\varepsilon\sqrt{|\lambda|}]$$

où C est une constante convenable, pourvu qu'on ait choisi ε assez petit.

Soit maintenant V_ϵ l'espace des fonctions holomorphes bornées dans l'angle $|im\ t| < \varepsilon\ re\ t$.

(1.25) LEMME. – *Pour tout* A, *il existe des constantes* ε, c, B *et une application linéaire continue* $U : S_A \to V_\epsilon$ *telle que si* $g = U(s)$, *on a* :

$$\left| g(t) - \sum_0^{N-1} S_p\, t^{-p} \right| \leqslant C\, B^N\, |t|^{-N}\, N\,!$$

Preuve. – Posons

$$g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda/t}\ f(\lambda)\, d\lambda = t\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda}\, f(\lambda t)\, d\lambda$$

où $f = V(s)$ est la fonction fournie par le lemme (1.21). On a alors

$$g(t) - \sum_0^{N-1} S_p\, t^{-p} = t\int_{-\infty}^{\infty} \left(e^{i\lambda} - \sum_0^{N-1} i^p\, \lambda^p\right) f(\lambda t)\, d\lambda$$

L'intégrale converge si $|im\ t| < \varepsilon\ re\ t$ et on a

$$\left| g(t) - \sum_{0}^{N-1} g_p\ t^{-p} \right| \leqslant C\ \|S\|\ \frac{|t|^{-N}}{N\,!} \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda^N\ e^{-\epsilon|\lambda|^{1/2}}\ d\lambda$$

$$= C\ \|S\|\ \frac{|t|^{-N}}{N\,!}\ 4\ \frac{(2N+1)\,!}{2N+1} \leqslant C\ \|S\|\ B^N\ N\,!\ |t|^{-N}\,.$$

Fin de la démonstration du théorème.

Dans ce qui suit, je pose $t_\xi = (\Sigma\ \xi_i^2)^{1/2}$ (je choisis la détermination positive pour ξ réel $\neq 0$) ; c'est une fonction holomorphe pour $|im\ \xi| < |re\ \xi|$, et on a $\frac{|t_\xi|}{|\xi|} > \left(\frac{1-\varepsilon^2}{1+\varepsilon^2}\right)^{1/2}$ pour $|im\ \xi| < \varepsilon\ |re\ \xi|$).

Pour A assez grand, l'application qui à $(x\,,\,\xi)$ associe la suite

$$S(x\,,\,\xi) = (t_\xi^p\ a_p(x\,,\,\xi)) \qquad p = 0,\ 1, \ldots$$

est holomorphe de $K(\varepsilon, R)$, à valeur dans S_A et on a $\|S(x\,,\,\xi)\|_A \leqslant \Lambda(|\xi|$.

Posons alors, (V est l'opération du lemme 1.22)

$$a(x\,,\,\xi) = V(S(x\,,\,\xi)\,,\,t_\xi)$$

c'est une fonction holomorphe dans $K(\varepsilon\,,R)$ et on a

$$\left| a(x\,,\,\xi) - \sum_{0}^{N-1} a_k(x\,,\,\xi) \right| \leqslant C\ \Lambda(|\xi|)\ B^N\ N\,!\ |t_\xi|^{-N}$$

qui exprime ((1.12)) qu'on a $a \sim \Sigma\ a_k$.

8. Transformée de Fourier des symboles analytiques.

[Dans ce qui suit, on fait $\nu = 0$ i.e. il n'y a plus de variable x].

Soit $a(\xi)$ un symbole analytique, défini pour ξ grand, de degré $-m$ (on a donc $|a(\xi) \leqslant c\ |\xi|^{-m}$ pour $|\xi| \geqslant R$, $|im\ z| < \varepsilon\ |re\ \xi|$, si ε est assez petit).

Définissons $\widetilde{a}$ par $\widetilde{a}(\xi) = \begin{cases} 0 & \text{si } |\xi| < R \\ a(\xi) & \text{si } |\xi| \geqslant R \end{cases}$

Soit T_a la transformée de Fourier inverse de $\widetilde{a}$: c'est une fonction continue et on a pour $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^n)$

$$(1.26) \int T_a(x)\, \varphi(x)\, dx = (2\pi)^{-n} \iint_{|\xi|>R} e^{ix.\xi}\, a(\xi)\, \varphi(x)\, dx\, d\xi$$

(1.27) Theoreme. – *On suppose que φ est analytique au voisinage de 0. Alors la forme linéaire $a \to \int T_a\, \varphi$ se prolonge continûment à l'espace de tous les symboles analytiques.*

Pour tout symbole a, T_a est ainsi défini comme hyperfonction. T_a coïncide dans $\mathbf{R}^n - \{0\}$ avec une fonction analytique dans le cône $|im\, x| < \varepsilon\, |\mathrm{Re}\, x|$ pour ε assez petit.

Preuve. – Dans la deuxième intégrale (1.26), on va considérer $e^{ix,\xi}\, a(\xi)\, \varphi(x)\, dx\, d\xi$ comme une forme différentielle holomorphe et déplacer le domaine d'intégration.

Soit r un nombre assez petit pour que φ coïncide pour $|x|<r$ avec une fonction holomorphe dans la boule complexe de rayon r.

Soit $\chi(x)$ une fonction C^∞ positive, nulle pour $|x| \geqslant \frac{2r}{3}$, égale à 1 pour $|x| \leqslant \frac{r}{3}$.

Pour $t \geqslant 0$, posons :

$$x^t = x + it\, \chi(x)\, \frac{\xi}{|\xi|}$$

$$\xi^t = \xi + it\, (|\xi| - R)\, (1 - \chi(x))\, \frac{x}{|x|^2}.$$

On a alors pour t assez petit (en notant

$$dx^t \wedge d\xi^t = dx_1^t \wedge \ldots dx_n^t \wedge \ldots d\xi_n^t)$$

$$(1.28) \int T_a\, \varphi = (2\pi)^{-n} \iint_{|\xi|>R} e^{ix^t\cdot\xi^t}\, a(\xi^t)\, \varphi(x^t)\, dx^t \wedge d\xi^t :$$

Dans l'intégrale (1.28), on a $dx^t \wedge d\xi^t = \gamma(x\,,\xi)\, dx \wedge d\xi$, où $\gamma(x\,,\xi)$ est une fonction C^∞, bornée pour $\xi > R$.

La partie réelle de l'exposant $ix^t \cdot \xi^t$ est $-t|\xi| + R(1-\chi(x))$. On obtient donc, avec

$$\|a\|_{\epsilon,\Lambda} = \sup_{\substack{|\xi|\leqslant R\\ t\leqslant \epsilon}} a(\xi^t) \wedge (|\xi|)^{-1}$$

$$\|\varphi\|_\epsilon = \sup_{t\leqslant\epsilon} \int |\varphi(x^t)|\, dx$$

$$(1.29) \qquad \left|\int T_a \varphi\right| \leqslant C\, \|a\|_{\epsilon,\Lambda}\, \|\varphi\|_\epsilon \int_{|\xi|>R} e^{-t|\xi|+Rt} \Lambda(|\xi|)\, d\xi.$$

Comme pour tout symbole a, analytique pour $|\xi| > R$, on peut trouver Λ comme dans (1.1) telle que (cf. (1.15))

$$\Lambda(|\xi|)^{-1}\, [\exp(-\lambda\xi^t \cdot \xi^t)\, a(\xi^t) - a(\xi^t)]$$

tende vers 0 quand $\lambda \to +0$, uniformément pour $|\xi| < R$, $t < \varepsilon$ (si ε est assez petit), $x \in \mathbf{R}^n$, la première partie du théorème est démontrée.

En changeant encore le domaine d'intégration dans la formule (1.18), on voit en outre que si φ est nulle au voisinage de 0, on a

$$\int T_a \cdot \varphi = \int T_a(x)\, \varphi(x)\, dx$$

avec

$$(1.30) \qquad T_a(x) = (2\pi)^{-n} \int_{|\xi|>R} e^{ix\cdot\xi'}\, a(\xi')\, d\xi'$$

où on a posé maintenant $\xi' = \xi + i\varepsilon\, (|\xi| - R)\, \dfrac{x}{|x|}$

$$d\xi' = d\xi'_1 \wedge d\xi'_2 \wedge \cdots d\xi'_n$$

on a alors aussi pour $|Z| < \varepsilon\, |x|$

$$T_a(x+Z) = (2\pi)^{-n} \int_{|\xi|>R} e^{i(x+z)\cdot\xi'}\, a(\xi')\, d\xi'$$

ce qui montre que T_a se prolonge en une fonction holomorphe dans le cône $|im\ x| < \varepsilon\, |re\ x|$, où elle vérifie

$$|T_a(x)| \leqslant C \int_{|\xi|>R} e^{\left(\left|\frac{Im\, x}{Re\, x}\right| - \epsilon\right)|\xi|}\, \Lambda(|\xi|)\, d\xi$$

(on a supposé

$$|a(\xi')\, d\xi'| \leqslant (2\pi)^n \text{ C } \Lambda(|\xi|)\, d\xi$$

pour $\quad |\xi| > \mathrm{R} \;,\; |im\ \xi| < \varepsilon |re\ \xi|$).

Le théorème est démontré.

(1.31) *Si* $a \sim 0$, T_a *est une fonction analytique aussi au voisinage de* 0.

On a alors en effet $a(\xi) \leqslant \mathrm{C}\, e^{-\epsilon|\xi|}$ pour $|\xi| \geqslant \mathrm{R}$ si c est assez grand, ε assez petit. Comme a est intégrable, T_a est la fonction définie par la formule

$$\mathrm{T}_a(x) = (2\pi)^{-n} \int_{|\xi|>\mathrm{R}} a^{ix.\xi}\, a(\xi)\, d\xi .$$

L'intégrale converge encore pour $|im\ x| < \varepsilon$.

Nous allons prouver maintenant une réciproque du théorème (1.27) :

(1.32) THEOREME. — *Soit* $f(x)$ *une fonction holomorphe dans le domaine* $|im\ x| < \varepsilon\, |re\ x|$, $|x| < \varepsilon$; *il existe un symbole analytique* $a(\xi)$ (*qui est en fait une fonction entière de* ξ), *telle que* $\mathrm{T}_a - f$ *soit analytique au voisinage de* 0.

Preuve. — On montrera dans l'appendice de ce numéro qu'il existe une fonction g holomorphe dans un cône complexe $|im\ x| < \varepsilon'\ |re\ x|$ et telle que $e^{\varepsilon'|re\ x|^2}\, g$ soit bornée dans tous les domaines :

$$|im\ x| < \varepsilon'\ |re\ x| \quad , \quad |x| > \mathrm{R}\ (\mathrm{R} > 0)$$

si on a choisi ε' assez petit.

Soit alors $\widetilde{g}$ une hyperfonction (cf. [8]) sur $\mathbf{R}^n$, égale à g hors de l'origine ; et soit $a(\xi)$ la transformée de Fourier de g (c'est une fonction entière) :

$$a(\xi) = \int e^{ix\cdot\xi}\, \widetilde{g}(x)\, dx .$$

Il s'agit de prouver que a est un symbole analytique ($\widetilde{g}$ est la transformée de Fourier inverse de a). Pour cela, puisque de toute façon a est holomorphe au voisinage de 0, il suffit de prouver que dans le cône $|im\ \xi| < \varepsilon' |re\ \xi|$, la fonction $e^{-\lambda|\xi|}\ a(\xi)$ est bornée pour tout $\lambda > 0$.

Or, pour tout $\lambda > 0$, on peut décomposer $\tilde{g}$ en une somme :

$$\tilde{g} = T_\lambda + S_\lambda$$

où T_λ est une fonctionnelle analytique portée par la boule de rayon $\lambda/2$. (donc puisque $\lambda > \lambda/2$, $|\hat{T}_\lambda(\xi)| \leqslant c \sup_{|x|<\lambda} |e^{-ix\cdot\xi}| = c\ e^{\lambda|\xi|}$

– cf. le théorème de Paley et Witner –),

et S_λ est la fonction nulle pour $|x| < \lambda/2$, égale à g pour $|x| > \lambda/2$ donc (pour ξ, η réels)

$$\hat{S}_\lambda(\xi + i\eta) = \int_{|x|>\lambda/2} e^{-i(\xi+i\eta\cdot x)}\ g(x)\ dx = \int_{|x|>\lambda/2} e^{-i(\xi+i\eta\cdot x')} g(x')dx'$$

dans la deuxième intégrale, on pose

$$x' = x - i\varepsilon' \left(|x| - \frac{\lambda}{2}\right) \frac{\xi}{|\xi|} .$$

L'intégrale converge pour toutes les valeurs de ξ et η. Pour $|\eta| \leqslant \varepsilon' |\xi|$, la partie réelle de l'exposant $-\ i(\xi + i\eta)\cdot x'$ est

$$\frac{\lambda}{2}\ |\xi| - \varepsilon' |\xi|\ |x| + x\cdot\eta \leqslant \frac{\lambda}{2}\ |\xi|\ ,$$

de sorte qu'on a

$$|\hat{S}(\xi + i\eta)| \leqslant e^{\frac{\lambda}{2}|\xi|} \int_{|x|>R} |e^{-\epsilon'|x|^2}\ dx'| \leqslant c\ e^{\frac{\lambda}{2}|\xi|}$$

Ceci achève la démonstration.

Soit a un symbole analytique défini pour ξ grand.

Soit T_a l'hyperfonction définie par (1.27). Soit g comme ci-dessus, telle que la fonction $\varphi = T_a - g$ soit analytique au voisinage de 0.

Soit alors a' la transformée de Fourier de $T_a - \varphi$, de sorte que a' est un symbole analytique (a' est même une fonction entière).

On a $a \sim a'$, car $a - \widetilde{a}'$ est la transformée de Fourier de φ qui est holomorphe et bornée dans un domaine complexe C_ϵ

$$(|im\, x|^2 < \varepsilon |re\, x|^2 + \varepsilon)$$

et on a

(1.33) LEMME. – *Si φ est holomorphe, bornée, dans C_ϵ, la transformée de Fourier de φ est holomorphe, à décroissance exponentielle, dans un voisinage conique de* $\mathbf{R}^n - \{0\}$.

Preuve. – En déplaçant le domaine d'intégration, comme ci-dessus, on voit qu'on a pour ξ, η réels, $\xi \neq 0$, $|\eta|^2 < \varepsilon' |\xi|^2$

$$\hat{\varphi}(\xi + i\eta) = \int e^{-ix' \cdot (\xi + i\eta)} \varphi(x')\, dx'$$

où on a posé cette fois $x' = x - \varepsilon' (|x| + \mu) \dfrac{\xi}{|\xi|}$ (en supposant ε', μ assez petits) ; d'où

$$|\hat{\varphi}(\xi + i\eta)| \leqslant e^{-\varepsilon' \mu |\xi|} \int |e^{-\varepsilon' |x|\, |\xi| + x \cdot \eta} \varphi(x')\, dx'|$$

la dernière intégrale converge, et reste bornée, dans le domaine complexe $|\eta| < \varepsilon'' |\xi|$, $|\xi| > \varepsilon''$. (si $\varepsilon'' < \varepsilon'$).

Combinant ceci avec le théorème (1.23), on obtient

(1.34) *Soit $\Sigma\, a_k(x, \xi)$ un symbole analytique formel, défini pour ξ assez grand. Pour tout compact $K \subset \Omega$, il existe un voisinage complexe V de K et une fonction $a(x, \xi)$ holomorphe sur $V \times \mathbf{C}^n$, telle que a soit un symbole analytique, et $a \sim \Sigma\, a_k$ (sur* V) (on utilise ici en fait la version "avec paramètre" du théorème 1.32).

9. Appendice.

Soit U un ouvert de $\mathbf{C}^n$, ψ une fonction C^∞ sur U telle qu'il existe une suite $\eta_k \in \mathcal{D}(U)$, avec $0 \leqslant \eta_k \leqslant 1$, $e^{-\psi} |d'' \eta_k|^2 \leqslant$ constante et pour tout compact $K \subset U$, on a $\eta_k = 1$ sur K pour k assez grand.

Soit φ une autre fonction C^∞ sur Ω. Soit H_0 l'espace de Hilbert des fonctions (mesurables) f telles que

$$\|f\|_0^2 = \int_U |f|^2\, e^{-\varphi + 2\psi} < +\infty.$$

Soit H_1 l'espace de Hilbert des formes $\omega = \sum_1^n \omega_j \overline{dz}_j$ telles que

$$\|\omega\|_1^2 = \int_U (\Sigma |\omega_j|^2)\, e^{-\varphi+\psi} < +\infty.$$

Soit enfin T l'opérateur non borné : $H_0 \to H_1$, défini par d'' (son domaine est l'espace des $f \in H_0$ telles que la dérivée au sens des distributions $d''f = \Sigma \dfrac{\partial f}{\partial \overline{z}_k} \overline{dz}_k$ soit dans H_1).

D'après Hörmander ([3], inégalité (4.2.9), page 84) on a :

(1.35) $$\int_U (L\varphi(\omega) - 2\,|d''\psi \cdot \omega|^2)\, e^{-\varphi} \leqslant 2\,\|T^*\omega\|_0^2$$

si ω est dans le domaine de T^* et $d''\omega = 0$. On a posé

$$L\varphi(\omega) = \Sigma \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z_k\, \partial \overline{z}_\ell}\, \omega_k \overline{\omega}_\ell \quad , \quad d''\psi \cdot \omega = \Sigma \frac{\partial \psi}{\partial \overline{z}_k} \cdot \omega_k .$$

Supposons alors qu'on a pour tout vecteur ξ

$$L\varphi(\xi) - 2\,|d''\psi \cdot \xi|^2 \geqslant 2\,c\,|\xi|^2$$

où c est une fonction strictement positive sur U.

On alors (comparer au théorème (4.4.1) de [3]).

(1.36) *Pour toute forme* $S = \Sigma\, S_k \overline{dz}_k$ *telle que* $d''S = 0$, *et*

$$\|S\|_2^2 = \int_U (\Sigma\, |S_k|^2)\, \frac{e^{-\varphi+2\psi}}{c} < +\infty ,$$

$$\|S\|_1^2 = \int (\Sigma\, |S_k|^2)\, e^{-\varphi+\psi} < \infty$$

il existe $g \in H_0$, *telle que* $d''g = S$ *et*

$$\|g\|_0^2 = \int |g|^2\, e^{-\varphi+2\psi} \leqslant \|S\|_2^2$$

(on a en effet $\int (S \cdot \overline{\omega})\, e^{-\varphi+\psi} = (S|\omega)_{H_1} \leqslant \|S\|_2\ \|T^*\omega\|_0$; on peut donc trouver $g \in H_0$ avec $\|g\|_0 \leqslant \|S\|_2$, telle que

$$\int (S \cdot \bar{\omega})\, e^{-\varphi+\psi} = (g|T^*\omega)_{H_0}$$

pour toute ω telle que $d''\omega = 0$, dans le domaine de T*. Comme $d''S = 0$, ceci implique $d''f = S$).

On applique ceci dans le cas suivant : $U = C_{\epsilon,a}$ est l'ouvert des $z = x + iy$ tels que $\varepsilon x^2 - y^2 + a < 0$.

$$\psi = 2 \operatorname{Log} \left(\frac{\varepsilon x^2 - y^2 + a + 1}{\varepsilon x^2 - y^2 + a}\right)$$

(de sorte que $e^{-\psi}$ s'annule à l'ordre 2 au bord de U, et on est bien dans les conditions de l'inégalité (4.2.9) de [3]).

On a $d''\psi \cdot \xi = 2(\overline{z}_\epsilon \cdot \xi)\,(\varepsilon x^2 - y^2 + a + 1)^{-1}\,(\varepsilon x^2 - y^2 + a)^{-1}$ (où on désigne par z_ϵ le vecteur de coordonnées $(z_\epsilon)_k = \varepsilon x_k + iy_k$).

On choisit alors

$$\varphi(z) = -x^2 + y^2 + 2 \operatorname{Log}\left(\frac{1}{\varepsilon x^2 - y^2 + a}\right) \quad (x = re\, z \;\; , \;\; y = im\, z).$$

De sorte qu'on a :

$$L\varphi(\xi) = 4(1-\varepsilon)\,(\varepsilon x^2 - y^2 + a)^{-1}\,|\xi|^2 + 8\,|\overline{Z}_\epsilon \cdot \xi|^2\,(\varepsilon x^2 - y + a)^{-2}$$

$$\text{et } L\varphi(\xi) - 2\,|d''\psi \cdot \xi|^2 \geqslant c|\xi|^2 \quad , \quad c = 4(1-\varepsilon)\,(\varepsilon x^2 - y^2 + a)^{-1}.$$

Soit alors f holomorphe pour $|im\, z| < \varepsilon\, |re\, z|$, $|z| < r$.

On peut trouver ε, a, r_1, r_2 tels que f soit holomorphe au voisinage de l'ensemble fermé

$$r_1 \leqslant |z| \leqslant r_2 \quad , \quad \varepsilon x^2 - y^2 + a \leqslant 0$$

(avec $a < 0$, de petite valeur absolue, de sorte que $U = C_{\epsilon,a}$ est voisinage de 0).

Soit χ une fonction C^∞, égale à 1 pour $|z| \geqslant r_2$ et nulle pour $|z| \leqslant r_1$

et soit $$S = d''(\chi f) = f\, d''\chi.$$

La restriction de S à $U = C_{\epsilon,a}$ est bien définie, vérifie $d''s = 0$ et on a

$$\|S\|_2^2 = \int (\Sigma\, |S_k|^2)\, e^{-\varphi+2\psi} \leqslant C \sup_{\substack{z \in C_{\epsilon,a} \\ r_1 \leqslant |z| \leqslant r_2}} |f(z)|\,.$$

Soit alors g la fonction fournie par (1.36) : la formule de Cauchy montre que g décroît comme $\exp - \lambda|z|^2$ à l'infini ; la fonction $f_1 = g(1 - \psi) f$ est holomorphe pour $Z \in C_{\epsilon, a}$, $|im\, z| < \varepsilon' |re\, z|$ et décroit comme g à l'infini. Elle diffère de f par $f_2 = g - \psi f$ qui est holomorphe au voisinage de 0.

Remarquons que si on choisit pour g l'unique solution de $d''g = S = d''(\psi f)$ qui est orthogonale à Ker d'' (ie. à l'espace des fonctions holomorphes de H_0), g dépend linéairement et continûment de f. En particulier, si f dépend analytiquement d'un paramètre, il en est de même de g (donc aussi de f_1) : c'est ce résultat qu'on utilise dans (1.34).

10. Construction de fonctions poids holomorphes.

Le résultat suivant peut être utile pour ramener l'étude d'un symbole d'ordre très grand à celle d'un symbole d'ordre fini

$$(\Lambda(r) \leqslant c\,(1 + r)^d).$$

(1.37) LEMME. – *Soit* $\Lambda(r)$ *une fonction croissante, comme dans* (1.1) (*ie.* $\lim_{r \to \infty} e^{-\epsilon r} \Lambda(r) = 0$ *si* $\varepsilon > 0$). *Il existe une fonction entière* $\varphi(z)$ *telle que*

1. $e^{-\epsilon|z|} \varphi(z)$ *est bornée pour tout* $\varepsilon > 0$
2. $|\varphi(z)| \geqslant \Lambda(|z|)$ pour $|im\, z| \leqslant |re\, z|$.

Preuve. – Choisissons (c'est possible) une fonction $\varepsilon(r)$ qui décroît et tend vers 0 à l'infini, et une constante c, de sorte que

i) $$\Lambda(r) \leqslant c \left| \frac{sh\,(2\pi\varepsilon(r^2)\, e^{i\pi/4}\, r)}{2\pi\varepsilon(r^2)\, e^{-i\pi/4}\, r} \right|^2$$

ii) $$t^2\, \varepsilon^4(t) \sum_{n > t} \frac{1}{n^4} \leqslant \frac{1}{2} \quad \text{pour} \quad t \geqslant 0$$

posons alors

$$\varphi(z) = c\, e^2 \prod_1^\infty \left(1 + \frac{\varepsilon^2(n)\, z^2}{n^2}\right). \tag{1.37}$$

On a :

$$|\varphi(z)| \leqslant \prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{\varepsilon^2(k)\, z^2}{k^2}\right) \prod_{k=n+1}^{\infty} \left(1 + \frac{\varepsilon^2(n)\, |z|^2}{k^2}\right) =$$

$$= |P_{2n}(z)| \, \frac{sh\, 2\pi\varepsilon(n)\, |z|}{2\pi\varepsilon(n)\, |z|}$$

où P_{2n} est un polynôme de degré $2n$. Comme $\varepsilon(n)$ tend vers 0 quand n tend vers l'infini, ceci prouve la première partie du lemme.

Par ailleurs, pour $|im\, z| \leqslant |re\, z|$, on a :

$$\left|1 + \frac{\varepsilon^2(n)\, z^2}{n^2}\right| \geqslant 1 + \frac{\varepsilon^4(n)\, |z|^4}{n^4} \geqslant 1.$$

Comme on a par hypothèse

$$\sum_{n>|z|^2} \frac{\varepsilon^4(|z|^2)\, |z|^4}{n^4} \leqslant 1/2$$

donc

$$\prod_{n>|z|^2} \left(1 + \frac{\varepsilon^4(|z|^2)\, |z|^4}{n^4}\right) \leqslant e^2$$

on a finalement (pour $|im\, z| \leqslant |re\, z|$)

$$|\varphi(z)| \geqslant c\, e^2 \prod_{n \leqslant |z|^2} \left(1 + \frac{\varepsilon^4(|z|^2)\, |z|^4}{n^4}\right) \geqslant c \prod^{\infty} \left(1 + \frac{\varepsilon^4(|z|^2)\, |z|^4}{n^4}\right)$$

$$= c \left|\frac{sh\,(2\pi\, e^{i\pi/4}\, |z|)}{2\pi\, e^{i\pi/4}\, |z|}\right|^2 \geqslant \Lambda(|z|)$$

2. Intégrales oscillantes analytiques et opérateurs pseudo-différentiels.

1. Espaces d'hyperfonctions.

Comme au § 1, Ω est un ouvert de l'espace numérique R^n. Soit K un compact de Ω.

(2.1) *Nous notons* $\mathcal{K}(\Omega, \complement K) = \mathcal{H}'(\Omega) \cap \mathcal{H}(\complement K)$ *l'espace des hyperfonctions*([2]) *qui coïncident avec une fonction analytique en dehors de* K.

(2.2) *Nous notons* $\mathcal{K}_0(\Omega, K) = \mathcal{H}'_0(\Omega) \cap \mathcal{H}(K)$ *l'espace des fonctionnelles analytiques réelles à support compact (dans* Ω*) qui coïncident avec une fonction analytique au voisinage de* K.

Ces deux espaces sont en dualité, de façon naturelle([3]) par la forme bilinéaire $\int_\Omega f\, g$ définie comme suit : si $g \in \mathcal{K}_0(\Omega, K)$ est analytique dans l'ouvert $U \supset K$ ($U \subset \Omega$), choisissons $\varphi \in \mathcal{D}(U)$ égale à 1 au voisinage de K. On a alors $\varphi g \in \mathcal{D}(U)$, et $(1-\varphi) g = g - \varphi g$ est une fonctionnelle analytique à support compact dans $U - K$.

Soit maintenant $V \subset U$ un voisinage de K dans lequel on ait $\varphi = 1$, et choisissons $\psi \in \mathcal{D}(V)$ égale à 1 au voisinage de K. $(1-\psi) f$ est alors C^∞ dans Ω, nulle au voisinage de K, si $f \in \mathcal{K}(\Omega, \complement K)$. Posons $\psi f = f - (1-\psi) f$; c'est une fonctionnelle analytique à support dans V. On pose alors par définition

$$(2.3) \int_\Omega f g = \int_{\complement K} f \cdot (1-\varphi) g + \int_V \psi f \cdot g + \int_\Omega (1-\psi) f \cdot \varphi g$$

où la première intégrale représente la dualité entre fonctions analytiques et fonctionnelles analytiques à support compact sur $\complement K$, la deuxième représente la dualité entre fonctionnelles analytiques et fonctions analytiques sur V, et la troisième est l'intégrale ordinaire.

On vérifie sans peine que le résultat ne dépend pas du choix de φ et ψ.

Ces deux espaces sont munis de topologies localement convexes qui en font des espaces nucléaires complets, et pour lesquelles ils sont dual l'un de l'autre. La topologie de $\mathcal{K}(\Omega, \complement K)$ est la moins fine des topologies localement convexes qui rende continue les applications suivantes :

i) l'application de restriction $f \mapsto f / \complement K \in \mathcal{H}(\complement K)$

([2]) Pour la définition des fonctionnelles analytiques réelles et des hyperfonctions nous renvoyons à l'article de M. Sato [9] et à celui de A. Martineau [7], ou au livre de P. Schapira [10].

([3]) Quitte à choisir une fois pour toutes une mesure de densité analytique et positive : ici, la mesure de Lebesgue.

ii) pour toute $\psi \in \mathcal{D}(\Omega)$, égale à 1 au voisinage de K, l'application $f \to \psi f \in \mathcal{H}'$ (supp φ) (espace des fonctionnelles analytiques réelles portées par le compact supp φ).

La topologie de $\mathcal{K}_0(\Omega, K)$ est la plus fine des topologies localement convexes qui rende continues :

iii) l'application naturelle d'inclusion $\mathcal{H}'_0(\complement K) \to \mathcal{K}_0(\Omega, K)$ (où $\mathcal{H}'_0(\complement K)$ est l'espace des fonctionnelles analytiques réelles à support compact dans $\complement K$)

iv) pour tout voisinage U de K et toute $\varphi \in \mathcal{D}(U)$ égale à 1 au voisinage de K, l'application $g \in \mathcal{H}(U) \to \varphi g \in \mathcal{K}_0(\Omega, K)$.

Comme nous n'aurons pas besoin de ces résultats, nous laissons au lecteur le soin de les vérifier. Elles résultent des théorèmes généraux de stabilité des espaces nucléaires et ne présentent pas de difficultés.

2. Intégrales oscillantes.

Ω est toujours un ouvert de R^{ν}. Soit $p(x, \xi)$ un symbole analytique : $p \in SH(\Omega, R^n)$. Soit $\varphi(x, \xi)$ une fonction numérique sur $\Omega \times R^n$, vérifiant les conditions suivantes :

(2.4) *φ est analytique pour $\xi \neq 0$, à valeurs réelles, homogène de degré* 1 *en ξ ($\varphi(x, \lambda\xi) = \lambda \varphi(x, \xi)$ si $\lambda > 0$), et n'a pas de point critique pour $\xi \neq 0$.*

On notera S (ou S_φ) l'ensemble des points $x \in \Omega$ tels qu'il existe un $\xi \neq 0$ avec $\sum_1^n |\partial/\partial\xi_k\ \varphi(x, \xi)| = 0$ (la différentielle partielle par rapport à ξ s'annule). C'est un ensemble fermé (et en fait semi-analytique, c'est-à-dire défini localement par une famille finie d'inégalités portant sur des fonctions analytiques) ; il sera parfois commode de le supposer compact.

Nous nous proposons de donner un sens à l'intégrale

$$(2.5) \qquad I_{\varphi, p}(u) = \iint_{\Omega \times R^n} e^{i\varphi(x,\xi)}\, p(x, \xi)\, u(x)\, dx\, d\xi$$

quand $u \in \mathcal{D}(\Omega)$ est analytique au voisinage de S.

L'intégrale converge bien si p est de degré assez petit (par exemple $|p(x, \xi)| \leqslant c(x)\ (1 + |\xi|)^d$ avec $d < -n$, où $c(x)$ est une fonction localement bornée de x). Dans [5] L. Hörmander lui donne un sens quand p est un symbole C^∞, en effectuant un certain nombre d'intégrations par parties. Ici, profitant de l'analyticité, nous allons lui donner un sens en déplaçant le domaine d'intégration dans le complexe comme au § 1.8.

Supposons d'abord $p \sim 0$ au sens de (1.11). Alors l'intégrale (2.5) converge bien. Comme $d\varphi \neq 0$ pour tout $\xi \neq 0$, et $d_\xi \varphi \neq 0$ au voisinage du support singulier analytique de u (puisque par hypothèse u est analytique au voisinage de S), il existe deux champs de vecteurs C^∞ pour $\xi \neq 0$,

$$y(x, \xi) : \Omega \times R^n \to R^\nu \quad \text{et} \quad \eta(x, \xi) : \Omega \times R^n \to R^n,$$

satisfaisant aux conditions suivantes :

(2.6) i) $y(x, \xi)$ est nul au voisinage du support singulier analytique de u, et borné.

ii) $\eta(x, \xi)$ est homogène de degré 1 en ξ.

iii) on a $im\, \varphi(x + tiy, \xi + ti\eta) > 0$ au voisinage du support de u, pour t assez petit.

Posons comme au § 1.8

$$x^t = x + ity(x, \xi)$$

$$\xi^t = \xi + it\eta(x, \xi)$$

$$dx^t\, d\xi^t = dx_1^t \wedge \cdots dx^t \wedge d\xi_1^t \wedge \cdots d\xi_n^t.$$

On a alors pour t assez petit

$$(2.7)\quad I_{\varphi, p}(u) = \iint_{\Omega \times R^n} e^{i\varphi(x, \xi)}\, p(x, \xi)\, u(x)\, dx\, d\xi$$

$$= \iint_{\Omega \times R^n} e^{i\varphi(x^t, \xi^t)}\, p(x^t, \xi^t)\, u(x^t)\, dx^t\, d\xi^t$$

Or le choix des champs de vecteurs y, η est tel que dans la deuxième intégrale l'exponentielle $\exp(i\varphi(x^t, \xi^t))$ décroît exponentiellement quand ξ tend vers l'infini. Il s'ensuit que l'application linéaire $p \mapsto I_{\varphi,p}(u)$ (φ et u étant fixés) est continue quand on munit l'espace SH° des symboles à décroissance rapide de la topologie de l'espace SH de tous les symboles. Comme l'ensemble SH° des symboles $p \sim 0$ est partout dense dans l'espace de tous les symboles d'après (1.15), nous avons prouvé

(2.8) THEOREME. – *Si φ vérifie les conditions* (2.4) *et si $u \in \mathcal{D}(\Omega)$ est analytique au voisinage de* S, *il existe une forme linéaire continue sur l'espace de symboles* $SH(\Omega, R^n)$, *et une seule* : $p \mapsto I_{\varphi,p}(u)$, *telle que pour $p \sim 0$ on ait*

$$I_{\varphi,p}(u) = \iint_{\Omega \times R^n} e^{i\varphi(x,\xi)} \; p(x, \xi) \; u(x) \; dx \; d\xi.$$

Bien sûr $I_{\varphi,p}(u)$ est l'intégrale ordinaire quand celle-ci converge, et c'est l'intégrale oscillante de L. Hörmander [4], [5] quand celle-ci a un sens.

Si u est nulle au voisinage de S, on peut choisir $y = 0$ dans l'intégrale (2.7) (et la condition (2.6)), et on obtient

$$I_{\varphi,p}(u) = \int_{\Omega - S} f(x) \; u(x) \; dx$$

avec

$$(2.9) \quad f(x) = \int_{R^n} e^{i\varphi(x,\xi)} \, p(x, \xi) \; d\xi = \int_{R^n} e^{i\varphi(x,\xi^t)} p(x, \xi^t) \, d\xi^t$$

La fonction f est analytique dans $\Omega - S$, car au voisinage d'un point x_0 de $\Omega - S$, on peut choisir ξ^t indépendant de x de sorte que l'intégrale converge encore dans un voisinage complexe de x_0.

On obtient finalement (en supposant S compact), au sens de la dualité (2.3)

$$(2.10) \qquad I_{\varphi,p}(u) = \int_{\Omega} f \cdot u$$

où f est élément de l'espace $\mathcal{H}(\Omega, \complement K)$ (définition (2.1)). En particulier pour φ et p fixés la forme linéaire $u \mapsto I_{\varphi,p}(u)$ se prolonge continûment à $\mathcal{H}_0(\Omega, K)$.

(2.11) Remarquons que si $p \sim 0$ l'intégrale (2.9) converge pour tout x, et f est une fonction analytique.

Dans le cas général, l'hyperfonction f définie par (2.10) est donc une fonction analytique hors de S et dans tout ouvert où on a $p \sim 0$.

Soient maintenant Ω, Ω' deux ouverts d'espaces numériques. Soit $p \in \mathrm{SH}(\Omega \times \Omega', \mathrm{R}^n)$ un symbole analytique. Soit enfin φ une fonction analytique pour $\xi \neq 0$ sur $\Omega \times \Omega' \times \mathrm{R}^n$, vérifiant les conditions (2.4), et en outre (en notant x la variable de Ω, y celle de Ω', et ξ celle de R^n):

(2.12) $\|d_x\varphi\| + \|d_\xi\varphi\|$ et $\|d_y\varphi\| + \|d_\xi\varphi\|$ ne s'annulent jamais pour $\xi \neq 0$ (autrement dit pour y (resp. ou x) fixé φ n'a pas de point critique par rapport aux autres variables).

(2.13) S_φ désignant comme ci-dessus l'ensemble (fermé) des couples (x, y) de $\Omega \times \Omega'$ tels qu'il existe un $\xi \in \mathrm{R}^n$, $\xi \neq 0$, avec $d_\xi\varphi(x, y, \xi) = 0$, les deux projections $\mathrm{S}_\varphi \to \Omega$, $\mathrm{S}_\varphi \to \Omega'$ sont propres.

En séparant le champ y de (2.6) en deux morceaux, l'un parallèle à Ω et nul près du support singulier analytique de v, l'autre parallèle à Ω' et nul près du support singulier analytique de u, la méthode ci-dessus donne un sens à l'intégrale

$$(2.14) \quad \iiint e^{i\varphi(x,y,\xi)}\, p(x, y, \xi)\, u(y)\, v(x)\, dx\, dy\, d\xi$$

si $u \in \mathcal{D}(\Omega')$, $v \in \mathcal{D}(\Omega)$, et v est analytique au voisinage de S_φ. supp sing u (supp sing désignant ici le support singulier analytique ; et si Y est une partie de Ω', $\mathrm{S}_\varphi \cdot \mathrm{Y}$ est l'ensemble des x tels que $(x, y) \in \mathrm{S}_\varphi$ pour un $y \in \mathrm{Y}$).

L'intégrale (2.14) définit ainsi un opérateur linéaire

$$\mathrm{L}_{\varphi,p} : \mathcal{D}(\Omega') \to \mathcal{H}(\Omega, \infty)$$

(espace des hyperfonctions qui sont analytiques hors d'un compact), qui a les propriétés suivantes :

(2.15) pour tout compact K′ et tout ouvert U′ de Ω', $\mathrm{L}_{\varphi,p}$ se prolonge continûment : $\mathcal{H}(\mathrm{K}', \mathrm{U}') \to \mathcal{H}(\Omega, \complement \mathrm{K})$ où $\mathcal{H}(\mathrm{K}', \mathrm{U}')$ désigne l'espace des fonctionnelles analytiques réelles portées par K, analytiques dans U′, et où on a posé $\mathrm{K} = \mathrm{S}_\varphi \cdot (\mathrm{K}' \cap \complement \mathrm{U}')$

Autrement dit $L_{\varphi,p}(u)$ est bien défini si u est une fonctionnelle analytique réelle à support compact sur Ω'. C'est une hyperfonction sur Ω, qui est analytique en dehors de $S_\varphi \cdot$ (supp sing u).

3. Opérateurs pseudo-différentiels.

On suppose désormais $\Omega = \Omega' \subset \mathbf{R}^n$, et on pose

$$\varphi(x, y, \xi) = \langle x - y, \xi \rangle$$

(de sorte que φ vérifie (2.6), (2.12), (2.13) ; S_φ est la diagonale de $\Omega \times \Omega$). Dans ce cas on appelle opérateurs pseudo-différentiels analytiques les opérateurs $L_p = L_{\varphi,p}$ définis par

$$(2.16) \int_\Omega L_p(u) \cdot v = (2\pi)^{-n} \iiint e^{i\langle x - y, \xi\rangle} p(x, y, \xi)\, v(x)\, u(y)\, dx\, dy\, d\xi$$

où $p \in \mathrm{SH}(\Omega \times \Omega, \mathbf{R}^n)$ est un symbole analytique, u et v sont à support compact, et v est analytique près du support singulier (analytique) de u ; l'intégrale est l'intégrale oscillante du n° 2.

Comme au n° 2, L_p jouit des propriétés suivantes : si $u \in \mathcal{H}'_0(\Omega)$ est une fonctionnelle analytique réelle à support compact, $L_p(u)$ est bien défini ; c'est une hyperfonction analytique hors de supp sing u.

Si $p \sim 0$, L_p est un opérateur à noyau analytique (continu de $\mathcal{H}'_0(\Omega)$ dans $\mathcal{H}(\Omega)$).

Les assertions suivantes sont immédiates :

(2.17) Le transposé ${}^tL_p$ est l'opérateur pseudo-différentiel défini par le symbole $p' = p(y, x, -\xi)$

(2.18) Les symboles $\dfrac{\partial p}{\partial \xi_k}$ et $-i(x_k - y_k)\, p$ définissent le même opérateur.

Les autres propriétés du calcul des opérateurs pseudo-différentiels analytiques résulteront assez simplement du théorème suivant :

(2.19) THEOREME. — *Soit $p = p(x, y, \xi)$ un symbole analytique. On désigne par a le symbole formel (analytique d'après (1.10)) :*

$$a = \sum_\gamma i^{-|\gamma|}/\gamma\,!\ (\partial/\partial\xi)^\gamma\ (\partial/\partial y)^\gamma\ p(x, y, \xi)\,_{/y = x}$$

On suppose $a \sim 0$ (*au sens des symboles formels sur* $\Omega \times \mathrm{R}^n$ *(1.11)*). *Alors* L_p *est un opérateur à noyau analytique.*

Preuve. – Supposons d'abord que p est d'ordre "assez petit", et $a \sim 0$ au sens des symboles d'ordre assez petit ; c'est-à-dire pour tout compact K de Ω il existe des constantes positives ε, c et A telles que

$$(2.20)\qquad \Big|\sum_{|\gamma|<\mathrm{N}} a_\gamma\Big| \leqslant c\,(1+|\xi|)^{-m-\mathrm{N}}\ \mathrm{N}!\ \mathrm{A}^{\mathrm{N}} \qquad \text{pour}\quad (x\,,\xi)\in \mathrm{K}(\varepsilon)$$

$$|p(x\,,y\,,\xi)| \leqslant c\,(1+|\xi|)^{-m} \quad \text{pour } (x\,,y\,,\xi)\in \mathrm{K}\times\mathrm{K}(\varepsilon)$$

où m est un nombre positif plus grand que n. ($\mathrm{K}(\varepsilon)$ est le domaine complexe défini en (1.4)).

Le noyau de L_p est alors la fonction continue

$$\mathrm{T}(x\,,y) = (2\pi)^{-n}\int e^{i<x-y\,,\xi>}\,p(x\,,y\,,\xi)\,d\xi$$

On sait que T est analytique pour $x \neq y$, et il s'agit de prouver qu'elle l'est encore au voisinage de $x = y$. De façon équivalente, la fonction

$$f(x\,,z) = \mathrm{T}(x\,,x-z) = (2\pi)^{-n}\int e^{iz\cdot\xi}\,p(x\,,x-z\,,\xi)\,d\xi$$

(qui est analytique pour $z \neq 0$) est analytique au voisinage de $z = 0$.

Pour cela écrivons le développement de Taylor de $p(x\,,x-z\,,\xi)$ à partir du point $(x\,,x\,,\xi)$:

$$p(x\,,x-z\,,\xi) = \sum (-1)^{|\gamma|}/\gamma!\ z^\gamma\ p_\gamma(x\,,\xi)$$

où on a posé $p_\gamma(x\,,\xi) = (\partial/\partial y)^\gamma\ p(x\,,y\,,\xi)_{/y\,=\,x}$.

Ce développement converge uniformément pour $(x\,,\xi)\in\mathrm{K}(\varepsilon)$, $|z|<\varepsilon$, si ε est assez petit ; plus précisément, si c est assez grand et ε assez petit, on a pour $(x\,,\xi)\in\mathrm{K}(\varepsilon)$, $|z|<\varepsilon$

$$\sum |z^\gamma/\gamma!\ \ p_\gamma(x\,,\xi)| \leqslant c\,(1+|\xi|)^{-m}.$$

Posons

$$r_N = \sum_{|\gamma| \geqslant N} \ldots = \sum_{|\gamma| = N} z^\gamma \quad r_\gamma(x , z , \xi)$$

où les r_γ sont obtenus en combinant certains termes de la série, et vérifient l'inégalité

$$\sum |r_\gamma(x , z , \xi)| \leqslant c \, A^N \, (1 + |\xi|)^{-m}$$

pour $(x , \xi) \in K(\varepsilon)$, $|z| < \varepsilon$, si A est assez grand.

De cette façon on a

$$f(x , z) = \sum_{|\gamma| < N} \int e^{iz.\xi} (-z)^\gamma / \gamma ! \quad p_\gamma(x , \xi) \, d\xi$$

$$+ \sum_{|\gamma| = N} \int e^{iz.\xi} z^\gamma r_\gamma(x , z , \xi) \, d\xi.$$

Majorons les dérivées d'ordre N de f en utilisant cette décomposition. En intégrant par parties on voit que la première somme égale

$$\int e^{iz.\xi} \sum_{|\gamma| < N} i^{-\gamma} / \gamma ! \, \left(\frac{\partial}{\partial \xi}\right)^\gamma \left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^\gamma \quad p(x , y , \xi)/_{y = x} = f_N$$

et pour $x \in K^\epsilon$, $|\alpha| = N$, on obtient

$$\left|\left(\frac{\partial}{\partial z}\right)^a f_N\right| = \left|\int (i \, \xi)^a \, e^{ix.\xi} \left(\sum_{|\gamma| < N} i^{-|\gamma|} / \gamma ! \left(\frac{\partial}{\partial \xi}\right)^\gamma \left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^\gamma p(x,x,\xi)\right) d\xi\right| \leqslant$$

$$\leqslant \int c \, |\xi|^N \, (1 + |\xi|)^{-m-N} \, A^N \, N ! \, d\xi \leqslant c_1 \, N ! \, A^N$$

où c_1 est une nouvelle constante (indépendante de N).

Pour la deuxième somme $\rho_N = \sum_{|\gamma| = N} \int e^{iz.\xi} z^\gamma \, r_\gamma(x , z , \xi) \, d\xi$

on obtient, toujours en intégrant par parties, pour $x \in K^\epsilon$

$$\left|\left(\frac{\partial}{\partial z}\right)^a \rho_N\right| = \left|\int e^{iz.\xi} \, (i \, \xi)^a \left(\sum_{|\gamma| \; N} \left(\frac{\partial}{\partial \xi}\right)^\gamma r_\gamma(x , z , \xi)\right) d\xi\right| \; .$$

Or pour $(x, \xi) \in \mathrm{K}(\varepsilon)$, $|z| < \varepsilon$, on a $\Sigma\, |r_\gamma| \leqslant c\, \mathrm{A}^{\mathrm{N}}\, (1 + |\xi|)^{-m}$. On en déduit par la formule de Cauchy (cf. (1.10)), quitte au besoin à diminuer ε, et augmenter c et A :

$$\sum_{|\gamma| = \mathrm{N}} \left| \left(\frac{\partial}{\partial \xi}\right)^{\gamma} r_\gamma(x, z, \xi) \right| \leqslant c\, \mathrm{A}^{\mathrm{N}}\, \mathrm{N}!\ \ (1 + |\xi|)^{-m-\mathrm{N}}$$

qui donne comme ci-dessus l'inégalité cherchée $\left| \left(\frac{\partial}{\partial z}\right)^{\alpha} \rho_{\mathrm{N}} \right| \leqslant c\, \mathrm{A}^{\mathrm{N}} \mathrm{N}!$

Il existe donc deux constantes c, A telles que pour $x \in \mathrm{K}^{\epsilon}$, $0 < |z| < \varepsilon$, on ait $\left| \left(\frac{\partial}{\partial z}\right)^{\alpha} f(x, z) \right| \leqslant c\ \mathrm{A}^{|\alpha|}\ |\alpha|\,!$. Ceci implique que f est encore analytique au voisinage de $z = 0$ (et comme dans tout ce calcul x varie dans un ouvert complexe, f est analytique en les deux variables x et z).

Cas général. – Choisissons pour commencer une fonction entière $\Phi(\xi)$ comme dans (1.37) et posons $\Psi = \Phi^{-1}$.

Soit $p_1(x, y, \xi)$ un symbole analytique équivalent au symbole formel

$$\Psi \circ p = \sum_{\gamma} i^{-|\gamma|}/\gamma\,!\ \left(\frac{\partial}{\partial \xi}\right)^{\gamma} \Psi(\xi) \cdot \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^{\gamma} p(x, y, \xi)$$

(les § 1.7, 1.9, (1.34) assurent l'existence d'un tel symbole, au moins dans un ouvert relativement compact $\omega \subset \Omega \times \Omega$).

Nous laissons au lecteur le soin de vérifier que si on a choisi Φ assez grande (donc Ψ assez petite) on a

$$\sum_{\gamma} i^{-|\gamma|}/\gamma\,!\ \left(\frac{\partial}{\partial \xi}\right)^{\gamma} \left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^{\gamma} p_1(x, x, \xi) \sim 0$$

au sens des symboles formels de degré assez petit ((2.20)). Donc L_{p_1} est un opérateur à noyau analytique.

Soit alors $\Phi(\mathrm{D})$ l'opérateur différentiel d'ordre infini défini par Φ : $\Phi(\mathrm{D}) \circ \mathrm{L}_{p_1}$ est encore un opérateur à noyau analytique. Or on a $\Phi(\mathrm{D}) \circ \mathrm{L}_{p_1} = \mathrm{L}_{p'}$ avec

$$(2.21)\ p'(x\,,y\,,\xi) = e^{-ix.\xi}\Phi(D_x)\,(e^{ix\cdot\xi}\,p_1(x\,,y\,,\xi))$$
$$= \sum_{\gamma} i^{-|\gamma|}/\gamma\,!\ \left(\frac{\partial}{\partial\xi}\right)^{\gamma} \phi(\xi)\cdot\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^{\gamma} p_1(x\,,y,\xi).$$

La série converge bien au sens des symboles : écrivons en effet le développement de Φ

$$\Phi(\xi) = \sum a_k |\xi|^{2k}$$

avec

$$\sum |a_k|\, r^{2k} \leqslant \Lambda(r)$$

où Λ vérifie (1.2) ($\Lambda(r) = \inf_{\epsilon>0} M_\epsilon\, e^{\epsilon r}$, avec $M_\epsilon \geqslant 1$).

On a alors par la formule de Cauchy

$$\sum \left|\left(\frac{\partial}{\partial\xi}\right)^{\gamma} a_k\, |\xi|^{2k}\right| \leqslant \inf_{s>0}\ \gamma\,!\ \Lambda(s+|\xi|)\ s^{-|\gamma|}.$$

Comme $\Lambda(s+|\xi|) \leqslant \Lambda(s)\ \Lambda(|\xi|)$, et comme

$$\inf_{s>0}\ e^{\epsilon s}\ s^{-|\gamma|} = \left(\frac{e}{|\gamma|}\right)^{|\gamma|}\ s^{|\gamma|}$$

on obtient

$$\sum \left|\left(\frac{\partial}{\partial\xi}\right)^{\gamma} a_k|\xi|^{2k}\right| \leqslant \Lambda(|\xi|)\ \gamma\,!\ \left(\frac{e}{|\gamma|}\right)^{|\gamma|}\ \inf_{\epsilon>0}\ M_\epsilon \varepsilon^{|\gamma|}.$$

Comme par ailleurs pour tout compact $K \subset \omega$, il existe $\varepsilon > 0$, c et A tels que pour $(x\,,y,\xi)\in K(\varepsilon)$ on ait (d'après (2.20))

$$\left|\frac{1}{\gamma\,!}\ \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^{\gamma} p_1(x\,,y\,,\xi)\right| \leqslant c\ A^{|\gamma|}\ (1+|\xi|)^{-m}$$

on voit que la série (2.21) converge absolument :

$$\sum_{\gamma,\ k} \frac{i^{-|\gamma|}}{\gamma\,!}\ \left(\frac{\partial}{\partial\xi}\right)^{\gamma} (a_k|\xi|^{2k})\cdot\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^{\gamma} p_1(x\,,y\,,\xi)$$
$$\leqslant c\ \Lambda(|\xi|)\ \ (1+|\xi|)^{-m}\ \left(\sum_{\gamma} M_\epsilon\ \varepsilon^{|\gamma|}\ A^{|\gamma|}\right).$$

On a aussi, au sens des symboles formels (parce que la série (2.21) converge bien)

$$p' \sim \Phi(\xi) \circ p_1(x, y, \xi) = \sum \sum_{|\gamma|=k} \frac{i^{-|\gamma|}}{\gamma!} \left(\frac{\partial}{\partial \xi}\right)^{\gamma} \Phi(\xi) \cdot \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^{\gamma} p_1(x, y, \xi)$$

$$\sim \Phi(\xi) \circ [\Psi(\xi) \circ p(x, y, \xi)].$$

Comme la loi de composition des (classes d'équivalence de) symboles est associative, et comme le composé (au sens des symboles) de Φ et Ψ est 1 (symbole de l'identité), on a en fin de compte $p \sim p'$. Et puisque $L_{p'}$ est un opérateur à noyau analytique, il en est de même de p (on a $p - p' \sim 0$, donc $L_{p-p'}$ est un opérateur à noyau analytique). Ceci achève la démonstration de (2.19).

(2.22) COROLLAIRE. — *Pour tout opérateur pseudo-différentiel analytique* L_p *sur* Ω, *et pour tout ouvert* ω *relativement compact dans* Ω, *il existe un symbole analytique* $p_1(x, \xi) \in SH(\omega \times R^n)$ (*indépendant de* y) (*resp. et un symbole* $p_2(y, \xi) \in SH(\omega \times R^n)$ *indépendant de* x) *tel que* $L_p - L_{p_1} \sim 0$ (*resp.* $L_p - L_{p_2} \sim 0$), *i.e.* L_p *et* L_{p_1} *diffèrent par un opérateur à noyau analytique sur* ω.

Nous allons maintenant composer les opérateurs pseudo-différentiels analytiques. Il peut y avoir une difficulté pour faire converger l'intégrale qui définit le composé, et il est commode de tronquer. On obtient

(2.23) THEOREME. — *Soient* P *et* Q *deux opérateurs pseudo-différentiels analytiques sur* Ω. *Soit* $\omega \subset \Omega$ *un ouvert relativement compact de* Ω. *Soit* $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ *égale à* 1 *dans* ω. *Alors l'opérateur* $P\varphi Q/\omega$ *est un opérateur pseudo-différentiel analytique sur* ω.

L'opérateur $P \varphi Q/\omega$ est défini comme suit : soit $u \in \mathcal{H}'_0(\omega)$ une fonctionnelle analytique réelle à support compact dans ω. $Q(u)$ est alors analytique hors d'un compact de ω, et le produit $\varphi\, Q(u)$ est bien défini ; c'est une fonctionnelle analytique à support compact dans Ω, et on a supp sing $(\varphi\, Q(u)) \subset$ (supp sing u) $\cup$ (supp $d\varphi$). On définit alors $P \varphi Q/\omega$ par

$$P \varphi Q/\omega(u) = P(\varphi\, Q(u))/\omega$$

$P(\varphi\, Q(u))/\omega$ est une hyperfonction sur ω qui est analytique hors de supp sing u (puisque $P(\varphi\, Q(u))$ est analytique hors de

$$(\text{supp sing } u) \cup (\text{supp } d\varphi)\,,$$

et que supp $d\varphi$ est contenu dans le complémentaire de ω).

Preuve du théorème (2.23)

Remarquons d'abord que le résultat est évident si $P \sim 0$ ou si $Q \sim 0$; $P\,\varphi\, Q/\omega$ est alors un opérateur à noyau analytique. Le corollaire (2.22) nous permet (quitte au besoin à diminuer Ω) de supposer que P (resp. Q) est de la forme $L_{p(x,\xi)}$ (resp. $L_{q(y,\xi)}$), i.e. P est défini par un symbole indépendant de y (resp. de x).

Nous supposerons tout d'abord que P et Q sont de degré assez petit pour que les intégrales ci-dessous convergent. Q se prolonge alors "canoniquement" en un opérateur continu $\widetilde{Q} : \mathcal{D}(\omega) \to \mathcal{S}(R^n)$ défini par transformation de Fourier :

$$(2.24) \qquad \widehat{\widetilde{Q}u}\,(\xi) = \int_\omega e^{-iy\cdot\xi}\, u(y)\; q(y\,,\xi)\, dy$$

donc
$$\widetilde{Q}u\,(x) = \iint e^{-i\langle x-y\,,\xi\rangle}\, u(y)\; q(y\,,\xi)\; dy\; d\xi.$$

De même P se prolonge canoniquement en un opérateur continu $\widetilde{P} : \mathcal{S}(R^n) \to C^\infty(\Omega)$, défini par

$$(2.25) \qquad \widetilde{P}u\,(x) = (2\,\pi)^{-n} \int e^{ix\cdot\xi}\, p\,(x\,,\xi)\; \hat{u}\,(\xi)\; d\xi$$

$$= (2\,\pi)^{-n} \iint e^{i\langle x-y\,,\xi\rangle}\, p\,(x\,,\xi)\; u\,(y)\; dy\; d\xi$$

(si f est une fonction ou une distribution, nous avons noté $\hat{f}$ sa transformée de Fourier).

Nous pouvons maintenant définir l'opérateur composé $\widetilde{P} \circ \widetilde{Q}$; dans ω il coïncide avec l'opérateur de symbole $p(x\,,\xi)\; q(y\,,\xi)$; et il diffère de $P\,\varphi\; Q/\omega$ par l'opérateur $R = \widetilde{P}\,(1-\varphi)\,\widetilde{Q}$, qui a pour noyau la fonction

$$(2.26) \qquad r(x\,,y) =$$

$$(2\,\pi)^{-2n} \iiint e^{i\langle x-z\,,\xi\rangle + i\langle z-y,\eta\rangle} p(x\,,\xi)\; (1-\varphi(z))\; q(y\,,\eta)\; d\xi\; dz\; d\eta,$$

(cette dernière intégrale doit être interpretée comme une transformation de Fourier ou comme une intégrale oscillante au sens de [5] par rapport à z).

Dans l'intégrale (2.26) déplaçons le domaine d'intégration dans le complexe comme en (2.7), en posant

$$\xi^t = \xi + it \frac{x-z}{|x-z|} \sqrt{1+|\xi|^2}$$

$$\eta^t = \eta + it \frac{z-y}{|z-y|} \sqrt{1+|\eta|^2}$$

on obtient alors

$$(2.27)\ r(x\,,y) = (2\pi)^{-2n} \iiint_{\substack{\xi\in\mathbf{R}^n\\ z\in\complement\omega\\ \eta\in\mathbf{R}^n}} e^{i\langle x-z,\xi^t\rangle + i\langle z-y,\eta^t\rangle}\, p(x\,,\xi^t)\,(1-\varphi(z))\,q(y\,,\eta^t)\,d\xi^t\,dz\,d\eta^t$$

(on a repris les notations de (2.7) pour la densité $d\xi^t\,d\eta^t$). La formule a un sens et vaut pour t assez petit (p et q sont alors holomorphes au voisinage du nouveau domaine d'intégration), car x et y sont des points de ω, et comme z parcourt $\complement\omega(1-\varphi$ est nul dans $\omega)$, $x-z$ et $y-z$ ne s'annulent pas sur le nouveau domaine d'intégration. La partie réelle de l'exposant est

$$-t\ |x-z|\sqrt{1+|\xi|^2} - t\ |y-z|\sqrt{1+|\eta|^2} \leqslant -c\,t(|z|+|\xi|+|\eta|)$$

où c est une constante (qui dépend de la distance de x et y à $\complement\omega$) ; de sorte que l'exponentielle décroît exponentiellement par rapport à l'ensemble des trois variables sur le nouveau domaine d'intégration, et l'intégrale converge parfaitement, même si p et q sont des symboles analytiques arbitrairement grands.

Dans la formule (2.27) on peut permettre à x et y de varier dans un petit voisinage complexe d'un point de $\omega\times\omega$. $r(x\,,y)$ est donc une fonction analytique dans $\omega\times\omega$, et en tant que telle dépend continûment des symboles analytiques p et q.

Par passage à la limite, ceci prouve que dans tous les cas $P\varphi Q/\omega$ est un opérateur pseudo-différentiel analytique dans ω, qui diffère par un opérateur à noyau analytique de l'opérateur de symbole $p(x\,,\xi)\ q(y\,,\xi)$. Le théorème est démontré, et on a prouvé en même temps

(2.28) *Si* R *est un opérateur pseudo-différentiel analytique sur* ω, *dont le symbole est équivalent (au sens des symboles formels (1.11)) au composé des symboles de* P *et de* Q, *il diffère par un opérateur à noyau analytique de* $\mathrm{P}\varphi\mathrm{Q}/\omega$ (*les notations sont celles de (2.23)*).

Terminons cette section en remarquant (cf. [5]) qu'on peut modifier dans la formule de définition (2.16) la fonction phase $< x - y , \xi >$, sans pour autant changer la classe d'opérateurs ainsi définie. Ainsi si φ est linéaire en ξ, non nulle pour $x \neq y$, égale pour x voisin de y à

$$\varphi(x , y) = < \mathrm{A}(x , y) \cdot x - y , \xi >$$

où $\mathrm{A}(x , y)$ est une matrice régulière à coefficients analytiques, le changement de variable $\xi' = {}^t\mathrm{A}(x , y) \cdot \xi$ montre immédiatement que l'opérateur $\mathrm{L}_{\varphi,p}$ défini par

$$< \mathrm{L}_{\varphi,p}\, u , v > = (2\pi)^{-n} \iiint e^{i\varphi(x,y,\xi)}\, p(x , y , \xi)\, v(x)\, u(y)\, dx\ dy\ d\xi$$

est un opérateur pseudo-différentiel analytique.

Il en résulte immédiatement (comme dans [5]) que la classe des opérateurs pseudo-différentiels analytiques ne dépend pas du système de coordonnées qu'on choisit pour les définir. Ceci permet de définir les opérateurs pseudo-différentiels analytiques sur une variété analytique réelle : ce sont des opérateurs dont le "noyau" est une fonction analytique en dehors de la diagonale, et dont la restriction à tout ouvert isomorphe à un ouvert d'un espace numérique R^n admet une représentation intégrale telle que (2.16) (cette propriété ne dépend pas du système de coordonnées choisi).

4. Applications et exemples.

a) Soit X une variété analytique réelle. Les classes d'équivalence d'opérateurs pseudo-différentiels analytiques sur X apparaissent comme des endomorphismes du faisceau $\mathrm{Sing}(\mathrm{X}) = \mathcal{H}'(\mathrm{X}) / \mathcal{H}(\mathrm{X})$ des hyperfonctions modulo les fonctions analytiques (deux opérateurs sont équivalents s'il diffèrent par un opérateur à noyau analytique). Si P et Q sont deux opérateurs pseudo-différentiels analytiques, et R un opérateur de symbole équivalent (au sens des symboles formels) au composé des symboles de P et de Q, l'endomorphisme du faisceau Sing(X) défini par R est composé de ceux définis par P et Q (grâce à (2.23) et (2.28)). Les constructions des numéros précédents fournissent ainsi pour chaque endomorphisme pseudo-différentiel du faisceau Sing un représentant qui opère effectivement sur les hyperfonctions (à support compact), défini par des formules intégrales relativement maniables.

Rappelons pour mémoire le résultat de [1] (qui est un peu généralisé ici), qui devient très simple quand on le repense en termes d'endomorphismes du faisceau Sing(X) :

(2.29) *Soit* P *un opérateur pseudo-différentiel analytique (resp. ou un opérateur différentiel d'ordre infini à coefficients analytiques), elliptique au sens que son symbole est inversible (pour la loi de composition des classes d'équivalence de symboles formels). Si f est une hyperfonction à support compact (resp. pas de condition de support), f est analytique dans tout ouvert où* $P(f)$ *l'est.*

(En effet en tant qu'endomorphisme du faisceau Sing, P possède un inverse défini (au moins localement) par un opérateur pseudo-différentiel analytique). Ce résultat s'applique en particulier quand P est un opérateur différentiel elliptique d'ordre fini à coefficients analytiques (cf. [1]).

b) Opérateurs à coefficients constants.

Les résultats suivants sont faciles :

(2.30) *Soit $p(\xi)$ un symbole analytique. L'opérateur pseudo-différentiel* P(D) *transforme une fonctionnelle analytique réelle à support compact en une hyperfonction analytique en dehors d'un compact. Il n'augmente pas le support singulier analytique*

(2.31) *Si de plus $1/p(\xi)$ est aussi un symbole analytique pour ξ assez grand,* P(D) *est elliptique, et f est analytique dans tout ouvert où* P(D) *f l'est.*

En particulier si P(D) est un opérateur différentiel d'ordre infini, elliptique au sens de (2.31), si f est une hyperfonction sur R^n (sans condition sur le support), f est analytique dans tout ouvert où P(D) f l'est.

c) Opérateurs à coefficients variables.

Pour les opérateurs d'ordre fini, la condition habituelle donne un critère simple d'ellipticité : si $p(x, \xi)$ est un symbole d'ordre m (i.e. $p(x, \xi) \leqslant c(1 + |\xi|)^m$ dans un cône complexe), elliptique au sens des opérateurs d'ordre m, i.e. $p^{-1}(x, \xi) \leqslant c(1 + |\xi|)^{-m}$ dans un cône complexe, pour ξ assez grand, alors l'opérateur $p(x, \mathrm{D})$ possède une parametrix. En effet d'après le § 1.7, il suffit de prouver que le symbole de p est inversible (au sens des symboles analytiques formels). Pour cela on remarque qu'on a

$$p(x, \xi) \circ p^{-1}(x, \xi) = 1 - h(x, \xi),$$

où $h(x, \xi)$ est un symbole formel de degré -1, donc $1 - h$ est inversible (en tant que symbole formel) d'après (1.21).

Dans le cas général, je ne connais pas pour le moment de critère simple ou convaincant d'ellipticité. Je me contenterai de l'exemple suivant : soit $p = p(y, \xi)$ le symbole

$$p(y, \xi) = \exp \langle y, \Phi(\xi) \rangle$$

où Φ est un symbole à valeurs dans C^n, de degré $1 - 0$

$$(\text{i.e. } |\xi|^{-1} \quad \Phi(\xi) \to 0 \quad \text{pour} \quad \xi \to \infty).$$

L'opérateur pseudo-différentiel correspondant à $p(y, \xi)$ est défini par la formule

$$\widehat{\mathrm{L}_p u} = \sum \frac{i^{-|\alpha|}}{\alpha!} \Phi(\xi)^\alpha \frac{\partial^\alpha f}{\partial \xi^\alpha} = \hat{f}(\xi - i\,\Phi(\xi)).$$

Il a une parametrix, qui est définie par une formule analogue (avec par exemple la fonction $\Psi(\xi)$ telle que les applications $\xi \mapsto \xi - i\,\Phi(\xi)$ et $\xi \mapsto \xi - i\,\Psi(\xi)$ soient inverses l'une de l'autre : Ψ est un symbole de degré $1 - 0$ pour ξ assez grand). Il est donc hypoelliptique analytique. Si la partie réelle de Φ est non nulle, cet opérateur est d'ordre $+\infty$ dans certaines parties de R^n, d'ordre $-\infty$ dans d'autres, ou même peut être partout d'ordre $+\infty$ ainsi que son inverse.

BIBLIOGRAPHIE

[1] L. BOUTET de MONVEL et P. KREE, Pseudo-differential operators and Gevrey classes, *Ann. Inst. Fourier,* Grenoble 17,1 (1967), 295 - 323.

[2] L. CARLESON, On universal moments problems, *Math. Scand.* 9 (1961) 197-206.

[3] L. HÖRMANDER, Pseudo-differential operators and hypoelliptic equations, *Amer. Math. Soc. Proc. Symp. Pure Appl. Math.* 10 (1968) 138-183.

[4] L. HÖRMANDER, The spectral function of an elliptic operator *Acta Math.* 121 (1968) 193-218.

[5] L. HÖRMANDER, Fourier integral operators, *Acta Math.* 127 (1971) 79-183.

[6] J.J. KOHN et L. NIRENBERG, An algebra of pseudo-differential operators, *Comm. Pure Appl. Math.* 18 (1965) 269-305 .

[7] A. MARTINEAU, Les hyperfonctions de M. Sato, Séminaire Bourbaki 214 (1960/61).

[8] A. MARTINEAU, Equations différentielles d'ordre infini, *Bull. Soc. Math.* France 95 (1967) 109-154.

[9] M. SATO, Theory of hyperfunctions I et II, *J. Fac. Sc. Univ. Tokyo* 8 (1959-60), 139-193 et 387-437.

[10] P. SCHAPIRA, Théorie des hyperfonctions, *Lecture Notes in Mathematics* 126, Springer-Verlag (1970).

[11] F. TREVES, Hyper-differential operators in complex space, *Bull. Soc. Math. France* 97 (1969) 193-223.

Manuscrit reçu le 11 octobre 1971
accepté par J.L. KOSZUL

Louis BOUTET de MONVEL
Université de Paris VII
2 place Jussieu, Paris 5°