ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

NICOLE MOULIS

Approximation de fonctions différentiables sur certains espaces de Banach

Annales de l'institut Fourier, tome 21, nº 4 (1971), p. 293-345

<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1971__21_4_293_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
21, 4 (1971), 293-345.

APPROXIMATION DE FONCTIONS DIFFÉRENTIABLES SUR CERTAINS ESPACES DE BANACH

par Nicole MOULIS

0. Introduction.

E étant un espace de Hilbert séparable de dimension infinie, Ω un ouvert de E le sujet de cette étude est l'approximation de fonctions de classe C^k définies sur Ω à valeurs dans un espace de Banach F, par des fonctions de classe C^∞.

Dans un article paru au « Journal of Mechanics » « An approximate Morse-Sard Theorem » [6]. J. Eells et J. MacAlpin montrent que si X et Y sont deux variétés paracompactes de classe C^∞ modelées sur E, toute application continue de X dans Y peut être approchée au sens de la C^0-topologie fine par une application de classe C^∞ qui est une application de Sard (l'ensemble des valeurs critiques est maigre). Ce résultat a pour corollaire : soit B une sous-variété fermée de Y, toute application continue de X dans Y peut être approchée au sens de la C^0-topologie fine par une application de classe C^∞ transversale à B. Les seuls autres théorèmes de transversalités connus pour les variétés de dimension infinie sont dus à S. Smale [13] et F. Quinn [12] et concernent les applications Fredholm.

Ces résultats sont généralisés de la manière suivante :

Dans le paragraphe I, nous démontrons que l'ensemble des applications de classe C^∞ de Ω dans F est dense dans l'ensemble des applications de classe C^{2k-1} muni de la C^k-topologie fine. Si E est de dimension finie, un théorème plus fort est vrai et bien connu; mais sa démonstration utilise le produit de convolution, donc une mesure de Lebesgue sur E.

f étant une fonction donnée de classe C^{2k-1} définie sur Ω, nous construisons explicitement une fonction g de classe C^∞ qui est une C^k-approximation de f. La construction se fait en deux étapes : à l'aide du théorème connu en dimension finie, et en utilisant l'existence d'une suite de sous-espaces de dimension finie de E dont la réunion est dense dans E, nous définissons une fonction g de classe C^∞ qui est une C^{k-1}-approximation de f et telle que $D^k g$ « ne diffère pas trop » de $D^k f$. Puis, ce lemme est utilisé localement pour, grâce à certaines partitions de l'unité construire la fonction g.

Pour clarifier l'exposé, nous avons d'abord fait la démonstration pour $k = 1$. Elle se généralise, alors, au cas où Ω est un ouvert de c_0 ou d'un espace l_p : si α est la classe d'une norme sur l'espace [2], nous démontrons que l'ensemble des applications de classe C^α de Ω dans F est dense dans l'ensemble des applications de classe C^1 de Ω dans F, muni de la C^1-topologie fine.

Dans le paragraphe II, nous donnons quelques applications des théorèmes du paragraphe I qui permettent de ramener l'étude des variétés hilbertiennes de classe C^k à celle des variétés de classe C^∞ (les seules pour lesquelles des théorèmes soient connus d'après [9] et [5]). Ces théorèmes sont démontrés par des méthodes « classiques » [11].

Dans le paragraphe III, nous approfondissons l'étude des fonctions construites au paragraphe I. Dans le cas d'une C^1-approximation, la fonction $\bar{g}$ s'obtient par recollement de fonctions très voisines de fonctions linéaires (qui sont des fonctions de Sard). L'étude précise de $D\bar{g}$ montre que, dans le cas où Ω est un ouvert d'un espace de Hilbert, l'ensemble des applications de Sard, de classe C^∞ de Ω dans F est dense dans l'ensemble des applications de classe C^1, muni de la C^1-topologie fine.

Nous en déduisons que si M et N sont deux variétés de classe C^∞ modelées sur E, N_1 une sous-variété de N l'ensemble des applications de classe C^∞ de M dans N transversales à N_1 est dense dans l'ensemble des applications de classe C^1 muni de la C^1-topologie fine.

1. Lissage de fonctions définies sur certains espaces de Banach.

Dans tout ce paragraphe, E^α désignera un des espaces de Banach suivant :

l_p : espace des suites de nombres réels $\{x_n\}$ tels que la série $\sum_{n \in N} |x_n|^p$ soit convergente; p entier supérieur ou égal à 2.

c_0 : espace des suites de nombres réels $\{x_n\}$ tels que

$$\lim_{n \to \infty} x_n = 0.$$

Nous supposerons E^α, muni d'une norme de classe C^α sur le complémentaire de l'origine dans E^α. D'après [2] les espaces c_0 et l_{2p} admettent une norme de classe C^∞ équivalente à la norme usuelle. Les espaces l_{2p+1} admettent une norme de classe C^{2p}.

A. Théorème 1. — *Soit* Ω *un ouvert de* E^α, F *un espace de Banach. L'ensemble des applications de classe* C^α *de* Ω *dans* F *est dense dans l'ensemble des applications de classe* C^1 *de* Ω *dans* F *muni de la* C^1*-topologie fine.* (Cet ensemble est noté $\mathcal{C}^1(\Omega, F)$.)

Pour démontrer le théorème 1 nous démontrons tout d'abord un lemme fondamental qui sera utilisé comme lemme local dans la suite.

A_1. Lemme fondamental 1. — *Soit* f *une application de classe* C^1 *définie sur une boule* B_1 *centrée à l'origine de* E^α *à valeurs dans* F. *Soit* B_0 *une boule centrée à l'origine de* E^α, $B_0 \subset B_1$ *et* $\bar{\eta}$ *un nombre positif tel que* : $\sup_{x \in B_0} |D^1 f(x)| < \bar{\eta}$. *Soit* ε *un nombre positif arbitraire. Il existe* 2 *constantes* λ_0 *et* λ_1 *et une fonction* g *de classe* C^α *définie sur* B_1 *à valeurs dans* F *telles que :*

$$\sup_{x \in B_0} |f(x) - g(x)| < \lambda_0 \varepsilon \qquad \text{et} \qquad \sup_{x \in B_0} |D^1 g(x)| < \lambda_1 \bar{\eta}$$

Démonstration du lemme fondamental. — Soit (e_n) $(n \in N)$ la base canonique de E^α (e_n est la suite $\{x_p^n\}$ telle que $x_p^n = 0$

si $p \neq n$ $x_n^n = 1$); notons E_n, l'espace engendré par les e_p $(1 \leqslant p \leqslant n)$, π_n la projection sur E_n parallèlement à l'espace E^n engendré par les $e_p (p > n)$. Posons $E^\infty = \bigcup_{n \in \mathbf{N}} E_n$.

E^∞ est un sous-espace vectoriel de E. Nous munissons E^∞ de la norme induite par celle de E. Cette somme induit sur chaque E_n une norme équivalente à la norme euclidienne notée $| \quad |_n$.

E^∞ est un sous-espace vectoriel normé dense dans E, non complet.

La construction de la fonction g se fait en deux parties :

1° Nous construisons une fonction $\bar{f}$ sur E^∞ telle que la restriction de $\bar{f}$ à E_n soit de classe C^∞ (quel que soit n) et telle que $\bar{f}$ soit « proche de f ».

2° Nous construisons une application différentiable Ψ de E sur E^∞ telle que $|x - \Psi(x)| < r$. La fonction g est ainsi définie

$$g(x) = \bar{f}(\Psi(x)).$$

1° *Construction de* $\bar{f}$.

Soit φ une fonction de classe C^∞ définie sur **R** et à valeurs dans **R** telle que :

$$\varphi(t) = 1 \quad \text{si} \quad |t| < \frac{1}{2}$$
$$\varphi(t) = 0 \quad \text{si} \quad |t| > 1$$
φ est décroissante.

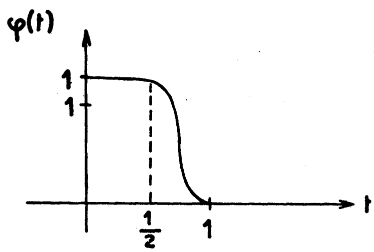

FIG. 1.

Considérons la fonction $\hat{f}_n$ *(définie sur* E) *par*

$$\hat{f}_n(x) = \frac{a_n^n}{c} \int_{F_n} f(x-y)\varphi(a_n|y|_n)\, dy; \qquad c = \int_{E_n} \varphi(|y|_n)\, dy.$$

Nous avons choisi la constante a_n telle que

$$\sup_{x \in E_n \cap B_0} |\hat{f}_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2^n} \quad \text{et} \quad \sup_{x \in E_n \cap B_0} |D\hat{f}_n(x) - Df(x)| < \frac{\bar{\eta}}{2^n}.$$

La fonction $\hat{f}_n$ est de classe C^1, mais la restriction à E_n de $\hat{f}_n$ est de classe C^∞.

Posons $\bar{f}_0 = f(e_0)$.

Supposons définie par récurrence sur E_{n-1} la fonction $\bar{f}_{n-1}$.

Posons :

$$\bar{f}_n(x) = \hat{f}_n(x) + \bar{f}_{n-1}(\pi_{n-1}(x)) - \hat{f}_n(\pi_{n-1}(x)).$$

Par récurrence on vérifie que :

(*i*) La restriction à E_n de $\bar{f}_n$ est de classe C^∞, $\bar{f}_n$ coïncide avec $\bar{f}_{n-1}$ sur E_{n-1}.

(*ii*) $\displaystyle\sup_{x \in E_n \cap B_0} |\bar{f}_n(x) - f(x)| < 2\varepsilon\left(1 - \frac{1}{2^n}\right)$.

(*iii*) $\displaystyle\sup_{x \in E_n \cap B_0} |D\bar{f}_n(x) - Df(x)| < 2\bar{\eta}\left(1 - \frac{1}{2^n}\right)$.

Nous pouvons donc poser $\bar{f} = \varinjlim \bar{f}_n$; $\bar{f}$ vérifie les propriétés suivantes.

(*i*) *La restriction de* $\bar{f}$ *à tout sous-espace* E_n *est de classe* C^∞

(*ii*) $\displaystyle\sup_{x \in B_0 \cap E^\infty} |\bar{f}(x) - f(x)| < 2\varepsilon$.

(*iii*) $\displaystyle\sup_{x \in B_0 \cap E^\infty} |D\bar{f}(x) - Df(x)| < 2\bar{\eta}$.

2° *Construction de l'application* Ψ.

Cette construction varie suivant la nature de l'espace E^α considéré.

a) E^α *est un espace* l_p.

Soit x un point de E^α : $x = \sum_{n \in \mathbf{N}} x_n e_n$.

Posons $\chi_n(x) = 1 - \varphi\left[\dfrac{\sum_{i \geqslant n} |x_i|^p}{r^p}\right]$ (φ est la fonction dont le graphe est représenté sur la figure 1).

$$\chi_n(x) = 0 \quad \text{si} \quad \Big(\sum_{i \geqslant n} |x_i|^p\Big)^{1/p} \leqslant r \times 2^{-\frac{1}{p}};$$

$$\chi_n(x) = 1 \quad \text{si} \quad \Big(\sum_{i \geqslant n} |x_i|^p\Big)^{1/p} \geqslant r.$$

Posons

$$\psi_n(x) = \chi_n(x)x_n, \qquad \Psi(x) = \sum_{n\in\mathbf{N}} \psi_n(x)e_n.$$

b) E^α *est l'espace* c_0.

Considérons la fonction ψ définie sur $\mathbf{R}$, à valeurs dans $\mathbf{R}$ dont le graphe est représenté sur la figure 2 :

ψ est de classe C^∞,

ψ est croissante au sens large,

$\psi(-t) = -\psi(t)$,

$$\text{si } |t| < \frac{1}{2}\,\psi(t) = 0, \qquad \text{si } |t| > r\,\psi(t) = t$$

$$|\psi'(t)| < 4$$

Posons $\Psi(x_1, x_2, \ldots, x_n \ldots) = (\psi(x_1), \psi(x_2), \ldots, \psi(x_n), \ldots)$.

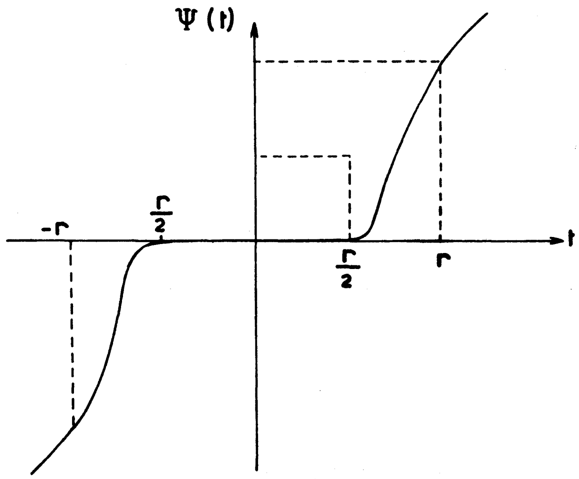

FIG. 2.

Dans chacun des cas *a*) et *b*) l'application Ψ a les propriétés suivantes :

(*i*) Ψ *est une application de* E^α *sur* E^∞.

En outre quel que soit x dans E^α, il existe un entier $n(x)$ et un voisinage U_x de x dans E tels que : $\Psi(U_x) \subset E_{n(x)}$.

(*ii*) *L'application* Ψ *de* E^α *dans* E^∞ *est de classe* C^α.

Au voisinage de x, l'application Ψ est une application de U_x dans $E_{n(x)}$ dont chacune des composantes (considérée comme application de U_x dans $\mathbf{R}$ est de classe C^α), Ψ est de classe C^α.

(*iii*) *Il existe une constante* C_1 *telle que* $|D\Psi(x)| < C_1$.

Démonstration dans le cas a) d'un espace l_p.

$$D\Psi_n(x) = D\chi_n(x)x_n + \chi_n(x)e_n^*$$

(e_n^* est le vecteur dual de e_n : $e_n^*.h = h_n$, h_n composante de h suivant e_n). Posons $\chi_n^1(x) = 1 - \varphi\left[\sum_{i\geqslant n} |x_i|^p\right]$.

$$D\chi_n^1(x) = -p \sum_{i\geqslant n} (\sigma_i)^p x_i^{p-1} e_i^* \varphi'\left[\sum_{i\geqslant n} |x_i|^p\right] \quad \sigma_i = \text{signe de } x_i.$$

Désignons par $|\ \ |^*$ la norme dans le dual de l_p : $l_q\left(q = \frac{p}{p-1}\right)$

$$\left|\sum_{i\geqslant n} (\sigma_i)^p x_i^{p-1}\right|^* = \left(\sum_{i\geqslant n} |x_i|^{q(p-1)}\right)^{1/q}$$
$$= \left(\sum_{i\geqslant n} |x_i|^p\right)^{\frac{p-1}{p}}$$

En tout point x tel que $|x| \geqslant 1$, $D\chi_n^1(x) = 0$ quel que soit x, $|D\chi_n^1(x)| \leqslant p \sup_t |\varphi'(t)|$.

Or $\chi_n(x) = \chi_n^1\left(\frac{x}{r}\right)$

$$D\chi_n(x) = \frac{1}{r} D\chi_n^1\left(\frac{x}{r}\right).$$

Il existe une constante M_1, indépendante de r telle que : $|DX_n(x)| \leqslant \frac{M_1}{r}$.

$$D\Psi(x).h = \sum_{n\in\mathbf{N}} D\chi_n(x).hx_ne_n + \sum_{n\in\mathbf{N}} \chi_n(x)h_ne_n$$
$$|D\Psi(x).h| \leqslant \frac{M_1|h|}{r}\left|\sum_{n\geqslant n_0} x_ne_n\right| + |h|$$

où n_0 est le plus petit entier tel que $\left(\sum_{n>n_0} |x_n|^p\right)^{1/p} \leqslant r$.

$$|D\Psi(x).h| \leqslant (M_1 + 1)|h|.$$

Il suffit de poser $C_1 = M_1 + 1$.

Démonstration dans le cas b) de l'espace c_0.

Soit $h = (h_1, \ldots, h_n, \ldots)$ un élément de c_0.

$$D^1\Psi(x).h = (\psi'(x_1)h_1, \psi'(x_2)h_2, \ldots, \psi'(x_n)h_n, \ldots)$$
$$|D^1\Psi(x)| \leqslant \sup_{i\geqslant 1} |\Psi'(x_i)| < 4$$

Nous pouvons poser

$$C_1 = 4.$$

(iv) $\underline{|x - \Psi(x)| \leqslant r}$.

$a)$ Cas où E est un espace l_p :

$$x - \Psi(x) = \sum_{n \geqslant n_0} x_n(1 - \chi_n(x))e_n$$
$$|x - \Psi(x)| \leqslant \left|\sum_{n \geqslant n_0} x_n e_n\right|$$
$$\leqslant r$$

$b)$ Cas où E est l'espace c_0 :

$$|x - \Psi(x)| \leqslant \sup |x_n - \psi(x_n)|$$
$$\leqslant r \quad \text{par définition de } \psi.$$

3° *Définition et propriétés de* g.

Posons $g(x) = \bar{f}(\Psi(x))$.

(i) g *est de classe* C^∞ (car g est composée d'applications de classe C^∞).

(ii) *Il existe une constante* λ_0 *telle que* : $\sup\limits_{x \in B_0} |f(x) - g(x)| < \lambda_0 \varepsilon$

$$f(x) = f(\Psi(x)) + \int_0^1 Df(\Psi(x) + t(x - \Psi(x)).(x - \Psi(x))\, dt$$
$$f(x) - g(x) = f(\Psi(x)) - \bar{f}(\Psi(x))$$
$$+ \int_0^1 Df(\Psi(x) + t(x - \Psi(x)).(x - \Psi(x))\, dt.$$

Or $\sup\limits_{x \in B_0} |Df(x)| < \bar{\eta}$ et $|x - \Psi(x)| < r$.

$$|f(x) - g(x)| < 3\varepsilon + \bar{\eta} r < 4\varepsilon.$$

(iii) *Il existe une constante* λ_1 *telle que :* $\sup\limits_{x \in B_0} |Dg(x)| < \lambda_1 \bar{\eta}$

$$Dg(x) = D\bar{f}(\Psi(x)) \times D\Psi(x)$$
$$|Dg(x)| \leqslant 3\bar{\eta} \times C_1.$$

Le lemme fondamental 1 est démontré.

A$_2$. *Fin de la démonstration du théorème* 1. — Soit $\varepsilon(x)$ une fonction continue définie sur Ω, à valeurs dans R, strictement positive. f étant une fonction de classe C^1 définie sur Ω, à valeurs dans F, nous allons montrer qu'il existe dans $\mathcal{C}_1(\Omega, F)$ une ε-approximation de f, $\bar{g}$ de classe C^α c'est-à-dire une fonction $\bar{g}$ telle que, quel que soit x :

$$|f(x) - \bar{g}(x)| < \varepsilon(x)$$
$$|Df(x) - D\bar{g}(x)| < \varepsilon(x).$$

Dans toute la suite la norme considérée sur E^α sera supposée de classe C^α (dans le cas de l'espace c_0 cette norme n'est pas celle considérée d'ordinaire, mais celle définie dans [2]).

Définition d'un recouvrement dénombrable de Ω.

LEMME 2. — *Quel que soit* x *point de* Ω, *il existe une boule* $B'(x)$ *de centre* x *et de rayon* $\rho'(x)$ *contenue dans* Ω *telle que :*

a) $\sup\limits_{(y, y') \in B'(x)} |\varepsilon(y) - \varepsilon(y')| < \inf\limits_{z \in B'(x)} \dfrac{\varepsilon(z)}{2}$

b) $\sup\limits_{(y, y') \in B'(x)} |Df(y) - Df(y')| < \inf\limits_{z \in B'(x)} \varepsilon(z)$

c) si $B'(x) \cap B'(y) \neq \emptyset$ $\dfrac{1}{4} < \dfrac{\rho'(x)}{\rho'(y)} < 4$

d) $\sup\limits_{x \in \Omega} \rho'(x) < 2.$

Démonstration du lemme 2. — Considérons l'ensemble $\mathcal{E}(x)$ des nombres positifs $\bar{\rho}(x)$ tels que la boule $\bar{B}(x)$ de centre x et de rayon $\bar{\rho}(x)$ soit contenue dans Ω, et que dans cette boule les propriétés *a*) et *b*) du lemme 2 soient vérifiées. $\mathcal{E}(x)$ n'est pas vide. Soit $\rho_0(x)$ la borne supérieure de $\mathcal{E}(x)$. Pour chaque x, choisissons un nombre positif $\tilde{\rho}(x)$ vérifiant :

$$0 < \frac{1}{2}\rho_0(x) < \tilde{\rho}(x) < \rho_0(x).$$

Posons

$$\hat{\rho}(x) = \frac{\tilde{\rho}(x)}{4}, \qquad \rho'(x) = \inf(\hat{\rho}(x), 2).$$

Sur la boule $B'(x)$ de centre x et de rayon $\rho'(x)$ les propriétés *a*), *b*), *d*) sont trivialement vérifiées.

Vérification de la propriété *c*).

Supposons

$$B'(x) \cap B'(y) \neq \emptyset \qquad \text{et} \qquad \rho'(x) \geqslant \rho'(y).$$

Deux cas peuvent se produire

1° $\rho'(x) = \rho'(y) = 2$

$$\frac{\rho'(x)}{\rho'(y)} = 1.$$

La propriété est alors vérifiée.

2° $2 \geqslant \rho'(x) > \rho'(y)$. Dans ce cas $\dfrac{\tilde\rho(x)}{\tilde\rho(y)} \geqslant \dfrac{\rho'(x)}{\rho'(y)}$.

Majorons $\dfrac{\tilde\rho(x)}{\tilde\rho(y)}$:

$$|x - y| < \rho'(x) + \rho'(y) < 2\rho'(x) < \frac{\tilde\rho(x)}{2}.$$

La boule $B\left(y, \dfrac{\tilde\rho(x)}{2}\right)$, de centre y et de rayon $\dfrac{\tilde\rho(x)}{2}$, est contenue dans la boule $B(x, \tilde\rho(x))$ de centre x et de rayon $\tilde\rho(x)$.

Donc $\dfrac{\tilde\rho(x)}{2} \in \mathcal{E}(y)$.

$$\frac{\tilde\rho(x)}{2} < \rho_0(y) < 2\tilde\rho(y); \qquad \tilde\rho(x) < 4\tilde\rho(y); \quad \rho'(x) < 4\rho'(y).$$

Dans les deux cas possibles $\rho'(x) < 4\rho'(y)$ ce qui achève la démonstration du lemme.

Posons $\rho(x) = \dfrac{\rho'(x)}{2}$.

$$\bigcup_{x\in\Omega} B(x, \rho(x)) = \Omega.$$

De ce recouvrement, nous pouvons extraire un recouvrement dénombrable par des boules B_n de centre a_n et de rayon ρ_n $(n \in \mathbf{N})$. Nous désignerons par B'_n la boule de centre a_n et de rayon $\rho'_n = 2\rho_n$.

Posons $\varepsilon_n = \varepsilon(a_n)$.

Construction d'une fonction $\bar g$ *de classe* C^α, « *proche de* f ».

Considérons les fonctions φ_n définies sur E^α par :

$$\varphi_n(x) = \varphi\left(\frac{|x - a_n|}{\rho_n}\right)$$

φ_n est de classe C^α égale à 1 sur B_n, 0 en dehors de B'_n. Considérons les fonctions linéaires l_n :

$$l_n(x) = f(a_n) + Df(a_n).(x - a_n) \sup_{x\in B'_n} |Dl_n(n) - Df(x)| < \varepsilon_n.$$

A la fonction $(f - l_n)$ nous pouvons appliquer, sur B'_n, le lemme fondamental 1. Il existe pour chaque n une fonction δ_n de classe C^α telle que :

$$\sup_{x\in B'_n} |f(x) - l_n(x) - \delta_n(x)| < 2^{-n}\varepsilon_n\rho_n$$
$$\sup_{x\in B'_n} |Df(x) - Dl_n(x) - D\delta_n(x)| < \lambda\varepsilon_n$$

(λ est une constante indépendante de n).

Posons $\tilde{f}_n(x) = \delta_n(x) + l_n(x)$.

$\tilde{f}_n(x)$ est une fonction de classe C^α telle que :

(*i*) $\sup_{x\in B'_n} |\tilde{f}_n(x) - f(x)| < 2^{-n}\varepsilon_n\rho_n$

(*ii*) $\sup_{x\in B'_n} |D\tilde{f}_n(x) - Df(x)| < \lambda\varepsilon_n$.

Nous définissons une suite de fonctions g_n par :

$$g_n = f + \varphi_1(\tilde{f}_1 - f) + \varphi_2(1 - \varphi_1)(\tilde{f}_2 - f) + \cdots$$
$$+ \varphi_n(1 - \varphi_{n-1}) \ldots (1 - \varphi_1)(\tilde{f}_n - f).$$

Propriétés de la suite $\{g_n\}$.

$[P_1]$ *La suite* $\{g_n\}$ *se stabilise.*

Soit $1 \leqslant p \leqslant n$; en tout point x de B_p

$$g_n(x) = g_p(x) = f(x) + \varphi_1(x)(\tilde{f}_1(x) - f(x)) + \cdots$$
$$+ (1 - \varphi_{p-1}(x))(1 - \varphi_{p-2}(x))\ldots(1 - \varphi_1(x))(\tilde{f}_p(x) - f(x)).$$

Les boules $B_n (n \in N)$ recouvrent tout l'espace. Dans un voisinage de tout point x_0, à partir d'un certain rang, la suite $\{g_n(x)\}$ est constante.

$[P_2]$ *Sur* B_n, g_n *est de classe* C^α.

Posons, par récurrence sur l'entier $p\,(2 \leqslant p \leqslant n)$, la récurrence se faisant suivant les valeurs décroissantes de p :

$$h^n_{p-1} = \varphi_p(\tilde{f}_p - f) + (1 - \varphi_p)h^n_p; \qquad h^n_n = 0.$$

Par récurrence, on démontre que la fonction g_n s'exprime de la manière suivante

$$g_n = f + \varphi_1(\tilde{f}_1 - f) + \cdots + \varphi_{p-1}(1 - \varphi_{p-2})\ldots$$
$$(1 - \varphi_1)(\tilde{f}_{p-1} - f) + (1 - \varphi_{p-1})(1 - \varphi_{p-2})\ldots(1 - \varphi_1)h^n_{p-1}.$$
$$h^n_{n-1} = \varphi_n(\tilde{f}_n - f), \qquad g_n = h^n_1 + f.$$

Sur B_n, $h^n_{n-1} + f$ est de classe C^α.

Par récurrence sur $B_n g_n = h^n_1 + f$ est de classe C^α.

[P$_3$] *Il existe une constante* λ'_0.

(λ'_0 indépendante de n) telle que :

$$\sup_{x \in B_n} |g_n(x) - f(x)| < \lambda'_0 \varepsilon_n.$$

Supposons, par induction sur p démontré que :

$$\sup_{x \in B_n} |h^n_p(x)| < \frac{2\varepsilon_n}{2^{p+1}} \times 4\rho_n$$
$$h^n_{p-1} = \varphi_p(\tilde{f}_p - f) + (1 - \varphi_p)h^n_p$$

— si $B'_p \cap B_n = \emptyset$, sur B_n la fonction φ_p est nulle

$$h^n_{p-1}(x) = h^n_p(x)$$

— si $B'_p \cap B_n \neq \emptyset$;

$$\sup_{x \in B'_p \cap B_n} |\tilde{f}_p(x) - f(x)| < 2\varepsilon_n \times 2^{-p} \times 4\rho_n$$

(car $\varepsilon_p < 2\varepsilon_n$; $\rho_p < 4\rho_n$)

Par récurrence sur p sachant que $h^n_1 = g_n$

$$\sup_{x \in B_n} |g_n(x) - f(x)| < 2^{-p+3}\varepsilon_n \rho_n$$

comme $\rho_n < 1$, [P$_3$] est démontrée.

[P$_4$] *Il existe une constante* λ'_1 *indépendante de* n *telle que :*

$$\sup_{x \in B_n} |Dg_n(x) - Df(x)| < \lambda'_1 \varepsilon_n.$$

Posons par récurrence sur p, pour les valeurs décroissantes de p :

$$h'^n_{p-1} = \varphi_p(D\tilde{f}_p - Df) + (1 - \varphi_p)h'^n_{p-1}; \qquad h'^n_n = 0$$
$$Dg_n - Df = h'^n_1 + \sum_{p=1}^{n} (1 - \varphi_1)\ldots(1 - \varphi_{p-1})D\varphi_p(\tilde{f}_p - f) - h^n_p].$$

D'après la propriété (ii) de $\tilde{f}_n$ le même raisonnement que précédemment montre qu'il existe une constante k' telle que

$$\sup_{x\in B_n} |h_1'^n(x)| < 2k'\varepsilon_n$$

D'autre part :

$$\sup_{x\in B_n} |h_p^n(x)| < 2^{-p}\varepsilon_p \times 4\rho_p$$

$$\sup_{x\in B_n\cap B_p'} |\tilde{f}_p(x) - f(x) - h_p^n(x)| < 2^{-p}[\varepsilon_p\rho_p + \varepsilon_p \times 4\rho_p].$$

La différentielle de la fonction norme ayant, dans l'espace dual une norme majorée par une constante C; d'après la définition de φ_p

$$|D\varphi_p|^* < \frac{4C}{\rho_p}$$

$$\sup_{x\in B_n\cap B_p} |(1-\varphi_1)\dots(1-\varphi_{p-1})D\varphi_p(\tilde{f}_p - f - h_p^n)| < 2^{-p} \times 20C\varepsilon_p.$$

Sommons sur l'indice p, remarquons que, si un point de x n'appartient pas à B_p', en ce point $D\varphi_p(x) = 0$ et le terme correspondant de la série est nul; nous obtenons :

$$\left\|\sum_{p=1}^{n} (1-\varphi_1)\dots(1-\varphi_{p-1})D\varphi_p(\tilde{f}_p - f - h_p^n)\right\| < 40C\varepsilon_n.$$

La propriété $[P_4]$ est donc démontrée.

Posons $\bar{g} = \lim_{n\to\infty} g_n$.

Pour tout élément x de Ω, posons :

$$n(x) = \inf\{n; x \in B_n\}.$$

Il existe un voisinage de x, $V(x)$ tel que $V(x) \subset B_{n(x)}$ sur $V(x)$,

$$\bar{g}(x) = g_{n(x)}(x).$$

Des propriétés P_2, P_3, P_4, nous déduisons respectivement les propriétés P_2', P_3', P_4'

$[P_2']\ \bar{g}$ est de classe C^α

$[P_3']\ \sup_{x\in\Omega} |\bar{g}(x) - f(x)| \leqslant \bar{\lambda}_0\varepsilon(x)$

$[P_4']\ \sup_{x\in\Omega} |D\bar{g}(x) - Df(x)| < \bar{\lambda}_1\varepsilon(x)$

où $\bar{\lambda}_0$ et $\bar{\lambda}_1$ sont deux constantes.

La fonction ε pouvant être choisie arbitrairement proche de 0, le théorème 1 est démontré.

B. Théorème 2. — *Dans toute cette partie* B), E *désignera un espace de Hilbert séparable de dimension infinie.*

Soit Ω *un ouvert d'un espace de Hilbert séparable* E *de dimension infinie et* F *un espace de Banach. L'ensemble des applications de classe* C^∞ *de* Ω *dans* F *est dense dans l'ensemble des applications de classe* C^{2k-1} *muni de la* C^k*-topologie fine (cet ensemble est noté* $\mathcal{C}^k_{2k-1}(\Omega, F)$*).*

Remarque. — D'après [14], sur l'espace c_0 il est impossible d'approcher au sens de la C^2-topologie fine toute fonction de classe C^2 par une fonction de classe C^∞.

B$_1$. Lemme fondamental 2. — *Soit* f *une application de classe* C^{2k-1} *de* E *dans* F. *Soit* B_0 *une boule centrée à l'origine de* E, *et* $\bar{\eta}$ *un nombre positif tel que* $\sup_{x \in B_0} |D^{2k-1}f(x)| < \bar{\eta}$. *Soit* ε *un nombre positif arbitraire. Posons* $r = \dfrac{\varepsilon}{\bar{\eta}}\cdot$ *Il existe* $(k+1)$ *constantes* λ_i $(0 \leqslant i \leqslant k)$ *et une fonction* g *de classe* C^∞ *définie sur* E *et à valeurs dans* F *telle que :*

$$0 \leqslant i \leqslant k-1 \quad \sup_{x \in B_0} |D^i f(x) - D^i g(x)| < \lambda_i \varepsilon r^{k-1-i},$$
$$\sup_{x \in B_0} |D^k g(x)| < \lambda_k \bar{\eta}.$$

La construction est une généralisation de celle faite pour démontrer le lemme fondamental 1.

Nous construisons une fonction $\bar{f}$ sur E^∞ telle que la restriction de $\bar{f}$ à E_n soit de classe C^∞ et telle que $\bar{f}$ soit « proche » de f.

Par le même procédé, nous construisons des applications L^i de E^∞ dans $\mathcal{L}^i_s(E, F)$ (espace des applications i-multilinéaires symétriques de E dans F). Les applications L^i sont de classe C^∞ et « proches » de $D^i f$ pour $1 \leqslant i \leqslant k-1$. La fonction Ψ étant celle construite précédemment la fonction g est ainsi définie :

$$g(x) = \bar{f}(\Psi(x)) + \sum_{1 \leqslant i \leqslant k-1} \frac{1}{i!} L^i(\Psi(x)) \cdot (x - \Psi(x))^i.$$

1° *Construction de* $\overline{f}$ *et de* $L^i(1 \leqslant i \leqslant k-1)$.

Dans tout ce qui suit, nous conviendrons d'identifier la différentielle d'ordre 0 d'une fonction avec la fonction elle-même. Notons φ la fonction dont le graphe est représenté sur la figure 1 et posons :

$$\hat{f}_n(x) = \frac{b_n^n}{c}\int_{E_n} f(x-y)\varphi(b_n|y|_n)\,dy$$

où $c = \int_{E_n}\varphi(|y|_n)\,dy$ et où b_n est une constante telle que :

$$0 \leqslant i \leqslant k-1 \quad \sup_{x\in E_n\cap B_0}|D^i\hat{f}_n(x) - D^if(x)| < \varepsilon\frac{r^{k-1-i}}{2^n}$$

$$2k-1 \geqslant j \geqslant k \quad \sup_{x\in F_n\cap B_0}|D^j\hat{f}_n(x) - D^jf(x)| < \frac{\overline{\eta}}{2^n}$$

L'existence de la constante b_n est une conséquence des propriétés du produit de convolution; nous avons :

$$1 \leqslant i \leqslant k \quad D^i\hat{f}_n(x) = \frac{b_n^n}{c}\int_{E_n} D^if(x-y)\varphi(b_n|y|_n)\,dy.$$

La fonction $\hat{f}_n$ est de classe C^{2k-1}, mais les restrictions à E_n des applications $\hat{f}_n$ $D^i\hat{f}_n$ $(1 \leqslant i \leqslant k)$ sont de classe C^∞.

Soit e_0 l'origine de F. Posons

$$\overline{f}_0 = f(e_0), \qquad L_0^i = D^if(e_0).$$

Supposons définies sur E_{n-1} les fonctions $\overline{f}_{n-1}$ et L_{n-1}^i.

Posons

$$\overline{f}_n(x) = \hat{f}_n(x) + \overline{f}_{n-1}(\pi_{n-1}(x)) - \hat{f}_n(\pi_{n-1}(x)),$$
$$L_n^i(x) = D^i\hat{f}_n(x) + L_{n-1}^i(\pi_{n-1}(x)) - D^i\hat{f}_n(\pi_{n-1}(x)).$$

Lemme 1. — *Les fonctions* $\overline{f}_n$ *et* L_n^i *vérifient les propriétés suivantes :*

(*i*) $\sup_{x\in E_n}|\overline{f}_n(x) - f(x)| < 2\varepsilon\left(1-\frac{1}{2^n}\right)r^{k-1}$,

(*ii*) $1 \leqslant i \leqslant k-1 \ \sup_{x\in E_n}|L_n^i(x) - D^if(x)| < 2\varepsilon\left(1-\frac{1}{2^n}\right)r^{k-1-i}$,

(*iii*) $\sup_{x\in E_n}|L_n^k(x) - D^kf(x)| < 2\overline{\eta}\left(1-\frac{1}{2^n}\right)$,

(*iv*) *la restriction à* E_n *de* L_n^i *et de* $\overline{f}_n$ *est de classe* C^∞,

(v) $\bar{f}_n$ *coïncide avec* f_{n-1} *sur* E_{n-1}, L_n^i *coïncide avec* L_{n-1}^i *sur* E_{n-1}.

Démontrons ces propriétés par récurrence. Elles sont vraies à l'ordre 0 puisque $E_0 = \{e_0\}$. A l'ordre n, nous avons

$$\begin{aligned}\bar{f}_n(x) - f(x) &= \hat{f}_n(x) - f(x) + \bar{f}_{n-1}(\pi_{n-1}(x)) - f(\pi_{n-1}(x)) \\ &\quad - (\hat{f}_n(\pi_{n-1}(x)) - f(\pi_{n-1}(x)) \\ &\leqslant \varepsilon r^{k-1}\left(\frac{1}{2^n} + 2\left(1 - \frac{1}{2^{n-1}}\right) + \frac{1}{2^n}\right) \\ &\leqslant \varepsilon r^{k-1}\left(1 - \frac{1}{2^n}\right).\end{aligned}$$

Les propriétés (ii) et (iii) se vérifient de même que (i). La restriction à E_n de $\hat{f}_n$ et $D^i\hat{f}_n$ étant de classe C^∞, il en est de même pour $\bar{f}_n$ et L_n^i. La propriété (v) est triviale et nous pouvons poser : $\bar{f} = \varinjlim \bar{f}_n$, $L^i = \varinjlim L_n^i$.

Les fonctions $\bar{f}$ et L^i vérifient les propriétés suivantes :

(i) $|\bar{f}(x) - f(x)| < 2\varepsilon r^{k-1}$,

(ii) $1 \leqslant i \leqslant k-1\ |L^i(x) - D^i f(x)| < 2\varepsilon r^{k-1-i}$,

(iii) $|L^k(x) - D^k f(x)| < 2\bar{\eta}$,

(iv) La restriction à tout sous-espace E_n de $\bar{f}$ et de L^i est de classe C^∞.

2° *Construction de l'application* Ψ.

Soit $x = \sum_{n \in \mathbf{N}} x_n e_n$ un point de E.

Posons

$$\chi_n(x) = 1 - \varphi\left[\frac{\left(\sum_{p \geqslant n} x_p^2\right)^k}{r^{2k}}\right]$$

$$\chi_n(x) = 0 \qquad \text{si} \qquad \left(\sum_{p \geqslant n} x_p^2\right)^{\frac{1}{2}} \leqslant r \times 2^{-\frac{1}{2k}},$$

$$\chi^n(x) = 1 \qquad \text{si} \qquad \left(\sum_{p \geqslant n} x_p^2\right)^{\frac{1}{2}} \geqslant r.$$

Posons

$$\begin{aligned}\psi_n(x) &= \chi_n(x)x_n, \\ \Psi(x) &= \sum_{n \in \mathbf{N}} \psi_n(x)e_n.\end{aligned}$$

De même que dans la partie A_1 (cas d'un espace l_p) l'application Ψ vérifie les propriétés suivantes : a), b), c) (les démonstrations sont identiques à celles faites précédemment).

a) L'application Ψ *est une application de* E *dans* E^∞.

b) L'application Ψ *est de classe* C^∞.

Quel que soit x il existe un entier $n(x)$ et un voisinage U_x de x dans E tels que $\Psi(U_x) \subset E_{n(x)}$.

c) Il existe une constante C_1 *telle que* $|D^1\Psi(x)| < C_1$.

d) Il existe des constantes C_i *telles que* $|D^i\Psi(x)| < C_i r^{1-i}$.

Démonstration de d).

$$D^i\psi_n(x) = D^i\chi_n(x)x_n + D^{i-1}\chi_n(x) \times (\mathrm{id}.e_n).$$

Plus explicitement :

$$\begin{aligned} D^i\psi_n(x).(h^1, \ldots, h^i) &= D^i\chi_n(x).(h^1, \ldots, h^i)x_n \\ &\quad + \sum_{1\leqslant j\leqslant i} D^{i-1}\chi_n(x).(h^1, \ldots, \hat{h}^j, \ldots h^i)\,(h^j.e_n)e_n \\ D^i\Psi(x).(h^1, \ldots, h^i) &= \sum_{n\geqslant n_0} D^i\chi_n(x).(h^1, \ldots, h^i)x_ne_n \\ &\quad + \sum_{1\leqslant j\leqslant i}\sum_{n\geqslant n_0} D^{i-1}\chi_n(x).(h^1, \ldots, \hat{h}^j, \ldots, h^i)(h^j.e_n)e_n \end{aligned}$$

$\left(n_0 \text{ désigne le plus petit entier tel que } \sum_{n\geqslant n_0} x_n^2 \leqslant r^2\right)$

$$\begin{aligned} |D^i\Psi(x).(h^1, \ldots, h^i)| &< \sup_{n\geqslant n_0} |D^i\chi_n(x)||h^1|\ldots|h^i|\left|\sum_{n\geqslant n_0} x_ne_n\right| \\ &\quad + \sum_j |h^j| \sup_{n\geqslant n_0} |D^{i-1}\chi_n(x)|\,.|h^1|\ldots|\hat{h}^j|\ldots|h^i|. \end{aligned}$$

Or (voir appendice B_3) il existe des constantes b_i telles que :

$$|D^i\chi_n(x)| < \frac{b_i}{r^i}, \quad |D^{i-1}\chi_{n-1}(x)| < \frac{b_{i-1}}{r^{i-1}},$$
$$|D^i\Psi(x)| < (b_i + ib_{i-1})r^{1-i}.$$

e) $\underline{|x - \Psi(x)| \leqslant r.}$

$$x - \Psi(x) = \sum_{n\geqslant n_0} x_n(1 - \chi_n(x))e_n.$$

Remarque. — Si x est dans B_0 alors $\Psi(x)$ est dans B_0.

3° *Définition et propriétés de* g.

Posons

$$g(x) = \bar{f}(\Psi(x)) + \sum_{1\leqslant i\leqslant k-1} \frac{1}{i\,!} L^i(\Psi(x)).(x - \Psi(x))^i.$$

Propriétés de la fonction g.

a) g *est de classe* C^∞.

Pour tout point x de E, il existe un voisinage U_x de x et un entier $n(x)$ tel que $\Psi(U_x) \subset E_{n(x)}$. Soit y un point de U_x :

$$g(y) = \overline{f}_{n(x)}(\Psi(y)) + \sum_{1 \leqslant i \leqslant k-1} \frac{1}{i!} L^i_{n(x)}(\Psi(y)).(y - \Psi(y))^i.$$

L'application g, composée d'applications de classe C^∞ est de classe C^∞.

b) *Il existe une constante* λ_0 *telle que*

$$\sup_{x \in B_0} |f(x) - g(x)| < \lambda_0 \varepsilon r^{k-1}.$$

Démonstration.

$$f(x) = f(\Psi(x)) + \sum_{1 \leqslant i \leqslant k-1} \frac{1}{i!} D^i f(\Psi(x)).(x - \Psi(x))^i$$
$$+ \frac{1}{k!} \int_0^1 D^k f(\Psi(x) + t(x - \Psi(x))).(x - \Psi(x))^k \, dt$$

$$f(x) - g(x) = f(\Psi(x)) - \overline{f}(\Psi(x)) + \sum_{1 \leqslant i \leqslant k-1} \frac{1}{i!} [D^i f(\Psi(x))$$
$$- L^i(\Psi(x)).(x - \Psi(x))^i] + \frac{1}{k!} \int_0^1 D^k f(\Psi(x)$$
$$+ t(x - \Psi(x))).(x - \Psi(x))^k \, dt.$$

$$\sup_{x \in B_0} |f(x) - g(x)| \leqslant 3\varepsilon r^{k-1} \sum_{0 \leqslant i \leqslant k-1} \frac{1}{i!} + \frac{1}{k!} \overline{\eta} \, r^k.$$

Or $\overline{\eta} r^k = \varepsilon r^{k-1}$. Posons $\lambda_0 = 3e$. La propriété *b*) est démontrée.

c) *Il existe une constante* λ_1 *telle que*

$$\sup_{x \in B_0} |D^1 f(x) - D^1 g(x)| < \lambda_1 \varepsilon r^{k-2}.$$

Dans la suite de cet exposé (paragraphes *c*) et *d*)), x étant un point de E, pour simplifier les notations lorsque aucune confusion ne sera possible, nous poserons $\Psi(x) = z$.

Tous les calculs seront supposés faits dans un voisinage U_{x_0} d'un point x_0 tel qu'il existe un entier n vérifiant $\Psi(U_{x_0}) \subset E_n$.

Étant donnée une fonction θ définie sur E à valeurs dans un espace de Banach, nous noterons, si elles existent, par $D^j_n \theta$, la différentielle d'ordre j de la restriction à E_n de θ, par $D^j\theta$, la différentielle d'ordre j de θ. En tout point x de E $D_n^j\theta(x)$ est une forme j-multilinéaire et si $D^j\theta(x)$ existe :

$$D_n^j\theta(x).(h^1, \ldots, h^j) = D^j\theta(x).(\pi_n(h^1), \ldots, \pi_n(h^j)).$$

Étant une forme j-multilinéaire F^j nous noterons $F^j \circ \pi_n^{(j)}$ la forme j-multilinéaire :

$$F^j \circ \pi_n^{(j)}.(h^1, \ldots, h^j) = F^j.(\pi_n(h^1), \ldots, \pi_n(h^j));$$
$$D^j(\theta \circ \pi_n)(x) = D_n^j\theta(\pi_n(x)).$$

Avec ces notations $D^1(\theta \circ \Psi)(x) = D_n^1\theta(z).D^1\Psi(x)$.

$$\begin{aligned}
D^1g(x) = &\sum_{1\leqslant i\leqslant k-1} \frac{1}{(i-1)!} L^i(z).(x-z)^{i-1}\\
&+ \Big[(D_n^1f(z) - L^1(z)) + \sum_{1\leqslant i\leqslant k-2} (D_n^1L^i(z) - L^{i+1}(z)).\frac{(x-z)^i}{i!}\\
&+ D^1L_n^{k-1}(z).\frac{(x-z)^{k-1}}{(k-1)!}\Big].D^1\Psi(x)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D^1f(x) = &\sum_{1\leqslant i\leqslant k-1} \frac{1}{(i-1)!} D^if(z).(x-z)^{i-1}\\
&+ \int_0^1 \frac{1}{(k-1)!} D^kf(z+t(x-z)).(x-z)^{k-1}\,dt.
\end{aligned}$$

Retranchons ces deux égalités membre à membre. De même que précédemment la différence des premiers termes est majorée par $2e\varepsilon r^{k-2}$.

D'autre part :

$$\sup_{\substack{x\in B_0\\ |x-z|<r}} \left|\int_0^1 \frac{1}{(k-1)!} D^kf(z+t(x-z)).(x-z)^{k-1}\right| < \bar{\eta}\,\frac{r^{k-1}}{(k-1)!} < \varepsilon\,\frac{r^{k-2}}{(k-1)!}.$$

L'existence de la constante λ_1 sera donc une conséquence du lemme suivant :

LEMME c_1.

$$|D_n^1f_n(y) - L_n^1(y) \circ \pi_n^{(1)}| \leqslant 2\varepsilon^{k-2}$$
$$|D_n^1L_n^i(y) - L_n^{i+1}(y) \circ \pi_n^{(1)}| \leqslant 2\varepsilon r^{k-2-i}$$
$$|D_n^1L_n^{k-1}(y)| < 2\bar{\eta}.$$

(Nous rappelons la convention d'écriture suivante) :

$$L_n^{i-1}(y) \circ \pi_n^{(1)}.(h_1, \ldots, h_{i+1}) = L_n^{i+1}(y).(\pi_n(h_1), h_2, \ldots, h_{i+1}).$$

Démonstration. — Nous la faisons dans le cas général pour i quelconque; elle s'applique au cas $i = 0$ grâce à la convention $L_n^0 = \bar{f}_n$.

Par définition :

$$\begin{aligned}
L_n^i(y) &= D^i\hat{f}_n(y) + L_{n-1}^i(\pi_{n-1}(y)) - D^i\hat{f}_n(\pi_{n-1}(y)),\\
D_n^1 L_n^i(y) &= D^{i+1}\hat{f}_n(y) \circ \pi_n^{(1)} + D_{n-1}^1 L_{n-1}^i(\pi_{n-1}(y)) \circ \pi_{n-1}^{(1)}\\
&\qquad - D^{i+1}\hat{f}_n(\pi_{n-1}(y)) \circ \pi_{n-1}^{(1)},\\
D_n^1 L_n^i(y) - L_n^{i+1}(y) \circ \pi_n^{(1)} &= D_{n-1}^1 L_{n-1}^i(\pi_{n-1}(y))\\
&\qquad - L_{n-1}^{i+1}(\pi_{n-1}(y)) \circ \pi_{n-1}^{(1)} + D^{i+1}\hat{f}_n(\pi_{n-1}(y))\\
&\qquad - L_{n-1}^{i+1}(\pi_{n-1}(y)) \circ (\pi_n^{(1)} - \pi_{n-1}^{(1)}).
\end{aligned}$$

Pour $n = 0$ la différence est nulle. Par induction nous trouvons :

$$\begin{aligned}
D_n^1 L_n^i(y) - L_n^{i+1}(y) \circ \pi_n^{(1)} &= \sum_{0 \leqslant p \leqslant n-1} [D^{i+1}\hat{f}_{p+1}(\pi_p(y))\\
&\qquad - L_p^{i+1}(\pi_p(y))].(\pi_{p+1}^{(1)} - \pi_p^{(1)}),\\
(D^{i+1}\hat{f}_{p+1} - L_p^{i+1})(\pi_p(y)) &= (D^{i+1}\hat{f}_{p+1} - D^{i+1}\hat{f}_p)(\pi_p(y))\\
&\qquad + (D^{i+1}\hat{f}_p - L_{p-1}^{i+1})(\pi_{p-1}(y)).
\end{aligned}$$

Par définition de $\hat{f}_p$

$$|D^{i+1}\hat{f}_{p+1} - D^{i+1}\hat{f}_p| \leqslant \frac{2\varepsilon r^{k-1-i}}{2^{p+1}}.$$

Nous pouvons calculer de même :

$$\begin{aligned}
D_n^1 L_n^{k-1}(y) \circ \pi_n^{(1)} &= D_n^k\hat{f}_n(y) \circ \pi_n^{(1)} + \sum_{1 \leqslant p \leqslant n-1} (D^k\hat{f}_{p-1}(\pi_{p-1}(y))\\
&\qquad - D^k\hat{f}_p(\pi_{p-1}(y))) \circ \pi_{p-1}^{(1)}
\end{aligned}$$

$$|D_n^1 L_n^{k-1}(y)| \leqslant \bar{\eta}\left(1 + \frac{1}{2^n}\right) + \sum_{1 \leqslant p \leqslant n-1} \frac{2\bar{\eta}}{2^{p-1}} \leqslant 2\bar{\eta}.$$

Le lemme c_1 est donc démontré.

Fin de la démonstration de la propriété c).

$$\sup_{\substack{x \in B_0\\ |x-z| < \eta}} \left| \sum_{0 \leqslant i \leqslant k-2} (D_n^1 L^i(z) - L^{i+1}(z)) \cdot \frac{(x-z)^i}{i\,!} + D_n^1 L_n^{k-1}(z) \cdot \frac{(x-z)^{k-1}}{(k-1)!} \right| \leqslant 2e\varepsilon r^{k-2}.$$

Il suffit de poser $\lambda_1 = 2e + 1$.

d) Il existe des constantes $\lambda_i (1 \leqslant i \leqslant k)$ *telles que :*

$$1 \leqslant i \leqslant k-1 \quad \sup_{x \in B_0} |D^i f(x) - D^i g(x)| \leqslant \lambda_i \varepsilon r^{k-1-i};$$
$$\sup_{x \in B_0} |D^k f(x) - D^k g(x)| \leqslant \lambda_k \bar{\eta}.$$

La démonstration est une simple généralisation de celle de la propriété *c*). Elle se fait en une suite de lemmes.

LEMME d_1. — *Soit* $\alpha \, (1 \leqslant \alpha \leqslant k)$ *un entier et* x *un point de* E. $\Psi(x) = z$; z *est un point de* E_n.

Désignons par $\mathcal{M}_\alpha$ l'ensemble des monômes à au plus α indéterminées $(X_1, \ldots, X_\alpha)$ de poids inférieur ou égal à α de coefficient directeur 1.

$\mathcal{M}_\alpha$ est un ensemble fini.

$$D^\alpha g(x) = \sum_{\alpha \leqslant i \leqslant k-1} \frac{1}{(i-\alpha)!} L^i(z).(x-z)^{i-\alpha} + \sum_{Q \in \mathcal{M}_\alpha} \mathcal{L}_Q(x).Q(D^1\Psi(x), \ldots, D^\alpha \Psi(x)).$$

$\mathcal{L}_Q \,(x)$ est une forme multilinéaire, Q est un élément de $\mathcal{M}_\alpha$ (Si $\alpha = k$ seul subsiste le deuxième terme de cette somme). $\mathcal{L}_Q$ et Q sont liés par la « condition $C\alpha$ ».

Désignons par β_Q le poids de Q; γ_Q le degré de Q (si $d_l(Q)$ désigne le degré de Q par rapport à l'indéterminée X_l, $\beta_Q = \sum_{1 \leqslant l \leqslant \alpha} l \, d_l(Q)$; $\gamma_Q = \sum_{1 \leqslant l \leqslant \alpha} d_l(Q)$).

Condition C_α.

$\mathcal{L}_Q(x)$ est une forme $\alpha - \beta_Q + \gamma_Q$ multilinéaire,

$$\mathcal{L}_Q(x) = \sum_{\alpha - \beta_Q \leqslant i \leqslant k} \frac{1}{(i - \alpha + \beta_Q)!} \mathcal{L}_Q^i(x).(x-z)^{i-\alpha+\beta_Q},$$
$$\mathcal{L}_Q^i(x) = \sum_{h \leqslant i} a_Q^{i,h}(D_n^{\eta_{h+1}} L^h(z) - \varepsilon_h D_n^{\eta_h} L^{h+1}(z) \circ \pi_n^{(1)}),$$

où

$$\varepsilon_h = 1 \text{ si } h < k-1, \qquad \varepsilon_n = 0 \text{ si } h = k-1$$
$$1 + \eta_h + h - 1 = \gamma_Q \qquad a_Q^{i+1,\, h+1} = a_Q^{i,h}.$$

Les $a_Q^{i,h}$ sont des éléments de Z dépendant de α, Q, i, h mais indépendants de la fonction f, du point x, de Ψ.

D'après les conditions sur le degré et le poids de Q, on vérifie que $D^\alpha g(x)$ est une forme α-multilinéaire.

Démonstration du lemme d_1.

Elle se fait par récurrence sur α. Si $\alpha = 1$ il est vérifié.

Supposons le lemme vrai à l'ordre α et montrons-le à l'ordre $\alpha + 1$.

En différentiant une fois l'expression de $D^\alpha g(x)$, nous obtenons :

$$\begin{aligned} D^{\alpha+1} g(x) = & \sum_{\alpha+1 \leqslant i \leqslant k-1} \frac{1}{(i-\alpha-1)!} L^i(z) . (x-z)^{i-\alpha-1} \\ & + \sum_{\alpha \leqslant i \leqslant k-1} \Big[(D^1_n L^i(z) - L^{i+1}(z) \circ \pi^{(1)}_n . \frac{(x-z)^{i-\alpha}}{(i-\alpha)!} \\ & + D^1 L^{k-1}(z) \frac{(x-z)^{k-1-\alpha}}{(k-1-\alpha)!} \Big] D^1 \Psi(x) \\ & + \sum_{Q \in \mathcal{M}_\alpha} D^1 \mathcal{L}_Q(x) . Q(D^1\Psi(x), \ldots, D^\alpha \Psi(x)) \\ & + \sum_{Q \in \mathcal{M}_\alpha} \mathcal{L}_Q(x) . DQ(D^1\Psi(x), \ldots, D^\alpha \Psi(x)). \end{aligned}$$

Montrons que chacune des 3 dernières lignes du 2e membre de cette égalité peut se mettre sous la forme d'une somme de termes vérifiant la condition $C_{\alpha+1}$.

Étude de la 2e ligne.

Posons

$$Q_1(X_1, \ldots, X_{\alpha+1}) = X_1, \qquad \beta_{Q_1} = \gamma_{Q_1} = 1$$
$$\mathcal{L}^i_{Q_1}(x) = D^1_n L^i(z) - L^{i+1}(z) \circ \pi^{(1)}_n.$$

En remarquant que $i - \alpha = i - (\alpha + 1) + \beta_{Q_1}$ la condition $C_{\alpha+1}$ est vérifiée pour la deuxième ligne.

Étude de la 3e ligne.

$$\begin{aligned} D^1 \mathcal{L}_Q(x) = & D^1 \left(\Sigma \frac{1}{(i-\alpha+\beta_Q)!} \mathcal{L}^i_Q(x) . (x - \Psi(x))^{i-\alpha+\beta_Q} \right) \\ = & \sum_{i \geqslant \alpha-\beta_Q+1} \frac{1}{(i-\alpha+\beta_Q-1)!} \mathcal{L}^i_Q(x) . (x-\Psi(x))^{i-\alpha+\beta_Q-1} \\ & + \sum_{i \geqslant \alpha-\beta_Q} [(D^1_n \mathcal{L}^i_Q(x) \\ & \qquad - \varepsilon_i \mathcal{L}^{i+1}_Q(x) \circ \pi^{(1)}_n) \frac{(x-\Psi(x))^{i-\alpha+\beta_Q}}{(i-\alpha+\beta_Q)!} \Big] . D^1\Psi(x), \end{aligned}$$

où $\varepsilon_i = 1$ si $i \neq k-1$, $\varepsilon_i = 0$ si $i = k-1$.

Posons

$$\mathcal{L}'_Q(x) = \sum_{i \geqslant \alpha - \beta_Q + 1} \frac{1}{(i - \alpha + \beta_Q - 1)} \mathcal{L}^i_Q(x) . (x - \Psi(x))^{i-\alpha+\beta_Q-1}$$

$\mathcal{L}'_Q(x) . Q(D^1\Psi, \ldots, D^\alpha\Psi)$ vérifie la condition $C_{\alpha+1}$ (en écrivant $i - \alpha + \beta_Q - 1 = i - (\alpha + 1) + \beta_Q$).

Posons $\overline{Q}(X_1, \ldots, X_\alpha) = X_1 Q(X_1, \ldots, X_\alpha)$.

$$\mathcal{L}_{\overline{Q}}(x) = \sum_{i \geqslant \alpha - \beta_Q} (D^1_n \mathcal{L}^i_Q(x) - \varepsilon_i \mathcal{L}^{i+1}_Q(x) \circ \pi^{(1)}_n) . \frac{(x - \Psi(x))^{i-\alpha+\beta_Q}}{(i - \alpha + \beta_Q)!}$$

$$\begin{aligned} D^1_n \mathcal{L}^i_Q(x) - \varepsilon_i \mathcal{L}^{i+1}_Q(x) \circ \pi_n \\ &= \Sigma(a^{i,h}_Q - \varepsilon_i a^{i+1,h}_Q)[D^{\eta_h+2}_n L^h - D^{\eta_h+1}_n L^h \circ \pi^{(1)}_n] \\ &\quad - \varepsilon_i a^{i+1,i+1}_Q [D^{\eta_{i+1}+1}_n L^{i+1} - D^{\eta_{i+1}}_n L^{i+1} \circ \pi^{(1)}_n]. \end{aligned}$$

Or $\eta_h + h + 2 - i = \gamma_Q + 1 = \gamma_{\overline{Q}}$.

En écrivant

$$i - \alpha + \beta_Q = i - (\alpha + 1) + \beta_Q + 1 = i - (\alpha + 1) + \beta_{\overline{Q}},$$

on voit que $\mathcal{L}_{\overline{Q}}(x)\overline{Q}$ vérifie aussi la condition $C_{\alpha+1}$.

Étude de la 4e ligne.

Q étant un monôme à j indéterminées $X_1, \ldots, X_j$; soit Q'_l la dérivée d'ordre 1 de Q par rapport à l'indéterminée X_l.

$$DQ(D^1\Psi(x), \ldots, D^j\Psi(x)) = \sum_{1 \leqslant l \leqslant j} Q'_l(D^1\Psi, \ldots, D^j\Psi) \times D^{l+1}\Psi(x).$$

Posons $Q''_l = Q'_l \times X_{l+1}$.

Soient d_i, d'_i, d''_i les degrés respectifs de Q, Q'_l, Q''_l par rapport à l'indéterminée X_i.

Si $i \neq l$ et $i \neq l + 1$

$$d_i = d'_i = d''_i, \qquad d_l - 1 = d'_l = d''_l,$$
$$d_{l+1} + 1 = d'_{l+1} + 1 = d''_l,$$
$$\beta_{Q''_l} = \beta_Q + 1, \quad \gamma_{Q''_l} = \gamma_Q, \quad \beta_{Q''_l} - \gamma_{Q''_l} = \beta_Q - \gamma_Q + 1.$$

Posons $\mathcal{L}_{Q''_l}(x) = \mathcal{L}_Q(x)$. En écrivant

$$i - \alpha + \beta_Q = i - (\alpha + 1) + \beta_{Q''_l},$$

on vérifie que $\mathcal{L}_{Q''_l}(x) . Q''_l(D^1\Psi, \ldots, D^{\alpha+1}\Psi)$ vérifie la condition $C_{\alpha+1}$.

LEMME d_2. — (Généralisation du lemme c_1)

$h + \eta + 1 \leqslant k - 1$

$$\sup_{z \in B_0} |D_n^{\eta+1} L^h(z) - D_n^\eta L^{h+1}(z) \circ \pi_n^{(1)}| \leqslant 2\varepsilon r^{k-2h-\eta},$$

$k \leqslant h + \eta + 1 \leqslant 2k - 1$

$$\sup_{z \in B_0} |D_n^{\eta+1} L^h(z) - D_n^\eta L^{h+1}(z) \circ \pi_n^{(1)}| \leqslant 2\bar{\eta}.$$

Démonstration. — Nous remarquons que

$$D_n^{\eta+1} D^h \hat{f}_n(z) = D_n^\eta D^{h+1} \hat{f}_n(z) \circ \pi_n^{(1)}.$$

Le même calcul que celui fait dans le cas $\eta = 0$ montre que :

$$D_n^{\eta+1} L^h(z) - D_n^\eta L^{h+1}(z) \circ \pi_n^{(1)} = \sum_{0 \leqslant p \leqslant n-1} [D_p^\eta D^{h+1} \hat{f}_{p+1}(\pi_p(z)) - D_p^\eta L_p^{h+1}(\pi_p(z))] \circ (\pi_{p+1}^{(1)} - \pi_p^{(1)}).$$

Or en un point y de E_p :

$$D_p^\eta L_p^{h+1}(y) = D_p^\eta D^{h+1} \hat{f}_p(y) + D_{p-1}^\eta L_{p-1}^{h+1}(\pi_{p-1}(y)) - D_{p-1}^\eta D^{h+1} \hat{f}_p(\pi_{p-1}(y))$$

$$D_p^\eta D^{h+1} \hat{f}_{p+1}(y) - D_p^\eta L_p^{h+1}(y) = D_p^\eta D^{h+1} \hat{f}_{p+1}(y) - D_p^\eta D^{h+1} \hat{f}_p(y) + D_{p-1}^\eta D^{h+1} \hat{f}_p(\pi_{p-1}(y)) - D_{p-1}^\eta L_{p-1}^{h+1}(\pi_{p-1}(y))$$

$$D_n^{\eta+1} L^h(z) - D_n^\eta L^{h+1}(z) \circ \pi_n^{(1)} = \sum_{0 \leqslant p \leqslant n-1} [D_p^\eta D^{h+1} \hat{f}_{p+1}(\pi_p(z)) - D_p^\eta D^{h+1} \hat{f}_p(\pi_p(z))] \circ (\pi_n^{(1)} - \pi_n^{(1)}).$$

Par définition de $\hat{f}_q$

$\eta + h + 1 \leqslant k - 1$

$$\sup_{y \in B_0} |D_p^\eta D^{h+1} \hat{f}_{q+1}(\pi_q(y)) - D_q^\eta D^{h+1} f(\pi_q(y))| \leqslant \frac{\varepsilon r^{k-2-h-\eta}}{2^{q+1}},$$

$k \leqslant \eta + h + 1 \leqslant 2k - 1$

$$\sup_{y \in B_0} |D_q^\eta D^{h+1} \hat{f}_{q+1}(\pi_q(y)) - D_q^\eta D^{h+1} f(\pi_q(y))| < \frac{\bar{\eta}}{2^{q+1}},$$

$\eta + h + 1 \leqslant k - 1$

$$\sup_p |D_p^\eta D^{h+1} \hat{f}_{p+1}(y) - D_p^\eta D^{h+1} \hat{f}_p(y)| \leqslant \frac{3\varepsilon r^{k-2-h-\eta}}{2^{q+1}},$$

$0 \leqslant \eta + h + 1 \leqslant 2k - 1$

$$\leqslant \bar{\eta} \times 2^{-q-1},$$

Le lemme d_3 est donc démontré.

Fin de la démonstration de la propriété d).

Considérons l'expression de $D^\alpha g(x)$ du lemme d_1.

$$\begin{aligned} D^\alpha g(x) - D^\alpha f(x) = & \sum_{\alpha \leqslant i \leqslant k-1} \frac{1}{(i-\alpha)!} (L^i(z) - D^i f(z)).(x-z)^{i-\alpha} \\ & + \sum_{Q \in \mathcal{M}_\alpha} \mathcal{L}_Q(x) \times Q(D^1\Psi(x), \ldots, D^\alpha \Psi(x)) \\ & - \frac{1}{(k-\alpha)!} \int_0^1 D^k f(z+tx).(x-z)^{k-\alpha}\, dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \left| \sum_{\alpha \leqslant i \leqslant k-1} \frac{1}{(i-\alpha)!} (L^i(z) - D^i f(z)).(x-z)^{i-\alpha} \right| \\ & \qquad \leqslant \sum_{\alpha \leqslant i \leqslant k-1} \frac{1}{(i-\alpha)!} 2\varepsilon r^{k-1-i} \times r^{i-\alpha} \leqslant 2e\varepsilon r^{k-\alpha} \\ & \left| \int_0^1 D^k f(z+tx).(x-z))^{k-\alpha}\, dt \right| \leqslant \eta r^{k-\alpha}. \end{aligned}$$

$\mathcal{L}_Q(x) \times Q(D^1\Psi, \ldots, D^\alpha\Psi)$ est une application α-multilinéaire de E dans F.

Soit $(U_1, \ldots, U_\alpha)$ une suite de α vecteurs.

$$Q(D^1\Psi, \ldots, D^\alpha\Psi).(U_1, \ldots, U_\alpha) = (v_1, \ldots, v_{\alpha-\beta_Q+\gamma_Q})$$

(L'opérateur $(D^l\Psi)^{d_l}$ transforme une suite de ld_l vecteurs de E en une suite de d_l vecteurs de E).

D'autre part, d'après la propriété d) de l'opérateur Ψ.

$$|D^l\Psi.(U_1, \ldots, U_l| \leqslant C_l r^{1-l} |U_1| \ldots |U_l|.$$

Donc $|v_1| \times \cdots \times |v_{\alpha-\beta_Q+\gamma_Q}|$

$$\begin{aligned} & \leqslant \prod_{1 \leqslant l \leqslant \alpha} (C_l)^{d_l} (r^{1-l})^{d_l} |U_1| \times \cdots \times |U_\alpha| \\ & \leqslant \left(\prod_{1 \leqslant l \leqslant \alpha} (C_l)^{d_l} \right) r^{\gamma_Q - \beta_Q} |U_1| \times \cdots \times |U_\alpha| \end{aligned}$$

Appliquons le lemme d_2 pour majorer $|\mathcal{L}_Q^i|$ (en remarquant que pour tous les termes de $\mathcal{L}_Q^i$ la somme $\eta_h \times h + 1$ est constante).

Il existe des constantes C_Q^i (dépendant exclusivement des $a_Q^{i,h}$) telles que

si $\gamma_Q + i \leqslant k - 1$:

$$|\mathcal{L}_Q^i| \leqslant C_Q^i \varepsilon r^{k-1-\gamma_Q-i},$$

si $k \leqslant \gamma_Q + i \leqslant 2k-1$:

$$\|\mathcal{L}_Q^i\| \leqslant C_Q^i \bar{\eta}$$

Donc si $\gamma_Q + i \leqslant k - 1$:

$$\|\mathcal{L}_Q^i(x).(x-z)^{i-\alpha+\beta_Q} \times Q\| \leqslant C_Q^i \times \prod_{1\leqslant l \leqslant \alpha} (C_l) \times \varepsilon r^{k-1-\gamma_Q-i} \times r^{i-\alpha+\beta_Q} \times r^{\gamma_Q}$$

en posant $b_Q^i = c_Q^i \prod_{1\leqslant l\leqslant \alpha} (c_l)^{d_l}$, on vérifie que :

$$|\mathcal{L}_Q^i(x).(x-z)^{i-\alpha+\beta_Q} \times Q| \leqslant b_Q^i \varepsilon r^{k-1-\alpha}.$$

De même si $k \leqslant \gamma_Q + i \leqslant 2k-1$, il existe une constante b_Q^i telle que

$$|\mathcal{L}_Q^i(x).(x-z)^{i-\alpha+\beta_Q} \times Q| \leqslant b_Q^i \overline{\eta} r^{i-\alpha+\beta_Q} \times r^{\gamma_Q-\beta_Q} \leqslant b_Q^i \overline{\eta} r^{i-\alpha+\gamma_Q} \leqslant b_Q^i \overline{\eta} r^{k-\alpha}$$

Or nous avons posé $r = \dfrac{\varepsilon}{\overline{\eta}}$.

$$|\mathcal{L}_Q^i(x).(x-z)^{i-\alpha+\beta_Q} \times Q| \leqslant b_Q^i \varepsilon r^{k-1-\alpha} \quad \text{si} \quad \alpha < k,$$
$$|\mathcal{L}_Q^i(x).(x-z)^{i-\alpha+\beta_Q} \times Q| \leqslant b_Q^i \overline{\eta} \quad \text{si} \quad \alpha = k.$$

L'ensemble $\mathcal{M}_\alpha$ des monômes Q étant fini la propriété *d*) est démontrée.

Le lemme fondamental est démontré.

B$_2$. *Fin de la démonstration du théorème* 1.

Soit $\varepsilon(x)$ une fonction continue définie sur Ω à valeurs dans **R**, strictement positive.

Étant donnée une fonction f de classe C^{2k-1} définie sur Ω à valeurs dans F, nous allons montrer qu'il existe une application g de classe C^∞ définie sur Ω, à valeurs dans F telle que, quel que soit x dans Ω, et quel que soit α, $0 \leqslant \alpha \leqslant k$: $|D^\alpha f(x) - D^\alpha g(x)| < \varepsilon(x)$.

Définition d'un recouvrement dénombrable de Ω.

LEMME 1. — *Quel que soit* x *élément de* Ω, *il existe une boule* $B'(x)$ *de centre* x *et de rayon* $\rho'(x)$, *contenue dans* Ω *telle que :*

a) $\sup_{(y,y')\in B'(x)} |\varepsilon(y) - \varepsilon(y')| < \inf_{z\in B'(x)} \dfrac{1}{2}\varepsilon(z),$

$b)$ $\sup_{(y, y') \in B'(x)} \| D^k f(y) - D^k f(y') \| < \inf_{z \in B'(x)} \varepsilon(z),$

$c)$ si $B'(x) \cap B'(y) \neq \varnothing$ $\frac{1}{4} < \frac{\rho'(x)}{\rho'(y)} < 4,$

$d)$ $\sup_{x \in \Omega} \rho'(x) < 2.$

La démonstration est la même que celle faite dans le cas $k = 1$ (partie A_2 de la démonstration).

Construction d'une fonction g *de classe* C^∞ « *proche* » *de* f.

La construction est une généralisation de celle faite dans le cas $l = 1$.

Considérons les fonctions φ_n définies sur Ω à valeurs dans $\mathbf{R}$ définies par :

$$\varphi_n(x) = \varphi\left(\frac{|x - a_n|^{2k}}{\rho_n^{2k}}\right)$$

La fonction φ_n est de classe C^∞ égale à 1 sur B_n; 0 en dehors de B'_n.

Considérons les fonctions l_n définies par :

$$l_n(x) = f(a_n) + \sum_{1 \leqslant i \leqslant k} \frac{1}{i!} D^i f(a_n) . (x - a_n)^i$$

$$D^k l_n(x) = D^k f(a_n), \qquad \sup_{x \in B'_n} |D^k l_n(x) - D^k f(x)| < \varepsilon_n.$$

A la fonction $(f - l_n)$ nous pouvons appliquer sur B'_n le lemme fondamental. Il existe une fonction δ_n de classe C^∞ telle que :

$$\sup_{x \in B'_n} |f(x) - l_n(x) - \delta_n(x)| < 2^{-n} \varepsilon_n \rho_n^k$$

$1 \leqslant i \leqslant k - 1$

$$\sup_{x \in B'_n} |D^i f(x) - D^i l_n(x) - D^i \delta_n(x)| < 2^{-n} \varepsilon_n \rho_n^{k-i}$$

$$\sup_{x \in B'_n} |D^k f(x) - D^k l_n(x) - D^k \delta_n(x)| < \lambda \varepsilon_n$$

(λ est une constante indépendante de n).

Posons

$$\tilde{f}_n(x) = \delta_n(x) + l_n(x).$$

$\tilde{f}_n$ est une fonction de classe C^∞ telle que :

(i) $\sup_{x \in B'_n} |\tilde{f}_n(x) - f(x)| < 2^{-n} \varepsilon_n \rho_n^k$

(ii) $\sup\limits_{x \in B'_n} |D^i \tilde{f}_n(x) - D^i f(x)| < 2^{-n} \varepsilon_n \rho_n^{k-i}$ si $i < k$

(iii) $\sup\limits_{x \in B'_n} \| D^k \tilde{f}_n(x) - D^k f(x) \| < \lambda \varepsilon_n$.

Nous définissons une suite de fonctions g_n :

$$g_n = f + \varphi_1(\tilde{f}_1 - f) + \varphi_2(1 - \varphi_1)(\tilde{f}_2 - f) + \cdots + \varphi_n(1 - \varphi_{n-1}) \ldots (1 - \varphi_1)(\tilde{f}_n - f).$$

Propriétés de la suite g_n.

[P_1] La suite g_n se stabilise.

[P_2] Sur B_n, g_n est de classe C^∞.

[P_3] Il existe des constantes λ'_i $(0 \leqslant i \leqslant k-1)$ indépendantes de n telles que :

$$0 \leqslant i \leqslant k-1 \quad \sup_{x \in B_n} |D^i g_n(x) - D^i f(x)| < \lambda'_i \varepsilon_n \rho_n^{k-i}$$
$$i = k \quad \sup_{x \in B_n} |D^k g_n(x) - D^k f(x)| < \lambda'_k \varepsilon_n.$$

Si $i = 0$ la démonstration est la même que celle faite dans le cas $k = 1$. Posons $\mu_n = \varphi_n(1 - \varphi_{n-1}) \ldots (1 - \varphi_1)$.

$$D^i g_n - D^i f = \sum_{\substack{\alpha, \beta \\ \alpha + \beta = i}} \binom{i}{\alpha} \sum_{1 \leqslant p \leqslant n} D^\alpha \mu_p(x) D^\beta(\tilde{f}_p - f).$$

Majorons $\sum\limits_{1 \leqslant p \leqslant n} D^\alpha \mu_p(x) D^\beta (\tilde{f}_p - f)$:

$$(1) \quad D^\alpha \mu_p(x) = \sum_{(\alpha_1 \cdots \alpha_p)} r_{\alpha_1 \ldots \alpha_p} D^{\alpha_p} \varphi_p \times \cdots \times D^{\alpha_1}(1 - \varphi_1).$$

La sommation étant étendue à l'ensemble des familles ordonnées de p entiers positifs ou nuls $(\alpha_1, \ldots, \alpha_p)$ tels que : $\alpha_1 + \cdots + \alpha_p = \alpha$

si $\alpha_i > 0$ $D^{\alpha_i}(1 - \varphi_i) = - D^{\alpha_i} \varphi_i$.

Calculons $\sum\limits_{1 \leqslant p \leqslant n} D^\alpha \mu_p(x) D^\beta(\tilde{f}_p - f)$, en développant chaque $D^\alpha \mu_p$ suivant l'expression (1), et en regroupant les termes contenant comme facteur la même expression

$$D^{\alpha_1} \varphi_{n_1} \times \cdots \times D^{\alpha_q} \varphi_{n_q} \quad (\alpha_1 + \cdots + \alpha_q = \alpha.).$$

$$\sum_{1 \leqslant p \leqslant n} D^\alpha \mu_p(x) D^\beta(\tilde{f}_p - f) = \sum_{(\alpha_1, \ldots \alpha_q)} r_{\alpha_1 \ldots \alpha_q} D^{\alpha_1} \varphi_{n_1} \times \cdots \times D^{\alpha_q} \varphi_{n_q} \times \sum_{n_q \leqslant l \leqslant m} \varphi_l (1 - \varphi_{l-1}) \ldots (1 - \varphi_{n_q})(1 - \varphi_{m_{q'}}) \ldots (1 - \varphi_{m_1})(D^\beta \tilde{f}_l - D^\beta f).$$

Dans l'écriture de cette expression nous avons fait la convention $n_1 < n_2 < \cdots < n_q$. La suite croissante $(m_1, \ldots, m_{q'})$ est la suite complémentaire de la suite $(n_1, \ldots, n_q)$ dans l'ensemble $(1, 2, \ldots, m)$

or $\sup_{x \in B'_l} \|D^\beta \tilde{f}_l - D^\beta f\| \leqslant 2^{-l}\varepsilon_l \rho_l^{k-\beta}$ si $\beta < l$,

$$\sup_{x \in B'_l} \|D^l \tilde{f}_l - D^l f\| \leqslant 2^{-l}\varepsilon_l.$$

Le coefficient dans g_n de $D^\beta(\tilde{f}_l - f)$ est non nul si et seulement si $B'_l \cap B'_n \neq \varnothing$. Donc

$$\sup_{x \in B'_l \cap B_n} |D^\beta \tilde{f}_l(x) - D^\beta f(x)| \leqslant 2^{-l+1}\varepsilon_n 2^{k-\beta}\rho_n^{k-\beta}.$$

Le même raisonnement que celui fait dans le cas $k = 1$ montre que :

$$\sum_{n_q \leqslant l \leqslant n} \varphi_l(1 - \varphi_{l-1}) \ldots (1 - \varphi_{n_q})(1 - \varphi_{m_{q'}}) \ldots (1 - \varphi_{m_1})[D^\beta(\tilde{f}_l - f)] \leqslant 2^{-n_q+2}\varepsilon_n 2^{k-\beta}\rho_n^{k-\beta}.$$

Supposons donnée une famille $(\alpha_1, \ldots, \alpha_q)$ $\alpha_1 + \cdots + \alpha_q = \alpha$. L'entier n_q étant fixé, il existe $\dfrac{(n_q - 1)!}{(n_q - q)!}$ familles $(n_1, \ldots, n_q)$ contenant comme facteur l'expression $D^{\alpha_1}\varphi_{n_1} \times \cdots \times D^{\alpha_q}\varphi_{n_q}$.

Désignons par $N(q)$ $(q < \alpha)$ le nombre de suites ordonnées $(\alpha_1, \ldots, \alpha_q)$ de q entiers strictement positifs tels que

$$\alpha_1 + \cdots + \alpha_q = \alpha.$$

$N(q)$ dépend uniquement de q et de α. Posons

$$\overline{N}(\alpha) = \sup_{q \leqslant \alpha} N(q).$$

Il existe donc au plus $\overline{N}(\alpha) \times n_q^\alpha$ termes de la somme $\sum_{1 \leqslant p \leqslant n} D^\alpha \mu_p(x) D^\beta(\tilde{f}_p - f)$ contenant comme facteur

$$D^{\alpha_1}\varphi_{n_1} \times \cdots \times D^{\alpha_q}\varphi_{n_q} \ (\alpha_1 + \cdots + \alpha_q = \alpha,\ n_1 < \cdots < n_q)$$

chacun de ces termes est majoré par

$$2^{-n_q+2}\varepsilon_n 2^{k-\beta}\rho_n^{k-\beta}.$$

Donc

$$\Big|\sum_{1 \leqslant p \leqslant n} D^\alpha \mu_p(x) D^\beta(\tilde{f}_p - f)\Big| \leqslant \sum_{1 \leqslant n_q \leqslant n} \overline{N}(\alpha) \times n_q^\alpha \times 2^{-n_q-2}\varepsilon_n 2^{k-\beta}\rho_n^{k-\beta} \times \sup |r_{\alpha_1} \ldots r_{\alpha_q}| \times \sup |D^{\alpha_1}\varphi_{n_1} \times \cdots \times D^{\alpha_q}\varphi_{n_q}|.$$

La série de terme général $n^\alpha 2^{-n}$ étant convergente il existe une constante K, indépendante de n telle que :

$$\sup_{x\in B_n}\Big|\sum_{1\leqslant p\leqslant n} D^\alpha\mu_p(x)D^\beta(\tilde{f}_p - f)\Big| \leqslant K\varepsilon_n\rho_n^{k-\beta}$$
$$\times \sup|D^{\alpha_1}\varphi_{n_1}\times\cdots\times D^{\alpha_q}\varphi_{n_q}|.$$

Or d'après l'appendice (B_3) il existe des constantes K^j $(1\leqslant j\leqslant \alpha)$ telles que :

$$|D^j\varphi_l(x)| < \frac{K^j}{\rho_l^j}$$

si $B'_l\cap B_n \neq 0$

$$\|D^j\varphi_l(x)\| \leqslant \frac{K^j\times 2^j}{\rho_n^j}.$$

$$|D^{\alpha_1}\varphi_{n_1}\times\cdots\times D^{\alpha_q}\varphi_{n_q}| \leqslant \prod_{j=\alpha_1}^{j=\alpha_q} K^j 2^j\rho_n^{-j}.$$

Sachant que $\alpha_1+\cdots+\alpha_q=\alpha$, il existe une constante $\overline{K}$ telle que : $|D^{\alpha_1}\varphi_{n_1}\times\cdots\times D^{\alpha_q}\varphi_{n_q}| \leqslant \overline{K}\rho_n^{-\alpha}$.

Il existe une constante $\overline{K}_i(i=\alpha+\beta)$ telle que :

$$\sup_{x\in B_n}\Big|\sum_{1\leqslant p\leqslant n} D^\alpha\mu_p(x)D^\beta(\tilde{f}_p - f)\Big| \leqslant \overline{K}^i\varepsilon_n\rho_n^{k-i},$$
$$\sup_{x\in B_n}|D^ig_n(x) - D^if| \leqslant 2^i\overline{K}_i\varepsilon_n\rho_n^{k-i}.$$

Le même calcul se fait pour $i=k$.

$$\sup_{x\in B_n}|D^kg_n(x) - D^kf(x)| \leqslant 2^i\overline{K}_k\varepsilon_n.$$

La propriété $[P_3]$ est donc vérifiée.

Posons $g=\varinjlim g_n$. g est de classe C^∞ et il existe des constantes $\overline{\lambda}_i$ telles que :

$$0\leqslant i\leqslant k \quad \sup_{x\in\Omega}|D^ig(x) - D^if(x)| \leqslant \overline{\lambda}_i\varepsilon(x).$$

La fonction $\varepsilon(x)$ pouvant être choisie arbitrairement proche de 0 le théorème 2 est démontré.

B$_3$. *Appendice.*

Étude des différentielles de la fonction χ *définie sur* E *à valeurs dans* **R** *par* : $\chi(x)=\varphi\left(\frac{|x|^{2k}}{r^{2k}}\right)$ (est la fonction réelle φ est celle définie dans $A_1 i$).

Posons

$$\chi_1(x) = \varphi(|x|^{2k}); \qquad |D^i\chi(x) = \left|D^i\chi_1\left(\frac{x}{r}\right)\right| \times \frac{1}{r^i}.$$

Pour étudier la différentielle d'ordre i de χ_1, nous introduisons les notations suivantes :

Soit β un entier $1 \leqslant \beta \leqslant i$ tel que $(i - \beta)$ soit pair. Soit P_β l'ensemble des parties à β éléments de l'ensemble des entiers compris entre 1 et i, noté $[1, i]$. Soit $S \in P_\beta$, T le complémentaire de S dans $[1, i]$. Nous désignons par Σ_T, l'ensemble des permutations d'éléments de T. Soit τ_T un élément de Σ_T.

Posons

$$S = (i_1, \ldots, i_\beta), \qquad \tau_T = (j_1, \ldots, i_\gamma)$$

γ est pair, $\beta + \gamma = i$.

Soit $x^S I^T$ l'application i-multilinéaire définie par :

$$x^S I^T.(h_1, \ldots, h_i) = (x.h_{i_1}) \times \cdots \times (x.h_{i_\beta}) \sum_{\tau \in \Sigma_T} (h_{j_1}.h_{j_2}) \ldots (h_{j_{\gamma-1}}.j_{j_\gamma}).$$

Lemme 1. — *La différentielle d'ordre i de la fonction χ_1 au point x est de la forme :*

$$D^i\chi_1(x) = \sum_{1 \leqslant \alpha \leqslant i} \Delta^{i-\alpha}(x)\varphi^\alpha(|x|^{2k})$$

ou $\varphi^\alpha(t)$ est la dérivée d'ordre α de φ au point t; et

$$\Delta^{i-\alpha}(x) = \sum_{\substack{1 \leqslant \beta \leqslant i \\ (i-\beta) \text{ pair} \\ (i+\beta) \leqslant 2k\alpha}} K_\beta^{i,\alpha} |x|^{2(k-1)\alpha-\beta'} \sum_{S \in P_\beta} x^T I^T.$$

Dans cette formule, on a posé $\beta' = \beta + i - 2\alpha$ (β' est pair). L'ensemble Σ_T est l'ensemble des permutations du complémentaire de S dans $[1, i]$. $K_\beta^{i,\alpha}$ est une constante indépendante de r.

Démonstration du lemme 1. — Elle se fait par récurrence, en appliquant les régles de calcul suivantes :

1° $D(|x|^{2\gamma}) = 2\gamma|x|^{2(\gamma-1)}x^*$, on désigne par x^* le vecteur dual de x; $x^*(h) = x.h$; $(x^S) \times x^* = x^{S'}$ où $S' \in P_{\beta+1}$).

2° $D\varphi^\alpha(|x|^{2k}) = |x|^{2(k-1)}x^*\varphi^{\alpha+1}(|x|^{2k})$.

3° $D(x^S) = \sum_{S' \in P_{\beta-1}(S)} x^{S'} I^{(S-S') \cup \{i_{\beta+1}\}}$

où $P_{\beta-1}(S)$ désigne l'ensemble des parties à $(\beta - 1)$ éléments de S et $S' \cup \{i_{\beta+1}\} = S$.

LEMME 2. — *Si* S *est une partie à* β *éléments, la norme de l'application i-multilinéaire* $x^S I^T$ *est majorée par* $(i-\beta)!|x|^\beta$.

COROLLAIRE. — *Il existe une constante* K^i *telle que :*

$$|D^i\chi_1(x)| < K^i; \qquad |D^i\chi(x)| < \frac{K^i}{r^i}.$$

Démonstration. $2k\alpha - (i+\beta) \geqslant 0$ donc il existe une constante $\overline{K}^{i-\alpha}$ telle que :

$$|\Delta^{i-\alpha}(x)| < \sum_{1 \leqslant \beta \leqslant i} \overline{K}^{i-\alpha}|x|^\beta.$$

Or φ est non nul si $0 \leqslant |x| \leqslant 1$: $|D^i\chi_1(x)| < K^i$ et $|D^i\chi(x)| < \dfrac{K^i}{r^i}$.

2. Applications à des problèmes de lissage de fonctions définies sur des variétés.

Dans ce paragraphe M désignera une variété paracompacte, séparable modelée sur E^α (E^α est l'un des espace l_p, c_0 et admet une norme de classe C^α), N une variété paracompacte, séparable modelée sur F. Si $0 \leqslant \beta \leqslant \alpha$, nous désignerons par $\mathcal{C}^\beta(M, N)$ l'ensemble des applications de classe β de M dans N.

LEMME 1. — *Soient* U, V, Ω, 3 *ouverts de* E^α *tels que :* $\overline{U} \subset V \subset \overline{V} \subset \Omega$ *et* f *une fonction de classe* C^1 *définie sur* Ω *à valeurs dans* F. *Quelle que soit la fonction* ε *continue, strictement positive définie sur* Ω, *il existe une fonction* g *définie sur* Ω, *à valeurs dans* F *telle que :*

a) g *est de classe* C^α *sur* U.

b) $g = f$ *en dehors de* V.

c) $\sup_{x \in \Omega} |g(x) - f(x)| < \varepsilon(x)$.

d) $\sup_{x \in \Omega} |\mathrm{D}g(x) - \mathrm{D}f(x)| < \varepsilon(x)$.

(Une fonction vérifiant *c*) et *d*) sera dite une ε-approximation de f.)

Démonstration du lemme 1. — D'après [6], il existe une fonction ψ définie sur Ω, à valeurs dans $\mathbf{R}$ telle que :

$$\psi^{-1}(0) \supset \Omega - \mathrm{V}, \qquad \psi^{-1}(1) \supset \overline{\mathrm{U}}.$$

Soit $\varepsilon_1(x)$ une fonction continue strictement positive telle que : $0 < \varepsilon_1(x) < \dfrac{\varepsilon(x)}{2 \sup(1, |\mathrm{D}\psi(x)|)}$.

Nous appliquons le théorème 1 pour la fonction ε_1. Il existe une fonction f_1 de classe C^α telle que :

a) $\sup_{x \in \Omega} |f_1(x) - f(x)| < \varepsilon_1(x)$,

b) $\sup_{x \in \Omega} |\mathrm{D}f_1(x) - \mathrm{D}f(x)| < \varepsilon(x)$.

La fonction $g = \psi f_1 + (1 - \psi)f$ est la fonction cherchée.

Théorème 1. — *Supposons* M *et* N *de classe* α. $\mathcal{C}^\alpha(\mathrm{M}, \mathrm{N})$ *est dense dans* $\mathcal{C}^1(\mathrm{M}, \mathrm{N})$, *muni de la* C^1*-topologie fine.*

Démonstration. — Soit f un élément $\mathcal{C}^1(\mathrm{M}, \mathrm{N})$; il existe un atlas dénombrable localement fini de M, défini par l'ensemble de carte $(\Omega_n, \chi_n)_{n \in \mathbf{N}}$. Soit $(\mathrm{W}_i, \varphi_i)_{i \in \mathbf{N}}$ l'ensemble des cartes d'un atlas de N tel que le recouvrement par les W_i soit localement fini. Nous pouvons choisir les cartes (Ω_n, χ_n) de sorte que pour tout n, il existe i : $f(\Omega_n) \subset \mathrm{W}_i$.

D'après [2], il existe des ouverts U_n et V_n $(n \in \mathrm{N})$ tels que :

$$\bigcup_{n \in \mathbf{N}} \mathrm{U}_n = \mathrm{M}^\alpha \qquad \text{et} \qquad \overline{\mathrm{U}}_n \subset \mathrm{V}_n \subset \overline{\mathrm{V}}_n \subset \Omega_n$$

Soit ε une fonction continue, définie sur M^α strictement positive.

Appliquant le lemme fondamental, nous définissons par induction une suite de fonctions $\{g_n\}$ telles que :

a) $g_n = g_{n-1}$ sur $\Omega_n - \mathrm{V}_n$.

b) g_n est de classe C^α sur $\bigcup_{p \leqslant n} \mathrm{U}_p$.

c) g_n est une $2^{-n}\varepsilon$ approximation dé g_{n-1}.

Posons $g = \lim_{n \to \infty} g_n$; g est de classe C^α est et une ε-approximation de f.

Dans toute la suite de ce paragraphe, nous supposons que les immersions et les plongements considérés sont fermés et que l'image par l'application linéaire tangente à f de l'espace tangent à M en un point x est un sous-espace fermé admettant un supplémentaire de l'espace tangent à N en $f(x)$.

Corollaire 1. — *L'espace des immersions (respectivement plongements, respectivement difféomorphismes) de* M *dans* N *de classe* C^α *est dense dans l'espace des immersions (respectivement plongements, respectivement difféomorphismes) de* M *dans* N *de classe* C^1 *pour la* C^1*-topologie fine.*

La même démonstration que celle faite en dimension finie montre que l'ensemble des immersions de classe C^1 de M dans N est ouvert dans $\mathcal{C}^1(M, N)$. Le corrollaire 1 est donc une conséquence des deux lemmes suivants :

Lemme 2. — *Soit* f *un plongement de* M *dans* N *il existe un voisinage* $\mathscr{W}_1$ *de* f *dans* $\mathcal{C}^1(M, N)$ *tel que tout élément* g *de* $\mathscr{W}_1$ *soit injectif.*

Démonstration. — L'application linéaire $Df(x)$ définit un isomorphisme de E^α sur un sous-espace fermé de F encore noté E^α.

Soit x un point de M, (Ω, χ) une carte de M au voisinage de x; il existe au voisinage de $f(x)$ une carte de N : (W, ψ) telle que $\chi(\Omega)$ soit homéomorphe à une boule ouverte B de E^α de centre $\psi \circ f(x)$ et telle que $\psi(\Omega)$ soit homéomorphe à $B \times B'$ où B' est une boule ouverte d'un espace E', supplémentaire de E^α dans E, $E^\alpha \oplus E' \simeq F$.

Nous pouvons en outre supposer que : $f(\Omega) \subset W$ et

$$\psi \circ f \circ \chi^{-1}(y) = (y, 0).$$

Posons : $\Omega' = \chi^{-1}\left(\frac{B}{2}\right)$.

D'après le théorème des fonctions implicites, il existe un voisinage $\mathscr{W}_0$ de f tel que, quel que soit $g \in \mathscr{W}_0$, on ait :

a) $g(\Omega') \subset W$.

b) $\psi \circ g$ est un plongement.

Soit d une distance sur N compatible avec la topologie de N; soit ε une fonction continue strictement positive telle que : $d(f(x), f(y)) < \varepsilon(x)$ implique $y \in \Omega$.

Soit $\mathscr{W}_1 = \left\{g;\ g \in \mathcal{C}^1(\mathrm{M}, \mathrm{N})\ g \text{ est une } \frac{\varepsilon(x)}{2} \text{ approximation de } f\right\}$.

Soit $\mathscr{W} = \mathscr{W}_0 \cap \mathscr{W}_1$.

On vérifie que quel que soit $g \in \mathscr{W}$, g est injective.

Lemme 3. — *Soit f un difféomorphisme de* M *sur* N, *il existe un voisinage $\mathscr{W}_2$ de f dans $\mathcal{C}^1(\mathrm{M}, \mathrm{N})$, tel que tout élément g de $\mathscr{W}_2$ soit surjectif.*

Les notations étant les mêmes que précédemment, il existe un voisinage $\mathscr{W}'_0$ de f, tel que quel que soit g dans $\mathscr{W}'_0$, $\psi \circ g(\Omega')$ contienne une boule ouverte de centre $\psi \circ g(x)$ et de rayon $r(g, x)$.

Il existe une fonction continue α telle que :

$$0 < \alpha(x) < \inf_{g \in \mathscr{W}'_0} r(g, x)$$

soit $\mathscr{W}'_1 = \{g;\ g \in \mathcal{C}^1(\mathrm{M}, \mathrm{N}),\ g$ est une α-approximation de $f\}$. On vérifie que $\mathscr{W}^1 = \mathscr{W}'_0 \cap \mathscr{W}'_1$ est le voisinage cherché.

Théorème 3. — *Soit Σ^1 une structure de classe C^1 sur une variété* M; *Σ contient une structure Σ^α de classe C^α.*

Démonstration. — Elle est calquée sur celle faite en dimension finie [11].

Lemme 4. — *Soient* U, V, Ω 3 *ouverts bornés de* E *tels que $\overline{\mathrm{U}} \subset \mathrm{V} \subset \overline{\mathrm{V}} \subset \Omega$ et f un plongement de classe C^1 de Ω dans* E. *Supposons qu'il existe une décomposition de* E *en somme directe $\mathrm{E} = \mathrm{E}_1 \oplus \mathrm{E}_2$ telle que $\Pi_1 \circ f$ (Π_1 projection sur E_1 parallèlement à E_2) soit un difféomorphisme de classe C^1 de Ω sur son image Ω'. Quelle que soit la fonction continue $\varepsilon(x)$, strictement positive, il existe une fonction g telle que :*

a) $g(\mathrm{U})$ *est une sous-variété de classe C^α de* E.

b) $g = f$ *sur* $\Omega - \mathrm{V}$.

c) $\sup_{x \in \Omega} |g(x) - f(x)| < \varepsilon(x)$.

d) $\sup_{x \in \Omega} |\mathrm{D}g(x) - \mathrm{D}f(x)| < \varepsilon(x)$.

e) Si $\Omega_1 \subset \Omega$ *et si* $f(\Omega_1)$ *est une sous-variété de classe* C^α *de* E, $g(\Omega_1)$ *est une sous-variété de classe* C^α *de* E.

D'après [8], il existe un plongement de classe C^1 de M dans E, la fin de la démonstration du théorème 3 est basée sur le lemme suivant :

LEMME 5. — *Soit* f *un plongement de classe* C^1 *de* M *dans* E. *Soit* $\varepsilon(x)$ *une fonction positive définie sur* M; *il existe une* ε-*approximation de* f, g *de classe* C^1 *telle que* $g(M)$ *soit une sous-variété de classe* C^α *de* E.

Remarque. — Supposons que la structure Σ^1 sur M soit une structure « étalée » (layer) de classe C^1; [7] il existe un atlas étalé (Ω_i, χ_i) sur M, un isomorphisme T de E sur un sous-espace fermé de E tels que : $(f \circ \chi_i^{-1} - T)(\Omega_i)$ soit contenu dans un sous-espace de dimension finie de E. La construction de g au lemme 5 montre qu'il existe un atlas étalé (Ω'_i, X'_i) sur M tel que $(g \circ X_i'^{-1} - T)(\Omega'_i)$ soit contenu dans un sous-espace de dimension finie de E. L'image réciproque par g de la structure de $g(N)$ est une structure étalée de classe C^α sur M.

Supposons que E soit un espace de Hilbert, du § I théorème 2, nous déduisons les résultats suivants :

THÉORÈME 4. — *Soit* M *une variété de classe* C^∞ *modelée sur un espace de Hilbert, l'espace des applications (resp. immersions, resp. plongements, resp. difféomorphismes) de classe* C^∞ *de* M *dans une variété* N *est dense dans l'ensemble des applications (resp. immersions, resp. plongements, resp. difféomorphismes) de classe* C^{2k-1} *de* M *dans* N, *muni de la* C^k-*topologie fine.*

THÉORÈME 5. — *Soit* Σ^k *une structure de classe* C^k $(k \geqslant 2)$ *sur une variété* M *modelée sur un espace de Hilbert* E, Σ^k *contient une structure* Σ *de classe* C^∞.

Démonstration. — Soit f un plongement de classe C^k de M dans E. Soit $\nu(F(M))$ le fibré normal de $f(M)$; nous identifions $\nu(F(M))$ à un sous fibré de la restriction à $f(M)$ du fibré tangent à E de la manière suivante : nous identifions la fibre F_x de $\nu(f(M))$ en un point x de $f(M)$ avec le sous-espace de E supplémentaire orthogonal du sous-espace tangent à $f(M)$ en x. F_0 étant un sous-espace fixé de E, soit $\mathcal{G}(E, F_0)$ l'ensemble des sous-espaces F de E tels qu'il existe un isomorphisme l de E sur lui-même qui applique F_0 sur F.

De même que dans le cas où E est de dimension finie, nous pouvons munir $\mathcal{G}(E, F_0)$ d'une structure de variété de classe C^∞ modelée sur un espace de Banach.

Un système de cartes locales est obtenu de la manière suivante :

Soit F_i un sous-espace de E isomorphe à F_0 et F'_i le supplémentaire orthogonal de F_i.

Il existe un voisinage de F_i u_i dans $\mathcal{G}(E, F_0)$ tel que quel que soit F. Dans u_i :

$$F = \{u + \omega(u);\, u \in F_i,\ \omega \text{ application linéaire de } F_i \text{ dans } F'_i\}.$$

Nous définissons ainsi un homéomorphisme χ_i de u_i sur un voisinage de 0 dans l'ensemble des applications linéaires ω de F_i dans F'_i; χ_i est une carte locale de (E, F_0).

$\nu(f(M))$ étant un fibré de classe C^{k-1}, il existe une application naturelle α de classe C^{k-1} de $f(M)$ dans $\mathcal{G}(E, F_{x_0})$ telle que

$$\alpha(x) = F_x$$

Désignons par exp l'application exponentielle définie sur E pour la métrique Riemanienne naturelle de E,

$$(\exp(x, \nu) = x + \nu).$$

Il existe D voisinage de $E \times \{0\}$ dans $E \times E$ tel que la restriction à $D \cap \nu(f(M))$ de exp soit un difféomorphisme.

Soit β une application quelconque de classe C^p $(p \geqslant 2)$ de $f(M)$ dans $\mathcal{G}(E, F_{x_0})$; β définit un sous fibré $\nu_\beta(f(M))$ de $f(M) \times E$ et l'application exponentielle est définie sur un voisinage de la section nulle de $\nu_\beta(f(M))$. Désignons la restriction de l'application exponentielle à ce voisinage $\exp_\beta$.

Calculons la différentielle de cette application en un point $(a_i, 0)$ de la section nulle de $\nu_\beta(f(M))$. Soit U une carte locale au voisinage de $(x_i, 0)$; U est homéomorphe à un ouvert de $E \times E$. Supposons U assez petit de sorte que, quel que soit $(x, 0) \in U$, $\beta(x)$ soit contenu dans une carte locale de $\mathcal{G}(E, F_{x_0})$ u_i. Soit $\omega_{\beta, x}$ l'application linéaire telle que la fibre en $(x, 0)$ de $\nu_\beta(f(\mathrm{M}))$ soit :

$$\mathrm{F}_{\beta,x} = \{u + \omega_{\beta,x}(u)\,;\ u \in \mathrm{F}_{\beta,x_i}\}$$

Soit V_i un voisinage de x_i dans E homéomorphe à un ouvert de $\mathrm{E}_1 \times \mathrm{E}_2$ par un homéomorphisme φ_i tel que :

$$\varphi_i(f(\mathrm{M}) \cap \mathrm{V}_i) = \mathrm{E}_1 \times \{0\} \cap \varphi_i(\mathrm{V}_i),$$
$$\varphi_i(\mathrm{F}_x \cap \mathrm{V}_i) = \{x\} \times \mathrm{E}_2 \cap \varphi_i(\mathrm{V}_i)$$

(F_x est la fibre en x du fibré normal à $f(\mathrm{M})$).

Dans ce système de coordonnées locales :

$$\mathrm{D}\exp_\beta(x_i, 0).(w_1, w_2) = (w_1, 0) + (0, w_2) + (\mathrm{D}'_x\omega_{\beta,x}.w_1)w_2$$

$\mathrm{D}_x\omega_{\alpha,x} = 0$ ($\omega_{\alpha,x}$ application associée au fibré normal défini par l'application α).

Si $\beta = \alpha$ la différentielle $\mathrm{D}\exp_\beta(x, 0)$ est un isomorphisme. Il existe un voisinage de α pour la C^1-topologie fine tel que quel que soit β dans ce voisinage $\mathrm{D}\exp_\beta(x, 0)$ soit un isomorphisme pour tout $(x, 0)$ de $f(\mathrm{M})$. Choisissons γ dans ce voisinage tel que γ soit de classe C^k.

$\mathrm{D}\exp_\gamma(x, 0)$ est un isomorphisme, donc il existe un voisinage w_γ de la section nulle de $\nu_\gamma(f(\mathrm{M}))$ tel que la restriction à w_γ de l'application exponentielle soit un isomorphisme de classe C^k.

Il existe, d'après le théorème 3 un plongement g de classe C^k de M dans E tel que :

a) $g(\mathrm{M})$ est une sous-variété de classe C^∞ de E.

b) $g(\mathrm{M}) \subset \exp_\gamma(w_\gamma)$.

c) $g(\mathrm{M})$ est transversal à toutes les sous-variétés $\mathrm{N}_{\gamma(x)}$; $\mathrm{N}_{\gamma(x)}$: image par l'application exponentielle de la fibre $_\gamma(x)$.

Considérons l'application ρ qui à tout point x de $f(\mathrm{M})$ associe le point $\rho(\mathrm{M})$ de $g(\mathrm{M})$ situé sur $\mathrm{N}_\gamma(x)$; ρ est bijective.

Considérons un ouvert W_i de $\exp(w_\gamma)$ tel que $\mathrm{W}_i \cap f(\mathrm{M})$ soit un ouvert d'une carte locale de $f(\mathrm{M})$. Il existe un homéomorphisme ψ_i de W_i sur un ouvert de $\mathrm{E}_1 \times \mathrm{E}_2$ tel que :

$$\psi_i(\mathrm{W}_i \cap f(\mathrm{M})) \quad \text{est un ouvert de} \quad \mathrm{E}_1 \times \{0\}.$$
$$\psi_i(\mathrm{W}_i \cap \mathrm{N}_\gamma(x)) \quad \text{est un ouvert de} \quad \{\psi_i(x)\} \times \mathrm{E}_2$$

pour $x \in f(\mathrm{M})$.

$g(M)$ est une sous-variété de classe C^∞ de E; $\psi_i(g(M) \cap W_i)$ est une sous-variété de classe C^∞ de $\psi_i(W_i)$ transversale aux sous-variétés $\{\psi_i(x)\} \times E_2$.

D'après le théorème des fonctions implicites $\psi_i \circ \rho \circ \psi_i^{-1}$ est de classe C^k; nous en déduisons, les formules de changement de carte étant de classe C^∞ que ρ est de classe C^k.

COROLLAIRE 2. — *Toute variété hilbertienne de classe* C^k *est* C^k *difféomorphe à un ouvert d'un espace de Hilbert.*

Ce corollaire est une conséquence du théorème 5 et de [5].

Remarque. — La démonstration du théorème 5 peut se généraliser au cas où E : est un espace de Banach à condition de définir avec soin une application α de classe C^{k-1} qui à tout point x de $f(M)$ associe un sous-espace supplémentaire de l'espace tangent en x à $f(M)$.

3. Approximation de fonctions par des fonctions de SARD.

Soient Ω un ouvert d'un espace de Hilbert E, séparable, de dimension infinie, F un espace de Hilbert séparable de dimension finie ou infinie; une application f de Ω dans F est dite de Sard si l'ensemble de ses valeurs critiques n'a pas de point intérieur [6].

Dans ce paragraphe nous démontrons le théorème suivant :

THÉORÈME 1. — *L'ensemble des applications de Sard de classe* C^∞ *de* Ω *dans* F *est dense dans l'ensemble des applications de classe* C^1, *muni de la* C^1*-topologie fine.*

Démonstration :

Soit f une application de classe C^1 de Ω dans F et ε une fonction continue définie sur Ω, strictement positive.

Soit $\bar{g}$ la fonction de classe C^∞ définie au § I A_2 telle que

$$|\bar{g}(x) - f(x)| \leqslant \bar{\lambda}_0 \varepsilon(x)$$
$$|D\bar{g}(x) - Df(x)| \leqslant \bar{\lambda}_1 \varepsilon(x)$$

($\bar{\lambda}_0$ et $\bar{\lambda}_1$ sont deux constantes).

Pour démontrer le théorème 2, il suffit de prouver que la fonction $\bar{g}$ est une fonction de Sard. Considérons le recouvrement de Ω construit au § 1 A_2 par des boules B_n de centre a_n et de rayon ρ_n. Soit x_0 un point de Ω et n le plus petit entier tel que x_0 soit situé dans B_n. Sur B_n, $\bar{g}$ coïncide avec la fonction g_n :

$$g_n(x) = \sum_{1 \leqslant p \leqslant n} \mu_p(x)\,[f(a_p) + Df(a_p).(x - a_p) + \delta_p(x)]$$
$$\mu_p(x) = \varphi_p(x)(1 - \varphi_{p-1}(x))\ldots(1 - \varphi_1(x))$$

$\delta_p(x)$ est une fonction construite en appliquant le lemme fondamental 1 (§ I A_1) de la manière suivante :

Soit Ψ_n l'application différentiable de E sur E^∞ telle que $|x - \Psi_n(x)| < 2^{-n}\rho_n$.

Il existe une boule ouverte $\Omega'(x_0)$ de centre x_0 contenue dans B_n et un entier m tels que $\Psi_n(\Omega'(x_0))$ soit contenu dans un sous-espace E_m de dimension finie m; quel que soit p $(1 \leqslant p \leqslant n)$, il existe une application de classe C^∞ $\bar{\delta}_p$ de E_m dans F telle que : $\delta_p(x) = \bar{\delta}_p(\Psi_n(x))$.

Soit $\Omega(x_0)$ une boule ouverte de centre x_0 telle que : $\Omega(x_0) \subset \overline{\Omega}(x_0) \subset \Omega'(x_0) \subset B_n$.

Les boules $\Omega(x_0)$ quand x_0 varie dans Ω forment un recouvrement de Ω : il existe une famille dénombrable de points $x_i (i \in \mathbf{N})$ telle que $\bigcup_{i \in \mathbf{N}} \Omega(x_i) = \Omega$. Posons $\Omega(x_i) = \Omega_i$ et $\Omega'(x_i) = \Omega'_i$.

Il existe un entier n_i tel que sur Ω'_i :

$$\bar{g}(x) = \sum_{p \leqslant n_i} \mu_p(x)[f(a_p) + Df(a_p).(x - a_p) + \bar{\delta}_p(\Psi_{n_i}(x))]$$

Nous allons démontrer que le complémentaire de l'ensemble des valeurs critiques de la restriction de $\bar{g}$ à Ω'_i est une intersection dénombrable d'ouverts denses. L'espace F étant un espace de Baire, nous en déduisons que la fonction g est de Sard.

Désormais nous supposerons l'indice i fixé. Pour simplifier les notations nous poserons pour tout x de Ω'_i :

$$\bar{g}(x) = \sum_{p \leqslant n} \mu_p(x)[f(a_p) + Df(a_p).(x - a_p) + \delta_p(x)]$$
$$\delta_p(x) = \bar{\delta}_p(\Psi(x))$$

L'image par Ψ de Ω'_i est située dans le sous-espace de dimension finie E_m. D'après la définition de Ψ les points de Ω'_i tels que $\left(\sum_{\alpha>m} x_\alpha^2\right)$ soit constant ont même image par Ψ.

Soit A le sous-espace affine de dimension finie engendré par les points a_p $(1 \leqslant p \leqslant n)$ et E_m. Soit π_A la projection orthogonale sur A; soit A' le sous-espace engendré par A et un vecteur e_A orthogonal à A, de norme 1, colinéaire à $(x_i - \pi_A(x_i))$. Soit ρ_A l'application de E sur A' définie par :

$$\underline{\rho_A(x) = \pi_A(x) + |x - \pi_A(x)| e_A}$$

L'application ρ_A est de classe C^∞ sur $\Omega'_i - (A \cap \Omega'_i)$.

Soit $S_x = \{y;\ y \in \Omega'_i\ \rho_A(x) = \rho_A(y)\}$.

Nous remarquons les trois faits suivants :

a) Si x n'est pas situé dans A, S_x est un ouvert d'une sphère de codimension finie (égale à la dimension de A); la restriction à S_x des applications μ_p, de δ_p est constante. La restriction de g à S_x coïncide avec la restriction à S_x d'une application linéaire et est donc de Sard.

b) L'espace A étant de dimension finie la restriction de g à A est de Sard.

c) Au voisinage d'un point x non situé dans A, la structure de E est localement produit : il existe un voisinage U_x de x homéomorphe à $\Sigma_x \times U'_x$ où Σ_x est un voisinage de x dans S_x et U'_x un voisinage de x dans A.

La démonstration du théorème 1 est pour l'essentiel basée sur les 3 remarques *a*), *b*), *c*), précédentes. Elles se décompose en 3 parties. Dans la première, nous démontrons le théorème 1 dans le cas particulier où F est de dimension finie. Dans la deuxième, nous utilisons le résultat de la première pour étudier l'image de certains points critiques. L'image des autres points critiques est étudiée directement dans la 3e partie.

PROPOSITION 1. — *Supposons* F *de dimension finie. Le complémentaire de l'ensemble des valeurs critiques de la restriction de* g *à* Ω'_i *est maigre.*

Démonstration. — Le noyau de l'application linéaire $Df(a_p)$ noté $\operatorname{Ker}(Df(a_p))$ est de codimension finie quel que soit $p(1 \leqslant p \leqslant n)$. Soit B le sous-espace affine engendré par A et le supplémentaire orthogonal de $\bigcap_{1\leqslant p\leqslant\alpha} \operatorname{Ker}(\mathrm{D}f(a_p))$. De même que précédemment, nous désignerons par π_{B} la projection orthogonale sur B, par e_{B} un vecteur unitaire orthogonal à B et colinéaire à $(x_i - \pi_{\mathrm{B}}(x_i))$. Posons

$$\rho_{\mathrm{B}}(x) = \pi_{\mathrm{B}}(x) + |(x - \pi_{\mathrm{B}}(x))| e_{\mathrm{B}}.$$

D'après la définition de $\bar{g}$:

$$\underline{\bar{g}(\rho_{\mathrm{B}}(x)) = \bar{g}(x)}$$

ρ_{B} est de classe C^∞ sur le complémentaire de B.

a) *Supposons* x *non situé dans* B.

$$\mathrm{D}\bar{g}(\rho_{\mathrm{B}}(x)) \times \mathrm{D}\rho_{\mathrm{B}}(x) = \mathrm{D}g(x).$$

L'application $\mathrm{D}\rho_{\mathrm{B}}$ est surjective : l'ensemble des valeurs critiques de la restriction de $\bar{g}$ à $\overline{\Omega}_i - (\mathrm{B} \cap \overline{\Omega}_i)$ est l'ensemble des valeurs critiques de la restriction de $\bar{g}$ à un sous-espace de dimension finie (le sous-espace engendrée par B et e_{B}). D'après le théorème de Sard connu en dimension finie, cet ensemble est maigre.

b) *Supposons* x *situé dans* B.

Quel que soit l'élément h de E : $\mathrm{D}\bar{g}(x).h = \mathrm{D}\bar{g}(x).\pi_{\mathrm{B}}(h)$.

L'ensemble des valeurs critiques images d'un point de $\mathrm{B} \cap \Omega'_i$ est l'ensemble des valeurs critiques de la restriction de g à $\mathrm{B} \cap \Omega'_i$ cet ensemble est maigre. La réunion de 2 ensembles maigres est maigre et la proposition 1 est démontrée.

Cas général ou F *est de dimension infinie.*

Soit $\mathcal{C}$ l'ensemble des points critiques de $\bar{g}$ situés dans Ω'_i.

Soit $\mathcal{C}_1$ l'ensemble des points critiques x de Ω'_i tels que le conoyau de l'application linéaire :

$\left(\sum_{1\leqslant p\leqslant n} \mu_p(x)\mathrm{D}f(a_p)\right)$ soit de dimension infinie.

Soit $\mathcal{C}_2$ le complémentaire dans $\mathcal{C}$ de $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$ est ouvert dans $\mathcal{C}$, $\mathcal{C}_1$ est fermé dans $\mathcal{C}$.

Proposition 2. — $\bar{g}(\mathcal{C}_2)$ *est maigre.*

D'après la propriété de Baire, il suffit de montrer que tout point x_0 de $\mathcal{C}_2$ admet un voisinage $W(x_0)$ tel que

$$\bar{g}(W(x_0) \cap \mathcal{C}_2)$$

soit maigre.

Soit x_0 un point de $\mathcal{C}_2$, E_0 le noyau de $Dg(x_0)$, E_1 un sous-espace de E supplémentaire de E_0. Nous identifierons E_0 et E_1 avec les sous-espaces affines de E, d'origine x_0 qui leur sont parallèles. Posons $F_1 = D\bar{g}(x_0)(E_1)$. Soit F_0 un sous-espace supplémentaire de F_1; F_0 est de dimension finie. Soit π la projection sur F_0 parallèlement à F_1. Dans la suite, nous identifierons E à $E_0 \times E_1$ et F à $F_0 \times F_1$; un point de E (respectivement de F) est déterminé par deux composantes (ξ, ξ') (resp. (ζ, ζ')). Posons $x_0 = (\xi_0, \xi'_0)$.

L'application $\pi \circ \bar{g} = g_0$ est une application de E dans un espace de dimension finie F_0 du type précédemment. Pour g_0, nous pouvons définir, comme dans la proposition 1 un sous-espace B_0 de E, de dimension finie et une application ρ_0 de E sur un sous-espace B'_0 de dimension finie, laissant fixes les points de B_0, de classe C^∞ en dehors de B_0 et telle que : $g_0(\rho_0(x)) = g_0(x)$.

α) *Supposons* x_0 *non situé dans* B_0.

Nous allons définir un difféomorphisme φ d'un voisinage fermé W de x_0 ne rencontrant pas B_0 tel que

a) $\bar{g} \circ \varphi(\xi, \xi') = (\eta_0(\xi, \xi'), \eta_1(\xi'))$

où η_1 est un difféomorphisme d'un voisinage de ξ'_0 dans E_1 sur un voisinage de $\eta_1(\xi'_0) = \rho'_0$ dans F_1,

b) $\rho_0 \circ \varphi[(E_0 \times \{\xi''\}) \cap W]$ est une sous-variété de B'_0. La codimension de $D\varphi(E_0) \cap \operatorname{Ker}(D\rho_0(x))$ est constante sur W.

L'application φ est un difféomorphisme d'un voisinage de x_0 : l'ensemble des valeurs critiques de $g \circ \varphi$ coïncide avec l'ensemble des valeurs critiques de g.

Fin de la démonstration de la proposition 2 *en supposant* φ *construit.*

D'après *a*) un point (ξ, ξ') situé dans W est un point critique de $\bar{g}$ si et seulement si il est point critique de la restriction à $E_0 \times \{\xi'\}$ de $\pi \circ \bar{g} \circ \varphi = \eta_0$. Or

$$\pi \circ \bar{g} \circ \varphi = \pi \circ \bar{g} \circ \rho_0 \circ \varphi.$$

Un point (ξ, ξ') est point critique de la restriction à $E_0 \times \{\xi'\}$ de η_0 si et seulement si il est point critique de la restriction de $\pi \circ \bar{g}$ à $\rho_0 \circ \varphi[E_0 \times \{\xi'\} \cap W]$; $\rho_0 \circ \varphi[E_0 \times \{\xi'\} \cap W]$ est une sous-variété de dimension finie d'après la condition b).

Or $F = \bigcup_{\zeta' \in F_1} F_0 \times \{\zeta'\}$;

L'application η_1 étant un difféomorphisme, nous en déduisons que le *complémentaire de* $g(\mathcal{C}_2 \cap W)$ *est dense.*

Montrons que le complémentaire de $\bar{g}(\mathcal{C}_2 \cap W)$ *est ouvert.*

Soit $\{y_j\}_{j \in N}$ une suite de valeurs critiques convergeant vers y.

Posons : $y_j = \bar{g} \circ \varphi(\xi_j, \xi'_j)$; $y_j = (\zeta_j, \zeta'_j)$; $y = (\rho, \zeta')$; (ξ_j, ξ'_j) est point critique de $\bar{g}$.

La suite $\{\zeta'_j\}$ converge vers ζ', donc la suite $\{\xi'_j\}$ converge vers un point ξ'.

La suite $\{\eta_0(\xi_j, \xi'_j)\}$ converge vers ζ. Or

$$\eta_0(\xi_j, \xi'_j) = g_0 \circ \rho_0\varphi(\xi_j, \xi'_j\}.$$

De la suite $\{\rho_0 \circ \varphi(\xi_j, \xi')\}$ nous pouvons extraire une suite $\{\rho_0 \circ \varphi(\xi_{j_p}, \xi')\}$ qui converge vers un point

$$\rho_0 \circ \varphi(\xi, \xi');$$

Posons $y = \bar{g} \circ \varphi(\xi, \xi')$.

Raisonnons par l'absurde et supposons que y soit valeur régulière, alors (ξ, ξ') est un point régulier de $g \circ \varphi$. Donc $\rho_0 \circ \varphi(\xi, \xi')$ est point régulier de la restriction de $\pi \circ \bar{g}$ à $\rho_0 \circ \varphi(E_0 \times \{\xi'\} \cap W)$; pour j assez grand d'après la propriété b) de φ $\rho \circ \varphi(\xi_j, \xi'_j)$ est point régulier de la restriction de $\pi \circ \bar{g}$ à $\rho \circ \varphi(E_0 \times \{\xi'_j\} \cap W)$, d'où une contradiction.

Construction du difféomorphisme φ *d'un voisinage* W *de* x_0 *vérifiant les propriétés* a) *et* b).

Le noyau de $D\rho_0(x)$ est le sous-espace orthogonal à B_0 et à $(x - \pi_{B_0}(x))$. Le noyau est de codimension finie. Il existe un sous-espace $\overline{E}_0$ supplémentaire de E_1 tel que la codimension dans E de $(\overline{E}_0 \cap \operatorname{Ker} D\rho_0(x_0))$ soit minimum. (Si dimension $E_0 \geqslant$ codimension $\operatorname{Ker} D\rho_0(x_0)$: $\overline{E}_0 + \operatorname{Ker} D\rho_0(x_0) = E$.) Quel que soit x voisin de x_0, $\operatorname{Ker} D\rho_0(x)$ est isomorphe à $\operatorname{Ker} D\rho_0(x_0)$ et les deux sous-espaces sont voisins. Il existe un voisinage W' de x_0 tel que, quel que soit x dans W' :

$$\text{dimension } [\overline{E}_0 + \text{Ker}\,(D\rho_0(x))] = \text{dimension } [\overline{E}_0 + \text{Ker}\,(D\rho_0(x_0))].$$

Donc sur W' la codimension de $\overline{E}_0 \cap \text{Ker}\,(D\rho_0(x))$ dans E'_0 est constante [4].

Il existe une application linéaire inversible δ de E dans E. $\delta : E_0 \times E_1 \to E_0 \times E_1$ de la forme : (dans le système de coordonnées de $\overline{E}_0 \times E_1$)

$\begin{pmatrix} \delta_0 & 0 \\ \delta_1 & Id_{E_1} \end{pmatrix}$ δ_0 est un isomorphisme de $\overline{E}_0$ sur E_0, δ_1 est une application linéaire de E_0 dans E_1.

Pour obtenir le difféomorphisme φ cherché, il suffit de composer δ^{-1} avec un difféomorphisme obtenu en appliquant le théorème des fonctions implicites. Plus explicitement, suivant une démonstration de [1] posons :

$$\overline{g}(\overline{\xi}, \xi') = (\gamma_0(\overline{\xi}, \xi'), \gamma_1(\overline{\xi}, \xi')) \quad ((\overline{\xi}, \xi') \in \overline{E}_0 \times E_1).$$

Soit η_1 la restriction de $Dg(0, 0)$ à E_1.

Posons

$$\gamma(\overline{\xi}, \xi') = (\xi, \eta_1^{-1} \circ \gamma_1(\overline{\xi}, \xi'));$$
$$g \circ \gamma^{-1}(\overline{\xi}, \xi') = (\gamma'_0(\overline{\xi}, \xi'), \quad \eta_1(\xi')).$$

Nous remarquons d'autre part que en identifiant F à $\overline{E}_0 \times E_1$, F à $F_0 \times F_1$:

$$Dg \circ \gamma^{-1}(\overline{\xi}, \xi'_0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & X \end{pmatrix};$$

et

$$D\gamma(\overline{\xi}_0, \xi'_0) = \begin{pmatrix} Id & 0 \\ 0 & Id \end{pmatrix}.$$

Pour ξ' voisin de $\xi'_0, \gamma^{-1}(\overline{E}_0 \times \{\xi'\})$ est une sous-variété de E dont l'espace tangent en tout point voisin de $\overline{\xi}_0$ est voisin de E_0.

Il existe une application η_0 de $E = E_0 \times E_1$ dans F_0 telle que : si $(\xi, \xi') \in E_0 \times E_1$, la relation suivante soit vérifiée :

$$g \circ \gamma^{-1}\delta^{-1}(\xi, \xi') = (\eta_0(\xi, \xi'), \eta_1(\xi')).$$

Posons $\varphi = \gamma^{-1} \circ \delta^{-1}$;

$$D\varphi(\xi_0, \xi') = \begin{pmatrix} \delta_0^{-1} & 0 \\ -\delta_1\delta_0^{-1} & Id_{E_1} \end{pmatrix}.$$

L'image par φ de $E_0 \times \{\xi'\}$ est une sous-variété dont l'espace tangent en tout point voisin de (ξ_0) est voisin de E'_0.

La codimension de $D\varphi(E_0 \times \{\xi'\} \cap \operatorname{Ker} D\rho_0(x))$ étant constante dans un voisinage W de x_0, l'image par ρ_0 de $\varphi[(E_0 \times \{\xi'\}) \cap W]$ est une sous-variété de B_0. φ est l'application cherchée.

β) *Supposons* x_0 *situé dans* B_0.

Le même raisonnement que celui fait lors de la démonstration de la proposition 1 montre que si x_0 est un point critique de $\pi \circ \bar{g}$, x est point critique de la restriction de $\pi \circ \bar{g}$ à B_0. L'image par $\pi \circ \bar{g}$ de l'ensemble des points critiques de B_0 est de mesure nulle dans F_0, et $\pi \circ \bar{g}$ $(\mathcal{C}_2 \cap B_0 \cap \bar{\Omega}_i)$ est compacte. On en déduit que $\bar{g}(\mathcal{C}_2 \cap B_0 \cap \bar{\Omega}_i)$ est compact. Son complémentaire est un ouvert dense.

Proposition 3. — $\bar{g}(\mathcal{C}_1)$ *est maigre.*

Nous allons démontrer que tout point x *non situé dans* A *admet un voisinage* U_x *tel que le complémentaire de* $\bar{g}(\mathcal{C}_1 \cap \bar{U}_x)$ *est un ouvert dense.*

Lemme 1. — *Tout point* x *non situé dans* A *admet un voisinage* V_x *tel que le complémentaire de* $\bar{g}(V_x \cap \mathcal{C}_1)$ *soit dense.*

Soit $\{L_p\}$ $(1 \leqslant p \leqslant n)$ une famille de n éléments de $\mathcal{L}(E, F)$.

Soit H_n l'hyperplan de $\mathbf{R}^n$ d'équation $\sum\limits_{1 \leqslant p \leqslant n} \lambda_p = 1$.

Soit G_n l'application de H_n dans $\mathcal{L}(E, F)$ définie par :

$$G_n(\lambda) = \sum_{1 \leqslant p \leqslant n} \lambda_p L_p.$$

Soit Λ_1 l'ensemble des points λ de H_n tels que le conoyau de $G_n(\lambda)$ soit de dimension infinie, et soit λ^1 un point de Λ_1.

Sous lemme 1. — Il existe un voisinage X de λ^1 dans H_n et un sous-espace $\bar{F}$ de F de dimension infinie tels que, quel que soit $\lambda = (\lambda_p)$ élément de $X \cap \Lambda_1$: Image

$$\Big(\sum_{1 \leqslant p \leqslant n} \lambda_p L_p\Big) \cap \bar{F}_0 = \{0\}.$$

Démonstration du sous-lemme. — Nous la faisons par récurrence sur l'entier n si $n = 1$, H_1 est réduit à un point et le lemme est vrai : supposons le lemme vrai pour des espaces de Hilbert E et F quelconques des applications L_p arbitraires et quel que soit $m < n$.

Soient E_0 le noyau de $G_n(\lambda^1)$, E_1 un sous-espace supplémentaire de E_0. Posons $F_1 = G_n(\lambda^1)(E_1)$. Soient $\overline{F}_0$ un sous-espace supplémentaire de F_1 et $\overline{\pi}$ la projection sur $\overline{F}_0$ parallèlement à F_1.

Il existe un voisinage X' de λ^1 dans H_n tel que quel que soit λ dans X' la restriction de $G_n(\lambda)$ à E_1 soit injective. Pour que le conoyau de $G_n(\lambda)$ soit de dimension infinie, il faut et il suffit que le conoyau de la restriction à E_0 de $\overline{\pi} \circ G_n(\lambda)$ soit de dimension infinie. Soient $L_{0,p}$, $G_{0,n}$ les restrictions respectives de L_p et G_n à E_0. $\overline{\pi}_0 \left[\sum\limits_{1\leqslant p\leqslant n} \lambda_p^1 L_{0,p}\right] = 0$ (λ_p^1 est la $p^{\text{ème}}$ composante de λ^1 $\sum\limits_{1\leqslant p\leqslant n} \lambda_{1,p}\, \overline{\pi} \circ L_{0,p} = 0$).

Un des λ_p^1 au moins n'est pas nul, supposons que ce soit λ_n^1

$$\overline{\pi} \circ L_{0,n} = - \sum_{1\leqslant p\leqslant n-1} \frac{\lambda_{1,p}\overline{\pi} \circ L_{0,p}}{\lambda_n^1},$$

$$\overline{\pi} \circ L_{0,n} = - \sum_{1\leqslant p\leqslant n-1} \frac{\lambda_{1,p}\overline{\pi} \circ L_{0,p}}{\lambda_n'}$$

$$\overline{\pi} \circ G_n(\lambda) = \sum_{1\leqslant p\leqslant n-1} \left(\lambda_p - \frac{\lambda_p^1}{\lambda_n^1}\lambda_n\right) \overline{\pi} \circ L_{0,p},$$

$$\sum_{1\leqslant p\leqslant n-1} \left(\lambda_p - \frac{\lambda_p^1}{\lambda_n^1}\lambda_n\right) = 1 - \frac{1}{\lambda_n^1}.$$

— Supposons $\lambda_n^1 \neq 1$ le point de $p^{\text{ème}}$ composante $(1 \leqslant p \leqslant n-1) \left(1 - \dfrac{1}{\lambda_n^1}\right)^{-1} \left(\lambda_p - \dfrac{\lambda_p^1}{\lambda_n^1}\lambda_n\right)$ est dans l'hyperplan H_{n-1} de $\mathbf{R}^{n-1}$.

En appliquant l'hypothèse de récurrence à l'application $\left(1 - \dfrac{1}{\lambda_n^1}\right)^{-1} \overline{\pi} \circ G_n(\lambda)$ le sous-lemme est démontré dans ce cas

— Supposons $\lambda_n^1 = 1$

ou bien $\lambda_p^1 = 0$, quel que soit $p \leqslant n$,
ou bien $L_{0,n} = 0$

$$\sum_{1\leqslant p\leqslant n} \lambda_p L_{0,p} = \sum_{1\leqslant p\leqslant n-1} \lambda_p L_{0,p}.$$

Nous pouvons encore, dans chacun des cas appliquer l'hypothèse de récurrence.

Fin de la démonstration du lemme 1.

Soit μ l'application de Ω_i dans H_n définie par $\mu(x) = \lambda$ $(\lambda_p = \mu_p(x))$. Soit x_1 un point de $\mathcal{C}_1$, posons $\mu(x_1) = \lambda_1$.

Soit V_1 une boule ouverte de centre x_1 contenue dans $\mu^{-1}(X)$ (X voisinage de λ_1 défini dans le sous-lemme). Il existe un sous-espace $\overline{F}_0$ de F tel que, quel que soit x dans $V_1 \cap \mathcal{C}_1$.

$$\text{Image}\left(\sum_{1 \leqslant p \leqslant n} \mu_p(x) \mathrm{D}f(a_p)\right) \cap \overline{F}_0 = \{0\}.$$

Considérons d'autre part, pour tout point x non situé dans A, la sphère S_x de codimension finie passant par x. Sur S_x les applications μ_p sont constantes si x est un point de $\mathcal{C}_1$, tous les points de $S_x \cap \Omega_i'$ sont dans $\mathcal{C}_1$. Nous dirons que $\mathcal{C}_1$ possède la propriété de symétrie $\mathcal{S}$.

Soit $\overline{F}_1$ un sous-espace supplémentaire de $\overline{F}_0$; comme espace affine, F est engendré par les sous-espaces $\overline{F}_0 \times \{y\}$ où y décrit l'ensemble des points de l'espace affine parallèle à $\overline{F}_1$ passant par $g(x_0) = y_0$. Soit x un point de $\mathcal{C}_1$. L'image de l'application linéaire dont la restriction à S_x coïncide avec $\bar{g}$ est un sous-espace contenu dans un supplémentaire de $\overline{F}_0 \times \{y\}$; son intersection avec $\overline{F}_0 \times \{y\}$ est réduite à au plus un point, quel que soit g. $\bar{g}(S_x \cap \Omega_i) \cap \overline{F}_0 \times \{y_1\}$ est vide ou réduit à un point pour tout x dans $\mathcal{C}_1$.

Le point x n'étant pas situé dans A, au voisinage de x la structure de E est localement produit : Il existe un voisinage V_x de x homéomorphe à $\Sigma \times \Sigma'$ où Σ est un voisinage de x dans S_x et Σ' un voisinage compact de x dans l'espace de dimension finie engendré par E$'$ et x.

L'ensemble des points ξ' de Σ' tels que

$$g(\Sigma \times \{\xi'\}) \cap \overline{F}_0 \times \{y_1\} \neq 0$$

est un compact Σ_1' de Σ'. $\bar{g}(\Sigma \times \Sigma_1') \cap \overline{F}_0 \times \{y_1\}$ est un compact quel que soit y_1. L'espace F_0 étant de dimension infinie, le complémentaire dans $F_0 \times \{y_1\}$ de

$$g(\Sigma \times \Sigma_1') \cap \overline{F}_0 \times \{y_1\}$$

est un ouvert dense. Le complémentaire de $\overline{g}(V_x \cap \mathcal{C}_1)$ est dense.

Lemme 2. — *Tout point x non situé dans A admet un voisinage V'_x tel que le complémentaire de $g(V_x \cap \mathcal{C}_1)$ soit ouvert.*

$\mathcal{C}_1$ possédant la propriété $\mathcal{S}$, (propriété de symétrie), la démonstration repose sur le sous-lemme 2 suivant :

Sous-lemme 2. — Soit G un fermé de Ω'_i possédant la propriété $\mathcal{S}$ et contenu dans une boule fermée de centre x_0, V'_0 ne rencontrant pas A, $\overline{g}(G)$ est fermé.

Démonstration. — Soit y un point de F et supposons qu'il existe une suite $\{x_j\}_{j\in N}$ de points de G telle que la suite $\overline{g}(x_j)$ converge vers y.

Montrons qu'il existe un point x de G tel que $g(x) = y$. ρ_A étant l'application de E dans A′ définie précédemment, considérons la suite $\{\rho_A(x_j)\}$; tous les points de cette suite appartiennent à G.

Remarquons que : $\rho_A(V'_0) = V'_0 \cap A'$. La boule V'_0 étant fermée $V'_0 \cap A'$ est compact : il existe une suite $\{x_{j_m}\}_{m\in N}$ extraite de la suite $\{x_j\}_{j\in N}$ telle que la suite $\{\rho_A(x_{j_m})\}$ converge vers un point x' de G :

$$y = \lim_{n\to\infty} \sum_{1\leqslant p\leqslant m} \mu_p(x')[f(a_p) + Df(a_p).(x_{j_m} - a_p) + \delta_p(x')].$$

Soit $K^\perp$ le noyau de l'application linéaire :

$$\Big(\sum_{1<p<n} \mu_p(x')Df(a_p)\Big).$$

Soit K le supplémentaire orthogonal de $K^\perp$ et $\pi_{K^\perp}$ la projection orthogonale sur $K^\perp$.

$$\sum_{1\leqslant p\leqslant n} \mu_p(x')Df(a_p).\pi_{K^\perp}(x_{j_m} - x') = \sum_{1\leqslant p\leqslant n} \mu_p(x').Df(a_p).(x_{j_m} - x')$$

Soit H le sous-espace engendré par $K^\perp$ et A, π_H la projection orthogonale sur H; H′ le sous-espace engendré par H et le vecteur e_H de norme 1 orthogonal à H dont le support passe par x_0.

Posons $\rho_H(x) = \pi_H(x) + |(x - \pi_H(x))|e_H$.

Nous remarquerons que si deux points x_1 et x_2 vérifient la relation $\rho_A(x_1) = \rho_A(x_2)$, ils vérifient aussi la relation $\rho_H(x_1) = \rho_H(x_2)$ (car $A \subset H$).

La suite $\left\{\left(\sum_{1 \leqslant p \leqslant n} \mu_p(x')Df(a_p)\right).\pi_{K^\perp}(x_{j_m} - x')\right\}$ converge.

La suite $\{\pi_A(x_{j_m} - x')\}$ convergeant vers 0, la suite $\left(\left\{\sum_{1 \leqslant p \leqslant n} \mu_p(x')Df(a_p)\right).\pi_H(x_{j_m} - x')\right\}$ converge.

D'après le théorème du graphe fermé la suite $\{\pi_H(x_{j_m} - x')\}$ converge.

$$|x_{j_m} - x' - \pi_H(x_{j_m} - x')|^2 = |x_{j_m} - x' - \pi_A(x_{j_m} - x'|^2 + |(\pi_A - \pi_H)(x_{j_m} - x')|^2$$

La suite $\{\rho_A(x_{j_m})\}$ étant convergente, la suite $\rho_H(x_{j_m})$ converge vers un point x.

Le point x est un point de G et on vérifie que $\bar{g}(x) = y$. D'autre part $A \cap \mathcal{C}_1 \cap \overline{\Omega}$ est compact, donc le complémentaire de $\bar{g}(A \cap \mathcal{C}_1 \cap \overline{\Omega})$ est un ouvert dense. Nous en déduisons $\bar{g}(\mathcal{C}_1 \cap \overline{\Omega})$ *est maigre.*

Théorème 2. — *Soient* M *et* N *deux variétés paracompactes séparables, de classe* C^∞ *modelées respectivement sur les espaces de Hilbert* E *et* F. *Soit* N_1 *une sous-variété de* N. *L'ensemble des applications de classe* C^∞ *de* M *dans* N *transversales à* N_1 *est dense dans* $\mathcal{C}'(M, N)$ *muni de la* C^1*-topologie fine.*

Le théorème 2 se déduit du théorème 1 suivant une méthode classique [6] et [10]. Soit Ω un ouvert de E.

Lemme 1. — *L'ensemble des applications de classe* C^∞ *de* Ω *dans* F *transversales à* $\{0\}$ *est dense dans* $\mathcal{C}_1(\Omega, F)$ *muni de la* C^1 *topologie fine.*

Démonstration. — Soit ε une fonction continue définie sur Ω, à valeurs dans R, strictement, positive. Appliquons la méthode de construction du § I, A_2. Nous définissons un recouvrement de Ω par des boules $B_n(a_n, \rho_n)$.

Posons $\varepsilon'_n = \dfrac{\varepsilon_n}{2} = \dfrac{\varepsilon(a_n)}{2}$.

Soit

$$\alpha_n = \varphi_1\varepsilon'_1\rho_1 + \varphi_2(1 - \varphi_1)\frac{\varepsilon'_2}{2}\rho_2 + \cdots + \varphi_n(1 - \varphi_{n-1})\ldots(1 - \varphi_1)\frac{\varepsilon'_n\rho_n}{2^n}.$$

Posons $\alpha(x) = \lim_{n \to \infty} \alpha_n(x)$. On vérifie que $0 < \alpha(x) < \varepsilon(x)$, et $|D\alpha(x)| < \varepsilon(x)$; en particulier $|D\alpha(x)|$ est borné.

f étant une application de Ω dans F posons : $f_1 = \dfrac{f}{\alpha}$.

Appliquons à la fonction f_1 le théorème 1 du § III; il existe une fonction g_1 de classe C^∞ telle que :

$$|f_1(x) - g_1(x)| < 1; \qquad |Df_1(x) - Dg_1(x)| < 1$$

et g_1 est une fonction de Sard.

L'ensemble des valeurs critiques de g_1 est maigre : il existe un point b de F, $|b| < 1$, tel que b n'appartienne pas à l'ensemble des valeurs critiques de g_1.

Posons $g_2(x) = g_1(x) - b$. 0 est une valeur régulière de g_2.

Posons $g(x) = \alpha(x)g_2(x)$; $g_2^{-1}(0) = g_1^{-1}(0)$, et

$$Dg(x) = D\alpha(x)g_2(x) + \alpha(x)Dg_2(x).$$

En un point x_0 tel que $g(x_0) = g_2(x_0) = 0$,

$$Dg(x_0) = \alpha(x)Dg_2(x_0)$$

0 est valeur régulière de g.

$$|f(x) - g(x) = |f_1(x)\alpha(x) - g_2(x)\alpha(x)|$$
$$|f(x) - g(x)| < \varepsilon(x)|f_1(x) - g_2(x)| < 2\varepsilon(x)$$
$$Df(x) - Dg(x) = \alpha(x)[Df_1(x) - Dg_2(x)] + D\alpha(x)[f_1(x) - g_2(x)]$$
$$|Df(x) - Dg(x)| \leqslant 3\varepsilon(x).$$

LEMME 2. — *Soit* F_0 *un sous-espace fermé de* F. *L'ensemble des applications de classe* C^∞ *de* Ω *dans* F *transversales à* F_0 *est dense dans* $\mathcal{C}'(\Omega, F)$ *pour la* C^1 *topologie fine.*

Démonstration. — Soit F_1 un sous-espace supplémentaire de F_0 Π la projection sur F_1 parallèlement à F_0. Appliquons à $\Pi \circ f$ le lemme 1, soit g une C^1-approximation de $\Pi \circ f$ tranvsersale à 0 l'application $(1 - \Pi) \circ f + g$ est une C^1-approximation de f transversale à F_0.

Fin de la démonstration du théorème 2.

Soit $\varepsilon(x)$ une fonction strictement positive définie sur M, f une application de M dans N considérons un recouvrement dénombrable localement fini de N par des ouverts

(W_j). Soit ψ_j un homéomorphisme de W_j sur un ouvert de F

$$|f(x) - g(x)| < \varepsilon(x)|f_1(x) - g_2(x)| < 2\varepsilon(x)$$
$$|Df(x) - Dg(x)| = \alpha(x)[Df_1(x) - Dg_2(x)] + D\alpha(x)[f_1(x) - g_2(x)]$$
$$|Df(x) - Dg(x)| \leqslant 3\varepsilon(x).$$

LEMME 2. — *Soit* F_0 *un sous-espace fermé de* F. *L'ensemble des applications de classe* C^∞ *de* Ω *dans* F *transversales à* F_0 *est dense dans* $\mathcal{C}'(\Omega, F)$ *pour la* C^1*-topologie fine.*

Démonstration. — Soit F_1 un sous-espace supplémentaire de F_0 Π la projection sur F_1 parallèlement à F_0.

Appliquons à $\Pi \circ f$ le lemme 1, soit g une C^1-approximation de $\Pi \circ f$ transversale à 0.

L'application $(1 - \Pi) \circ f + g$ est une C^1 approximation de f transversale à F_0.

LEMME 3. — *Soit* K *un fermé de* Ω *et* f *une application de* Ω *dans* F *de classe* C^∞ *telle que la restriction de* f *à* K *soit transversale à* F_0. *Quelle que soit* ε *fonction continue strictement positive il existe une application de classe* C^∞, *transversale à* F_0 *telle que :*

a) g *coïncide avec* f *sur* K.

b) $|g(x) - f(x)| < \varepsilon(x)$.

c) $|Dg(x) - Df(x)| < \varepsilon(x)$.

Démonstration. — Soient Ω_1 et Ω_2 deux ouverts tels que :

(*i*) $K \subset \Omega_1 \subset \overline{\Omega}_1 \subset \overline{\Omega}_2 \subset \Omega$.

(*ii*) La restriction de f à $\overline{\Omega}_2$ est transversale à F_0.

Il existe un voisinage de f, $\mathscr{W}$ dans $\mathcal{C}^1(\Omega, F)$ muni de C^1-topologie fine tel que la restriction à Ω_2 de toute fonction g de $\mathscr{W}$ soit transversale à F_0. Nous pouvons supposer $\mathscr{W}$ localement convexe. D'après [6] il existe une fonction φ de classe C^∞ telle que : $K \subset \varphi^{-1}$ (1) $\complement\Omega_2 \subset \varphi^{-1}(0)$. D'après le lemme 2 il existe une application g transversale à F_0, située dans $\mathscr{W}$ telle que :

(*i*) $2|g(x) - f(x)| < \inf\left(\varepsilon(x), \dfrac{\varepsilon(x)}{|D\varphi(x)|}\right)$;

(*ii*) $2|Dg(x) - Df(x)| < \varepsilon(x)$;

La fonction $\varphi f + (1 - \varphi)g$ est la fonction cherchée.

Fin de la démonstration du théorème :

Elle se fait par induction, en construisant grâce au lemme 3 la fonction g successivement dans chaque carte d'un atlas de M[6].

BIBLIOGRAPHIE

[1] R. Abraham et J. Robbin, Transversal mappings and flows (Benjamin).

[2] R. Bonic et J. Frampton, Smooth functions on Banach manifolds, *Journal of Mathematics and Mechanics*, 15 (1966), 877-895.

[3] N. Bourbaki, Topologie générale, chapitre IX.

[4] A. Douady, Le problème des modules sur les sous-espaces analytiques compacts d'un espace analytique donné, *Annales Institut Fourier*, Grenoble 16-1 (1966), 1-95.

[5] J. Eells and K. D. Elworthy, Open embeddings on certain Banach manifolds. A paraître aux Annals of Mathematics.

[6] J. Eells et Mac-Alpin, An approximate Morse-Sard theorem, *Journal of Mathematics and Mechanics*, 17 (1967), 1055-1064.

[7] K. D. Elworthy, Frodholm maps and GL-(E) structures, *Bull. Amer. Math. Soc.*, 74 (1968), 582-586.

[8] N. H. Kuiper et B. Terpstra, Differentiable closed embeddings of Banach manifolds, Conference in honor of G. de Rham Springer Verlag (1970), 118-125.

[9] N. H. Kuiper et D. Burghelea, Hilbert manifolds, *Annals of Mathematics*, vol. 90, n° 3, 379-417.

[10] C. Morlet, Le lemme de Thom et les théorèmes de plongement. Séminaire H. Cartan 14, 1961-1962, exposés 4-7.

[11] J. R. Munkrees, Elementary differential topology, *Annals of Mathematics Studies*, n° 54 (1963).

[12] F. Quinn, Transversal approximation in Banach manifolds, à paraître aux « Proccedings Summer institute in Global Analysis », Berkeley, 1968.

[13] S. Smale, An infinite dimensional version in Sard's theorem, *American Journal of Mathematics*, 87 (1965), 861-866.

[14] J. Wells, Differentiable functions in c_0, *Bulletin Amer. Math. Soc.*, 75 (1969), 117-118.

(Thèse, Fac. Sciences, Orsay, Juin 1970)

Nicole Moulis
Service de Mathématiques
Université de Poitiers I
route de Chauvigny
86-Poitiers.