JEAN-PIERRE FERRIER

Approximation avec croissance des fonctions holomorphes de plusieurs variables

Annales de l'institut Fourier, tome 22, nº 1 (1972), p. 67-87

<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1972__22_1_67_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
22,1 (1972), 67-87

APPROXIMATION AVEC CROISSANCE DES FONCTIONS HOLOMORPHES DE PLUSIEURS VARIABLES

par Jean-Pierre FERRIER

On étudie l'approximation des fonctions holomorphes dans un ouvert de $\mathbf{C}^n$ qui satisfont des hypothèses de croissance, par des fonctions holomorphes dans un ouvert plus grand et qui satisfont des hypothèses de croissance plus strictes. Les hypothèses de croissance sont définies par des poids δ, δ', avec $\delta' \geqslant \delta$, auxquels sont associées des algèbres $\mathcal{O}(\delta)$, $\mathcal{O}(\delta')$. On établit en particulier un théorème d'approximation des fonctions de $\mathcal{O}(\delta)$ par celles de $\mathcal{O}(\delta')$ lorsque δ a une propriété de convexité convenable relativement aux fonctions de $\mathcal{O}(\delta')$, à l'aide du calcul symbolique de L. Waelbroeck [8] et des majorations pour l'opérateur $\bar{\partial}$ de L. Hörmander [6]. On démontre aussi un énoncé de factorisation dans $\mathcal{O}(\delta')$ avec la structure induite par $\mathcal{O}(\delta)$.

1. Préliminaires.

La définition des conditions de croissance est tirée du mémoire de L. Waelbroeck [8]. Dans tout ce qui suit, δ désigne une fonction positive sur $\mathbf{C}^n$, lipschitzienne dans le rapport 1 et telle que $|z|\,\delta$ soit bornée, si $z = (z_1, \ldots, z_n)$ désigne l'application identique de $\mathbf{C}^n$ et $|z|^2 = |z_1|^2 + \cdots + |z_n|^2$. On désigne par $\mathcal{O}(\delta)$ l'algèbre des fonctions holomorphes f dans l'ouvert $\delta > 0$ telles que $|f|\,\delta^{\mathrm{N}}$ soit bornée pour un certain entier N. Un ensemble borné de $\mathcal{O}(\delta)$ est un ensemble de fonctions f de $\mathcal{O}(\delta)$ tel que l'on ait $|f|\,\delta^{\mathrm{N}} \leqslant \mathrm{M}$ pour un certain entier N et une même constante positive M. Avec cette structure $\mathcal{O}(\delta)$ est une algèbre complète ; en d'autres termes, $\mathcal{O}(\delta)$ est la limite inductive de la suite d'espaces de Banach ${}_{\mathrm{N}}\mathcal{O}(\delta)$, où ${}_{\mathrm{N}}\mathcal{O}(\delta)$ est l'espace des fonctions holomorphes f dans l'ouvert $\delta > 0$ telles que $|f|\,\delta^N$ soit bornée, avec la norme $f \mapsto \sup_{\zeta \in \mathbf{C}^n} |f(\delta)|\,\delta^N(\zeta)$.

Un exemple de tel poids est donné par la fonction

$$\delta_0 = (1 + |z|^2)^{-1/2} .$$

Un exemple plus général est, si S désigne un ensemble ouvert de $\mathbf{C}^n$, la fonction δ_S donnée par :

$$\delta_S(\zeta) = \inf(\delta_0(\zeta)\,,\ d(\zeta\,,\ \complement S)) .$$

Comme il résulte aussitôt du théorème de Liouville, l'algèbre $\mathcal{O}(\delta_0)$ est celle des polynômes.

On considère maintenant deux fonctions δ, δ' vérifiant toutes les deux les hypothèses ci-dessus et telles que $\delta' \geqslant \delta$. On a un morphisme naturel $\mathcal{O}(\delta') \to \mathcal{O}(\delta)$. On supposera en outre, pour simplifier, que l'ouvert $\delta' > 0$ est connexe ; de cette façon, on se permettra d'identifier l'algèbre $\mathcal{O}(\delta')$ avec son image qui est une sous-algèbre de $\mathcal{O}(\delta)$. On définit une nouvelle algèbre complète, notée $\overline{\mathcal{O}}(\delta')$, et le problème d'approximation consistera à démontrer l'égalité $\overline{\mathcal{O}}(\delta') = \mathcal{O}(\delta)$.

Plus généralement, suivant [3], rappelons que si E est un espace à bornés et H un sous-espace vectoriel de E, on définit un espace à bornés $\overline{\mathrm{H}}$ de la manière suivante : pour tout disque borné B de E, on désigne par $\mathrm{E_B}$ l'espace semi-normé engendré par B, muni de la jauge de B, et par $\overline{\mathrm{H} \cap \mathrm{E_B}}$ l'adhérence de $\mathrm{H} \cap \mathrm{E_B}$ dans $\mathrm{E_B}$; alors $\overline{\mathrm{H}}$ est la limite inductive du système $(\overline{\mathrm{H} \cap \mathrm{E_B}})_\mathrm{B}$ dans la catégorie des espaces à bornés. L'espace vectoriel $\overline{\mathrm{H}}$ est l'ensemble des limites de suites convergentes de H. On a des morphismes naturels

$$\mathrm{H} \to \overline{\mathrm{H}} \to \mathrm{E}\ ,$$

et la structure de H est induite par celle de $\overline{\mathrm{H}}$, mais celle de $\overline{\mathrm{H}}$ est a priori strictement plus fine que celle induite par E. En revanche si E est complet, il en est de même de $\overline{\mathrm{H}}$.

Dans le cas qui nous intéresse, l'algèbre complète $\overline{\mathcal{O}}(\delta')$ est encore la limite inductive de la suite $\overline{\mathcal{O}(\delta') \cap {}_N\mathcal{O}(\delta)}$; la densité $\overline{\mathcal{O}}(\delta') = \mathcal{O}(\delta)$ implique en particulier l'approximation de toute fonction de $\mathcal{O}(\delta)$ par une suite de fonction de $\mathcal{O}(\delta')$ au sens d'une seminorme $f \mapsto \sup_{\zeta \in \mathbf{C}^n} |f(\zeta)|\,\delta^N(\zeta)$. Il faut remarquer que la densité bornologique $\overline{\mathcal{O}}(\delta') = \mathcal{O}(\delta)$ est a priori plus forte que la densité pour la topologie de $\mathcal{O}(\delta)$, c'est-à-dire la topologie limite inductive des espaces de Banach ${}_{\mathrm{N}}\mathcal{O}(\delta)$. On ne sait pas, en effet, si $\overline{\mathcal{O}}(\delta')$ est en général fermée.

Rappelons encore que deux fonctions positives définies sur $\mathbf{C}^n$, δ_1, δ_2 sont dites équivalentes s'il existe $\varepsilon > 0$ et un entier N tels que l'on ait à la fois $\varepsilon\delta_1^{\mathrm{N}} \leqslant \delta_2$ et $\varepsilon\delta_2^{\mathrm{N}} \leqslant \delta_1$. Il est clair que l'algèbre complète $\mathcal{O}(\delta)$ ne change pas si on remplace δ par une fonction qui lui soit équivalente. Il revient donc au même d'imposer seulement à δ (et de même à δ') d'être équivalente à une fonction δ_1 lipschitzienne dans le rapport 1 et telle que $|z|\,\delta_1$ soit bornée ; en particulier, on peut se contenter d'imposer à δ des hypothèses analogues à celles de [5] : $\mathcal{O}(\delta)$ contient les polynômes et il existe $\varepsilon > 0$ et un entier N tels que $|\zeta' - \zeta| \leqslant \varepsilon\delta^{\mathrm{N}}(\zeta)$ implique $\delta(\zeta') \geqslant \varepsilon\delta^{\mathrm{N}}(\zeta)$. De la même façon, on peut remplacer l'hypothèse $\delta' \geqslant \delta$ par une hypothèse $\delta' \geqslant \varepsilon\delta^{\mathrm{N}}$. Nous adopterons cependant les hypothèses fortes, parce que les énoncés avec les hypothèses affaiblies se ramènent aussitôt aux précédents.

On se propose de démontrer en particulier le théorème suivant :

THEOREME 1. — *Les fonctions δ, δ' sont définies comme plus haut ; la densité $\overline{\mathcal{O}}(\delta') = \mathcal{O}(\delta)$ a lieu en particulier sous les hypothèses ($\mathcal{H}$) suivantes :*

1) *la fonction $\delta/\delta'^{\mathrm{N}}$ est bornée pour tout entier* N.

2) *la fonction δ' est équivalente à une fonction δ'_1 telle que $-\log\delta'_1$ soit plurisousharmonique dans l'ouvert $\delta' > 0$.*

3) *la fonction δ est équivalente à une fonction δ_1 telle que $1/\delta_1$ soit l'enveloppe supérieure sur l'ouvert $\delta' > 0$ d'une famille $|f_\alpha|$ où f_α appartient à $\mathcal{O}(\delta')$.*

On se ramène à prouver que δ appartient au spectre $\Delta(z\,;\overline{\mathcal{O}}(\delta'))$ de z dans $\overline{\mathcal{O}}(\delta')$ tel que le définit L. Waelbroeck [8]. En effet, le calcul symbolique fournit alors un morphisme $f \mapsto f(z)$ de $\mathcal{O}(\delta)$ dans $\overline{\mathcal{O}}(\delta')$, inverse du morphisme $\overline{\mathcal{O}}(\delta') \mapsto \mathcal{O}(\delta)$, et la densité est établie. Remarquons inversement que le point 3) de l'hypothèse ($\mathcal{H}$) implique que $-\log\delta_1$ soit plurisousharmonique dans l'ouvert $\delta > 0$; il en résulte d'après un théorème de I. Cnop [2], que δ appartient au spectre $\Delta(z\,;\mathcal{O}(\delta))$ de z dans $\mathcal{O}(\delta)$ et la densité $\overline{\mathcal{O}}(\delta') = \mathcal{O}(\delta)$ implique l'appartenance de δ à $\Delta(z\,;\overline{\mathcal{O}}(\delta'))$.

2. Idéal des fonctions holomorphes nulles au point s.

On montre dans cette partie, que sous une hypothèse un peu plus faible que le point 3) de l'hypothèse ($\mathcal{H}$), la fonction δ est équivalente à une fonction qui n'est pas loin d'être spectrale pour z dans $\overline{\mathcal{O}}(\delta')$. Nous avons d'abord besoin de fixer quelques notations.

Dans tout ce paragraphe, on désigne par H une algèbre à bornés unitaire de fonctions holomorphes dans un ensemble ouvert S de $\mathbf{C}^n$, qui contienne $z_1, \ldots, z_n$ et soit stable par les dérivations $\partial/\partial z_1, \ldots, \partial/\partial z_n$ (autrement dit $\partial/\partial z_1, \ldots, \partial/\partial z_n$ sont des applications bornées de H dans elle-même). Pour tout point s de S et tout entier positif r, on désigne par ${}^s_r\mathcal{J}$ l'idéal de H des fonctions qui s'annulent au point s avec toutes leurs dérivées partielles jusqu'à l'ordre r. Alors, pour tout disque borné B de H qui absorbe 1,

$$ {}_r\delta_{\mathrm{B}}(s) = d(1, {}^s_r\mathcal{J} \cap \mathrm{E}_{\mathrm{B}}) $$

désigne la distance de 1 au sous-espace vectoriel ${}^s_r\mathcal{J} \cap \mathrm{E}_{\mathrm{B}}$ relativement à la jauge de B. On peut alors énoncer le

LEMME 1. — *On suppose que le disque borné* B *contient f ainsi que chaque fonction* $z^\beta \dfrac{\partial f}{\partial z^\alpha}$ *pour tout couple* (α, β) *de multi-indices tels que* $|\alpha| \leqslant r$, $|\beta| \leqslant r$; *alors pour tout point s de* S, *on a :*

$$ |f(s)|\, {}_r\delta_{\mathrm{B}}(s)\, \delta_0^r(s) \leqslant e^{2n} $$

Démonstration. — On part de la relation :

$$ d\Big(f - f'\cdot(z-s) + \cdots + \frac{(-1)^r}{r!} f^{(r)} \cdot (z-s)^r\Big) = \frac{(-1)^r}{r!} f^{(r+1)} \cdot (z-s)^r , $$

dans laquelle $f^{(j)} \cdot (z-s)^j$ désigne l'effet de la forme multilinéaire $f^{(j)}$ sur le multivecteur $(z-s)^j$ et $f^{(r+1)} \cdot (z-s)^r$ est la forme linéaire $\zeta \to f^{(r+1)} \cdot (\zeta, z-s, \ldots, z-s)$. On en déduit :

$$ f - f' \cdot (z-s) + \cdots + \frac{(-1)^r}{r!} f^{(r)} \cdot (z-s)^r = f(s) + g , \quad (1) $$

où g appartient à ${}^s_r\mathcal{J}$ puisque $g(s) = 0$ et que $f^{(r+1)} \cdot (z-s)^r$ s'annule en s avec toutes ses dérivées jusqu'à l'ordre $r - 1$. D'autre part le premier membre de (1) appartient à E_B et il en est de même de g. Par Hahn-Banach, il existe, pour tout point s de S, une forme linéaire ${}^s\mu$ de norme inférieure à 1 sur E_B, nulle sur ${}^s_r\mathcal{J} \cap E_B$ et telle que :

$$ {}^s\mu(1) = {}_r\delta_B(s) $$

En appliquant ${}^s\mu$ aux deux membres de (1), il vient :

$$ {}^s\mu\Big(f - f' \cdot (z-s) + \cdots + \frac{(-1)^r}{r!} f^{(r)} \cdot (z-s)^r\Big) = f(s)\, {}^s\mu(1) \,. \quad (2) $$

Majorons le premier membre : chaque $f^{(j)} \cdot (z-s)^j$ est la somme de n^j termes $(z-s)^\alpha \dfrac{\partial f}{\partial z^\alpha}$ où $|\alpha| = j$, et chaque $(z-s)^\alpha \dfrac{\partial f}{\partial z^\alpha}$ est lui-même la somme de 2^p termes $(-1)^{|\gamma|} z^\beta s^\gamma \dfrac{\partial f}{\partial z^\alpha}$ où $\alpha = (\beta, \gamma)$; comme chaque $z^\beta s^\gamma \dfrac{\partial f}{\partial z^\alpha}$ appartient à $\delta_0(s)^{-|\gamma|}$ B, le premier membre de (2) est majoré par

$$ \sum_{j=0}^{r} \frac{(2n)^j}{j!} \delta_0^{-j}(s) \,, $$

soit finalement par $e^{2n} \delta_0^{-r}(s)$. On obtient enfin :

$$ |f(s)|\, {}_r\delta_B(s)\, \delta_0^r(s) \leqslant e^{2n} \frac{{}_r\delta_B(s)}{|{}^s\mu(1)|} \leqslant e^{2n} \,. $$

On déduit du lemme 1 l'énoncé suivant :

COROLLAIRE 1. – On conserve les hypothèses déjà faites sur δ. *On considère une sous-algèbre unitaire* H *de* $\mathcal{O}(\delta)$ *contenant* $z_1, \ldots, z_n$ *et stable par* $\partial/\partial z_1, \ldots, \partial/\partial z_n$. *On suppose que* δ *est équivalente à une fonction* δ_1 *telle que* $1/\delta_1$ *soit l'enveloppe supérieure sur l'ouvert* $\delta > 0$ *d'une famille* $|f_\alpha|$, *où* f_α *appartient à* H. *Alors, pour tout entier* r *et pour tout disque borné* B *assez grand de* H *munie de la structure induite par* $\mathcal{O}(\delta)$, *la fonction* $\delta_0^r\, {}_r\delta_B$, *prolongée par* 0 *hors de* $\delta > 0$, *est équivalente à* δ.

Démonstration. – On choisit $\varepsilon > 0$ et un entier N tels que $\varepsilon\delta^N \leqslant \delta_1$ et $\varepsilon\delta_1^N \leqslant \delta$. D'abord, en utilisant la formule intégrale de Cauchy pour des polydisques convenables et le fait que δ soit lipschitzienne, un argument standard permet de démontrer que les dérivations

$$\partial/\partial z_1 , \ldots , \partial/\partial z_n$$

sont des applications bornées de l'algèbre $\mathcal{O}(\delta)$ dans elle-même.

Soit alors f une fonction de H telle que $|f|\ \delta_1 \leqslant 1$. La fonction f appartient à un ensemble borné fixe de H, de sorte que l'on peut encore trouver un disque borné fixe de H contenant les fonctions $z^\beta \dfrac{\partial f}{\partial z^\alpha}$ pour $|\beta| \leqslant r$, $|\alpha| \leqslant r$.

D'après le lemme 1, on a, pour $\delta(s) > 0$, l'inégalité :

$$|f(s)|\ {}_r\delta_{\mathrm{B}}(s)\ \delta_0^r(s) \leqslant e^{2n} .$$

Cette inégalité est vérifiée pour chaque fonction f_α, puisque $|f_\alpha|\ \delta_1 \leqslant 1$; en prenant la borne supérieure, on obtient :

$$(1/\delta_1(s))\ {}_r\delta_{\mathrm{B}}(s)\ \delta_0^r(s) \leqslant e^{2n} ,$$

soit finalement :

$$\varepsilon e^{-2n\mathrm{N}}({}_r\delta_{\mathrm{B}}(s)\ \delta_0^r(s))^{\mathrm{N}} \leqslant \delta(s) ,$$

et cette inégalité reste vraie quand on remplace B par n'importe quel disque borné le contenant.

Il reste à prouver l'autre inégalité ; si B est un disque borné de H, il existe un entier P et une constante strictement positive M tels que B soit contenu dans le disque borné des fonctions f de H vérifiant :

$$|f|\ \delta^{\mathrm{P}} \leqslant \mathrm{M}.$$

Il en résulte que la jauge de B est minorée par la semi-norme

$$f \mapsto 1/\mathrm{M} \sup_{\delta(\zeta)>0} |f(\zeta)|\ \delta^{\mathrm{P}}(\zeta) ,$$

et :

$${}_r\delta_{\mathrm{B}}(s) \geqslant \inf_{f \in {}_r^s\mathfrak{J}} \left(1/\mathrm{M} \sup_{\delta(\zeta)>0} (|1 - f(\zeta)|\ \delta^{\mathrm{P}}(\zeta))\right).$$

En prenant $\zeta = s$, il vient aussitôt :

$${}_r\delta_{\mathrm{B}}(s) \geqslant 1/\mathrm{M}\ \delta^{\mathrm{P}}(s) .$$

Le corollaire 1 s'applique en particulier si on prend pour H l'algèbre $\mathcal{O}(\delta')$; en effet, $\mathcal{O}(\delta')$ contient $z_1, \ldots, z_n$ et est stable par $\partial/\partial z_1, \ldots, \partial/\partial z_n$ puisque δ' est aussi lipschitzienne.

3. Existence de fonctions spectrales et factorisation.

On veut prouver maintenant que δ appartient à $\Delta(z\ ; \overline{\mathcal{O}}(\delta'))$. Rappelons que $\Delta(z\ ; \overline{\mathcal{O}}(\delta'))$ est l'ensemble des fonctions positives φ sur $\mathbf{C}^n$ telles que l'on peut trouver pour tout point s de $\mathbf{C}^n$ des fonctions ${}^s u_1, \ldots, {}^s u_n, {}^s y_0$ dans $\overline{\mathcal{O}}(\delta')$ telles que :

$$\sum_{i=1}^{n} (z_i - s_i)\, {}^s u_i + \varphi(s)\, {}^s y_0 = 1 ,$$

et que, pour un certain entier N, les fonctions $\delta_0^{\mathrm{N}}(s)\, {}^s u_1, \ldots, \delta_0^{\mathrm{N}}(s)\, {}^s u_n,\ \delta_0^{\mathrm{N}}(s)\, {}^s y_0$ appartiennent à un même ensemble borné de $\overline{\mathcal{O}}(\delta')$.

En réalité, pour les besoins du calcul symbolique, il n'est pas nécessaire de construire les ${}^s u_i, \ldots, {}^s u_n, {}^s y_0$ pour les points s tels que $\varphi(s) = 0$, lorsqu'en chaque point s de la frontière de l'ensemble $\varphi(s) > 0$, on a :

$$\liminf_{\substack{\zeta \to s \\ \delta(\zeta) > 0}} \varphi(\zeta) = 0 . \tag{3}$$

Si la condition (3) est vérifiée et si l'on peut trouver les ${}^s u_1, \ldots, {}^s u_n, {}^s y_0$ pour $\varphi(s) > 0$, on peut trouver une fonction $\varphi_1 \leqslant \varphi$ ayant les mêmes propriétés qui soit lipschitzienne et telle que $|z|\, \varphi_1$ soit bornée. Le calcul symbolique est alors un morphisme de $\mathcal{O}(\varphi_1)$ dans l'algèbre.

Ce fait est clair pour qui connaît le calcul symbolique ; on peut également le voir par la méthode suivante, suggérée par L. Waelbroeck : considérons la fonction φ_2 définie par

$$\varphi_2(s) = \varphi(s) \quad \text{si} \quad \varphi(s) > 0$$
$$\varphi_2(s) = 1 \quad \text{si} \quad \varphi(s) = 0$$

La fonction φ_2 est alors spectrale. Puisque le spectre possède une base de fonctions lipschitziennes et contient δ_0, on peut trouver une fonction spectrale $\varphi_3 \leqslant \varphi_2$ qui soit lipschitzienne et telle que $|z|\, \varphi_3$ soit bornée. Il résulte alors de (3) que l'on a également $\varphi_3 \leqslant \varphi$ sur l'ensemble

$\varphi > 0$. De plus, la fonction φ_1 obtenue en remplaçant φ_3 par zéro là où $\varphi = 0$, est lipschitzienne et l'ouvert $\varphi_1 > 0$ est une composante connexe de l'ouvert $\varphi_3 > 0$. On a donc un morphisme $\mathcal{O}(\varphi_1) \to \mathcal{O}(\varphi_3)$ qui, composé avec le morphisme de $\mathcal{O}(\varphi_3)$ dans l'algèbre donné par le calcul symbolique, est le morphisme cherché.

Dans le cas qui nous intéresse, puisque la fonction δ est lipschitzienne, la condition (3) est automatiquement vérifiée. De plus, sous les hypothèses de convexité du lemme 1, on peut remplacer δ par la fonction $\delta_0^r\,{}_r\delta_B$ qui, si B est un disque borné assez grand de $\mathcal{O}(\delta')$ munie de la structure induite par $\mathcal{O}(\delta)$, lui est équivalente. On peut même remplacer δ par ${}_r\delta_B$, puisque la fonction δ_0 est toujours dans le spectre.

En fait, toutes ces précautions ne sont pas essentielles. Elles ont simplement pour but d'éviter l'emploi du lemme fondamental de L. Waelbroeck qui nécessiterait l'introduction d'un paramètre supplémentaire, ce qui alourdirait encore les notations déjà assez compliquées.

Soit donc s tel que $\delta(s) > 0$. Il résulte de la définition de ${}_r\delta_B(s)$ qu'il existe une fonction ${}^s y_0$ dans le disque borné 2B, telle que ${}^s g = 1 - {}_r\delta_B(s)\,{}^s y_0$ appartienne à ${}^s_r\mathcal{J}$. La seule chose qui reste à démontrer est que l'on puisse écrire :

$$ {}^s g = \sum_{i=1}^{n} (z_i - s_i)\,{}^s u_i \ , $$

où les ${}^s u_i$ sont dans $\overline{\mathcal{O}}(\delta')$ et, pour un entier N_0, les $\delta^{N_0}(s)\,{}^s u_i$ dans un même borné. On va même montrer que l'on peut trouver des familles ${}^s u_i$ dans $\mathcal{O}(\delta')$ avec les bonnes majorations, c'est-à-dire des familles de $\mathcal{O}(\delta')$ qui soient $\delta_0(s)$-tempérées dans $\mathcal{O}(\delta)$. (Une famille ${}^s f$ de $\mathcal{O}(\delta)$ est $\delta_0(s)$-tempérée s'il existe un entier N_0 tel que $\delta_0^{N_0}(s)\,{}^s f$ soit bornée ; cela signifie encore qu'il existe un entier N et une constante positive M tels que :

$$ \delta_0^{N_0}(s)\,\delta^N\,|{}^s f| \leqslant M.) $$

Pour $n = 1$, ce dernier point résulte assez facilement du lemme de Schwarz appliqué à un disque convenable. Pour $n > 1$, on doit faire appel à l'énoncé de factorisation suivant :

THEOREME 2. – *On fait sur* δ, δ' *l'hypothèse de convexité* ($\mathcal{H}$). *Alors, si on considère pour* $\delta(s) > 0$ *une fonction* ${}^s f$ *de* $\mathcal{O}(\delta')$ *nulle en* s, *telle que la famille* ${}^s f$ *soit* $\delta_0(s)$*-tempérée dans* $\mathcal{O}(\delta)$, *alors* ${}^s f$ *s'écrit* $\sum_{i=1}^{n} (z_i - s_i)\, {}^s u_i$, *où les* ${}^s u_i$ *sont dans* $\mathcal{O}(\delta')$ *et la famille* ${}^s u_i$ *est* $\delta_0(s)$*-tempérée dans* $\mathcal{O}(\delta)$.

Pour démontrer le théorème, on se ramène d'abord au cas où ${}^s f$ s'annule au point s, avec toutes ses dérivées jusqu'à l'ordre r, si r désigne un entier arbitraire donné. Pour cela, on écrit, comme dans la démonstration du lemme 1 :

$$ {}^s f - {}^s f' \cdot (z-s) + \cdots + (-1)^r\, {}^s f^{(r)} \cdot (z-s)^r = {}^s g \, . $$

La fonction ${}^s g$ a la propriété souhaitée ; d'autre part les composantes de ${}^s f', \ldots, {}^s f^{(r)}$ sont dans $\mathcal{O}(\delta')$ et $\delta_0(s)$-tempérées dans $\mathcal{O}(\delta)$.

Il reste à prouver la décomposition de ${}^s f$ lorsque ${}^s f$ s'annule au point s avec toutes ses dérivées jusqu'à l'ordre r. Pour cela, nous utilisons le procédé de diagram-chasing, imitant une idée de B. Malgrange [7], reprise par L. Hörmander [5] et, dans un contexte plus proche du nôtre, par I. Cnop [2]. Pour tout point s de $\mathbf{C}^n$ tel que $\delta(s) > 0$, soit ${}^s d$ une fonction positive semi-continue inférieurement dans l'ouvert $\delta' > 0$, telle que $|z|\, {}^s d$ soit bornée. Pour tout couple (m, t) d'entiers positifs, on note $\mathrm{L}_m^t({}^s d)$ l'espace des formes h de type $(0, m)$ à coefficients dans $\Lambda^t\, \mathbf{C}^n$ qui sont de carré intégrable pour une mesure ${}^s d^{\mathrm{N}}\, d\lambda$, où N est un entier et $d\lambda$ la mesure de Lebesgue de $\mathbf{C}^n$. Ainsi, pour tout multi-indice I de longueur t, l'élément h de $\mathrm{L}_m^t({}^s d)$ a une composante $h_{\mathrm{I}} = \sum_{\mathrm{J}}' h_{\mathrm{I},\mathrm{J}}\, d\bar{z}^{\mathrm{J}}$, où $\int |h_{\mathrm{I},\mathrm{J}}|^2\, {}^s d^{\mathrm{N}}\, d\lambda < +\infty$, pour un certain entier N. Comme dans [5], on considère deux opérateurs : l'opérateur non borné $\bar\partial$ de $\mathrm{L}_m^t({}^s d)$ dans $\mathrm{L}_{m+1}^t({}^s d)$ et l'opérateur ${}^s\mathrm{P}$ de $\mathrm{L}_m^{t+1}({}^s d)$ dans $\mathrm{L}_m^t({}^s d)$ donné par :

$$ ({}^s\mathrm{P} h)_{\mathrm{I}} = (z_1 - s_1)\, h_{\mathrm{I},1} + \cdots + (z_n - s_n)\, h_{\mathrm{I},n} \, . $$

Clairement $\bar\partial\bar\partial = {}^s\mathrm{P}\,{}^s\mathrm{P} = 0$ et ${}^s\mathrm{P}\,\bar\partial = \bar\partial\, {}^s\mathrm{P}$ et on peut considérer le complexe double :

$$ \begin{array}{ccc} \mathrm{L}_m^{t+1}({}^s d) & \xrightarrow{\bar\partial} & \mathrm{L}_{m+1}^{t+1}({}^s d) \\ \big\downarrow {}^s\mathrm{P} & & \big\downarrow {}^s\mathrm{P} \\ \mathrm{L}_m^{t}({}^s d) & \xrightarrow{\bar\partial} & \mathrm{L}_{m+1}^{t}({}^s d) \end{array} $$

La méthode consiste à partir de la décomposition triviale :

$$ {}^sf = (z_1 - s_1)\left(\frac{\bar z_1 - \bar s_1}{|z - s|^2}\, {}^sf\right) + \cdots + (z_n - s_n)\left(\frac{\bar z_n - \bar s_n}{|z - s|^2}\, {}^sf\right), $$

et à améliorer les coefficients pour les rendre holomorphes, à l'aide du double complexe cité. Comme il faut suivre de près les majorations, on doit utiliser une solution explicite de ce dernier. Avec les notations de I. Cnop [2], pour un choix convenable de ${}^sd$, on définit par récurrence :

1) une suite croissante $({}^s_kh)_{0 \leqslant k \leqslant n}$, telle que ${}^s_kh$ appartienne à $L_k^{k+1}({}^sd)$ et que $\bar\partial\, {}^s_kh$ soit défini dans $L_k^{k+2}({}^sd)$, par les formules :

$$ {}^s_0h_i = \frac{\bar z_i - \bar s_i}{|z - s|^2}\, {}^sf \tag{4} $$

$$ {}^s_{k+1}h_{\mathrm I} = \sum_{j=2}^{k+2} (-1)^{k+2-j} \frac{\bar z_{i_j} - \bar s_{i_j}}{|z - s|^2} (\bar\partial\, {}^s_kh)_{(i_1, \dots, \hat\imath_j, \dots, i_{k+2})} \tag{5} $$

de L. Hörmander [5]. Ainsi ${}^sP\, {}^s_0h = {}^sf$, ${}^sP\, {}^s_{k+1}h = {}^s_kh$ et $\bar\partial\, {}^s_nh = 0$ puisque $L_{n+1}^{n+1}({}^sd) = 0$.

2) une suite décroissante $({}^s_kh')_{n-1 \geqslant k \leqslant 0}$, telle que ${}^s_kh'$ appartienne à $L_k^{k+2}({}^sd)$ et $\bar\partial\, {}^s_kh' = {}_{k+1}^{s}h - {}^sP\, {}^s_{k+1}h'$, en appliquant au second membre les majorations de L. Hörmander [6] pour l'opérateur $\bar\partial$. Si on pose ${}^su = {}^s_0h - {}^sP\, {}^s_0h'$, on a à la fois $\bar\partial\, {}^su = 0$ et ${}^sP\, {}^su = {}^sf$, c'est-à-dire :

$$ {}^sf = \sum_{i=1}^{n} (z_i - s_i)\, {}^su_i \ . $$

La seule chose qui reste à faire est de choisir ${}^sd$ de façon que la construction indiquée soit possible et de prouver que les fonctions holomorphes ${}^su_i$ satisfont les bonnes majorations.

4. Récurrence croissante.

Pour toute fonction f de $\mathcal{O}(\delta')$, on considère la fonction δ_f définie dans $\mathbf{C}^n$ donnée par :

$$ \delta_f(\zeta) = \mathrm{Min}\left(\delta_0(\zeta),\ \inf_{\eta \in \mathbf{C}^n} |\eta - \zeta| + \frac{1}{|f(\eta)|}\right), \tag{6} $$

où, par convention, $1/|f(\eta)| = 0$ si $f(\eta)$ n'est pas défini, c'est-à-dire si $\delta'(\eta) = 0$.

On vérifie facilement que δ_f est lipschitzienne dans le rapport 1, que $\delta_f \leqslant \delta_0$ et que $|f|\,\delta_f \leqslant 1$ et $\delta_f(\zeta) = 0$ pour $\delta'(\zeta) = 0$; la fonction δ_f est la plus grande fonction sur $\mathbf{C}^n$ ayant ces propriétés.

On écrira seulement ${}^s\delta$ au lieu de $\delta_{{}^sf}$. Pour démontrer les bonnes majorations pour les ${}^s_kh$ de la récurrence croissante, on prend ${}^sd = {}^s\delta$. On utilise à cet effet un lemme sur les fonctions différentiables tempérées.

Rappelons que suivant les notations de L. Waelbroeck [8], si k est un entier positif, on désigne par $\mathcal{C}_k({}^s\delta)$ l'algèbre des fonctions numériques complexes f qui sont k-fois différentiables dans l'ouvert ${}^s\delta > 0$ et telles que pour toute dérivation partielle D d'ordre au plus k, il existe un entier N et une constante positive M tels que

$$|\mathrm{D}f|\;{}^s\delta^{\mathrm{N}} \leqslant \mathrm{M}\ .$$

Avec la bornologie évidente, $\mathcal{C}_k({}^s\delta)$ est une algèbre complète.

Nous désignons, pour tout entier m tel que $m \leqslant k$, par ${}^s_m\mathfrak{I}_k({}^s\delta)$, l'idéal de $\mathcal{C}_k({}^s\delta)$ des fonctions qui s'annulent au point s avec toutes leurs dérivées jusqu'à l'ordre m.

Lemme 2. — *On se donne un entier positif k et, pour tout point s d'une partie* S *de* $\mathbf{C}^n$, *une fonction positive* ${}^s\delta$ *sur* $\mathbf{C}^n$, *lipschitzienne dans le rapport* 1 *et inférieure à* δ_0. *Soit* ${}^sf$ *une fonction de* ${}^s_k\mathfrak{I}_{k+1}({}^s\delta)$, *les majorations dans cet espace étant* $\delta_0(s)$*-tempérées ; alors*

$${}^sg = (\bar{z}_i - \bar{s}_i/|z - s|^2)\,{}^sf$$

est dans ${}^s_{k-1}\mathfrak{I}_k({}^s\delta)$, *avec des majorations* $\delta_0(s)$*-tempérées.*

Démonstration. — Tout d'abord, dire que ${}^sf$ vérifie dans ${}^s_k\mathfrak{I}_{k+1}({}^s\delta)$, c'est-à-dire dans $\mathcal{C}_{k+1}({}^s\delta)$ des majorations $\delta_0(s)$-tempérées signifie que pour toute dérivation partielle D d'ordre au plus $k+1$, on peut trouver des entiers N_0, N et une constante positive M avec :

$$|(\mathrm{D}\,{}^sf)(\zeta)|\;{}^s\delta^{\mathrm{N}}(\zeta)\;\delta_0^{\mathrm{N}_0}(s) \leqslant \mathrm{M}\ , \tag{7}$$

pour tout point s de S et tout point ζ tel que ${}^s\delta(\zeta) > 0$.

Nous allons démontrer le lemme 2 en deux étapes ; tout d'abord nous établissons pour ${}^s g$ les inégalités analogues à (7) pour

$$|\zeta - s| \geqslant 1/2\ {}^s\delta(s)\ .$$

Dans ce cas, puisque la fonction ${}^s\delta$ est lipschitzienne dans le rapport 1, on a encore $|\zeta - s| \geqslant 1/3\ {}^s\delta(\zeta)$. En effet, ou bien ${}^s\delta(s) \geqslant 2/3\ {}^s\delta(\zeta)$ et c'est alors immédiat, ou bien ${}^s\delta(s) < 2/3\ {}^s\delta(\zeta)$ et on écrit alors $|{}^s\delta(\zeta) - {}^s\delta(s)| \leqslant |\zeta - s|$, d'où $|\zeta - s| \geqslant {}^s\delta(\zeta) - 2/3\ {}^s\delta(\zeta)$, ce qui démontre encore l'inégalité souhaitée.

Si maintenant D est une dérivation partielle d'ordre k au plus, la fonction $D\,{}^s g$ est une somme de fonctions $D_1((\bar{z}_i - \bar{s}_i)\,|z-s|^{-2})\,D_2({}^s f)$, où D_1 et D_2 sont des dérivations partielles d'ordres respectifs α et β avec $\alpha + \beta \leqslant k$. Nous allons vérifier le fait que la fonction

$$|z - s|^{\alpha+1}\, D_1((\bar{z}_i - \bar{s}_i)\,|z - s|^{-2})$$

est $\delta_0(s)$-tempérée dans $\mathcal{C}(\delta_0)$, c'est-à-dire une majoration de type :

$$|z - s|^{\alpha+1}\, D_1((z_i - s_i)\,|z - s|^{-2})\,\delta_0^{N'}\,\delta_0^{N'}(s) \leqslant M'\ .$$

C'est une conséquence immédiate du :

Lemme auxiliaire. — *Soient α, γ des entiers positifs ; pour toute dérivation partielle D_1 d'ordre au plus α par rapport à z, la fonction $|z - s|^{2\alpha+2}\, D_1((\bar{z}_i - \bar{s}_i)\,|z - s|^{-2})$ appartient à l'idéal*

$$(\mathrm{idl}\,(z - s, \bar{z} - \bar{s}\ ; \mathcal{C}_\gamma(\delta_0 \otimes \delta_0)))^{\alpha+1}\ .$$

L'idéal $\mathfrak{b}_\gamma = \mathrm{idl}\,(z - s, \bar{z} - \bar{s}\,; \mathcal{C}_\gamma(\delta_0 \otimes \delta_0))$ est l'idéal de $\mathcal{C}_\gamma(\delta_0 \otimes \delta_0)$ engendré par $z_1 - s_1, \ldots, z_n - s_n, \bar{z}_1 - \bar{s}_1, \ldots, \bar{z}_n - \bar{s}_n$, c'est-à-dire par $x_1 - t_1, \ldots, x_n - t_n,\ y_1 - v_1, \ldots, y_n - v_n$, si $z_j = x_j + iy_j$, $s_j = t_j + iv_j$. La puissance $\alpha + 1$-ème $\mathfrak{b}_\gamma^{\alpha+1}$ de $\mathfrak{b}_\gamma$ est l'idéal de toutes les fonctions

$$P(x_1 - t_1, \ldots, x_n - t_n, y_1 - v_1, \ldots, y_n - v_n)\,\varphi\ ,$$

où P est un polynôme homogène de degré $\alpha + 1$ et φ une fonction de $\mathcal{C}_\gamma(\delta_0 \otimes \delta_0)$. Sous cette forme, il est immédiat de vérifier que chaque dérivation partielle d'ordre 1 envoie $\mathfrak{b}_\gamma^{\alpha+1}$ dans $\mathfrak{b}_{\gamma-1}^{\alpha}$.

On démontre le lemme auxiliaire par récurrence sur α : si $\alpha = 0$, la propriété est claire ; on suppose donc le lemme démontré jusqu'à l'ordre α et pour tout γ. Soit alors ψ un élément de $\mathfrak{b}_\gamma^{\alpha+1}$ et choisissons une dérivation partielle d'ordre 1, par exemple $\partial/\partial x_1$; on a :

$$|z-s|^{2(\alpha+1)+2}\frac{\partial}{\partial x_1}(|z-s|^{-2\alpha-2}\psi) = 2(x_1-t_1)\psi + |z-s|^2\frac{\partial\psi}{\partial x_1},$$

et les fonctions $(x_1 - t_1)\psi$ et $|z-s|^2 \dfrac{\partial}{\partial x_1}$ appartiennent chacune à $\mathfrak{b}_{\gamma-1}^{\alpha+2}$.

On peut alors démontrer la première étape ; utilisant pour $|\zeta - s| \geqslant 1/2\ {}^s\delta(s)$, l'inégalité $|\zeta - s| \geqslant 1/3\ {}^s\delta(\zeta)$, il vient :

$$|D_1((\overline{z_i} - \overline{s_i})|z-s|^{-2})(\zeta)|\ {}^s\delta(\zeta)^{\alpha+1}\ \delta_0^{N'}(\zeta)\,\delta_0^{N'}(s) \leqslant 3^{\alpha+1}M,$$

de sorte que la fonction $D_1((z_i - s_i)|z-s|^{-2})$ vérifie, pour

$$|\zeta - s| \geqslant 1/2\ {}^s\delta(s),$$

une majoration $\delta_0(s)$-tempérée dans $\mathcal{C}({}^s\delta)$. Comme il en est de même par hypothèse de $D_2({}^sf)$, il en est encore de même de leur produit, puis de $D({}^sf)$.

Passons maintenant à la seconde étape. Il s'agit alors de démontrer pour ${}^sg$ des majorations analogues à (7) pour $|\zeta - s| < 1/2\ {}^s\delta(s)$ et de vérifier que ${}^sg$ s'annule au point s avec toutes ses dérivées jusqu'à l'ordre $k-1$ (ou plus précisément que ces dernières se prolongent continûment en des fonctions nulles en s).

Soit donc D une dérivation partielle d'ordre l avec $l \leqslant k$. La fonction $D({}^sg)$ est encore une somme de fonctions

$${}^sh = D_1((\overline{z_i} - \overline{s_i})|z-s|^{-2})\,D_2({}^sf),$$

où D_1 et D_2 sont des dérivations partielles d'ordres respectifs α et β avec $\alpha + \beta = l$. Il s'agit de prouver pour ${}^sh$ une majoration $\delta_0(s)$-tempérée dans $\mathcal{C}({}^s\delta)$ pour $|\zeta - s| < 1/2\ {}^s\delta(s)$ si $l \leqslant k$ et que ${}^sh(s) = 0$ (ou du moins que ${}^sh$ tend vers zéro au point s) si $l \leqslant k-1$.

La formule de Taylor donne :

$$|(D_2\ {}^sf)(\zeta)| \leqslant \frac{|\zeta - s|^{k-\beta+1}}{(1-\beta+1)\,!}\sup_{|\eta - s| < 1/2\ {}^s\delta(s)} \|d^{k+1}\ {}^sf(\eta)\|$$

Or $d^{k+1}\ {}^sf$ vérifie par hypothèse une majoration :

$$\| d^{k+1}\ {}^s f(\eta) \|\ {}^s\delta^{\mathrm{N}}(\eta)\ \delta_0^{\mathrm{N}_0}(s) \leqslant \mathrm{M}\ .$$

D'autre part, puisque $|\zeta - s| < 1/2\ \delta(s)$ et $|\eta - s| < 1/2\ \delta(s)$, on a à la fois :

$$1/2\ {}^s\delta(s) < {}^s\delta(\zeta) < 3/2\ {}^s\delta(s)$$

et :

$$1/2\ {}^s\delta(s) < {}^s\delta(\eta) < 3/2\ {}^s\delta(s)\ ,$$

d'où :

$${}^s\delta(\eta) > 1/3\ {}^s\delta(\zeta)\ ,$$

et :

$$\| d^{k+1}\ {}^s f(\eta) \|\ {}^s\delta^{\mathrm{N}}(\zeta)\ \delta_0^{\mathrm{N}_0}(s) \leqslant 3^{\mathrm{N}}\, \mathrm{M}\ ,$$

c'est-à-dire :

$$|\mathrm{D}_2\ {}^s f(\zeta)|\ {}^s\delta^{\mathrm{N}}(\zeta)\ \delta^{\mathrm{N}_0}(s) \leqslant (3^{\mathrm{N}}/(k-\beta+1)\,!\,)\,\mathrm{M}\ |\zeta - s|^{k-\beta+1}\ .$$

En utilisant la majoration donnée pour $\mathrm{D}_1((\overline{z}_i - \overline{s}_i)\,|z - s|^{-2})$ par le lemme auxiliaire, on obtient pour ${}^s h$ la majoration souhaitée, les facteurs $|z - s|$ disparaissant pour $l \leqslant k$, puisqu'alors

$$\alpha + 1 \leqslant k - \beta + 1\ .$$

Enfin, pour $l \leqslant k - 1$, on a encore en revanche ${}^s h = 0(|z - s|)$ de sorte que ${}^s h$ tend vers zéro au point s.

Nous sommes maintenant en mesure de suivre les majorations des ${}^s_k h$. Puisque ${}^s\delta \leqslant 1/|{}^s f|$, la fonction ${}^s f$ appartient à $\mathcal{O}({}^s\delta)$ et vérifie dans $\mathcal{O}({}^s\delta)$ des majorations indépendantes de s ; a fortiori, elle vérifie donc des majorations $\delta_0(s)$-tempérées dans $\mathscr{C}_{r+1}({}^s\delta)$. D'autre part, comme ${}^s f$ appartient à ${}^s_r\mathfrak{I}$, elle appartient en fait à ${}^s_r\mathfrak{I}_{r+1}({}^s\delta)$. On déduit du lemme 2 qu'en appliquant les formules (4) ou (5), la même propriété demeure, à cela près que l'on perd chaque fois une unité pour r. Il est évident qu'il en est de même lorsqu'on applique $\overline{\partial}$. Par conséquent, si $r \geqslant 2n + 1$, on vérifie par récurrence que les composantes de ${}^s_k h$ vérifient des majorations $\delta_0(s)$-tempérées dans $\mathscr{C}({}^s\delta)$; autrement dit, il existe des entiers N_0, N et une constante positive M telle que :

$$|{}^s_k h_{\mathrm{I},\mathrm{J}}|\ {}^s\delta^{\mathrm{N}}\ \delta_0^{\mathrm{N}_0}(s) \leqslant \mathrm{M}\ , \tag{8}$$

pour $0 \leqslant k \leqslant n$ et tout couple I, J de multi-indices.

Finalement, puisque δ_0^{2n+1} est intégrable par rapport à la mesure de Lebesgue $d\lambda$ sur $\mathbf{C}^n$, on déduit de (8) une majoration de type L^2 :

$$\left(\int |{}^s_k h_{\mathrm{I},\mathrm{J}}|^2 \, {}^s\delta^{2\mathrm{N}} \, \delta_0^{2n+1} \, d\lambda\right) \delta_0^{\mathrm{N}_0}(s) \leqslant \mathrm{M} \int \delta_0^{2n+1} \, d\lambda \,,$$

que l'on peut encore écrire, en posant $|{}^s_k h|^2 = \sum\limits_{\mathrm{I},\mathrm{J}}' |{}^s_k h_{\mathrm{I},\mathrm{J}}|^2$ et sachant que ${}^s\delta \leqslant \delta_0$, sous la forme :

$$\left(\int |{}^s_k h|^2 \, {}^s\delta^{\mathrm{N}'} \, d\lambda\right) \delta_0^{\mathrm{N}_0}(s) \leqslant \mathrm{M}' \,. \tag{9}$$

5. Récurrence décroissante.

Comme les majorations de L. Hörmander pour l'opérateur $\bar{\partial}$ nécessitent la plurisousharmonicité, nous devons modifier le choix que nous avons fait pour ${}^s d$ pour redescendre la récurrence. Nous avons besoin du résultat suivant :

LEMME 3. — *On fait les hypothèses de convexité* ($\mathcal{H}$). *A toute fonction f de $\mathcal{O}(\delta')$, on peut associer une fonction positive $\hat{\delta}_f$ sur $\mathbf{C}^n$ vérifiant :*

a) $-\log \hat{\delta}_f$ *est plurisousharmonique sur l'ouvert* $\delta' > 0$,

b) $1/\hat{\delta}_f$ *est* δ'*-tempérée,*

c) $\hat{\delta}_f \leqslant \delta_f$,

de telle sorte que $1/\hat{\delta}_f$ *reste bornée dans* $\mathcal{C}(\delta)$ *quand f varie dans un ensemble borné de* $\mathcal{O}(\delta)$.

La conclusion du lemme 3 est équivalente à la proposition suivante : pour tout entier positif N et toute constante positive M, il existe un entier P et $\eta > 0$ tels que l'on puisse associer à toute fonction f de $\mathcal{O}(\delta')$ vérifiant $|f|\,\delta^{\mathrm{N}} \leqslant \mathrm{M}$, une fonction positive $\hat{\delta}_f$ vérifiant a), b), c) et $\hat{\delta}_f \geqslant \eta\delta^{\mathrm{P}}$.

Démonstration. — Partons d'une fonction f de $\mathcal{O}(\delta')$ telle que $|f|\,\delta^{\mathrm{N}} \leqslant \mathrm{M}$. On peut toujours supposer M assez grand pour que $1/\mathrm{M}\,\delta^{\mathrm{N}}$ soit lipschitzienne dans le rapport 1 et inférieure à δ_0. De l'inégalité $|f|\,1/\mathrm{M}\,\delta^{\mathrm{N}} \leqslant 1$, résulte alors l'inégalité $\delta_f \geqslant 1/\mathrm{M}\,\delta^{\mathrm{N}}$.

Comme f appartient à $\mathcal{O}(\delta')$, il existe aussi un entier N$'$ et une constante positive M$'$ (dépendant en revanche tous les deux de f) tels que $|f|\,\delta'^{N'} \leqslant M'$, et de la même façon, si on choisit M′ assez grand, il vient $\delta_f \geqslant 1/M'\,\delta^{N'}$.

Grâce à l'hypothèse 2), il existe un entier N'_1 et $\varepsilon' > 0$ tels que $\varepsilon'\delta'^{N'_1} \leqslant \delta'_1$ et $\varepsilon'\delta_1'^{N'_1} \leqslant \delta'$, où $-\log \delta'_1$ est plurisousharmonique. On a donc $(\varepsilon'^{N'}/M')\,\delta_1'^{N'N'_1} \leqslant \delta_f$. Grâce à l'hypothèse 1), il existe $M_1 > 0$ tel que

$$(\varepsilon'^{N'} M_1/M')\,\delta_1'^{N'N'+1} \geqslant \delta \ . \tag{10}$$

Comme δ'_1 est équivalente à δ', l'adhérence K de l'ensemble des points ζ de $\mathbf{C}^n$ tels que $\delta'_1(\zeta) \geqslant 1/M_1$ est compacte dans l'ouvert $\delta' > 0$. Pour tout point ζ n'appartenant pas à K, on a :

$$(\varepsilon'^{N'} M_1/M')\,\delta_1'^{N'N'_1+1}(\zeta) \leqslant \delta_f(\zeta) \tag{11}$$

Grâce à l'hypothèse 3), il existe $\varepsilon > 0$ et un entier strictement positif N_1 tels que $1/M\,\delta^N \geqslant \varepsilon\delta^{N_1}$, la fonction δ_1 étant telle que $1/\delta_1$ soit l'enveloppe supérieure d'une famille $|f_\alpha|$, où f_α appartient à $\mathcal{O}(\delta')$; la même propriété est vérifiée par $\varepsilon/2\ \delta_1^{N_1}$ avec la famille $\varepsilon/2\ f_\alpha^{N_1}$. Par suite, pour tout point ζ de K, on peut trouver une fonction f_ζ dans $\mathcal{O}(\delta')$ vérifiant

$$\varepsilon/2\ |f_\zeta|\,\delta_1^{N_1} \leqslant 1$$

et :

$$\varepsilon\,|f_\zeta(\zeta)|\,\delta_1^{N_1}(\zeta) > 1 \quad \text{si} \quad \delta(\zeta) > 0\ ,$$
$$|f_\zeta(\zeta)|\,\delta_f(\zeta) > 1 \quad \text{si} \quad \delta(\zeta) = 0$$

(puisque δ_f ne s'annule pas dans l'ouvert $\delta' > 0$).

Dans tous les cas, puisque $\delta_f \geqslant 1/M\,\delta^N \geqslant \varepsilon\delta_1^{N_1}$, on a

$$|f_\zeta(\zeta)|\,\delta_f(\zeta) > 1\ .$$

Comme δ_f est continue, l'inégalité reste vraie dans un voisinage de ζ et, par compacité, on peut trouver une famille $f_1, \ldots, f_p$ dans $\mathcal{O}(\delta')$ telle que, si g désigne l'enveloppe supérieure de $|f_1|, \ldots, |f_p|$, on ait à la fois :

$$\epsilon/2\ \ g\,\delta_1^{N_1} \leqslant 1 \tag{12}$$

$$g(\zeta)\,\delta_f(\zeta) > 1 \quad \text{pour tout point } \zeta \text{ de K.} \tag{13}$$

Considérons alors la fonction :

$$\hat{\delta}_f = \inf((\varepsilon'^{N'} M_1/M')\, \delta_1'^{N'N_1'+1}, g^{-1}) .$$

D'abord $-\log \hat{\delta}_f$ est plurisousharmonique, puisque $-\log \hat{\delta}_f$ est l'enveloppe supérieure de $-\log(\varepsilon'^{N'} M_1/M') - (N'N_1' + 1) \log \delta_1'$ et de $\log |f_1|, \dots, \log |f_p|$. Comme δ_1' est équivalente à δ' et que g appartient à $\mathcal{O}(\delta')$, il est immédiat que $1/\hat{\delta}_f$ appartient à $\mathcal{C}(\delta')$. En fait δ_f est équivalente à δ', mais avec un entier et un ε dépendant de f. De (11) et (13), on déduit que $\hat{\delta}_f \leqslant \delta_f$. Enfin, de (10) et (12), il résulte que $1/\hat{\delta}_f$ est bornée dans $\mathcal{C}(\delta)$, de sorte que la démonstration du lemme 3 est achevée.

On choisit maintenant pour redescendre la récurrence la fonction ${}^s\hat{\delta} = \hat{\delta}_{{}^sf}$. L'inégalité (9) donne une majoration $\delta_0(s)$-tempérée de type L^2 pour ${}_k^sh$ dans $L_k^{k+1}({}^s\delta)$, donc dans $L_k^{k+1}({}^s\delta)$. Démontrons par récurrence que ${}_k^sh'$ satisfait une majoration $\delta_0(s)$-tempérée de type L^2 dans $L_k^{k+2}({}^s\hat{\delta})$, et supposons pour cela la propriété établie pour ${}_n^sh', \dots, {}_k^sh'$; une telle majoration est encore valable pour ${}^sP\,{}_k^sh'$ puisqu'en appliquant ${}^sP$, on perd seulement un facteur $n\,\delta_0^{-1}\,\delta_0^{-1}(s)$. Ainsi il existe des entiers N_0, N et une constante positive M tels que

$$\left(\int |{}_k^sh - {}^sP\,{}_k^sh'|^2\, {}^s\delta^N\, d\lambda\right) \delta_0^{N_0}(s) \leqslant M . \tag{14}$$

Comme $\bar\partial({}_k^sh - {}^sP\,{}_k^sh') = 0$, une majoration classique de L. Hörmander assure l'existence d'une forme ${}_{k+1}^sh'$ dans $L_{k-1}^{k+1}({}^s\delta)$ telle que

$$\bar\partial\, {}_{k-1}^sh' = {}_k^sh - {}^sP\,{}_k^sh'$$

et :

$$\int |{}_{k-1}^sh'|^2\, {}^s\hat{\delta}^N\, \delta_0^4\, d\lambda \leqslant \int |{}_k^sh - {}^sP\,{}_k^sh'|^2\, {}^s\hat{\delta}^N\, d\lambda \tag{15}$$

Comme ${}^s\hat{\delta} \leqslant \delta_0$, on peut déduire de (14) et (15) une majoration $\delta_0(s)$-tempérée de type L^2, pour ${}_{k-1}^sh'$. Par suite ${}_0^sh'$, puis

$${}^su = {}_0^sh - {}^sP\,{}_0^sh'$$

vérifient une majoration du même type, c'est-à-dire :

$$\left(\int |{}^su|^2\, {}^s\hat{\delta}^N\, d\lambda\right) \delta_0^{N_0}(s) \leqslant M . \tag{16}$$

Alors, pour s fixe, comme $1/{}^s\hat{\delta}$ appartient à $\mathcal{C}(\delta')$, il existe un entier N' et $\varepsilon' > 0$ tels que ${}^s\hat{\delta}^N \geqslant \varepsilon'\,\delta'^{N'}$, de sorte que (16) donne encore :

$$\int |{}^s u|^2 \, \delta'^{N'} \, d\lambda \leqslant M'$$

(où N' et M' dépendent ici de s). Puisque δ' est lipschitzienne et ${}^s u$ holomorphe, on peut déduire de cette majoration de type L^2 une majoration uniforme qui démontre que ${}^s u$ appartient à $\mathcal{O}(\delta')$.

Quand s varie, comme $1/{}^s\hat{\delta}$ reste bornée dans $\mathcal{C}(\delta)$, il existe un entier P et $\eta > 0$ tels que ${}^s\hat{\delta} \geqslant \eta\,\delta^P$. On peut donc déduire de (16) la majoration :

$$\left(\int |{}^s u|^2 \, \delta^{NP} \, d\lambda\right) \delta_0^{N_0}(s) \leqslant \eta^{-N} M \, .$$

Comme δ est lipschitzienne, il en résulte une majoration $\delta_0(s)$-tempérée dans $\mathcal{O}(\delta)$.

6. Affaiblissement des hypothèses.

Les théorèmes 1 et 2 sont également vrais sous l'hypothèse $(\mathcal{H}')$ qui suit, laquelle est un peu plus faible que l'hypothèse $(\mathcal{H})$ que nous avons considérée :

2bis) l'ouvert $\delta' > 0$ est pseudoconvexe.

3) la fonction δ est équivalente à une fonction δ_1 telle que $1/\delta_1$ soit l'enveloppe supérieure sur l'ouvert $\delta' > 0$ d'une famille $|f_\alpha|$ où f_α appartient à $\mathcal{O}(\delta')$.

La démonstration est exactement la même sauf en ce qui concerne le lemme 3 qu'il n'est plus possible d'obtenir. On doit le remplacer par le résultat plus faible qui suit, lequel suffit néanmoins.

LEMME 3 bis. – *On fait les hypothèses* $(\mathcal{H}')$ *et on garde les notations du n° 3. Il existe un entier* N_0 *et une constante* M *tels qu'à tout point* s *de* $\mathbf{C}^n$ *tel que* $\delta(s) > 0$, *on puisse associer une fonction positive* ${}^s\hat{\delta}$ *sur* $\mathbf{C}^n$ *vérifiant :*

a) $-\log {}^s\hat{\delta}$ *est plurisousharmonique dans l'ouvert* $\delta' > 0$.

b) $1/{}^s\hat{\delta}$ *est* δ'*-tempérée*

c) $\left(\int |{}^s_k h|^2 \, {}^s\hat{\delta} \, d\lambda\right) \delta_0^{N_0}(s) \leqslant M,$

de façon que $1/{}^s\hat{\delta}$ *reste bornée dans* $\mathcal{C}(\delta)$ *quand* s *varie dans l'ouvert* $\delta > 0$ *et* ${}^sf$ *dans un ensemble borné fixe de* $\mathcal{O}(\delta)$.

Il résulte d'abord des calculs faits au n° 4 que lorsque ${}^sf$ varie dans un ensemble borné fixe de $\mathcal{O}(\delta)$, il existe des entiers N_0, N et une constante positive M' tels que l'on ait :

$$|{}^s_kh|\, \delta^N\, \delta_0^{N_0}(s) \leqslant M' .$$

Il suffit de choisir pour ${}^sd$ la fonction δ elle-même ou bien d'utiliser l'inégalité (8).

Il existe, grâce à l'hypothèse 3), un entier N_1 et $\varepsilon_1 > 0$ tels que :

$$1/\delta \leqslant \sup_\alpha |(1/\varepsilon_1)\, f_\alpha^{N_1}| ,$$

où les fonctions f appartiennent à $\mathcal{O}(\delta')$. Puisque la fonction $1/\delta$ est continue sur l'ouvert $\delta' > 0$, il existe une suite g_j extraite de la famille $(1/\varepsilon_1)\, f_\alpha^{N_1}$ telle que :

$$1/\delta \leqslant \sup_j |g_j| ,$$

et la famille g_j ainsi construite est évidemment bornée dans $\mathcal{O}(\delta)$.

Posons d'autre part :

$${}^s\varphi = \mathrm{Max}\left(1 , \sup_{|\alpha| \leqslant n} \left|\frac{\partial\, {}^sf}{\partial z^\alpha}\right|\right).$$

Chaque fonction ${}^s\varphi$ est δ'-tempérée et telle que $\log {}^s\delta$ soit p.s.h. dans l'ouvert $\delta' > 0$. Quand s et ${}^sf$ varient, la famille ${}^s\varphi$ reste bornée dans $\mathcal{O}(\delta)$.

Pour s, ${}^sf$ et k fixes, on a ${}^s_kh = 0({}^s\varphi)$ puisque, par construction, en dehors d'un voisinage de s, la fonction ${}^s_kh$ s'exprime comme une combinaison linéaire avec des coefficients bornés de dérivées partielles de ${}^sf$ d'ordre au plus n, et que, grâce au lemme 2, cette fonction se prolonge continûment en s.

Considérons, pour tout entier l, la fonction :

$${}^s_l\psi = \mathrm{Min}\left((1/{}^s\varphi)^2 , \left(\inf_{j \leqslant l} 1/|f_j|\right)^{2N}\right) \mathrm{Min}\left(1 , \inf_{i=1,\dots,n} 1/|z_i|\right)^{2n+1}$$

On vérifie aussitôt que $-\log {}^s_l\psi$ est p.s.h. dans l'ouvert $\delta' > 0$, que chaque ${}^s_l\psi$ est δ'-tempérée et que ${}^s_l\psi$ reste dans un ensemble borné fixe de $\mathcal{C}(\delta)$. Enfin, on a pour tout n :

$$ {}^s_l\mathrm{I} = \int |{}^s_k h|^2 \, {}^s_l\psi \, d\lambda < +\infty \ , $$

par construction de ${}^s_l\psi$, de sorte que, par Beppo-Levi :

$$ \inf_{l \geqslant 0} {}^s_l\mathrm{I} = \int |{}_k h|^2 \left(\inf_{l \geqslant 0} {}^s_l\psi \right) d\lambda \ , $$

et :

$$ \inf_{l \geqslant 0} {}^s_l\mathrm{I} \leqslant \int |{}^s_k h|^2 \, \delta^{2\mathrm{N}} \, \mathrm{Min} \left(1 \ , \inf_{i=1,\dots,n} 1/|z_i| \right)^{2n+1} d\lambda $$

soit finalement :

$$ \left(\inf_{l \geqslant 0} {}^s_l\mathrm{I} \right) \delta_0^{\mathrm{N}_0}(s) \leqslant \mathrm{M}'' \ , $$

où M′ est une constante fixe. On choisit alors M = M″ + 1 et l assez grand pour que :

$$ {}^s_l\mathrm{I} \ \delta_0^{\mathrm{N}_0}(s) \leqslant \mathrm{M} \ . $$

On prend pour ${}^s\delta$ la fonction ${}^s_l\psi$ ainsi mise en évidence.

Addenda

1) Sous les hypothèses de convexité ($\mathcal{H}$) et à partir du lemme 3 ci-dessus, I. Cnop donne dans [2] une démonstration très élégante du théorème 2 s'appuyant sur le calcul symbolique modulo un idéal complet qui évite les calculs compliqués du lemme 2. Il serait plus difficile d'employer sa méthode avec les hypothèses de convexité plus faible ($\mathcal{H}'$).

2) Toujours, sous les hypothèses de convexité fortes ($\mathcal{H}$), il est possible de déduire le théorème 1 du théorème de I. Cnop ; une démonstration est donnée dans [4].

3) Ayant eu connaissance de cette rédaction, B.A. Taylor m'a communiqué qu'un énoncé analogue au théorème 1 peut être obtenu en adaptant la démonstration d'un théorème qu'il donne dans un article à paraître au Pac. J. of Math. Sa méthode est indépendante du calcul symbolique ; en revanche, elle ne permet pas d'obtenir l'énoncé de décomposition en $(z_1 - s_1)\, u_1 + \cdots + (z_n - s_n)\, u_n$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] I. CNOP, Un problème de spectre dans certaines algèbres de fonctions holomorphes à croissance tempérée, *C.R. Acad. Sc. Paris,* A 270, (1970), 1690-1691.

[2] I. CNOP, A theorem concerning holomorphic functions with bounded growth (thesis).

[3] J.P. FERRIER, Séminaire sur les algèbres complètes, Springer Lectures Notes, n° 164, (1970).

[4] J.P. FERRIER, Sur la convexité holomorphe et les limites inductives d'algèbres $\mathcal{O}(\delta)$; *C.R. Acad. Sc. Paris.* A, (1971).

[5] L. HÖRMANDER, Generators for some rings of analytic functions, *Bull. Am. Math. Soc.,* 73, 943-949, (1967).

[6] L. HÖRMANDER, L^2 estimates and existence theorems for the $\bar{\partial}$-operator, *Acta Math.,* 113, 89-152, (1965).

[7] B. MALGRANGE, Sur les systèmes différentiels à coefficients constants ; *Coll. Int. du C.N.R.S.,* 117, (1963), 113-122.

[8] L. WAELBROECK, Etude spectrale des algèbres complètes, *Mém. Cl. Sc. Acad. Roy. Belg.,* 31, fasc. 7, (1960).

[9] L. WAELBROECK, Lectures in spectral theory, Dep. Math. Univ. Yale, (1963).

Manuscrit reçu le 22 février 1971
accepté par G. Choquet

J.P. FERRIER
Service de Mathématique
Université de Nancy
54 – Nancy