ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

MARCEL BRELOT

GUSTAVE CHOQUET

Espaces et lignes de Green

Annales de l'institut Fourier, tome 3 (1951), p. 199-263

<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1951__3__199_0>

ESPACES ET LIGNES DE GREEN

par M. BRELOT et G. CHOQUET (*) (Grenoble et Paris)

INTRODUCTION

1. Considérons d'abord un domaine plan Ω simplement connexe en application conforme sur le cercle unité et sa fonction de Green $G_P(M)$ de pôle P. On sait que les trajectoires orthogonales des courbes $G = C^{te}$ établissent entre ces courbes une correspondance biunivoque conservant la mesure harmonique en P relativement aux domaines $G < \lambda$, et cela se prolonge convenablement à la frontière de Ω décomposée en bouts premiers. G. C. Evans [1] [11] a même montré que parmi ces trajectoires ou lignes de Green, presque toutes (au sens angulaire de départ en P) ont une longueur finie et convergent donc vers un point-frontière. Nous verrons que cela peut s'adapter à un domaine de connexion quelconque et à des espaces supérieurs ; mais comme le grad. G peut alors s'annuler, on s'assurera d'abord que « *presque toutes* » les trajectoires de départ peuvent se prolonger sans rencontrer de zéro du grad G et de façon que G tende vers o. Alors si on se limite dans cet aperçu introductif d'abord à un domaine borné, ces lignes sont presque toutes de longueur finie et celles qui aboutissent aux points d'un ensemble-frontière variable e admettent au départ un faisceau de tangentes formant un angle (angle solide dans l'espace) de mesure proportionnelle à la mesure harmonique de e en P. En particulier, les points-frontière non accessibles par chemin de longueur finie forment un ensemble de mesure harmonique nulle,

(*) Des exposés partiels ont été faits dans des communications orales par M. Brelot, à Lausanne, en avril 1949, à Paris en mai 1950, à Cambridge (U. S. A.) au Congrès International de septembre 1950, et à Grenoble au Congrès des Sociétés Savantes de Pâques 1952.

(1) Pour les auteurs et travaux cités dans le texte, voir la liste bibliographique en fin du mémoire ; les numéros entre crochets accompagnés ou non du nom de l'auteur précisent l'article de cette liste auquel il est renvoyé.

ce qui pour les domaines plans simplement connexes résultait des travaux de Evans ou Lavrentieff.

Or De la Vallée Poussin [17] avait donné la propriété de mesure harmonique nulle pour l'ensemble des points non accessibles et celà avait permis de traiter complètement un problème de Dirichlet ramifié (voir [8]) qui éliminait ces points-frontière et décomposait les autres; la nouvelle propriété plus forte permet de passer à un problème de Dirichlet « géodésique » plus raffiné, avec une topologie de la frontière qui fait disparaître les points non accessibles par chemin de longueur finie et décompose davantage les autres. Dans ces deux problèmes la frontière est celle que donne la complétion du domaine pourvu de la métrique « naturelle » ou respectivement « géodésique » : la distance de deux points est alors prise égale à la borne inférieure des diamètres ou respectivement des longueurs des courbes joignant les points sur le domaine (2). Ces raffinements n'épuisent nullement le sujet; les lignes de Green issues du pôle permettent davantage, comme on verra, en remplaçant la mesure harmonique même ramifiée ou géodésique, par une mesure sur l'ensemble de ces lignes, dite *mesure de Green*, proportionnelle à la mesure angulaire de l'ensemble des demi-tangentes initiales. Un aperçu précis des résultats essentiels a été donné dans deux notes (Brelot et Choquet [10], Brelot [9]) que nous allons développer ici.

2. Mais ces questions comme bien des problèmes sur les fonctions harmoniques, étudiées en détail dans les espaces euclidiens, font surtout intervenir des propriétés ou données de caractère local, de sorte qu'il convient d'en chercher *l'extension à des espaces globaux plus généraux* mais par exemple localement euclidiens.

D'ailleurs ce genre d'extension de la théorie des fonctions harmoniques a déjà été fort étudié. Il y a longtemps qu'on a utilisé sur les surfaces de Riemann les fonctions harmoniques et le principe de Dirichlet. Dans l'ordre d'idées différent que nous allons reprendre et qui fait usage des fonctions sousharmoniques et du potentiel, les recherches se sont récemment multipliées sur les surfaces de Riemann ; citons seulement Nevanlinna [17, 18], Heins [13], Bader [1], Sario [21, 25], Ohtsuka [19], Kuramochi [14], Parreau

(2) On trouvera dans [8] sur le problème ramifié, historique et références. Citons outre [17], Perkins (*Trans Ann. Math. Soc.*, 38, 1935) qui, comme [17] n'utilise explicitement que la topologie euclidienne, et Kappos (*Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa*, 2, 1942) qui, pour améliorer l'étude de Perkins, utilise la métrique géodésique, mais de manière erronée.

[20, 21, 22], où l'on trouvera bien d'autres références. Quant à des extensions à des espaces généralisant les surfaces de Riemann, il y a peu de travaux systématiques et nous renverrons à un exposé de G. C. Evans [12] avec bibliographie, où il s'agit seulement de l'analogue à 3 dimensions des surfaces de Riemann élémentaires à un nombre fini de feuillets.

Nous allons d'abord reprendre assez rapidement quelques bases globales de la théorie des fonctions harmoniques pour des *espaces encore plus généraux :* on examinera seulement le problème de Dirichlet ordinaire, l'existence d'une fonction de Green et quelques notions utiles pour la suite sur le potentiel correspondant. Ce sera l'occasion de donner des perfectionnements s'appliquant aux cas antérieurement traités (surfaces de Riemann ou espaces euclidiens) en montrant par exemple la possibilité de traiter complètement et très simplement le problème de résolutivité des domaines bornés de $\mathcal{R}^\tau$ sans parler de points-frontière irréguliers. Puis *c'est dans de tels espaces généraux que l'on étudiera directement la théorie des lignes de Green* et quelques applications en partie esquissées plus haut : problème ramifié ou géodésique, usage de la mesure de Green.

Détaillons un peu :

3. On introduira comme *espaces de base* certaines variétés à $\tau \geqslant 2$ dim., de façon précise les espaces topologiques $\mathcal{E}$ du type suivant : Espace connexe tel qu'à chaque point P on associe un voisinage $\mathcal{V}_P$ et un homéorphisme de $\mathcal{V}_P$ sur un ouvert de l'espace euclidien $R^\tau (\tau \geqslant 2)$ ou même, ce que le lecteur pourrait laisser de côté systématiquement, de l'espace $\overline{R}^\tau$ (déduit de R^τ par adjonction d'un point $\mathcal{R}_\tau^\infty$ à l'infini qui le rend compact) ; on suppose que l'intersection de deux tels voisinages admet des images correspondantes qui soient, par l'intermédiaire de deux homéorphismes, en correspondance isométrique (c'est-à-dire par déplacement à une symétrie près) ou même si $\tau = 2$ seulement conforme.

Cela contient les surfaces de Riemann, les variétés analogues à 2 dim. *où les images précédentes sont en correspondance conforme sans conservation nécessaire du sens,* et aussi les espaces métriques connexes localement euclidiens auxquels l'isométrie locale avec R^τ donne la structure utile.

On verra au chapitre 1 que $\mathcal{E}$, évidemment localement compact, est toujours métrisable et réunion dénombrable de compacts. A côté de l'adhérence $\overline{E}$ d'un ensemble E, on notera $\overset{*}{E}$ sa frontière dans telle topologie qu'on fixera et on écrira pour simplifier Q au lieu de $\{Q\}$ pour désigner l'ensemble formé du seul point Q.

4. *L'harmonicité, la sous ou surharmonicité* dans un ouvert Ω de $\mathcal{E}$ et les notions locales connexes sont définies par les mêmes propriétés locales sur l'image, c'est-à-dire sur l'image de $\Omega \cap \mathcal{V}_P$ pour tout $P \in \Omega$ (propriétés invariantes, par correspondance isométrique, ou dans le plan par correspondance conforme). Cela implique si l'on utilise la définition générale de $\mathcal{E}$ avec $\overline{R^\tau}$ la connaissance de ces notions au voisinage de $\mathcal{R}_\tau^\infty$ dans $\overline{R^\tau}$, avec l'usage de $h_Q(M, P)$ généralisant le $h(M, P)$ classique qui désigne dans R^τ $\overline{MP}^{2-\tau}$ $(\tau > 2)$ ou $\log 1/MP$ $(\tau = 2)$ (Voir [5]). On emploiera en général pour tout raisonnement local le langage valable sur l'image et souvent dans l'espace à $\tau \geqslant 3$ dim.

On sait qu'une fonction sousharmonique n'admet pas de maximum sans constance au voisinage. Cette propriété locale a des conséquences globales : *principe du maximum* pour un ouvert ω non compact et relativement compact dans $\mathcal{E}$ (majoration par la borne supérieure des lim sup. à la frontière); constance si $\omega = \mathcal{E}$ est compact. Notons aussi que le rapport des valeurs d'une fonction harmonique > 0 dans un domaine Ω quelconque de $\mathcal{E}$ en deux points variables d'un compact $A \subset \Omega$ est compris entre deux nombres > 0 ne dépendant que de A et Ω. On voit encore qu'à toute u sousharmonique dans $\Omega \subset \mathcal{E}$ correspond dans Ω, localement donc globalement, une mesure « associée » $\leqslant 0$ unique (ou masses associées) qui sur l'image de tout $\Omega \cap \mathcal{V}_P$ est la mesure associée à u au sens de la théorie dans $\overline{R^\tau}$.

Un ensemble e de $\mathcal{E}$ sera donc dit *polaire* s'il l'est sur toute image locale [4, 5]; cela signifie qu'à tout point P correspond un voisinage ouvert ω de P sur lequel existe une fonction sousharmonique valant $-\infty$ sur $\omega \cap e$. *Quasi-partout* signifie « sauf sur un ensemble polaire ». Une fonction u est quasi sous ou surharmonique si elle vaut quasi partout une fonction sous ou surharmonique, nécessairement unique, dite régularisée et notée $\widehat{u}$.

Les chapitres II et III feront pour l'essentiel l'extension du problème de Dirichlet *ordinaire* traité dans $\overline{R^\tau}$ (voir [2, 5, 8]). Sans vouloir faire ici d'exposé complet autonome, il sera plus facile de supposer connue la théorie dans $\overline{R^\tau}$, de s'en inspirer, et de traiter d'abord (d'ailleurs autrement qu'il n'a été fait pour les surfaces de Riemann) le cas d'un domaine de $\mathcal{E}$, relativement compact et de complémentaire non polaire; puis dans le cas général on se contentera d'adjoindre à $\mathcal{E}$ s'il n'est compact un « point d'Alexandroff » $\mathcal{A}$ pouvant être point-frontière du domaine Ω et on raisonnera comme précédemment mais avec la topologie correspondante (ce qui est au moins un langage nouveau par rapport aux études analogues sur les surfaces de Riemann). Mais il n'y a de théorie que si l'on suppose sur Ω l'existence d'une fonction surharmonique > 0 non constante; cela équivaut (ce qui a été publié entre temps pour les surfaces de Riemann [Ohtsuka, 19]), à l'existence d'une « fonction de Green» (de pôle quelconque) qu'on peut, comme dans les cas antérieurs, caractériser comme la fonction minima > 0 surharmonique, harmonique hors P et dont la mesure associée se réduit à la masse 1 en P. Le point $\mathcal{A}$ constitue pour le domaine $\mathcal{E} - K$ (K compact non polaire d'extérieur connexe) un ensemble de mesure harmonique > 0 ou nulle selon qu'il existe ou non une fonction de Green de $\mathcal{E}$; il remplace la frontière « idéale » respectivement « positive » ou « nulle » de Nevanlinna pour les surfaces de Riemann ouvertes appelées respectivement hyperboliques ou paraboliques.

D'autre part, ce point $\mathcal{A}$ qu'on ne peut comparer aux points réguliers ou irréguliers semble introduire des difficultés d'adaptation; il nous amènera en fait à reprendre la théorie de la résolutivité de manière à passer de la donnée continue à la donnée quelconque sans utiliser la notion de régularité, et par conséquent, de manière plus satisfaisante.

Un espace admettant une fonction de Green sera dit *espace de Green* et le chapitre central IV étudiera les lignes de Green dans ce cas général, ce qui pourrait d'ailleurs, comme on l'indiquera, s'étendre largement à des trajectoires orthogonales de types plus généraux. Puis on en fera aux chapitres suivants des applications diverses en mettant en relief l'usage avantageux de conditions aux limites, non plus en des points-frontière, ce qui impliquait la notion et la connaissance d'une frontière, mais sur les seules lignes de Green pourvues de leur mesure de Green (ou sur des trajectoires plus générales); c'est ainsi qu'on explicitera une forme améliorée dans ce sens du principe du maximum (3). Sans pouvoir traiter un

(3) Sur cet aspect du principe, inspiré des limites radiales de Fatou et des extensions par transformation conforme de Evans [12] nous ne pouvons signaler que des cas très particuliers analogues, de Simola [*Ann. Ac. Sc. Fenn. A*, 99, 1951] qui étudie le potentiel et les lignes de Green dans les domaines plans limités par un nombre fini de courbes de

problème de Dirichlet correspondant à de telles conditions aux limites, on obtiendra d'importantes applications de la mesure de Green. Ainsi pour les fonctions holomorphes sur une surface de Riemann hyperbolique, on aura des propriétés de nullité ou de convergence partout, dérivant de conditions aux limites analogues; propriétés améliorant beaucoup, même pour un domaine simplement connexe du plan ordinaire, des théorèmes bien connus de Montel, F.-M. Riesz, etc. (voir p. ex. [15]) qui avaient été déjà perfectionnés dans [3, 7, 8] au moyen de la mesure harmonique ordinaire ou ramifiée. On examinera enfin, dans une sorte d'axiomatique, les extensions du problème de Dirichlet pour une frontière topologique telle que soient satisfaites deux conditions fondamentales qui permettent d'adapter les raisonnements des cas déjà classiques conduisant au théorème de résolutivité. Grâce aux lignes de Green nous verrons que ces conditions sont vérifiées dans deux cas importants, les problèmes ramifié et géodésique dont on a parlé au début seulement dans R^τ. La topologie ramifiée d'un espace de Green décompose d'ailleurs $\mathcal{A}$ tout naturellement en des points qui correspondent aux éléments-frontière « idéaux » des surfaces de Riemann; et la comparaison de la mesure harmonique ordinaire, ramifiée ou géodésique avec la mesure de Green montrera l'intérêt et la supériorité de cette dernière.

I. — L'ESPACE FONDAMENTAL $\mathcal{E}$

5. Définition. — Rappelons que c'est un espace topologique connexe tel que :

1. A chaque point P est associé un voisinage ouvert $\mathcal{V}_P$ et un homéomorphisme $\mathfrak{H}_P$ sur un ouvert $\mathcal{V}'_P$ (dit image) de l'espace $\overline{R}^\tau$ (déduit de l'espace euclidien R^τ à $\tau \geqslant 2$ dim. par adjonction d'un point $\mathcal{R}^\infty_\tau$ à l'infini qui le rend compact) c'est-à-dire que $\mathfrak{H}_P(\mathcal{V}_P) = \mathcal{V}'_P$. Cela entraîne que $\mathcal{E}$ soit séparé.

2. Si deux de ces ouverts $\mathcal{V}_{P_1}\mathcal{V}_{P_2}$ ont une intersection A non vide, l'homéomorphisme $\mathfrak{H}_{P_2}\mathfrak{H}_{P_1}^{-1}$ qui applique $\mathfrak{H}_{P_1}(A)$ sur $\mathfrak{H}_{P_2}(A)$ est

ou *a*) une isométrie (directe ou inverse) laissant donc $\mathcal{R}^\infty_\tau$ invariant. L'espace sera noté alors $\mathcal{E}_i$,

ou *b*) mais alors dans le seul cas $\tau = 2$, une correspondance conforme (directe ou inverse).

Jordan simples, et de Privaloff [23] qui considère dans l'espace les limites selon les normales à une surface-frontière assez régulière.

L'espace sera noté alors $\mathcal{E}_c$.

Noter que les sous-domaines d'un $\mathcal{E}_i$ ou $\mathcal{E}_c$ sont des $\mathcal{E}_i$ ou $\mathcal{E}_c$. On pourra toujours se ramener à ce que $\mathcal{V}'_P$ soit l'intérieur ou l'extérieur d'une boule, le centre ou le point à l'infini étant l'image de P et même, dans le cas $\mathcal{E}_c$, de façon que $\mathcal{V}'_P$ soit toujours l'intérieur (on dira que $\mathcal{V}_P$ est sphérique).

Tout point Q de $\mathcal{E}_i$ dont l'image $\mathfrak{H}_P(Q)$ est $\mathcal{R}^\infty$, ce qui est indépendant de P, sera dit *point à l'infini* (il n'y a pas lieu d'en considérer dans $\mathcal{E}_c$). De tels points sont isolés, donc leur ensemble est au plus dénombrable, comme il résulte du théorème suivant :

THÉORÈME 1. — *L'espace $\mathcal{E}_c$ (qui est connexe, localement connexe et localement compact) est métrisable donc* (4) *de base dénombrable.*

Prenons $\mathcal{E}_i$. Otons les points à l'infini. L'espace $\mathcal{E}^0$ restant est connexe et admet une « métrique géodésique » obtenue à partir des arcs localement rectifiables joignant deux points (longueur définie par décomposition en arcs dans des $\mathcal{V}_P$, mesurés sur les images). $\mathcal{E}^0$ connexe localement compact métrisable admet donc (4) une base dénombrable et est une réunion dénombrable de compacts. Adjoignons à $\mathcal{E}^0$ s'il est différent de $\mathcal{E}_i$ un point d'Alexandroff pour le rendre compact selon $\mathcal{E}'^0$. Alors $\mathcal{E}'^0$ est métrisable (5). A partir d'une métrique correspondante $\mathcal{M}$, introduisons la métrique naturelle de Mazurkiewicz dans $\mathcal{E}^0$ (distance de deux points égale à la borne inférieure des diamètres selon $\mathcal{M}$ des ensembles connexes contenant ces deux points et situés dans $\mathcal{E}^0$). Complétons $\mathcal{E}^0$ ainsi métrisé ; on obtient un espace métrisable qui, à une isomorphie près contient $\mathcal{E}$. Donc $\mathcal{E}$ est métrisable.

Passons à $\mathcal{E}_c$. Le revêtement (espace de recouvrement) universel de cet $\mathcal{E}_c$ est un espace de type $\mathcal{E}_c$ soit $\mathcal{E}^1$; comme il est simplement connexe, il est orientable, donc on peut en remplaçant certaines images $\mathcal{V}'_P$ par leurs symétriques (par rapport à une droite) faire en sorte que l'intersection de deux voisinages ait de nouvelles images toujours en correspondance (conforme) de même sens. Il s'ensuivra d'après Rado que $\mathcal{E}^1$ est une surface de Riemann classique. $\mathcal{E}^1$ étant réunion dénombrable de compacts, l'image continue $\mathcal{E}_c$ l'est

(4) Un espace localement compact métrisable est somme topologique d'espaces à base dénombrable donc d'espaces qui sont chacun une réunion dénombrable de compacts. Voir par ex. BOURBAKI Top. gén. chap. IX § 2, exercice 23.

(5) Un espace localement compact de base dénombrable est compact et alors métrisable ou bien devient par adjonction du point à l'infini d'Alexandroff un espace métrisable. Voir p. ex. BOURBAKI Top. gén. Chap. IX § 2 exercices 14 et 22.

aussi ; comme $\mathcal{E}_c$ est localement de base dénombrable, il l'est globalement et par suite (voir note 5) métrisable.

Cas particuliers : 1° Espace métrique connexe localement euclidien dont cette isométrie locale donne la structure d'espace $\mathcal{E}_i$ (6).

2° Les surfaces classiques abstraites de Riemann sont les $\mathcal{E}_c$ pour lesquels $\mathfrak{H}_{P_2}$, $\mathfrak{H}_{P_1}^{-1}$ sont des correspondances conformes directes (c'est-à-dire conservant le sens).

THÉORÈME 2. — *L'espace à structure conforme $\mathcal{E}_c$ peut être pourvu d'une métrique telle que transportée par toute $\mathfrak{H}_P$ sur l'image $\mathcal{V}'_P$ (supposée à distance finie), elle soit identique à la métrique engendrée par un ds^2 de la forme $\varphi(x, y)\,(dx^2 + dy^2)$ où $dx^2 + dy^2$ est le ds^2 plan et $\varphi(x, y)$ une fonction finie continue > 0.*

On peut former une triangulation en utilisant des recouvrements finis de compacts par des parties compactes de voisinages $\mathcal{V}_P$ (parties dont les images dans $\mathcal{V}'_P$ seront par exemple circulaires) ; les triangles de côtés localement analytiques (sur toute image) seront avec leur frontière, chacun dans un $\mathcal{V}_P$ qu'on fixera. On prendra dans chacun des $\mathcal{V}'_P$ correspondants un ds^2 proportionnel à un facteur constant près au ds^2 euclidien. Puis on altère le facteur dans un voisinage arbitrairement petit des côtés de façon que le ds^2 ainsi associé à chaque triangle et son $\mathcal{V}_P$ contenant se raccorde continûment dans $\mathcal{V}'_P$ avec celui que donne la correspondance conforme à partir du ds^2 qui est de même associé à chaque triangle contigu. On pourra faire le raccord d'abord à travers les côtés en laissant les voisinages des sommets dont on s'occupera ensuite. La métrique géodésique associée au ds^2 obtenu pour chaque triangle répondra bien à la question.

Remarque : On peut faire en sorte que le coefficient φ du ds^2 euclidien admette toutes les dérivées successives continues ce qui fait de $\mathcal{E}_c$ un espace de Riemann classique.

6. — Surfaces et Domaines réguliers. — Intégrales. — Formules de Green dans $\mathcal{E}$. — Appelons surface *régulière* dans $\mathcal{E}$ (et en particulier dans R^τ) tout ensemble (ne contenant pas de point à l'infini) qui, dans un voisinage assez petit de chacun de ses points P est sur l'image $\mathcal{V}'_P$ une variété à $\tau - 1$ dim. dont l'une des coordonnées au

(6) Il y a d'ailleurs correspondance biunivoque entre les espaces $\mathcal{E}_i$ sans points à l'infini et les espaces métriques connexes, convexes et localement euclidiens telle que pour deux espaces homologues il y ait une homéomorphie de ces espaces qui soit localement une isométrie.

moins soit fonction à dérivées secondes finies continues des autres coordonnées (desquelles le point représentatif varie dans un ouvert de $R^{\tau-1}$).

Un ouvert ω de la surface régulière Σ sera dit *partie ouverte régulière* s'il est relativement compact dans Σ et si au voisinage de tout point-frontière P dans Σ, les points de ω sont, sur l'image locale, ceux d'un même côté de surfaces régulières (en nombre fini) non tangentes à Σ ni tangentes deux à deux, en P′ image de P. Une partie *compacte régulière* sera l'adhérence d'une partie ouverte régulière. Tout ouvert ω de Σ est réunion dénombrable de parties compactes régulières, d'intérieurs disjoints (et on peut imposer que chacune soit dans un des voisinages contenus dans les $\mathcal{V}_P$ et choisis en chaque point).

Un ouvert Ω de $\mathcal{E}$ sera dit *régulier* s'il est relativement compact et si au voisinage de tout point-frontière P, Ω est formé des points dont les images sont les points d'un même côté de surfaces (en nombre fini) régulières dans R^{τ} et deux à deux non tangentes en P′ image de P. Il sera dit *très régulier* si de plus la frontière est une surface régulière. On peut former dans tout $\mathcal{E}$ non compact une suite croissante d'ouverts ou de domaines très réguliers tendant vers $\mathcal{E}$; il suffit de former une telle suite d'ouverts réguliers $\omega_n(\overline{\omega}_n \subset \omega_{n+1})$ à surfaces limitantes planes et de les régulariser convenablement (⁷). De même tout compact de $\mathcal{E}$ est limite d'une suite d'ouverts très réguliers décroissants.

Intégrales. — On va donner un sens global à des intégrales qui ont un sens local sur l'image.

Si on définit localement une mesure de Radon de manière que deux images locales d'un même ensemble aient la même mesure, on obtient aisément une mesure de Radon dans $\mathcal{E}$ qui se réduit localement aux précédentes, d'où un sens pour les intégrales correspondantes. Cela revient, pour un compact et une fonction localement sommable, à faire une décomposition en parties contenues chacune dans un $\mathcal{V}_P$ et à faire la somme des intégrales prises sur les images, ce qui est bien indépendant de la décomposition.

Ainsi dans $\mathcal{E}_i$ on définit la mesure-*volume* dv (ou aire pour $\tau = 2$)

(⁷) Cette régularisation est aisée pour $\tau = 2$; pour $\tau > 2$, on pourra considérer un ouvert analogue ω'_n voisin de ω_n et contenu dans ω_n ainsi que sa frontière, puis introduire la fonction égale à la distance à $\overset{*}{\omega}'_n$ dans $\overline{\omega}'_n$ et prolongée par o à l'extérieur ; on régularisera convenablement cette fonction et on prendra l'ouvert où la nouvelle fonction est $> \varepsilon$ assez petit.

ou sur une surface régulière la mesure *superficielle* $d\sigma$ (ou longueur si $\tau = 2$), à partir de ces notions sur les images locales. Dans $\mathcal{E}_c$ ces mesures seront définies à partir d'un ds^2 du théorème 2 ; il est un *cas important* où l'intégrale est indépendante du choix de ce ds^2 ; c'est celui où l'élément différentiel interprété sur l'image est invariant par transformation conforme, car il fournit directement une mesure de Radon dans $\mathcal{E}$; alors l'intégrale s'obtient par décomposition, intégration locale sur l'image et sommation. Telles sont les intégrales des formules de Green.

Formules de Green. — Si un ouvert Ω de R^τ est régulier, on sait que la formule de la divergence est valable pour une fonction vectorielle à dérivées premières finies continues dans un ouvert contenant $\overline{\Omega}$. D'où les formules de Green.

Nous allons justifier de telles formules globales, pour Ω *régulier* dans $\mathcal{E}$ et d'abord sans point à l'infini, avec f et g pourvues (localement sur l'image) de dérivées secondes finies continues dans un ouvert contenant $\overline{\Omega}$:

$$(1) \int_\Omega f\,\Delta g\,dv + \int_{\overset{*}{\Omega}_{\text{int}}} f\frac{dg}{dn}\,d\sigma + \int_\Omega (\text{grad } f,\ \text{grad } g)\,dv = 0$$

et sa conséquence

$$(2) \qquad \int_\Omega (f\Delta g - g\Delta f)\,dv + \int_{\overset{*}{\Omega}_{\text{int}}} \left(f\frac{dg}{dn} - g\frac{df}{dn}\right) d\sigma = 0$$

(dérivées normales intérieures)

On couvre $\overline{\Omega}$ par un nombre fini de domaines contenus chacun dans un $\mathcal{V}_P$ et dont une image est une boule. On peut faire en sorte que ces domaines permettent une décomposition de Ω, à des portions de surfaces régulières près, en domaines réguliers auxquels on applique la formule (1) valable comme sur l'image. Il n'y a plus qu'à faire les sommations.

Pour f et g *harmoniques*, il vient donc les formules fondamentales pour la suite :

$$(3) \qquad \int_{\overset{*}{\Omega}_{\text{int}}} f\frac{dg}{dn}\,d\sigma + \int_\Omega (\text{grad } f,\ \text{grad } g)\,dv = 0$$

$$(4) \qquad \int_{\overset{*}{\Omega}_{\text{int}}} \left(f\frac{dg}{dn} - g\frac{df}{dn}\right) d\sigma = 0 \qquad (4') \int_{\overset{*}{\Omega}_{\text{int}}} \frac{df}{dn}\,d\sigma = 0$$

Ces formules s'étendent si f et g sont seulement harmoniques dans

Ω avec des limites finies à la frontière pour elles-mêmes et leurs gradients. Cela se voit par approximation. On rappellera que si une fonction harmonique u, localement, d'un côté d'une surface Σ régulière admet sur Σ une limite finie convenablement régulière (en particulier constante K) son gradient a une limite finie sur Σ; d'ailleurs si u prend la limite K sur Σ et si $u > K$ ailleurs, le gradient-limite est non nul et normal, la dérivée normale est > 0.

Enfin, les formules (3) (4) s'appliquent aussi s'il y a dans Ω (régulier) des points à l'infini. On le voit en isolant ces points par un voisinage (sphérique) et passant à la limite grâce à l'allure à l'infini d'une fonction harmonique au voisinage de $\mathcal{R}_\tau^\infty$ (soit $\left.C^{te} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{Y^n}{r^{n+\tau-2}}\right)$ et de son gradient, borné en module par $\alpha r^{-\tau}$.

II. — LE PROBLÈME DE DIRICHLET ET LA FONCTION DE GREEN POUR LES DOMAINES RELATIVEMENT COMPACTS DE L'ESPACE $\mathcal{E}$

7. — Rappel de quelques notions locales (Voir [5])

Lemme 1. — Une famille ordonnée filtrante croissante de fonctions harmoniques a une limite (ou enveloppe supérieure) qui est $+\infty$ ou harmonique.

Les points d'un ensemble où cet ensemble est *effilé* sont des points-frontière formant un ensemble polaire. Pour un fermé E, l'effilement en $Q \in E$ s'exprime aussi en disant que Q est point-frontière irrégulier de l'ouvert CE; l'ensemble des points-frontière irréguliers d'un ouvert ω est polaire, et d'ailleurs localement, donc globalement, réunion dénombrable de compacts.

La *régularité* d'un point-frontière Q de ω équivaut à l'existence au voisinage de Q sur ω d'une fonction surharmonique > 0 tendant vers 0 en Q; et on peut alors en trouver une, harmonique et telle que sa borne inférieure hors de tout voisinage de Q soit > 0. Un point n'est irrégulier que s'il l'est pour un des domaines composants.

Lemme 2 (*Prolongement sousharmonique*). — Soit dans $\overline{R^\tau}$, u et v sousharmoniques dans les ouverts respectifs ω et δ. On suppose $u \geqslant v$ dans $\omega \cap \delta$ et que sur $\overset{*}{\omega} \cap \delta$ la lim. sup. u en chaque point soit $< +\infty$ et quasi-partout $\leqslant v$. Alors la fonction (u, v) définie dans $\omega \cup \delta$ comme égale à u dans ω et à v ailleurs est quasi sous-harmonique et la régularisée sous-harmonique $\widehat{(u,\ v)}$ (ou prolongement sous-harmonique de u quasi-partout par v) la majore et ne peut en différer qu'aux points-frontière irréguliers de ω dans δ, où elle vaut la lim. sup. u en chacun de ces points (8).

L'hypothèse à la frontière est satisfaite si u est une solution de problème de Dirichlet dans ω pour une donnée bornée supérieurement et égale à v sur $\overset{*}{\omega} \cap \delta$. Énoncé analogue pour un prolongement surharmonique.

8. — Remarquons encore que la condition pour un ouvert de $\mathcal{E}$, d'être de complémentaire non polaire équivaut à dire qu'il y a un point-frontière régulier, ou encore que la frontière est non polaire (car un fermé polaire est dans tout domaine, de complémentaire connexe).

Cela posé considérons dans $\mathcal{E}$ d'abord *un domaine Ω relativement compact;* s'il est de complémentaire polaire, $\mathcal{E}$ est compact et toute fonction sous-harmonique bornée supérieurement dans Ω se prolonge sous-harmoniquement avec la même borne dans $\mathcal{E}$ et est alors constante. Laissant de côté ce cas trivial, on supposera donc Ω *de complémentaire non polaire.*

L'extension provisoire et *sommaire* que nous allons faire du problème de Dirichlet pour cet Ω se développe au départ comme dans $\overline{R}^\tau$ [2,5].

THÉORÈME 3. — *Soit sur la frontière $\overset{*}{\Omega}$ du domaine précédent Ω une fonction f réelle finie ou non; les fonctions égales à $-\infty$ ou sousharmoniques dans Ω, chacune étant bornée supérieurement et de lim. sup. en tout point-frontière $\leqslant f$, ont une enveloppe supérieure $\underline{H}_f$ égale à $-\infty$, $+\infty$ ou harmonique. De même l'enveloppe inférieure des fonctions $+\infty$ ou surharmoniques, chacune bornée inférieurement, de lim. inf, $\geqslant f$ à la frontière, est $\overline{H}_f$ égale à $+\infty$, $-\infty$ ou harmonique. Et :*

$$\underline{H}_f \leqslant \overline{H}_f, \tag{5}$$

(8) Rappelons qu'une brève démonstration consiste à introduire localement w sousharmonique $\leqslant 0$ valant $-\infty$ sur l'ensemble polaire de $\overset{*}{\omega} \cap \delta$ où en chaque point lim. sup. $u > v$; alors $(u,\ v) + \lambda w (\lambda > 0)$ est sousharmonique et la limite pour $\lambda \to 0$ est quasi sousharmonique, donc aussi $(u,\ v)$. On achève grâce à la propriété qu'une fonction sousharmonique vaut en chaque point Q sa lim. sup. pour $M \to Q$ sur un ensemble non effilé en Q (Rappelons que l'effilement d'un ensemble n'est pas altéré par adjonction ou suppression d'un ensemble polaire).

L'harmonicité ou valeur infinie de $\underline{H}_f$ vient du lemme 1 car en remplaçant les fonctions sousharmoniques, s'il y en a, dans un voisinage sphérique, par leurs intégrales de Poisson, on obtient des fonctions sousharmoniques de la même classe considérée ; l'inégalité (5) vient du principe du maximum. On ajoutera en cas de besoin l'indice supérieur Ω à ces symboles pour préciser le domaine.

En cas d'égalité (qui a lieu partout dès qu'elle a lieu en un point) avec une fonction harmonique, notée H_f, on dira que f est ***résolutive*** et H_f solution du problème de Dirichlet.

Associons au point-frontière Q régulier, au voisinage et sur Ω une fonction surharmonique > 0 tendant vers 0 en Q et de borne inférieure > 0 hors de tout voisinage de Q. Par enveloppe inférieure avec une constante > 0 assez petite, on en déduit une fonction surharmonique analogue définie dans tout Ω ; et il en résulte comme dans $\overline{R}^\tau$ que pour f bornée supérieurement on a en tout point Q régulier :

$$\lim_{M\in\Omega,\ M\to Q} \sup \overline{H}_f(M) \leqslant \lim_{P\in\overset{*}{\Omega},\ P\to Q} \sup f(P) \tag{6}$$

Si f est bornée, et continue en Q régulier, $\underline{H}_f$ et $\overline{H}_f$ tendent donc vers $f(Q)$ en Q. La résolutivité de f finie continue dérive alors immédiatement du lemme suivant, conséquence du lemme 1 :

Lemme 3. — Soit u sousharmonique bornée supérieurement dans un ouvert ω de $\mathcal{E}$, relativement compact et de complémentaire non polaire. Si lim. sup. $u \leqslant 0$ quasi-partout à la frontière (en particulier si cela a lieu en tout point régulier), alors $u \leqslant 0$.

En effet u^+ prolongée par 0 donne une fonction quasi-sousharmonique dans $\mathcal{E}$. La régularisée, si elle n'était nulle, atteindrait sa borne supérieure sur $\overline{\omega}$ et serait constante > 0 alors qu'elle doit tendre vers 0 sur ω en un point-frontière au moins.

Théorème 4. — *Si f est finie continue sur la frontière du domaine Ω (relativement compact et de complémentaire non polaire), elle est résolutive et H_f est la seule fonction harmonique dans Ω tendant vers $f(Q)$ quasi-partout à la frontière, ou encore aux seuls points réguliers.*

Alors $H_f(M)$ est pour M fixé $\in\Omega$ une fonction linéaire de f, $\geqslant 0$ avec f, définissant donc une mesure de Radon μ^M sur $\overset{*}{\Omega}$, dite mesure harmonique relative à Ω en M avec *mes* $(\overset{*}{\Omega}) = 1$. On pourra écrire :

$$H_f(M) = \int f d\mu^M$$

Lemme 4. — Si φ est bornée supérieurement et semi-continue supérieurement, $\underline{H}_\varphi = \overline{H}_\varphi = \int \varphi d\mu^M$ (fini ou non).

Au lieu d'adapter la démonstration de $\overline{R}^\tau$ [2,5] (9) qui utilisait la polarité de l'ensemble des points irréguliers, on va procéder sans faire intervenir la notion de régularité, d'une manière qui s'étendra par suite à des problèmes plus généraux.

Soit φ_n finie continue, bornée supérieurement, décroissante, de limite φ.

Alors $$\overline{H}^\varphi \leqslant H_{\varphi_n} = \int \varphi_n d\mu^M \to \int \varphi d\mu^M.$$

Cette limite est soit partout $-\infty$, et la proposition est établie, soit partout finie. Dans ce cas soit dans Ω :

u_1 sousharmonique de lim. sup. à la frontière $\leqslant \varphi_1$ telle que
$$u_1(M_0) > H_{\varphi_1}(M_0) - \varepsilon_1, \quad \text{puis}$$
u_2 sousharmonique de lim. sup. à la frontière $\leqslant \varphi_2 - \varphi_1$ telle que
$$u_2(M_0) > H_{\varphi_2 - \varphi_1}(M_0) - \varepsilon_2 \ldots$$
u_n sousharmonique de lim. sup. à la frontière $\leqslant \varphi_n - \varphi_{n-1}$ telle que
$$u_n(M_0) > H_{\varphi_n - \varphi_{n-1}}(M_0) - \varepsilon_n$$
$$\left(\varepsilon_i > 0, \quad \sum_1^\infty \varepsilon_i = \varepsilon \quad \text{arbitraire} > 0\right).$$

Alors $v_n = \sum_1^n u_i$ est sousharmonique, décroissante, de lim. sup. à la frontière $\leqslant \varphi_n$ et
$$v_n(M_0) > H_{\varphi_n}(M_0) - \sum_1^n \varepsilon_i.$$

Donc v_n a une limite sousharmonique v, admettant une lim. sup. à la frontière $\leqslant \varphi$ et
$$v(M_0) \geqslant \int \varphi \, d\mu^{M_0} - \varepsilon \geqslant \overline{H}^\varphi(M_0) - \varepsilon.$$

Mais $v \leqslant \underline{H}_\varphi$. Comme ε est arbitraire, on a bien
$$\underline{H}_\varphi(M_0) = \overline{H}_\varphi(M_0) = \int \varphi \, d\mu^M \quad \text{où } M_0 \text{ est arbitraire.}$$

(9) On montrerait que si e est fermé, de mesure harmonique nulle, il existe dans Ω une fonction surharmonique > 0 de lim. inf. $\geqslant 1$ aux points de e, arbitrairement petite en un point fixé, et par suite qu'il existe une fonction surharmonique > 0 tendant vers $+\infty$ aux points de e. On en déduit qu'il existe dans Ω une fonction surharmonique > 0 tendant vers $+\infty$ aux points-frontière irréguliers et cela permet d'utiliser le raisonnement de $\overline{R}^\tau$ [2] plus court que celui du texte.

Remarquons alors que pour f quelconque, $\underline{H}_f$ est l'enveloppe supérieure des $\underline{H}_\varphi$ pour φ bornée supérieurement, semi-continue supérieurement $\leqslant f$. Mais l'intégrale inférieure $\underline{\int} f\,d\mu^M$ est par définition la borne supérieure des $\int \varphi\,d\mu^M$ pour ces φ. Donc

$$\underline{H}_f = \underline{\int} f\,d\mu^M. \tag{7}$$

Théorème 5. — *Pour que f soit résolutive, il faut et suffit qu'elle soit sommable-μ^M pour un point* M, *ou encore tout point* $M \in \Omega$ *et*

$$H_f(M) = \int f\,d\mu^M. \tag{8}$$

On verra que, si Ω_0 est un domaine partiel, la fonction g égale à f sur $\overset{*}{\Omega}_0 \cap \overset{*}{\Omega}$ et à H_f sur $\overset{*}{\Omega}_0 \cap \Omega$ est résolutive et que $H_g^{\Omega_0} = H_f^{\Omega}$. De sorte que l'étude locale de H_f à la frontière se ramène au cas de $\overline{R}^\tau$. On trouvera plus de détails dans le cas plus général développé au chapitre III, où sera indiqué en particulier le problème de Dirichlet pour ouverts, comme dans $\overline{R}^\tau$.

9. — La fonction de Green. — Théorème 6. — *Pour le domaine* Ω *précédent, il existe pour tout* $P \in \Omega$ (*même à l'infini*) *une fonction unique* $G_P(M)$ *surharmonique dans* Ω *de mesure associée réduite à la masse* 1 *en* P (*donc harmonique hors* P, *continue en* P *et finie en* P *si* P *est à l'infini*), *enfin satisfaisant à l'une des conditions alors équivalentes :*

α) *La fonction est bornée au voisinage de la frontière et s'annule quasi-partout à la frontière.*

β) *Pour un voisinage* $\mathcal{W}$ *compact et d'extérieur connexe de* P *dans* Ω *elle coïncide sur* $\Omega - \mathcal{W}$ *avec la solution du problème de Dirichlet pour une donnée-frontière égale à la fonction elle-même sur* $\overset{*}{\mathcal{W}}$, *à zéro ailleurs.*

Cette fonction s'annule aux points réguliers, satisfait à β *pour tout* $\mathcal{W}$ *et atteint son maximum en* P *seulement* (*maximum fini ou infini suivant que* P *est à l'infini ou non*).

Cette fonction $G^P(M)$ *est la plus petite des fonctions* > 0 *satisfaisant aux premières conditions* (*avant* α *ou* β) *ou même est la plus petite des fonctions surharmoniques* > 0 *dont les masses associées contiennent la masse* 1 *en* P.

L'unicité, l'équivalence de α, β et les deux premières propriétés qui suivent résultent du lemme 3 et des propriétés à la frontière de la solution du problème de Dirichlet. L'existence se voit en prolongeant et modifiant par le procédé alterné une fonction surharmonique au voisinage de P, de masses associées réduites à la masse 1 en P [10] grâce à une couronne entourant P et au problème de Dirichlet que l'on vient d'étudier. La propriété finale de minima pourrait se voir sous sa première forme en reprenant ce procédé alterné.

On obtiendra directement la forme générale en retranchant G_P d'une fonction surharmonique > 0 dont les masses associées contiennent la masse 1 en P. On voit que la différence est surharmonique (en la définissant convenablement en P si P n'est pas à l'infini), bornée inférieuremsnt et de lim. inf. $\geqslant 0$ quasi partout à la frontière ; donc elle est $\geqslant 0$ par le lemme 3.

Quelques propriétés de G_P : 1) Hors de deux voisinages compacts de P et Q dans Ω, G_P/G_Q est compris entre les bornes qu'il admet sur les frontières de ces voisinages.

2) Si le domaine $\omega_n \subset \Omega$ tend en croissant vers Ω, $G_P^{\omega_n}$ est majorée par G_P^Ω et tend en croissant vers elle (application de la propriété minimale).

Corollaire. — Symétrie : $G_P(Q) = G_Q(P)$ d'où l'autre notation $G(M, P)$. On peut adapter la démonstration élémentaire ; si ω_n est un domaine très régulier dans l'espace Ω, la formule de Green, montre la nullité de l'intégrale de $G_P^{\omega_n}\dfrac{dG_Q^{\omega_n}}{dn} - G_Q^{\omega_n}\dfrac{dG_P^{\omega_n}}{dn}$ sur la frontière du domaine obtenu en retranchant de ω_n des voisinages sphériques de P et Q. D'où la nullité de l'intégrale sur ces sphères ; il en résulte la symétrie pour ω_n ce qui se conserve à la limite.

3) Continuité de G_P. Lorsque P tend vers $P_0 \in \Omega$, $G_P \to G_{P_0}$ en chaque point M (à cause de la symétrie) et comme il s'agit de fonctions harmoniques > 0, la convergence est hors P localement uniforme et entraîne celle analogue des dérivées, par exemple de grad. G. D'où la continuité de G_P et grad. G_P par rapport à l'ensemble (M, P) au voisinage de deux points distincts M_0 et P_0 de Ω.

[10] Les fonctions de cette forme sont au voisinage de P sur l'image :

$$h(M'P') + \text{fct harm.} \quad \text{si P est à distance finie (et d'image P')}$$

ou $\quad -h(OM') + C^{te} + \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{Y_n}{\overline{OM'}^{\,n+\tau-2}}$ si P est à l'infini (O point quelconque de R^τ, Σ uniformément convergent). Elles admettent donc toujours en P un maximum strict respectivement infini ou fini.

10. — Le potentiel de Green. — $v(M) = \int G(M, P\,dm(P)$ (masses $m \geqslant 0$) est dans Ω partout infini ou bien surharmonique et d'ailleurs harmonique hors du noyau fermé des masses. Cela se déduit de ce que, pour M et P voisins d'un point P_0, $G(M, P)$ vaut la somme, sur l'image, de $h_Q(M, P)(Q \neq P_0)$ et d'une fonction $\alpha(M, P)$ symétrique et harmonique en M et P, continue de l'ensemble (M, P) de points même voisins d'un même point $\neq Q$. On voit de plus que la mesure associée à la fonction surharmonique v au sens de l'introduction est bien m. Lorsque les masses ne chargent qu'un compact d'un ouvert régulier $\omega \subset \Omega$ le flux entrant vaut le produit de φ_τ par la masse totale (formule de Gauss), comme cela résulte du cas particulier de la fonction de Green. Enfin en reprenant les raisonnements dans $\overline{R}^\tau$ [5] on pourra étendre avec G_P la représentation potentielle de F. Riesz d'une fonction sousharmonique dans Ω soit localement, soit globalement avec addition de la plus petite majorante harmonique (s'il existe une majorante harmonique).

Application. — Soit sur $\overset{*}{\Omega}$ un ensemble polaire e. Il existe localement (c'est-à-dire dans un ouvert ω tel que $\overline{\omega} \subset \mathcal{V}_P$) sur $\overset{*}{\Omega}$ des masses > 0 dont un potentiel $-h_Q$ sur l'image vaut $+\infty$ localement sur e. Comme il n'existe pas toujours de domaine relativement compact et de complémentaire non polaire contenant $\overline{\Omega}$, on introduira un domaine Ω_0 relativement compact et de complémentaire non polaire contenant un voisinage ω_P (pris assez petit) d'un point-frontière P, Ω_0 étant identique à Ω au voisinage d'un point-frontière régulier P_0 hors e. Alors le potentiel-G^{Ω_0} des masses considérées situées dans ω_P est une fonction harmonique > 0 dans Ω tendant vers $+\infty$ aux points de e dans ω_P; par une sommation dénombrable de telles fonctions avec des coefficients assurant la convergence, on obtient donc :

Lemme 5. Il existe dans Ω une fonction harmonique > 0 tendant vers $+\infty$ aux points d'un ensemble polaire donné sur la frontière.

Conséquence : Dans le théorème 3 on aura les mêmes enveloppes à partir des seules fonctions harmoniques ou à partir de la condition-limite quasi-partout.

III. — EXTENSION AUX DOMAINES QUELCONQUES DE $\mathcal{E}$ ESPACES DE GREEN

11. — L'étude du problème de Dirichlet dans un domaine se réduit à quelques remarques triviales si toute fonction sousharmonique bornée supérieurement est constante. Dans cette même hypothèse on ne pourrait non plus trouver d'extension de la fonction de Green si l'on veut qu'elle soit > 0 surharmonique avec une masse ponctuelle associée. Nous allons donc approfondir l'hypothèse contraire et étendre alors la théorie du problème de Dirichlet et de la fonction de Green développée au chapitre précédent. Donnons d'abord sur l'existence de la fonction de Green deux théorèmes contenant des énoncés publiés entre temps par Ohtsuka [19] dans le cas des surfaces de Riemann.

Théorème 7. — *Dans $\mathcal{E}$, les fonctions de Green G_P^ω relatives à P fixé et aux domaines ω relativement compacts et de complémentaire non polaire ont une enveloppe supérieure soit partout $+\infty$, soit finie et harmonique hors P (et alors finie ou non en P suivant que P est à l'infini ou non). Lorsque $\mathcal{E}$ n'est pas compact et si Ω_n est un domaine relativement compact tendant en croissant vers $\mathcal{E}$, $G_P^{\Omega_n}(M)$ tend vers l'enveloppe précédente. L'enveloppe est infinie si et seulement s'il n'existe pas dans $\mathcal{E}$ de fonction surharmonique > 0 non constante. Sinon elle est surharmonique > 0, de masse associée réduite à la masse 1 en P ; c'est alors la plus petite des fonctions surharmoniques > 0 dans $\mathcal{E}$, dont les masses associées > 0 contiennent la masse 1 en P ; et elle admet en P seulement son maximum.*

Supposons d'abord $\mathcal{E}$ compact; soit $Q \neq P$ un point non à l'infini et δ_n un voisinage sphérique de centre Q et de rayon tendant vers 0 ; $G_P^{\mathcal{E}-\delta_n}$ croît et la limite dans $\Omega - Q$ est, soit $+\infty$, soit surharmonique > 0 et alors harmonique hors P avec même flux φ_τ autour de P; mais ce dernier cas est impossible puisque cette fonction limite non constante se prolongerait surharmoniquement dans $\mathcal{E}$. L'enveloppe des G_P^ω est donc infinie. Supposons $\mathcal{E}$ non compact. Comme les Ω_n finissent par contenir tout ω fixé, l'enveloppe vaut la limite de $G_P^{\Omega_n}$ et est donc soit $+\infty$, soit surharmonique > 0, harmonique hors P avec même flux φ_τ autour de P, c'est-à-dire avec masse associée $+1$ en P. La propriété de minima vient de ce que les $G_P^{\Omega_n}$, donc leur limite, minorent toute fonction du type considéré.

Supposons maintenant l'existence de v surharmonique > 0 non constante ce qui implique que $\mathcal{E}$ soit non compact. Otons de Ω_n un petit voisinage W fermé de frontière sphérique $\overset{*}{W}$ et considérons dans le domaine obtenu Ω'_n la solution u_n du problème de Dirichlet pour une donnée nulle sur $\overset{*}{\Omega}_n$, et valant sur $\overset{*}{W}$ une constante $K > 0$ égale à la borne inférieure de v dans W ; $0 < u_n < K$; u_n tend en croissant vers une fonction harmonique u qui comme u_n est majorée par v et prend la valeur K sur $\overset{*}{W}$. Mais v ne pouvant atteindre sa borne inférieure, admet hors W une borne inférieure $< K$. Donc u aussi ; et u est partout $< K$. Alors u admet le long de $\overset{*}{W}$ des dérivées normales (vers $\Omega - W$) de borne supérieure < 0 ; le prolongement de u par $K + \lambda G_P^W$ avec λ assez petit donne dans Ω une fonction surharmonique qui majorera tout G_P^ω.

Espace de Green. — Fonction de Green. — Lorsqu'il existe une fonction surharmonique > 0 non constante, l'espace sera dit *espace de Green* ou *greenien* et la fonction minima du théorème sera dite fonction de Green notée $G_P^{\mathcal{E}}$.

Théorème 8. — *Si $\mathcal{E}$ est greenien, tout sous-domaine est greenien Si $\mathcal{E}$ n'est pas greenien, pour qu'un sous-domaine Ω soit greenien, il faut et suffit que son complémentaire soit non polaire.*

En effet, si $C\Omega$ est polaire et si Ω est greenien, le prolongement harmonique de la fonction de Green de Ω est fonction de Green de $\mathcal{E}$.

Supposons $C\Omega$ non polaire : Ω non compact est limite d'un domaine Ω_n croissant relativement compact ($C\Omega_n$ non polaire). Introduisons un petit domaine sphérique ω dans Ω et la solution v_n du problème de Dirichlet pour $\Omega_n - \bar{\omega}$, la donnée 0 sur $\overset{*}{\Omega}_n$ et 1 sur $\overset{*}{\omega}$; prolongée par 1 dans $\bar{\omega}$ elle est surharmonique > 0 et sa limite v aussi dans Ω. Voyons que cette limite n'est pas constante. Si ω_1 est un petit voisinage ouvert d'un point-frontière Q régulier de Ω, on voit que v_n prolongée par 0 hors Ω_n est majorée dans $\Omega \cap \omega_1$ par la solution du problème de Dirichlet pour l'ouvert $\Omega \cap \omega_1$ avec donnée 0 sur $\overset{*}{\Omega}$ et 1 ailleurs ; cette solution tend vers 0 en Q et majore v d'où le résultat.

Premières propriétés de la fonction de Green. — Il y a extension facile des propriétés établies au chapitre précédent (n° 9), en particulier sur la limite pour Ω_n croissant vers Ω et ses conséquences comme la symétric. Introduction analogue du *potentiel de Green* et de ses propriétés données plus haut, comme la formule de Gauss, la représentation locale ou globale des fonctions sousharmoniques avec les mêmes énoncés. On peut enfin élargir le lemme 5 selon :

Lemme 6. — *Si le domaine $\Omega \subset \mathcal{E}$ est greenien, il existe dans Ω une fonction harmonique $\geqslant 0$ tendant vers $+\infty$ aux points d'un ensemble polaire donné sur $\overset{*}{\Omega}$.*

12. — Le problème de Dirichlet pour un espace de Green contenu dans $\mathcal{E}$. — Introduisons l'espace $\mathcal{E}'$ qui sera identique à $\mathcal{E}$ si $\mathcal{E}$ est compact, sinon déduit de $\mathcal{E}$ selon le théorème d'Alexandroff par adjonction d'un point noté $\mathcal{A}$. On prendra désormais dans ce chapitre, sauf indication contraire, *toutes les notations topologiques dans cet espace compact* $\mathcal{E}'$, d'ailleurs métrisable comme $\mathcal{E}$; par exemple le principe du maximum des fonctions sousharmoniques sera valable dans tout ouvert de $\mathcal{E}$.

Soit donc un *espace de Green* Ω ($\mathcal{E}$ et sa frontière $\overset{*}{\Omega}$ pouvant contenir $\mathcal{A}$). *On étend aussitôt le théorème 3, en introduisant pour f réelle quelconque sur $\overset{*}{\Omega}$, les enveloppes $\underline{\underline{H}}_f^\Omega$, $\overline{H}_f^\Omega$ égales à $+\infty$, $-\infty$ ou harmoniques ; elles satisfont à $\underline{H}_f^\Omega \leqslant \overline{H}_f^\Omega$ et leur égalité avec une fonction harmonique notée H_f^Ω caractérisera la résolutivité de f.*

On peut, en s'inspirant d'un raisonnement donné dans R^τ [2] montrer qu'on aurait les mêmes enveloppes en imposant aux fonctions sousharmoniques de l'énoncé d'être finies continues ([11]).

Quant aux points-frontière, ils seront soit le point $\mathcal{A}$, soit des points (de $\mathcal{E}$) réguliers ou irréguliers au sens rappelé au n° 7 et on aura encore en un point régulier l'inégalité (6) pour le nouvel $\overline{H}_f$. Le rôle du point spécial $\mathcal{A}$ ne permet pas une adaptation immédiate de la théorie faite dans $\overline{R}^\tau$.

Théorème 4'-9. — *Si f est finie continue, elle est résolutive* (et il s'ensuit comme dans R^τ [2] que H_f est la limite de $H_F^{\Omega_n}$, où F finie

([11]) On considérera Ω_n ouvert croissant ($\overline{\Omega}_n \subset \Omega_{n+1} \subset \Omega$) de limite Ω, et par exemple régulier et même à surfaces limitantes d'images locales planes (ou analytiques dans $\mathcal{E}_c$). On décompose $\Omega_{n+1} - \overline{\Omega}_n$ en domaine ω_i réguliers et à surfaces limitantes analogues aux précédentes, mais de diamètre $< \varepsilon_n \rightarrow 0$ dans une métrique choisie pour $\mathcal{E}'$. Alors soit u sousharmonique dans Ω et de lim. sup à la frontière $\leqslant f$. En remplaçant u par $H_u^{\omega_i}$ dans chaque ω_i on obtient $v \geqslant u$ encore sousharmonique et satisfaisant à la même condition-frontière ; mais v n'a de discontinuités que sur les frontières des ω_i. On recommence l'opération à partir de v avec de nouveaux Ω_n et ω_i. Après $\tau + 1$ opérations convenables, il y aura continuité.

continue dans $\overline{\Omega}$ prolonge f et où Ω_n est un domaine croissant tendant vers Ω.

On supposera qu'il y a un point-frontière $\mathcal{A}$, sinon ce serait le cas du chapitre II, et on se ramènera à l'hypothèse $f(\mathcal{A}) = 0$. Tout se déduit des deux cas $f \geqslant 0$, $f \leqslant 0$ dont le second se ramène au premier.

Supposons donc $f \geqslant 0$ et introduisons un domaine Ω_n croissant tendant vers $\mathcal{E}$, tel que $\overline{\Omega}_n \subset \mathcal{E}$; soit ω_n le domaine composant de $\Omega_n \cap \Omega$ contenant un point fixé de Ω et qui tendra en croissant vers Ω; soit φ égale à f sur $\overset{*}{\Omega}$, à 0 ailleurs. On voit que $H_\varphi^{\omega_n}$ est croissante et $\leqslant \underline{H}_f^\Omega$, car si u dans ω_n est sousharmonique, bornée supérieurement et de lim. sup. $\leqslant \varphi$ à la frontière, u^+ prolongée par 0 est sousharmonique et permet de conclure. Ainsi lim. $H_\varphi^{\omega_n} \leqslant \underline{H}_f^\Omega$ mais cette limite est harmonique et, comme $H_\varphi^{\omega_n}$, de lim. inf. $\geqslant f$ aux points-frontière réguliers de Ω; par addition de λv ($\lambda > 0$ quelconque, v harmonique > 0 dans Ω fournie par le lemme 6) elle devient une fonction $\geqslant \overline{H}_f^\Omega$. Ainsi cette limite vaut à la fois $\underline{H}_f$ et $\overline{H}_f$.

13. — Mesure harmonique et résolutivité générale. — Pour f finie continue sur $\overset{*}{\Omega}$, H_f définit donc encore en tout $M \in \Omega$ une mesure de Radon $\mu^M \geqslant 0$ (mesure harmonique en M), de total égal à 1. La fin du théorème précédent se traduit en disant que la mesure harmonique sur $\overset{*}{\Omega}_n$ en M converge vaguement vers celle sur $\overset{*}{\Omega}$.

On passera au théorème général de résolutivité par les mêmes raisonnements qu'au chapitre II grâce à l'extension littérale du lemme 4. On aura encore

$$(7') \qquad \underline{H}_f(M) = \underline{\int} f\, d\mu^M,$$

l'invariance en M de la sommabilité -μ^M et le théorème :

Théorème 5'-10. — *Pour que f soit résolutive, il faut et suffit qu'elle soit sommable pour la mesure harmonique et alors :*

$$(8') \qquad H_f(M) = \int f\, d\mu^M.$$

L'interprétation de μ^M par un balayage, bien connue dans R^τ, se trouvera généralisée au théorème 14.

Quelques propriétés et extensions. — (1)° Les mesures harmoniques extérieure et intérieure d'un ensemble e sont $\overline{H}_{\varphi_e}(M)$ et $\underline{H}_{\varphi_e}(M)$

(φ_e fonction caractéristique). Leur nullité respective, indépendante de M, équivaut à l'existence d'une fonction surharmonique >0 tendant vers $+\infty$ aux points de e, ou respectivement à la propriété d'être $\leqslant 0$ pour toute fonction sousharmonique bornée supérieurement et de lim. sup. $\leqslant 0$ aux points-frontière hors e. Tout ensemble polaire de la frontière est donc par le lemme 6 de mesure harmonique nulle.

(2)° Si f est résolutive, son maximum en mesure harmonique est la borne supérieure de H_f.

On voit en effet comme dans [6 p. 8] que si λ est cette borne supposée finie et si $f_1 = \inf.(\lambda, f)$ on a $H_f \leqslant H_{f_1}$ d'où, puisque $\underline{H}_f \geqslant H_{f_1} + H_{(f-\lambda)^+}$, la conclusion $H_{(f-\lambda)^+} = 0$. Extension à $\overline{H}_f \neq -\infty$ pour f quelconque. Ainsi la mesure harmonique extérieure a une borne supérieure nulle ou égale à 1.

(3)° *Extension du problème de Dirichlet à un ouvert.* Un ouvert ω dans $\mathcal{E}$, ou bien est un domaine non greenien, ou bien est réunion dénombrable d'espaces de Green disjoints. Dans ce dernier cas, où l'on dira que ω est un ouvert de Green (ou greenien) on introduira $\underline{H}_f$, $\overline{H}_f$, H_f comme égaux à ces fonctions dans les domaines composants. Mais noter que $\underline{H}_f$ est aussi l'enveloppe supérieure des fonctions dont chacune est bornée supérieurement et dans chaque composant $-\infty$ sousharmonique, enfin admet en tout point-frontière de ω une lim. sup. (sur ω) $\leqslant f$. En un point-frontière régulier, on aura encore l'inégalité (6). On appellera mesures harmoniques extérieure ou intérieure de $e \subset \overset{*}{\omega}$ en $M \in \omega$, les quantités $\overline{H}_{\varphi_e}(M)$, $\underline{H}_{\varphi_e}(M)$ (φ_e fonction caractéristique). On dira brièvement qu'un ensemble e de $C\omega$ est *négligeable* pour ω si $\overline{H}_{\varphi_{e \cap \overset{*}{\omega}}} = 0$ partout.

(4)° Soit ω un domaine (ou ouvert) partiel d'un domaine (ou ouvert) de Green Ω ; f étant donnée sur $\overset{*}{\Omega}$ et φ valant sur $\overset{*}{\omega}$, f aux points de $\overset{*}{\Omega}$ et $\underline{H}_f^\Omega$ ailleurs, on a dans ω :

$$\underline{H}_\varphi^\omega = \underline{H}_f^\Omega \quad \text{(voir [8])}. \tag{9}$$

L'inégalité $\geqslant$ est facile ; on pourra pour l'inégalité contraire se ramener au cas des domaines ; on examinera aussitôt le cas de $\underline{H}_f^\Omega$ infini ; puis lorsque $\underline{H}_f^\Omega$ est fini on introduira u sousharmonique quelconque dans ω, bornée supérieurement et dont la fonction ψ des lim. sup. à la frontière est majorée par f sur $\overset{*}{\Omega}$ et par $\underline{H}_f^\Omega$ sur $\overset{*}{\omega} \cap \Omega$.

Pour voir que $u \leqslant \underline{H}_f^\Omega$ on introduira sur Ω, φ borélienne résolutive majorant ψ et telle que $H_\varphi^\Omega = \underline{H}_f^\Omega$ et l'on voit que $u \leqslant H_\varphi^\Omega$.

Comme application citons la décroissance des mesures harmoniques avec Ω et l'étude locale à la frontière, en se ramenant aux cas de $\overline{R}^\tau$.

(5)° Soit e fermé sur la frontière de l'ouvert de Green Ω. Si sa mesure harmonique u est partout < 1, elle admet une borne supérieure < 1 sur tout ensemble E dont l'adhérence ne rencontre pas e.

Cela vient de ce que la lim. sup. en tout point-frontière Q hors e est < 1. Si $Q \neq \mathcal{A}$, on peut voir cela en prolongeant u quasi partout par 0 sousharmoniquement au voisinage de Q ; la fonction obtenue ne peut valoir 1 en Q, sinon elle vaudrait 1 au voisinage ; elle est donc bien < 1 en Q (on peut aussi utiliser une majoration de u par H_φ^ω où ω est un petit voisinage ouvert de Q et φ une fonction égale à u dans $\omega \cap \Omega$ et à 0 ailleurs). On verra ensuite que si $\mathcal{A}$ n'est pas adhérent à E, u admet sur E une borne supérieure < 1 ; on en déduit que si $\mathcal{A}$ n'appartient pas à e, u admet au voisinage de $\mathcal{A}$ une borne supérieure < 1.

(6)° Considérons sur e fermé, du même $\overset{*}{\Omega}$, un ensemble e_n dont la mesure harmonique $v_n(M)$ tend vers 0 en tout point. Alors la convergence est uniforme sur tout E dont l'adhérence ne rencontre pas e.

On considérera encore un petit voisinage ω d'un point-frontière $Q \neq \mathcal{A}$, non sur e et la majoration de v_n par $H_{\psi_n}^\omega$ (ψ_n égale à v_n dans $\Omega \cap \Omega$, et à 0 ailleurs). Comme $\psi_n \to 0$, il y a bien convergence uniforme au voisinage de Q. On achève comme plus haut.

(7)° Si Ω et Ω_1 sont des ouverts de Green, E un ensemble de $\overset{*}{\Omega} \cap \overset{*}{\Omega}_1$ tel que pour un ouvert $\Delta \supset E$, on ait $\Omega \cap \Delta = \Omega_1 \cap \Delta$, la nullité de la mesure harmonique extérieure de E est équivalente relativement à Ω et Ω_1.

Comme un ensemble négligeable est contenu dans un borélien analogue, on se ramène à la conservation de la nullité de la mesure intérieure. Tout revient aisément à voir que, par agrandissement d'un domaine Ω en Ω_1, sans altérer Ω au voisinage d'un compact e de $\overset{*}{\Omega}$, la nullité de la mesure harmonique de e est conservée. Or la mesure harmonique u_1 de e pour Ω_1 est bornée par $K < 1$ sur $\Omega_1 - \Omega$ et la mesure harmonique u de e pour Ω majore donc $u_1 - k$. Si u_1 était > 0, sa borne supérieure serait 1 dans Ω comme dans

Ω_1 et $u_1 - K$ aurait une borne supérieure > 0 de sorte que u ne pourrait être nulle.

(8)° Comme *application*, on démontrera comme dans R^τ [4], la propriété de De la Vallée Poussin que l'ensemble des points non accessibles de la frontière (dans $\mathcal{E}'$) d'un espace de Green $\Omega \subset \mathcal{E}$ est de mesure harmonique nulle. Nous retrouverons plus loin (n° 32) ce résultat en l'améliorant, par une autre voie.

Disons qu'un ensemble e hors d'un ouvert de Green ω est en un point $P \in \overset{*}{\omega}$ négligeable (pour ω) si l'intersection de e avec tout voisinage de P est négligeable. Alors si e fermé $\in \overset{*}{\Omega}$ est de mesure harmonique > 0, il est non négligeable en un point $Q \in \overset{*}{\Omega}$. Métrisons $\mathcal{E}'$ alors complet. Pour l'un des domaines composants ω_1 de l'intersection de Ω avec une boule ouverte arbitrairement petite de centre Q_1, e est non négligeable. Donc e est non négligeable en un point Q_1 pour ω_1. On formera ainsi une suite de domaines emboîtés à diamètre tendant vers 0 et il y a convergence vers un point de e accessible par Ω. On conclut que l'ensemble des points non accessibles de $\overset{*}{\Omega}$ est de mesure harmonique *intérieure* nulle. On achève en remarquant que l'ensemble des points accessibles est analytique puisqu'il en est ainsi localement hors $\mathcal{A}$.

Remarque. — Si pour le domaine de Green $\Omega \subset \mathcal{E}$, $\mathcal{A}$ est négligeable, la théorie est analogue à celle du cas où $\mathcal{A}$ n'existe pas, ou n'est pas point-frontière (Ω relativement compact dans $\mathcal{E}$). Car il existe une fonction surharmonique > 0 dans Ω, tendant vers $+\infty$ en $\mathcal{A}$, et si u est sousharmonique et bornée supérieurement, elle est majorée par la borne supérieure des lim. sup. aux points-frontière réguliers. Noter que, comme on le verra, cette circonstance où $\mathcal{A}$ est négligeable est toujours vraie si $\mathcal{E}$ n'est pas greenien.

14. Variation de l'espace $\mathcal{E}$ contenant Ω. — Soient $\mathcal{E}_1$ et $\mathcal{E}_2$ deux espaces du type $\mathcal{E}$, *de même topologie sur leur intersection.* Tout ouvert Ω de $\mathcal{E}_1 \cap \mathcal{E}_2$ qui est ouvert greenien dans l'un des espaces est ouvert greenien dans l'autre, car la notion d'espace de Green est intrinsèque comme celle de fonction de Green.

Mais le problème de Dirichlet pour Ω dépend de l'adhérence de Ω dans l'espace $\mathcal{E}$ choisi, donc du choix de ce $\mathcal{E}$. Cependant, par exemple, si Ω est relativement compact dans $\mathcal{E}_1$ et $\mathcal{E}_2$, l'espace $\overline{\Omega}$ est le même d'où l'invariance du problème. En général :

THÉORÈME 11. — *Soit α la frontière de l'ouvert de Green Ω dans* *l'espace* $\mathcal{E}_1 \cap \mathcal{E}_2$, φ *une fonction sur* α. *Les fonctions* $\underline{\mathrm{H}}_f$ $\overline{\mathrm{H}}_f^\Omega$ *relatives à la donnée* f *valant* φ *sur* α *et une constante finie* K *ailleurs sur la frontière, sont les mêmes pour les espaces* $\mathcal{E}_1$ *et* $\mathcal{E}_2$.

Car $\underline{\mathrm{H}}_f^\Omega$ par exemple, pris avec le choix de $\mathcal{E}_1$ et $\mathcal{E}_2$, est dans chaque composant ω de Ω l'enveloppe supérieure des fonctions sousharmoniques ou $-\infty$, bornées chacune supérieurement, satisfaisant enfin à la condition suivante prise au sens de la topologie dans $\mathcal{E}_1 \cap \mathcal{E}_2$: pour toute suite $\mathrm{M}_n \in \omega$ convergeant vers $\mathrm{Q} \in \alpha$, lim. sup. $u(\mathrm{M}_n) \leqslant \varphi(\mathrm{Q})$ et pour toute suite $\mathrm{M}_n \in \omega$ sans valeur d'adhérence sur α ou ω, lim. sup. $u(\mathrm{M}_n) \leqslant \mathrm{K}$.

En particulier, la mesure harmonique relative à Ω d'un ensemble e ne dépend pas du choix d'un $\mathcal{E}$ contenant Ω et e.

15. — Autres critères d'espace de Green. — Théorème 12. — *Soit e fermé* $\subset \overset{*}{\Omega}$ (Ω *ouvert de Green*). *Si e est de mesure harmonique non partout nulle dans* Ω, $\mathcal{E} \cap \mathrm{C}e$ *est un ouvert de Green.*

Il suffit, en effet, d'examiner le cas de Ω domaine. Alors la mesure harmonique $\mu_e > 0$ dans Ω, prolongée par 0 et puis régularisée (voir lemme 2) par augmentation en certains points-frontière irréguliers, donne dans $\mathcal{E} \cap \mathrm{C}e$ une fonction sousharmonique v qu'on va étudier dans le domaine ω composant contenant Ω ; si ω contient outre Ω d'autres points que des points-frontière irréguliers de Ω, v n'est pas constante et $1 - v$ est dans ω surharmonique, non const., $\geqslant 0$ donc > 0 de sorte que ω est espace de Green ; sinon on voit que la fonction de Green de Ω est fonction de Green de ω et ω est encore espace de Green.

Corollaire. — En prenant pour e l'ensemble $\mathcal{A}$, on voit que, *si* $\mathcal{E}$ *n'est pas greenien,* $\mathcal{A}$ *s'il existe est de mesure harmonique nulle pour tout* Ω *de Green dont* $\mathcal{A}$ *est un point-frontière.*

Particularisons davantage, en prenant pour Ω, l'ouvert $\mathcal{E} - \mathrm{K}$ où K est compact non polaire. Si $\mathcal{A}$ est de mesure harmonique non partout nulle relativement à $\mathcal{E} - \mathrm{K}$, $\mathcal{E}$ est greenien.

Réciproquement, d'ailleurs, si $\mathcal{E}$ est greenien, $\mathcal{A}$ est de mesure non nulle pour $\mathcal{E}$ (puisque c'est toute la frontière) donc pour $\mathcal{E} - \mathrm{K}$ (K compact même non polaire). Donc :

Critère A. — *Pour que* $\mathcal{E}$ *soit greenien, il faut et suffit que pour un ou tout* K (*compact de* $\mathcal{E}$ *non polaire*) $\mathcal{A}$ *existe et soit de mesure harmonique non nulle relativement à* $\mathcal{E} - \mathrm{K}$.

Remarquons que cette mesure est la limite de celle de $\overset{*}{\Omega}_n$ relativement à $\Omega_n - K$, pour un ouvert Ω_n relativement compact dans $\mathcal{E}$ tendant en croissant vers $\mathcal{E}$ non compact : les deux cas où cette limite est partout nulle ou non ont été appelés dans le cas d'une surface de Riemann ouverte, par Nevanlinna, cas de frontière idéale « nulle » ou « positive », la surface étant dite respectivement parabolique ou hyperbolique. Ainsi pour les surfaces de Riemann nous retrouvons le critère de Myrberg (voir Sario [24]) de l'existence ou non existence d'une fonction de Green selon que la surface est hyperbolique ou parabolique.

Remarque 1. — Soit un compact K dans un espace de Green $\mathcal{E}$; si u est harmonique dans $\mathcal{E}$ et vaut dans $\mathcal{E} - K$, la solution $H_\varphi^{\mathcal{E}-K}$ où φ égale u sur $\overset{*}{K}$ et o ailleurs, alors $u = 0$.

Car si u avait sur K une borne supérieure > 0, ce serait une borne dans $\mathcal{E}$, borne atteinte, et u serait constante > 0. Cela contredirait le fait que la mesure harmonique de $\mathcal{A}$ n'est pas nulle pour $\mathcal{E} - K$ Ainsi la borne supérieure de u sur K est $\leqslant 0$ et de même la borne inférieure est $\geqslant 0$.

Extension : si u sousharmonique est majorée dans $\mathcal{E} - K$ par $H_\varphi^{\mathcal{E}-K}$, $u \leqslant 0$.

Noter que pour $\mathcal{E}$ quelconque et K non polaire, cette propriété n'est toujours vraie que si $\mathcal{E}$ est espace de Green.

Voici enfin deux critères, voisins de résultats de Othsuka-Parreau [16,22] pour les surfaces de Riemann :

Remarque 2. : Principe du maximum. — Si $\mathcal{E}$ n'est pas greenien, toute fonction u sousharmonique et bornée supèrieurement dans un ouvert partiel $\Omega \neq \mathcal{E}$ est majorée par la borne supérieure de ses limites supérieures *à la frontière de Ω dans $\mathcal{E}$.*

Car ou bien le complémentaire de Ω est polaire et u se prolonge sousharmoniquement, d'où $u = C^{te}$; ou bien Ω est greenien et il suffit de se reporter à la remarque finale du n° 13 et au corollaire précédent.

D'ailleurs, pour $\mathcal{E}$ quelconque et un seul Ω du type $\mathcal{E} - K$ (K compact) la propriété n'est toujours vraie que si $\mathcal{E}$ n'est pas greenien.

Car si $\mathcal{E}$ est greenien, il n'y a qu'à considérer la mesure harmonique de $\mathcal{A}$ pour $\mathcal{E} - K_1$ (K_1 compact non polaire d'extérieur connexe situé dans $\mathcal{E} - K$).

Critère B. — *Soit* K *un compact non polaire dans $\mathcal{E}$ et u harmo-*

nique > 0 *dans* $\mathcal{E} - K$, *égale à* $H_{\varphi}^{\mathcal{E}-K}$ *où* φ *est* $\geqslant 0$ *sur* $\overset{*}{K}$, *nulle ailleurs. Le flux de u entrant dans un ouvert régulier* ω *contenant* K *est* > 0 *ou nul suivant que* $\mathcal{E}$ *est greenien ou non.*

Si $\mathcal{E}$ est compact, le flux entrant dans ω est nul parce que c'est aussi celui qui sort de l'ouvert extérieur à ω, ouvert également régulier.

Si $\mathcal{E}$ n'est pas compact, on introduira Ω_n très régulier et tendant en croissant vers $\mathcal{E}$, avec $\omega \supset \Omega_1 \supset K$. Si $u_n = H_{\varphi}^{\Omega_n - K}$, on voit que le flux de u_n entrant dans Ω_n est $\geqslant 0$, donc à la limite celui de u entrant dans ω est $\geqslant 0$.

Si ψ_1 et ψ_2 valent sur $\overset{*}{\Omega}_1$ deux constantes > 0 encadrant u, et 0 ailleurs, on voit par différence à l'aide du résultat précédent que le flux considéré de u est encadré par ceux de $H_{\psi_1}^{\mathcal{E}-\overline{\Omega}_1}$ et $H_{\psi_2}^{\mathcal{E}-\overline{\Omega}_1}$, fonctions non constantes ou constantes suivant que $\mathcal{E}$ est greenien ou non; les flux de ces flexions sont respectivement tous deux > 0 ou nuls. Lorsque $\mathcal{E}$ n'est pas greenien, il suffit de supposer, avec Othsuka, que u est harmonique et bornée dans le complémentaire d'un compact, car on se ramène aussitôt au cas précédent.

On en déduit d'ailleurs des énoncés d'existence de fonctions avec singularités données en utilisant le procédé alterné de Sario [23] applicable dans $\mathcal{E}$.

Par exemple : Étant donné sur le compact K de $\mathcal{E}$ non greenien, une distribution de masses de signes quelconques, mais de total nul, il existe une fonction unique à une constante près, harmonique hors K bornée hors de tout voisinage de K et qui au voisinage de K soit la différence de deux fonctions sousharmoniques dont les masses associées aient comme différence la distribution donnée.

16. — Fonction de Green et mesure harmonique.

Théorème 6'-13. — *Pour l'espace de Green* $\Omega \subset \mathcal{E}$, $G_P^{\Omega}(M)$ *est caractérisé pour chaque voisinage compact* W *de* P *dans* Ω, *comme l'unique fonction surharmonique dans* Ω, *de masse associée réduite à* 1 *en* P *et égale dans* $\Omega - W$ *à la solution du problème de Dirichlet pour la donnée* ψ *égale à la fonction elle-même sur* $\overset{*}{W}$ *et à* 0 *ailleurs.*

Voyons d'abord que la fonction de Green G_P égale la solution de l'énoncé dans $\Omega - W$. Elle la majore évidemment. Puis cette solution prolongée par G dans W est quasi surharmonique et les masses associées contiennent l'unité en P, de sorte que le prolongement régularisé, donc la solution considérée, doivent majorer G et par suite l'égalent.

Réciproquement, toute fonction répondant aux conditions est unique (même en supposant sur W seulement que c'est un compact de Ω). Car la différence de deux telles fonctions u_1 et u_2 est une fonction harmonique θ dans Ω (à condition d'être convenablement définie en P si P n'est pas à l'infini), et hors W, θ vaut $H_{\psi}^{\Omega-W}$ où ψ vaut o sur $\overset{*}{\Omega}$ et θ sur $\overset{*}{W}$. D'où $\theta = 0$ par la remarque 1 précédente (n° 15).

COROLLAIRE 1. — En tout point-frontière situé dans $\mathcal{E}$, la fonction de Green s'annule si et seulement si le point est régulier.

COROLLAIRE 2. — L'ensemble α où $G_{P_1} \geqslant G_{P_2}$ $(P_1 \neq P_2)$ n'est ni vide ni compact. Sinon la différence $G_{P_2} - G_{P_1}$ considérée hors d'un compact K de Ω, au voisinage de P_1 et P_2, et contenant α, serait harmonique > 0, donc aurait d'après le critère B du n° 15 un flux > 0 entrant dans ω régulier contenant K.

Remarque 1. — Sans étendre ici la théorie de l'extrémisation développée dans $\overline{R}^{\tau}$, on améliorera un peu le théorème précédent en montrant l'égalité avec G_P de la solution $H_{\psi}^{\Omega-W}$ lorsque W est seulement un compact de Ω non effilé en P.

Soit u la solution du problème de Dirichlet dans $\omega = \Omega - W$ pour la donnée G_P dans Ω et o ailleurs ; elle minore G_P. Soit v le prolongement (u, G_P) ; $\widehat{v}$ est surharmonique d'après le lemme 2 ; elle minore G_P et, grâce à la propriété minimale de la fonction de Green, il suffira de voir que la masse associée à $\widehat{v}$ comporte en P une masse $\geqslant 1$.

Soit ω_0 un voisinage ouvert assez petit de P et $\omega_1 = \omega_0 \cap \omega$. Si f vaut $u - G_P$ dans ω et o ailleurs, $H_f^{\omega_1} + H_{G_P}^{\omega_1} = H_v^{\omega_1}$.

Or $H_v^{\omega_1} = v$ et d'autre part, $H_{G_P}^{\omega_1} = G_P$ comme il est connu sur l'image dans $\overline{R}^{\tau}$, soit par la théorie générale de l'extrémisation [6], soit seulement par l'expression de $G_P(M)$ au moyen de $h_Q(M, P)$ et par les propriétés de h_Q (voir [5]). Donc $v = G_P + H_f^{\omega_1}$ dans ω_1. Par prolongement dans ω_0, il vient grâce au lemme 2 :

$$\widehat{v} = G_P + \widehat{(H_f^{\omega_1}, 0)}$$

où ce dernier terme est surharmonique, d'où le résultat.

THÉORÈME 14. — *Soit Ω un domaine de Green dans l'espace de Green $\mathcal{E}$ $(\Omega \neq \mathcal{E})$ et $P \in \Omega$. Soient u_P le prolongement de G_P^{Ω} par* o, v_P

le prolongement par $G_P^{\mathcal{E}}$ *de la solution* H_φ^Ω *où* φ *vaut* $G_P^{\mathcal{E}}$ *dans* $\mathcal{E}$ *et* o *ailleurs ;* $u_P = G_P^{\mathcal{E}} - v_P$; v_P *et* $-u_P$ *sont quasi-surharmoniques au voisinage de* $\overset{*}{\Omega} \cap \mathcal{E}$ *et leurs régularisées* $\widehat{v_P}$, $-\widehat{u_P}$ *admettent sur cette frontière une mesure associée identique à la mesure harmonique relative à* Ω *et* P.

Comme $G_P^{\mathcal{E}}$ et G_P^Ω sont au voisinage de P, égaux à une fonction harmonique près, $G_P^{\mathcal{E}}(M) - G_P^\Omega(M) - H_\varphi^\Omega(M)$ définie par continuité en P, est harmonique dans Ω, et même nulle d'après le théorème 13 et la remarque 1 du n° 14. D'où dans Ω la relation

$$G_P^{\mathcal{E}}(M) - v_P(M) = u_P(M)$$

et la symétrie $v_P(Q) = v_Q(P)$ $(Q \in \Omega)$. La relation est alors vraie partout.

Étudions alors le potentiel-$G^{\mathcal{E}}$ de la mesure harmonique μ relative à Ω et P. En Q de Ω, il vaut $\int G_Q^{\mathcal{E}}(M)d\mu = v_Q(P) = v_P(Q)$. En Q extérieur ou point-frontière régulier de Ω, on a par la remarque précédente : $\int G_Q^{\mathcal{E}}\, d\mu = G_Q^{\mathcal{E}}(P) = G_P^{\mathcal{E}}(Q) = v_P(Q)$. Le potentiel considéré vaut donc partout $\widehat{v_P}$ d'où le résultat sur l'identité des mesures.

Remarque 2. — Il est élémentaire que si φ est une fonction $\geqslant 0$ continue au voisinage d'un point Q de R^τ, harmonique de chaque côté d'une surface régulière σ passant par Q et s'annule sur σ, elle est sousharmonique au voisinage de Q et les masses associées sont réparties sur σ avec une densité égale à la somme des dérivées normales, au facteur près φ_τ.

Corollaire fondamental. — *Si dans le théorème 14, la frontière de* Ω *est au voisinage d'un de ses points* Q, *une surface régulière, et* Ω *d'un seul côté, la mesure harmonique considérée est au voisinage de* Q *l'intégrale en surface de* $\frac{1}{\varphi_\tau}\frac{dG_P^\Omega}{dn}$ ([12]) (Extension immédiate par sommation, au cas où Ω serait des deux côtés de la surface.)

17. Sphère de Green. — Soit $0 < \lambda < G_P(P)$; l'ensemble des points M où $G_P(M) < \lambda$ est un domaine (sinon en remplaçant $G_P(M)$ par λ dans un domaine composant ne contenant pas P on

([12]) Cela pourrait s'établir directement à l'aide d'un domaine très régulier Ω_n croissant vers Ω, coïncidant avec Ω au voisinage de Q. On verrait dans ce cas la forme de la mesure harmonique grâce à la formule de Green et on passerait à la limite.

aurait une fonction surharmonique contredisant la propriété minimale de G). On le notera D_P^λ ; sa frontière dans $\mathcal{E}$, formée des points $G = \lambda$, sera dite sphère de Green, notée Σ_P^λ.

THÉORÈME 15. — *Pour* D_P^λ, $G_P^\Omega - \lambda$ *est fonction de Green de pôle* P.

En effet par la propriété minimale de la fonction de Green :

$$G_P^{D_P^\lambda} \leqslant G_P^\Omega - \lambda\,;$$

d'autre part, cette fonction de Green de D_P^λ s'annule aux points de Σ, tous réguliers pour D_P^λ (puisque le membre de droite s'y annule). Si donc on modifie G_P^Ω en le remplaçant dans D_P^λ par $\lambda + G_P^{D_P^\lambda}$ on obtient une fonction surharmonique > 0 dans Ω, dont les masses associées contiennent l'unité en P et qui doit donc majorer G_P^Ω d'où l'égalité.

THÉORÈME 16. — *Les points-frontière de* D_P^λ *situés sur* $\overset{*}{\Omega}$ *forment un ensemble de mesure harmonique nulle pour ce* D_P^λ.

Car si v est la mesure harmonique en M de cet ensemble, relativement à D_P^λ, la fonction dans D_P^λ, $G_P^\Omega - \varepsilon v$ $(\varepsilon < \lambda)$ prolongée par G_P^Ω est dans Ω surharmonique > 0, de masses associées contenant l'unité en P donc majore G_P^Ω. Ce qui exige $v = 0$.

COROLLAIRE. — *Si le domaine* Ω_n *croît et tend vers l'espace de Green* Ω *la mesure harmonique de* $\overset{*}{\Omega}_n \cap D_P^\lambda$ *relative à* $\omega_n = \Omega_n \cap D_P^\lambda$ *tend vers* 0 *dans* D_P^λ.

Elle est en effet majorée pour n assez grand par la solution du problème de Dirichlet pour ω_n relatif à la trace d'une fonction Φ finie continue égale à 1 au voisinage de $\overset{*}{\Omega}$. Cette solution tend vers celle relative à D_P^λ et Φ, laquelle est d'après le théorème précédent arbitrairement petite en P pour un choix convenable de Φ.

Extension. — Le théorème 16, obtenu aussi par Parreau a été étendu par lui aux ouverts lieux des points où un potentiel-G de masses > 0 est > 0.

La démonstration s'étend en remarquant qu'un tel potentiel est la plus petite fonction surharmonique > 0 dont les masses associées contiennent celles données. Le corollaire qui ne dépend que de la propriété de mesure harmonique nulle s'étend donc aussi.

18. Filtre de Green et suites régulières de points dans l'espace de Green. — Soit Ω un domaine de Green dans $\mathcal{E}$. Les ensembles de Ω où $G_P(M) < \varepsilon$ (ε variable > 0) forment une base de filtre et le filtre correspondant, indépendant de $P \in \Omega$, sera dit *filtre de Green*. Un filtre $\mathcal{F}$ dans Ω sera dit *régulier* s'il est plus fin (au sens large) que le filtre de Green, c'est-à-dire si G_P tend vers 0 selon $\mathcal{F}$.

Exemples. — Une suite $M_n \in \Omega$ est régulière, si pour un (ou tout P) $G_P(M_n) \to 0$.

Un point-frontière $Q \neq \mathcal{A}$, déjà appelé régulier, est caractérisé par la régularité du filtre des intersections avec Ω des voisinages de Q, ou par la régularité des suites $M_n \to Q$.

THÉORÈME 17. — *Pour qu'un filtre $\mathcal{F}$ soit régulier, il faut et suffit qu'il existe une fonction surharmonique $v > 0$ dans Ω tendant vers* 0 *selon $\mathcal{F}$.*

La condition est nécessaire puisqu'il n'y a qu'à prendre la fonction G_P. Elle est suffisante car si on considère un voisinage compact E de $P \in \Omega$ et f par exemple finie continue sur $\overset{*}{E}$ où $0 < f \leqslant v$ et nulle sur $\overset{*}{\Omega}$, la solution du problème de Dirichlet pour $\Omega - E$ et f, sera majorée par v donc tendra vers 0 selon $\mathcal{F}$; de même λG_P (λ assez petit).

Application. — Le théorème 16 se traduit de manière importante :

THÉORÈME 18. — *Si u souharmonique bornée supérieurement dans Ω admet une lim. sup. selon le filtre de Green* $\leqslant 0$, *alors* $u \leqslant 0$.

L'hypothèse signifie que $u \leqslant \varepsilon$ (ε donné > 0) dès que $G_P^\Omega(M) \leqslant \lambda$ convenable. En considérant u dans le domaine $G_P > \lambda$ on voit que $u \leqslant \varepsilon$ puisque c'est vrai aux points frontières contenus dans Ω; donc $u \leqslant \varepsilon$ dans Ω avec ε arbitraire.

Extension. — *Remarquer que le résultat subsiste en remplaçant la condition sur la lim. sup. selon le filtre de Green par la condition plus faible lim. sup. u (M_n)* $\leqslant 0$ *pour toute suite régulière convergente; on peut même excepter les suites tendant vers les points d'un ensemble de mesure harmonique intérieure nulle.*

Soit e l'ensemble fermé de $\overset{*}{\Omega}$, où en chaque point converge une suite régulière M_n avec lim. sup $u(M_n) \geqslant \varepsilon > 0$. Introduisons $\Phi(M)$ continue dans $\bar{\Omega}$ ($0 \leqslant \Phi \leqslant 1$) prenant la valeur 1 sur e et telle que $H_\Phi^\Omega(P) < \varepsilon$ (P fixé $\in \Omega$).

On peut trouver $\lambda > 0$ tel que si

$$G_P(M) \leqslant \lambda$$
$$\Phi(M) < \frac{1}{2},$$

on ait $u(M) < \varepsilon$.

Si $u \leqslant A$ $C^{te} > 0$, on voit que dans D_P^λ, $u \leqslant \varepsilon + 2AH_\Phi^{D_P^\lambda}$.

Comme $H_\Phi^{D_P^\lambda}(P) \to H_\Phi^\Omega(P)$ $(\lambda \to 0)$ on conclut $u(P) \leqslant 0$.

Application. — THÉORÈME 19. — *Considérons les fonctions u égales à* $-\infty$ *ou sousharmoniques dans le domaine de Green* Ω, *dont chacune est bornée supérieurement, et telle pour tout* $Q \in \overset{*}{\Omega}$ *et toute suite régulière* $M_n \to Q$, *que lim. sup. u* $(M_n) \leqslant f(Q)$ *donnée. Alors l'enveloppe supérieure des u est encore* $\underline{H}_f^\Omega$

Évident si $\underline{H}_f = +\infty$. Si $\underline{H}_f$ est fini, il existe φ borélienne $\leqslant f$ et résolutive telle que $H_\varphi = \underline{H}_f$ et φ ne diffère de f que sur un ensemble de mesure harmonique intérieure nulle. En introduisant v égale à $+\infty$ ou surharmonique, bornée inférieurement et de lim. inf. $\geqslant \varphi(Q)$ en tout Q, on voit que $u - v \leqslant 0$ d'où $u \leqslant \overline{H}_\varphi = \underline{H}_f$. Si enfin $\underline{H}_f = -\infty$ il s'agit de voir que $u = -\infty$ et on se ramène au cas de $f \leqslant -1$. On peut encore trouver (en étudiant $1/f$) φ borélienne $\leqslant f$, (donc avec $\underline{H}_\varphi = \overline{H}_\varphi = -\infty$) et ne différant de f que sur un ensemble de mesure harmonique intérieure nulle. On achève comme plus haut.

Ce théorème, qui d'ailleurs entraînerait l'énoncé précédent, sera amélioré de manière indépendante au n° 32.

19. — *Approfondissons* les *filtres* (ou suites) *réguliers convergents* dont on va voir le caractère *local.*

THÉORÈME 20. — *Dans le domaine de Green* Ω, *pour que le filtre* $\mathcal{F}$ *convergent vers le point-frontière* Q (*même en* $\mathcal{A}$) *soit régulier, il faut et suffit qu'il existe au voisinage de* Q *sur* Ω *une fonction surharmonique* $v > 0$ *tendant vers* 0 *selon* $\mathcal{F}$; *il existe alors une fonction surharmonique* U (*même harmonique si la mesure harmonique de* Q *est* < 1) > 0 *dans* Ω *tendant vers* 0 *selon* $\mathcal{F}$ *et admettant une borne inférieure* > 0 *hors de tout voisinage de* Q.

Supposons l'existence de v et voyons celle d'un U. Introduisons une fonction borélienne φ $(0 \leqslant \varphi \leqslant 1)$ sur $\overset{*}{\Omega}$, nulle et continue en Q. Soit ω l'intersection de Ω avec un voisinage ouvert $\mathcal{V}$ de Q assez petit pour que sur $\overline{\mathcal{V}} \cap \overset{*}{\Omega}$, $\varphi \leqslant \varepsilon$ (arbitraire > 0). En imaginant un compact K_n croissant de limite Ω on voit que la mesure harmonique $\nu_n(M)$ relative à ω de $\overset{*}{\omega} \cap \Omega - \overset{*}{\omega} \cap K_n$ est $< \varepsilon$ dans un voisinage de Q quand n est fixé assez grand, soit n_0 (voir propriété 6 du n° 13). Alors $H_\varphi^\Omega - \nu_{n_0}(M)$ est dans ω une solution de problème de Dirichlet majorée par $\varepsilon + Kv$ (avec C^{te} K convenable). On en déduit que H_φ tend vers o selon $\mathcal{F}$.

Or, on peut disposer de φ de façon que pour une suite de voisinages ouverts $\mathcal{V}_n$ décroissants de limite Q on ait $\varphi \leqslant \frac{1}{n}$ dans $\mathcal{V}_n$ et $\varphi \geqslant \frac{1}{n}$ hors $\mathcal{V}_n$.

Alors si μ_n désigne la mesure harmonique relative à Ω de $\mathcal{V}_n \cap \overset{*}{\Omega}$

$$H_\varphi \geqslant \frac{1}{n} - \frac{1}{n}\mu_n$$

d'où résulte (par la propriété 5 du n° 13) le théorème annoncé si la mesure harmonique de Q est < 1. Mais si cette mesure vaut 1 [dans quel cas Ω est formé de $\mathcal{E}$, diminué de Q (s'il est différent de $\mathcal{A}$) et d'un ensemble polaire], il n'y a qu'à retrancher de Ω un petit voisinage fermé sphérique $\mathcal{W}$, et reconsidérer $H_\varphi^{\Omega - \mathcal{W}}$ avec $\varphi = 1$ sur $\overset{*}{\mathcal{W}}$; en prolongeant H_φ par 1 sur $\mathcal{W}$, on aura dans Ω la fonction surharmonique cherchée.

Remarque. — Dans un ouvert *quelconque* $\Omega \subset \mathcal{E}$ un filtre convergent vers un point-frontière Q sera encore dit *régulier* s'il existe au voisinage de Q sur Ω, v surharmonique > 0 tendant vers o selon $\mathcal{F}$. Il existe encore alors U surharmonique > 0 tendant vers o selon $\mathcal{F}$ et de borne inférieure > 0 hors de tout voisinage de Q (on adapte la démonstration en ôtant d'abord un voisinage pour avoir un ouvert de Green) et si Ω est un ouvert de Green autre que $\mathcal{E} - (Q \cup \mathcal{A} \cup A)$ avec A polaire et mesure harmonique de $Q = 1$, on peut avoir U harmonique.

CONSÉQUENCES. — THÉORÈME 21. — *Pour l'espace de Green Ω :*

1. *Si le filtre $\mathcal{F}$ est régulier et convergent vers $Q \in \overset{*}{\Omega}$, et si f est bornée supérieurement :*

$$\limsup_{\mathcal{F}} \overline{H}_f \leqslant \limsup_{M \to Q} f(M).$$

Même démonstration que pour les points ou suites régulières dans $\overline{R}_\tau$ grâce à l'usage de U et il y a extension aux ouverts de Green.

2. *Si f sur $\overset{*}{\Omega}$ est bornée supérieurement et semi-continue supérieurement,* $\underline{H}_f$ *est la plus grande fonction bornée supérieurement, soit égale à* $-\infty$ *soit sousharmonique, et qui en tout point* $Q \in \overset{*}{\Omega}$ *admet une lim. sup.* $\leqslant f(Q)$ *pour toute suite régulière tendant vers* Q.

3. *Si f est finie continue sur $\overset{*}{\Omega}$,* H_f *est la seule fonction harmonique bornée tendant vers* $f(Q)$ *pour toute suite régulière de limite* Q *quelconque* $\in \overset{*}{\Omega}$ *; c'est aussi la seule fonction harmonique bornée* φ *dans* Ω *telle que, si* F *est un prolongement continu de f dans* $\overline{\Omega}$, $\varphi - F$ *tende vers* o *selon le filtre de Green.*

IV. — LES LIGNES DE GREEN DANS UN ESPACE DE GREEN $\mathcal{E}$.

20. — Arcs et lignes de Green. — Fixons le pôle P de la fonction de Green $G_P(M)$. On emploiera dans $\mathcal{E}$ un langage qu'il faudra souvent interpréter sur des images locales sans qu'on ait à le dire (ces images locales étant toujours à distance finie dans le cas de $\mathcal{E}_c$).

On appellera *arc de Green* tout arc ouvert de Jordan, ne contenant ni P ni point à l'infini, admettant (sur toute image locale) relativement à un paramètre t un vecteur tangent $\dfrac{dM}{dt} \neq 0$ parallèle à grad G supposé non nul le long de l'arc. Autrement dit il doit satisfaire localement aux équations :

$$(10) \qquad \frac{dx_1}{G'_{x_1}} = \cdots = \frac{dx_\tau}{G'_{x_\tau}} \qquad \text{ou} \qquad dM \wedge \operatorname{grad} G = 0$$

et on l'orientera conventionnellement par grad G c'est-à-dire dans le sens des G croissants. G strictement croissant ou décroissant, et dérivable de t sera pris comme paramètre canonique.

Lemme 7. — Si en $M_0 \neq P$ et non à l'infini, grad $G \neq 0$, il existe un voisinage de M_0 et $\varepsilon > 0$ tels que par tout point Q de ce voisinage passe un arc de Green unique pour lequel G varie dans l'intervalle $]G(M_0) - \varepsilon, G(M_0) + \varepsilon[$. Le point de cet arc où $G = \lambda$ (valeur de l'intervalle précédent) a des coordonnées sur l'image locale qui sont des fonctions analytiques (de l'ensemble) des coordonnées de Q et de λ, d'où résulte par exemple que si Q décrit l'intersection de la sphère de Green $G(M) = G(M_0)$ avec une surface régulière non tangente, l'arc considéré décrit une surface régulière.

Deux arcs de Green ont en commun un même arc de Green s'ils contiennent un même point. Si quand G tend vers sa borne supérieure (ou inférieure) sur un arc de Green, le point courant M admet une valeur d'adhérence Q_0 dans $\mathcal{E}$ non à l'infini, distincte de P et où grad $G \neq 0$, alors $M \to Q_0$ et l'arc peut se prolonger de façon à contenir Q_0.

Ce sont des conséquences de l'analyticité de G et des théorèmes fondamentaux sur les équations différentielles.

Lignes de Green. — Un arc de Green est dit maximal si aucun arc de Green différent ne le contient. Un arc de Green maximal sera appelé aussi *ligne de Green*. Par tout point $Q \neq P$ non à l'infini et où grad $G \neq 0$ passe une ligne de Green unique. Considérons en effet tous les arcs de Green contenant Q et dont le début du lemme précédent montre l'existence ; soit B_1 la borne supérieure des bornes supérieures de G sur ces arcs et B_2 la borne inférieure des bornes inférieures analogues. On voit qu'il existe un arc de Green contenant tous les précédents et dont les bornes de G sont B_1 et B_2. Il est bien maximal.

Tube (*de Green*) *régulier.* — On dira qu'un faisceau d'arcs de Green limités aux sphères de Green Σ^{λ_1}, Σ^{λ_2} est un tube régulier (λ_1, λ_2) s'il forme un « domaine régulier » et si grad $G \neq 0$ sur l'adhérence qui sera dite tube compact régulier. Les extrémités des arcs décrivent les « bases » dans Σ^{λ_1} et Σ^{λ_2}. L'intégrale de $\frac{dG}{dn}$ sur l'intersection du tube (ou du tube compact) avec Σ^{λ} variable (λ compris entre λ_1 et λ_2, au sens large pour le tube compact) a une même valeur lorsqu'on oriente la normale dans le sens des G croissants ; c'est le « flux » du tube.

LEMME 8. — *Si une ligne de Green traverse Σ^{λ_1} en M_1 et Σ^{λ_2} en M_2 $(\lambda_1 \neq \lambda_2)$, par tout point* M *assez voisin de M_1 passe une ligne de Green* (*unique*) *traversant Σ^{λ_2} dans un voisinage fixé de M_2 et les coordonnées d'un point* Q *de la ligne entre Σ^{λ_1} et Σ^{λ_2} sont, sur l'image locale, des fonctions analytiques de* G(Q) *et des coordonnées locales de* M. *Il y a dans tout voisinage de l'arc $M_1 M_2$ augmenté de ses extrémité un tube régulier (λ_1, λ_2) contenant l'arc. Plus généralement considérons une partie compacte régulière α de la surface régulière S^{λ_1} déduite de Σ^{λ_1} en supprimant les points à l'infini et les points où grad* $G = 0$. *Si les lignes de Green traversant α traversent Σ^{λ_2}, elles engendrent un tube* *compact régulier* (λ_1, λ_2) (*et coupent* Σ^{λ_2} *selon une partie compacte régulière de* S^{λ_2}).

On opérera de proche en proche le long d'une ligne de Green partagée en arcs assez petits, en se ramenant à des problèmes locaux traités à l'aide du lemme 7.

21. — Étude au voisinage du pôle. — THÉORÈME 22. — *Dans un voisinage ouvert assez petit du pôle* P (*supposé d'abord non à l'infini*) *passe en tout point différent de* P *une seule ligne de Green ; elle admet dans le sens des* G *croissants un point-limite qui est* P, *et en* P *une demi-tangente. A toute demi-droite issue de* P *correspond une ligne de Green unique qui lui est tangente et cela établit un homéomorphisme entre les points de toute sphère de Green* Σ_P^λ *pour* λ *assez grand et les demi-droites issues de* P. *Dans cette correspondance la mesure harmonique en* P *d'un ensemble variable* e *borélien de* Σ^λ *relativement au domaine* $D_P^\lambda(G > \lambda)$ *est proportionnelle au flux entrant* $\int_e \frac{dG}{dn}\, d\sigma$ *et à l'angle solide du faisceau des demi-droites correspondantes en* P.

Au voisinage de P, G vaut dans le plan $\log 1/PM + \varphi$, dans l'espace R^τ $(\tau > 2)$ $\overline{MP}^{2-\tau} + \varphi$ (φ harmonique) et le gradient est évidemment $\neq 0$ hors P. Il est aisé de voir que ce gradient fait avec PM un angle arbitrairement petit avec la distance PM donc que PM est fonction strictement décroissante de G le long de la ligne de Green l passant par M_0 assez voisin de P et que le rapport entre la longueur de l'arc et la variation de PM est voisin de 1 ; il s'ensuit, sans même utiliser le lemme 7 que lorsque G tend vers sa borne supérieure sur l, M ne peut avoir deux valeurs d'adhérence $\neq$ P ; s'il en avait une seule, c'est-à-dire s'il avait un point limite $Q \neq P$, on pourrait prolonger l'arc au delà de Q ce qui est contradictoire. Ainsi $M \to P$, G tendant vers $+\infty$.

Comme on peut prendre $PM = r$ comme paramètre, on transformera les équations différentielles en passant aux coordonnées sphériques de centre en P. Ainsi dans le plan, elles deviennent

$$\frac{d\theta}{dr} = \frac{\varphi'_x \sin\theta - \varphi'_y \cos\theta}{1 - r(\varphi'_x \cos\theta + \varphi'_y \sin\theta)}$$

où le second membre est au voisinage de 0 borné indépendamment de θ. Donc toute intégrale $\theta(r)$ pour $r > 0$ assez petit admet une limite finie pour $r \to 0$ et il y a pour $0 < r < r_0$ fixé convenable une intégrale unique de limite donnée arbitraire pour $r \to 0$ et variant continûment avec cette valeur initiale. Il y a application biunivoque continue du compact des demi-tangentes initiales dans Σ_P^λ d'où l'homéomorphisme de l'énoncé, qu'on démontrera de même pour $\tau < 2$ ([13]).

Comme la fonction de Green de D_P^λ de pôle P est $G_P(M) - \lambda$, la mesure harmonique de l'ensemble borélien e de l'énoncé est portionnelle à $\int \frac{dG}{dn} d\sigma$; les Σ_P^λ pour $\lambda > \lambda_0$ assez grand sont en correspondance homéomorphe par l'intermédiaire des demi-droites issues de P, ou par les lignes de Green qui les traversent. L'égalité du flux pour e_1 dans $\Sigma_P^{\lambda_1}$ et e_2 dans $\Sigma_P^{\lambda_2}$ ainsi correspondants se déduit du cas où les e sont des parties ouvertes régulières de Σ^{λ_1} et Σ^{λ_2} et cela se traite grâce au lemme 8 par la notion de flux d'un tube régulier.

Enfin le flux d'un tube régulier (λ_1 fixe, λ variable $\to +\infty$) de base fixe dans Σ^{λ_1} vaut d'après la formule (4′) l'intégrale de $\frac{dG}{dn}$ à travers la portion S_r de surface sphérique ($PM = r$) contenue dans le tube (en supposant que cette sphère ne coupe pas Σ^{λ_1} ni Σ^{λ_2}). C'est, pour r assez petit, arbitrairement voisin du flux de $\log 1/PM$ ou $PM^{2-\tau}$, c'est-à-dire à un facteur près, de l'angle (solide) du cône du sommet P et base S_r. Vu la convergence de la demi-droite PM vers la tangente en P, uniformément pour les lignes de Green, on voit que cet angle (solide) tend vers celui du cône des demi-tangentes.

Cas du pôle P à l'infini. — Théorème 22′. — Même énoncé en

([13]) U étant le vecteur unité sur le vecteur $\overrightarrow{PM}$, $\overrightarrow{PM} = rU$ et l'équation différentielle (10) des lignes de Green s'écrit

$$(r dU + U dr) \wedge \text{grad } G = 0 \quad \text{ou} \quad r\frac{dU}{dr} \wedge \text{grad } G + U \wedge \text{grad } G = 0.$$

Le premier membre s'il n'est nul est perpendiculaire à grad G voisin en direction de U, de sorte qu'en multipliant vectoriellement par U on obtient une équation équivalente :

$$r\frac{dU}{dr}(U.\text{ grad } G) + U(U.\text{ grad } G) - \text{grad } G = 0$$

ou

$$\frac{dU}{dr} = \frac{1}{r}\,\frac{\text{grad } G - U(U.\text{ grad } G)}{U.\text{ grad } G}$$

ce qui pour $\tau > 2$ donne :

$$\frac{dU}{dr} = r^{\tau-2}\,\frac{\text{grad } \varphi - U(U \text{ grad } \varphi)}{2 - \tau + (U \text{ grad } \varphi)\, r^{\tau-1}}$$

à partir de laquelle on raisonnera comme dans le texte.

remplaçant les demi-tangentes par des directions *asymptotiques* orientées issues d'un point fixe et λ étant assez voisin du maximum $G_P(P)$ de $G_P(M)$ dans $\mathcal{E}$.

La démonstration précédente s'adapte en remarquant qu'au voisinage de R_τ^∞ sur l'image, G est de la forme $K - r^{2-\tau} + \sum_{n=1}^{\infty} Y_n r^{2-\tau-n}$ ($r = OM$, Y_n fonction de Laplace) ; on prendra $1/r$ comme paramètre.

22. Étude globale. — Lignes régulières. Mesure de Green. — Une ligne de Green est dite issue du pôle P si le point courant tend vers P quand G tend vers sa borne supérieure sur la ligne, ce qui équivaut à dire que cette borne sur la ligne est celle de G dans $\mathcal{E}$ (c'est-à-dire $+\infty$ si P n'est pas à l'infini). On dira qu'une ligne de Green est ***régulière*** si elle est issue de P et si la borne inférieure de G sur la ligne est o.

Sur l'ensemble $\mathcal{L}$ des lignes de Green issues de P, on choisira la topologie telle qu'il y ait homéomorphisme avec l'espace des demi-droites correspondantes, tangentes ou directions asymptotiques initiales, c'est-à-dire avec la sphère unité S décrite par le point directeur de ces demi-droites. Sur l'espace compact $\mathcal{L}$ on définira ainsi une mesure de Radon dite *mesure de Green* (de total 1) qui vaudra le quotient par σ_τ de la mesure-aire sur S ; elle vaudra donc la mesure harmonique en P relative à tout D_P^λ (assez petit) de la trace sur Σ_P^λ du faisceau de lignes.

Capacité. — Quelques définitions et propriétés. — Dans l'espace de Green $\mathcal{E}$, soit un compact K et la solution u du problème de Dirichlet pour $\mathcal{E} - K$ et la donnée 1 sur $\overset{*}{K}$, o ailleurs. La fonction surharmonique U_K obtenue (par le lemme 2) en prolongeant u quasi partout par 1 sur K est un potentiel de Green dit potentiel capacitaire ; et la distribution de masses associée (dite capacitaire) admet une masse totale dite *capacité* de K (relativement à $\mathcal{E}$) *notée* $\mathcal{C}_K^{\mathcal{E}}$.

Cette *capacité* vaut le flux de u entrant dans un ouvert régulier contenant K, divisé par φ_τ (φ_τ étant le flux de $h(r)$ entrant dans la sphère-unité). Elle est nulle si et seulement si u est nulle, ce qui équivaut à dire que K est polaire. Lorsque K_n décroît et tend vers K, $\mathcal{C}_{K_n}$ décroît et tend vers $\mathcal{C}_K$. Noter que U_K et $\mathcal{C}_K$ restent les mêmes quand on augmente K des domaines composant CK et relativement compacts dans $\mathcal{E}$.

En effet U_K est majorée par $\alpha G_P(M)$ (αC^{te} convenable, $P \in K$) donc admet o comme plus grande minorante harmonique et vaut un potentiel de Green de masses μ sur K. Le flux $\int \frac{du}{dn} d\sigma$ vaut donc $\varphi_\tau \times$ masse totale et le potentiel n'est nul que si $\mu = 0$. Si K est polaire, il est de mesure harmonique nulle pour $\mathcal{E} - K$, c'est-à-dire que $u = 0$; et s'il n'est pas polaire, il admet un point-frontière régulier où u tendrait vers 1.

La croissance de la capacité vient, par différence, du critère (B n° 15) et la propriété de limite vient de la convergence de la solution du problème de Dirichlet par approximation du domaine.

LEMME 9. — *Soit dans l'espace de Green* $\mathcal{E}$ *un compact* K_n, *variable dans un* D_P^λ *fixé (domaine où* $G_P > \lambda$) *et tel que son potentiel capacitaire* U_{K_n} *tende vers* 0 *en* P. *Alors la capacité* $\mathcal{C}_{K_n}$ *tend vers* 0.

Car si μ_n est la distribution capacitaire, la capacité est majorée par

$$\frac{1}{\lambda} \int G_P(M)\, d\mu_n = \frac{1}{\lambda} U_{K_n}(P) \to 0.$$

LEMME 10. — *Soit dans l'espace de Green* $\mathcal{E}$, *un compact* K *de capacité* $\mathcal{C}_K$ *et potentiel compacitaire* U_K. *Alors avec l'intégrale en volume* dv :

$$\int_{\mathcal{E} - K} |\text{grad}\, U_K|^2\, dv \leqslant \varphi_\tau\, \mathcal{C}_K \quad (12)$$

([14]).

Soit Ω_n un domaine très régulier croissant tendant vers $\mathcal{E}$ et ω_n un ouvert très régulier décroissant de limite K. Si v_n est la solution du problème de Dirichlet pour $\Omega_n - \bar{\omega}_n$, la donnée 0 sur $\overset{*}{\Omega}$ et 1 sur $\overset{*}{\omega}_n$, on sait qne dans $\mathcal{E} - K$, $v_n \to U_K$, et grad $v_n \to$ grad U_K d'ailleurs uniformément localement hors des points à l'infini.

Donc $$\int_{\mathcal{E} - K} |\text{grad}\, U_K|^2\, dv \leqslant \text{lim. sup.} \int_{\Omega_n - \bar{\omega}_n} |\text{grad}\, v_n|^2\, dv.$$

Mais par la formule de Green (3), l'intégrale de droite vaut le flux de v_n entrant dans ω_n ou dans ω_1, et tend donc vers le flux de U_K entrant dans ω_1 c'est-à-dire $\varphi_\tau\, \mathcal{C}_K$.

Cas particulier : Si D_P^λ est relativement compact,

$$\int_{\mathcal{E} - \bar{D}_P^\lambda} |\text{grad}\, G|^2\, dv \leqslant \lambda\, \varphi_\tau$$

car la capacité de ce D_P^λ est $1/\lambda$.

([14]) On verra plus loin qu'il y a égalité, d'abord dans le cas particulier qui suit.

Lemme 11. — *Soient dans l'espace de Green $\mathcal{E}$ un D_P^λ relativement compact, et un compact* K *variable dans $\mathcal{E}_1 = \mathcal{E} - \overline{D}_P^\lambda$. L'ensemble des lignes de Green issues de* P *et rencontrant* K *admet une mesure de Green majorée par* $\sqrt{\lambda \mathcal{C}_K^{\mathcal{E}_1}}$.

On se ramène aussitôt en agrandissant le compact à démontrer la même propriété pour les lignes rencontrant l'intérieur $\mathring{K}$ d'un tel compact. Considérons alors l'ensemble (ouvert dans $\mathcal{L}$) des lignes de Green issues de P et rencontrant $\mathring{K}$. On peut le considérer comme réunion dénombrable d'ensembles fermés dans $\mathcal{L}$, correspondant à des tubes réguliers d'intérieurs disjoints, limités chacun par un morceau a_i de Σ_P^λ et par un morceau b_i de sphère de Green $\Sigma_P^{\lambda_i}$ contenu dans $\mathring{K}$.

On fera la réunion de ces b_i et on prendra son adhérence B, contenue dans K et qui au voisinage d'un point quelconque de $\mathring{b}_i$ (intérieur de b_i relativement à $\Sigma_P^{\lambda_i}$) ne contient que des points de b_i. On utilisera le potentiel capacitaire $U_B^{\mathcal{E}_1}$ de B dans $\mathcal{E}_1$.

Pour un tube régulier θ de bases a'_i, b'_i contenues comme leurs adhérences dans les $\mathring{a}_i \mathring{b}_i$ on aura

$$\int_{a'_i} \frac{dG}{dn} d\sigma = \int_{b'_i} U_B^{\mathcal{E}_1} \frac{dG}{dn} d\sigma = -\int_\theta (\text{grad } G, \text{grad } U_B^{\mathcal{E}_1})\, dv.$$

La formule s'étend par passage à la limite au tube de bases $a_i b_i$ puisque les carrés des deux gradients sont sommables dans ce tube et même dans $\mathcal{E}_1 - $ B. Par sommation ou obtient donc pour le flux total du faisceau de lignes considéré la majoration

$$\sqrt{\int_{\mathcal{E}_1 - B} |\text{grad } G|^2 dv}\ \sqrt{\int_{\mathcal{E}_1 - B} |\text{grad } U_B^{\mathcal{E}_1}|^2 dv}$$

d'où le résultat.

Lemme 12. — *Dans un domaine de* R^τ, *considérons un nombre fini de fonctions analytiques non toutes nulles des variables réelles* $x_1, x_2 \ldots x_\tau$. *L'ensemble* E *des points où elles sont simultanément nulles est formé d'une réunion dénombrable de points, d'arcs ouverts, de variétés à* $\alpha \leqslant \tau - 1$ *dim pour chacune desquelles* $\tau - \alpha$ *coordonnées sont fonctions analytiques des* α *autres (ces dernières variant dans un domaine de* R^α). *Si parmi ces variétés, aucune n'est à* $\tau - 1$ *dimensions, l'ensemble* E *est polaire.*

Cas particulier : L'ensemble des points où le gradient d'une fonction analytique non constante dans un domaine est nul, est polaire.

La première partie de l'énoncé est connue ([15]). La suite vient de ce que si l'on charge une variété du type indiqué à $\alpha < \tau - 1$ dim $(\tau > 2)$ par une distribution de masses identique à la mesure de Lebesgue dans l'espace R^{α}, le potentiel newtonien en $r^{2-\tau}$ est infini sur cette variété.

Le cas particulier résulte de ce que, si le gradient était nul sur une variété à $\tau - 1$ dim. du type indiqué, la fonction y serait constante tandis que la dérivée normale serait nulle, d'où la constante de la fonction dans son domaine d'existence.

THÉORÈME 23. — *Les lignes de Green rencontrant deux sphères de Green* $\Sigma_P^{\lambda_1}$ $\Sigma_P^{\lambda_2} (\lambda_1 \neq \lambda_2)$ *établissent entre les ensembles de leurs traces,* Σ'^{λ_1} *et* Σ'^{λ_2} (*ouverts sur* Σ^{λ_1} *et* Σ^{λ_2}) *un homéomorphisme conservant les mesures harmoniques* ([16]) *en* P (*relatives à* $D_P^{\lambda_1}$ *et* $D_P^{\lambda_2}$) *c'est-à-dire conservant le flux* $\int \frac{dG}{dn} d\sigma$; *et* Σ'^{λ_1}, Σ'^{λ_2} *sont de mesures harmoniques respectives égales à* 1.

Les lignes de Green issues de P *qui traversent un* Σ^{λ} *forment un ouvert* $\mathcal{L}^{\lambda}$ *de* $\mathcal{L}$ *et établissent entre* $\mathcal{L}^{\lambda}$ *et l'ensemble des traces sur* Σ^{λ} *un homéomorphisme avec égalité de la mesure de Green et de la mesure harmonique en* P *relative à* D_P^{λ}, *proportionnelle au flux* $\int \frac{dG}{dn} d\sigma$; *et* $\mathcal{L} - \mathcal{L}^{\lambda}$ *est de mesure de Green nulle* ([17]).

Donc les lignes régulières (*qui traversent tout* Σ^{λ}) *forment dans* $\mathcal{L}$ *un ensemble* $\mathcal{L}'$ *qui est une intersection dénombrable d'ouverts ;* $\mathcal{L}'$ *est de mesure de Green égale à* 1 ; *autrement dit au sens de la mesure de Green, presque toutes les lignes de Green issues du pôle sont régulières.*

La correspondance de Σ'^{λ_1} Σ'^{λ_2} a été précisée davantage au lemme 8 et la conservation de la mesure harmonique ou du flux vient, comme dans la démonstration du théorème 22-22′, de la notion de flux d'un tube régulier. En prenant Σ^{λ_1} assez petit, le théorème 22-22′ nous fournit les propriétés analogues de la correspondance entre $\mathcal{L}$ et Σ^{λ}. Il suffira pour achever de voir que $\mathcal{L} - \mathcal{L}^{\lambda}$ est de mesure de Green nulle, cela entraînant que les Σ'^{λ_1} et Σ'^{λ_2} quelconques de la

([15]) Voir LEFSCHETZ, Topology, *Am. Math. public.*, Vol. XII, New-York, 1930, p. 362.

([16]) Répétons que la nullité d'une telle mesure harmonique sur Σ'^{λ} équivaut à celle de la mesure superficielle de Lebesgue (sur l'image de la sphère de Green) puisque $\frac{dG}{dn} > 0$.

([17]) On peut se demander si les points d'un petit Σ_P^{ε}, correspondant aux lignes de $\mathcal{L} - \mathcal{L}^{\lambda}$ ne formeraient pas un ensemble *polaire*, comme il est connu dans le cas de domaines plans simplement connexes d'après les travaux de Dufresnoy.

première partie de l'énoncé soient de mesures harmoniques égales à 1.

On se ramène à considérer Σ^{λ_1} assez petit (dans un voisinage ouvert de P, où hors P il n'y a ni point à l'infini ni zéro du grad G) et on introduira $\mathcal{E}_1 = \mathcal{E} - D_P^{\lambda_1}$. On considère Σ^{λ_1} quelconque ($\lambda_2 < \lambda_1$) et on va voir que $\Sigma^{\lambda_1} - \Sigma'^{\lambda_1}$ est de mesure harmonique nulle pour $D_P^{\lambda_1}$. Considérons les lignes de Green passant par les points de Σ^{λ_1} c'est-à-dire toutes les lignes de Green issues de P et soit Ω_n un domaine croissant relativement compact dans $\mathcal{E}$, de limite $\mathcal{E}$, avec $\overline{\Omega}_n < \Omega_{n+1}$. Pour chacune des lignes considérées, ou bien elle contient un point extérieur à $\Omega_n \cap D_P^{\lambda_2}$ c'est-à-dire traverse Σ^{λ_2} (cas noté α) ou contient un point de $(\Omega_{n+1} - \overline{\Omega}_n) \cap D_P^{\lambda_2}$ (cas β), ou bien elle admet comme valeur d'adhérence du point M quand G tend vers sa borne inférieure un point adhérent à $D_P^{\lambda_2} \cap \Omega_n$ et qui est nécessairement un point à l'infini (cas γ) ou un zéro de grad G (cas δ).

Nous allons voir que les lignes des cas (γ) (δ) forment des ensembles de mesure de Green nulle, et celles du cas (β) un ensemble de mesure de Green tendant vers 0 quand $n \to \infty$, ce qui montrera bien que presque toutes les lignes de Green traversent Σ^{λ_2}.

Le cas δ se traite aussitôt en remarquant que tout ensemble compact de zéros de grad G, polaire d'après le lemme 12, est intérieur à un compact de $\mathcal{E}_1$ de capacité arbitrairement petite relative à $\mathcal{E}_1$. Le lemme 10 résout alors la question.

Dans le cas (γ) considérons les lignes pénétrant dans un voisinage ouvert sphérique (circulaire) d'un point Q à l'infini (c'est-à-dire dans l'extérieur d'un domaine sphérique sur l'image) ; celles qui rencontrent la surface sphérique limitante non tangentiellement forment un faisceau qu'on décomposera encore en une infinité de tubes (compacts et d'intérieurs disjoints) réguliers, dont le flux est l'intégrale de $\dfrac{dG}{dn}$ sur la section sphérique ; comme au voisinage de Q, G est de la forme, sur l'image, $C^{te} + \sum\limits_{n=1}^{\infty} Y_n r^{2-\tau-n}$, le gradient y est majoré par $\theta r^{-\tau}$ ($\theta = C^{te}$) et l'intégrale considérée est arbitrairement petite pour une sphère assez grande. De même pour la somme des flux, c'est-à-dire pour la mesure de Green des lignes pénétrantes non tangentes. Quant aux autres, elles passent par certains des points de la sphère où le gradient est (nul ou) tangent ; il suffit de voir que ces points forment un compact polaire (lemme 12). La condition de tangence est $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (2 - \tau - n) \dfrac{Y_n r^n}{r^{2n+\tau-1}} = 0$ où le premier membre est analytique.

D'après le lemme 12 appliqué à cette équation et à $r = C^{te}$, il suffit de voir que sur aucune portion ouverte de la sphère le dernier Σ est nul. Sinon en effet, par raison d'analyticité, la nullité aurait lieu sur toute la sphère, d'où la nullité des Y_n (par le raisonnement d'unicité du développement en série uniformément convergente de fonctions de Laplace).

Enfin, dans le cas (β) on considère le compact K_n, adhérence dans $\mathcal{E}$ de $(\Omega_{n+1} - \overline{\Omega}_n) \cap D_P^{\lambda_2}$; il est situé dans l'espace de Green $D_P^{\lambda_3}$ ($\lambda_3 < \lambda_2$) dont $G - \lambda_3$ est fonction de Green (d'après le théorème 15) et majore $\lambda_2 - \lambda_3$ sur K_n. $D_P^{\lambda_3} - \overline{D_P^{\lambda_1}}$ est un espace de Green ω ; sa fonction de Green de pôle fixé Q majore $\alpha(G_P^{\mathcal{E}} - \lambda_3)$ (α C^{te} convenable > 0) hors Ω_n (n assez grand) (par application du théorème 6′) donc majore un nombre > 0 sur K_n pour n assez grand. Pour appliquer le lemme 10 à ω et K_n, voyons que la solution du problème de Dirichlet pour $\omega - K_n$, la donnée 1 sur K_n et 0 ailleurs tend vers 0 ; cette solution est en effet majorée par celle relative à $D_P^{\lambda_3} \cap \Omega_n$, la donnée 1 sur $\overset{*}{\Omega}_n \cap D_P^{\lambda_3}$ et 0 ailleurs et celle-ci tend bien vers 0 d'après le corollaire du théorème 16. Ainsi par le lemme 9 la capacité de K_n relative à ω tend vers 0. En prenant $D_P^{\lambda_3}$ comme espace $\mathcal{E}$ du lemme 11, on obtient la propriété cherchée des lignes de Green du cas β.

Corollaire 1. — *Les points de $\mathcal{E}$, non à l'infini et n'appartenant pas à une ligne de Green régulière forment un ensemble qui est localement de mesure de Lebesgue nulle.*

C'est évident pour les points où $\operatorname{grad} G \neq 0$ (d'après le lemme 12). Quant aux autres, leur ensemble coupe toute sphère de Green suivant un ensemble de mesure harmonique correspondante nulle, donc de mesure superficielle nulle ; d'où la mesure spatiale nulle.

Corollaire 2. — *Le cas particulier du lemme 10 se précise : si D_P^λ est relativement compact* $\int_{\mathcal{E} - \overline{D_P^\lambda}} |\operatorname{grad} G|^2 \, dv = \lambda \varphi_\tau$.

Il reste à montrer que le premier membre majore le second. Or on minore le premier membre en étendant l'intégrale à l'ensemble des points des lignes de Green issues de P, traversant $\Sigma_P^{\lambda_0}$ (λ_0 arbitrairement petit) et limitées à Σ_P^λ et $\Sigma_P^{\lambda_0}$. On décompose en tubes réguliers dont chacun, de base notée α sur Σ_P^λ, donne l'intégrale $(\lambda - \lambda_0) \int \frac{dG}{dn} d\sigma$.
La somme des flux à travers les α vaut φ_τ d'après le théorème précédent, d'où la minoration par $(\lambda - \lambda_0)\varphi_\tau$ arbitrairement voisine de $\lambda\varphi_\tau$.

23. — THÉORÈME 24. — *Soit dans un espace $\mathcal{E}$ une fonction Φ bornée continue > 0 hors des points à l'infini et prenons les intégrales au sens précisé au n° 6 (avec un ds^2 bien fixé dans le cas d'un $\mathcal{E}_c$). On suppose que l'intégrale en volume $\int_{\mathcal{E}} \Phi^2\, dv$ soit finie (il est aisé de construire de telles Φ). Soit Ω un sous-domaine de Green; attachons à chaque ligne de Green l issue d'un pôle P l'intégrale $L_l = \int_l \Phi\, ds$ le long de cette ligne et à chaque sphère de Green Σ_P^λ l'intégrale de surface $S_\Sigma = \int_{\Sigma_P^\lambda} \Phi\, d\sigma$. Alors L_l est sommable pour la mesure de Green, donc presque toutes les lignes de Green issues de P ont un L_l fini; et S est sommable en λ, donc presque toutes les Σ_P^λ ont un S_Σ fini. Remarquer que dans le cas d'un espace $\mathcal{E}_i$ et d'un Ω de volume fini, on peut prendre $\Phi = 1$ sur Ω et les L_l, S_Σ deviennent les longueurs et aires euclidiennes.*

En effet, en choisissant un petit $D_P^{\lambda_0}$ relativement compact dans $\mathcal{E}$

$$(13) \quad \int_{\Omega - \bar{D}_P^{\lambda_0}} \Phi |\text{grad } G| dv \leqslant \sqrt{\int \Phi^2\, dv} \sqrt{\int_{\Omega - \bar{D}_P^{\lambda_0}} |\text{grad } G|^2 dv} \text{ fini}^{(18)}$$

on en déduit que $\int_\Omega \Phi |\text{grad } G| dv$ est fini, que P soit ou non à l'infini.

Cette intégrale majore celle I étendue à l'ensemble (ouvert) des points des arcs (ouverts) des lignes de Green rencontrant $\Sigma_P^{\lambda_1}$ et limitées à cette sphère de Green. En prenant comme variables sur cet ensemble le point d'appui de la ligne sur le petit $\Sigma_P^{\lambda_0}$, point qui décrit un ouvert de $\Sigma_P^{\lambda_0}$ (et presque tout $\Sigma_P^{\lambda_0}$ au sens de la mesure harmonique μ sur $\Sigma_P^{\lambda_0}$) et la mesure algébrique de l'arc de Green à partir de $\Sigma_P^{\lambda_0}$, on voit que l'intégrale I devient $\varphi_\tau \int \Phi\, d\mu\, ds$ ou $\varphi_\tau \int \left(\int \Phi\, ds\right) d\mu$. La majoration initiale subsiste pour la limite pour $\lambda_1 \to 0$, limite valant $\varphi_\tau \int L\, d\mu$ qui est donc finie.

Si l'on prend comme variable, au lieu de s, la valeur λ de G on trouve de même que l'intégrale $\int_\Omega \Phi |\text{grad } G| dv$ majore (et même vaut) $\int S_\Sigma\, d\lambda$ qui est donc finie.

COROLLAIRE. — *Pour $\Omega \subset \mathcal{E}$, presque toutes les lignes de Green régulières issues de P admettent pour $G \to 0$ un point-limite dans*

(18) En supposant $\int \Phi dv$ fini, on pourrait aussi majorer, selon une idée d'Evans, par $\int \Phi(1 + |\text{grad } G|^2) dv$ (ou même la moitié) et achever de même.

l'espace $\mathcal{E}'$ (espace défini au n° 12, et qui est $\mathcal{E}$ lui-même si $\mathcal{E}$ est compact, sinon qui est $\mathcal{E} \cup \mathcal{A}$).

Voyons que toute ligne régulière admettant un L fini a une limite pour $G \to 0$. Sinon effet il y aurait une valeur d'adhérence Q dans $\mathcal{E}$ et une seconde différente, dans $\mathcal{E}$ ou en $\mathcal{A}$. Considérons dans $\mathcal{V}_Q$ un voisinage w_1 arbitrairement petit mais fixé, sphérique sur l'image (extérieur ou intérieur d'une sphère selon que Q est à l'infini ou non) et un second w_2 analogue concentrique tel que $\overline{w}_2 \subset w_1$. On voit que la ligne de Green considérée admettrait une infinité d'arcs joignant chacun un point de $\overset{*}{w}_1$ et un point de $\overset{*}{w}_2$, situés dans $w_2 - w_1$. Chacun d'eux aurait un $\int \Phi\, ds$ majorant un même nombre d'après l'hypothèse sur Φ et la métrique adoptée ; et cela est contraire à la propriété de L fini.

24. — *Quelques extensions.* — L'étude précédente, suggère diverses extensions. Nous nous limiterons aux suivantes qui s'établissent en adaptant les démonstrations précédentes :

Considérons l'espace de Green $\mathcal{E}$, son point d'Alexandroff $\mathcal{A}$ et la topologie de $\mathcal{E}' = \mathcal{E} \cup \mathcal{A}$. Soit dans $\mathcal{E}$ un compact K non polaire de complémentaire connexe et U_K son potentiel capacitaire. Les points de $\mathcal{E} - K$ où $U_K = \lambda$ $(0 < \lambda < 1)$, non à l'infini et où grad $U_K \neq 0$ forment une surface régulière S_K^λ (ou S^λ). On introduira dans $\mathcal{E} - K$ les trajectoires orthogonales de ces surfaces, c'est-à-dire les arcs, analogues aux arcs de Green, tangents à grad U_K et orientés comme lui ; les arcs maximaux seront appelés lignes (U_K) ; une telle ligne sera dite régulière si les bornes de U_K y sont 0 et 1. Par tout point de S^λ passe une ligne unique (U_K) et presque toutes (au sens de la mesure superficielle de Lebesgue sur l'image locale de S^λ) sont régulières. Les lignes régulières établissent entre S^{λ_1} et S^{λ_2}, à des ensembles de mesure superficielle nulle près, un homéomorphisme conservant $\int \frac{dU_K}{dn} d\sigma$. Cette intégrale indéfinie sur S^λ est d'ailleurs le produit par φ_τ de la distribution de masses ν_λ associée à la fonction surharmonique Inf (U_K, λ) ; la masse totale de ν_λ vaut la capacité de K relativement à $\mathcal{E}$.

Considérons en effet les lignes U_K issues des points d'un ensemble α ouvert sur S^{λ_1} et d'adhérence $\bar{\alpha} \subset \mathcal{E}$ (par exemple de complémentaire connexe) ; étudions l'allure d'un point courant lorsque U_K tend vers la borne inférieure b_l sur la ligne l ou sa borne supérieure B_l ; dans le premier cas on examinera pour $b_l > 0$ le cas d'une valeur d'adhérence en un point à l'infini, en un zéro de grad U_K ou en $\mathcal{A}$. $\mathcal{E} - \bar{\alpha}$ pourra remplacer le $\mathcal{E}_1 = \mathcal{E} - \overline{D}_P^{\lambda_1}$ de la démonstration du théorème 23, tandis que $D_P^{\lambda_2} - \overline{D}_P^{\lambda_1}$ et $D_P^{\lambda_3} - \overline{D}_P^{\lambda_1}$ seront remplacés par $\Delta_K^{\lambda_2} - \bar{\alpha}$ et $\Delta_K^{\lambda_3} - \bar{\alpha}$ $(\lambda_3 < \lambda_2 < \lambda_1)$, où Δ_K^{λ} désigne l'ouvert où $U_K > \lambda$, d'ailleurs connexe et contenant K (ou tout autre compact donné à l'avance) si λ est assez petit (voir n° 13, propriété 5), ce qu'on pourra supposer pour λ_3. On remarquera que $\mathcal{A}$ est de mesure harmonique nulle pour $\Delta_K^{\lambda_3}$ et que la fonction de Green de $\Delta_K^{\lambda_3} - \bar{\alpha}$ de pôle fixé, majore U_K au voisinage de $\mathcal{A}$, à un facteur numérique près. On aura la circonstance nouvelle de valeurs d'adhérence possibles sur $\overset{*}{K}$, mais ce sont des points d'effilement de K; ils forment donc un ensemble polaire contenu dans une réunion dénombrable de compacts polaires; il est même d'ailleurs d'adhérence compacte polaire; on peut donc traiter ces points comme des zéros de grad U_K. L'étude relative à la borne supérieure B_l se fera de manière analogue.

Quant aux masses ν_λ, elles ne chargent que S^λ et le total est donc indépendant de λ. Pour voir que c'est la capacité de K, il n'y a qu'à prendre λ assez voisin de l pour que $\overline{\Delta_K^\lambda} \subset \mathcal{E}$.

Corollaire. — En adaptant le raisonnement du corollaire 2 du théorème 23, on pourra compléter le lemme 10 en montrant l'inégalité

$$\int_{\mathcal{E}-K} |\text{grad } U_K|^2 dv = \varphi_\tau \mathcal{C}_K.$$

Enfin, grâce à la sommabilité de $|\text{grad } U_K|^2$, le théorème 24 s'étend aussitôt; pour les lignes régulières (U_K), le (L_l) est sommable par rapport à la mesure ν_λ, tandis que le (S) de S^λ est sommable en λ.

D'où la convergence dans l'espace $\mathcal{E}'$ de presque toutes les lignes régulières (au sens du presque partout pour leur point d'appui sur une S^λ) quand $U_K \to 0$ ou $U_K \to 1$.

Remarque. — Si la frontière $\overset{*}{K}$ est formée partiellement d'une surface régulière σ_0 dont $\mathcal{E} - K$ est localement d'un seul côté, il part de chaque point une ligne U_K et presque toutes (sur σ_0) sont régulières et établissent avec une partie de S^λ un homéomorphisme conservant $\int \frac{dU_K}{dn} d\sigma$ (ce qui sur σ_0 est proportionnel à la distribution capacitaire).

De même si l'espace de Green est une partie Ω d'un espace $\mathcal{E}_0$, supposons que la frontière de Ω dans $\mathcal{E}_0$ soit en partie une surface régulière σ_0 dont Ω est localement d'un seul côté; en presque tous les points de σ_0 aboutit une ligne régulière et ces lignes établissent avec une partie d'un S^λ un homéomorphisme conservant $\int \frac{dU_K}{dn} d\sigma$. On examinera facilement les cas analogues où $\mathcal{E} - K$ ou Ω sont des deux côtés de σ_0.

Une *autre extension* qui est aussi une application de la théorie consiste à considérer dans $\mathcal{E}$, $u(M) = G_{P_1}(M) - G_{P_2}(M)$ et les lignes tangentes à grad u. On montre que les ensembles où $u > 0$ et $u < 0$ sont des domaines dont u et $-u$ sont fonctions de Green de pôles P_1 et P_2. On explicitera aisément des propriétés de ces lignes en appliquant la théorie des lignes de Green aux domaines précédents, en considérant la frontière commune et les lignes qui la traversent en allant d'un pôle à l'autre.

Enfin, dans un $\mathcal{E}$ non greenien, on pourra considérer d'après la fin du n° 15 la fonction unique v à une constante près, harmonique et bornée hors des voisinages de deux points $P_1 \neq P_2$, respectivement surharmonique et sousharmonique dans ces voisinages avec masses associées réduites à $+1$ et -1 en ces points. On montrera que v atteint ses bornes seulement en P_1 et P_2 (même si les points sont à l'infini) et on considérera les domaines de Green où $u > k$ et $u < k$ (k étant un nombre strictement compris entre ces bornes). L'étude des lignes tangentes à grad v se ramène encore à celle des lignes de Green dans ces domaines, mais presque toutes les lignes issues d'un pôle vont à l'autre.

V. — PRINCIPE DU MAXIMUM ET MESURE DE GREEN

25. *Notations et lemme 13.* — *Considérons dans l'espace de Green $\mathcal{E}$ les lignes de Green régulières issues d'un pôle* P. *Pour une fonction réelle u dans $\mathcal{E}$, notons u_l^λ sa valeur sur la ligne régulière l au point où $G_P = \lambda$ et posons*

$$u_l = \limsup_{\lambda \to 0} u_l^\lambda \quad et \quad \overset{(\lambda_n)}{u_l} = \limsup_{n \to \infty} u_l^{\lambda_n} \leqslant u_l (\lambda_n \text{ suite fixée} > 0, \to 0).$$

Si u est sousharmonique et bornée supérieurement ([19]), *sa plus petite majorante harmonique $\overset{*}{u}$ admet la majoration :*

$$(14) \qquad \overset{*}{u}(P) \leqslant \int \overset{(\lambda_n)}{u_l}\, dg(l) \leqslant \int u_l\, dg(l)$$

où g est la mesure de Green.

([19]) Noter que la fonction u_l de l dans $\mathcal{L}'$ est ici borélienne (de troisième classe au plus).

Considérons pour le domaine D_P^λ dans l'espace $\mathcal{E}' = \mathcal{E} \cup \mathcal{A}$ la solution du problème de Dirichlet pour la donnée-frontière égale à u sur la sphère de Green Σ_P^λ et arbitraire en $\mathcal{A}$, solution qu'on notera $H_u^{D_P^\lambda}$. Grâce au théorème fondamental (23) :

$$H_u^{D_P^\lambda}(P) = \int u_l^\lambda dg(l)$$

Or
$$\limsup_{n \to \infty} \int u_l^{\lambda_n} dg(l) \leqslant \int \overset{(\lambda_n)}{u_l} dg(l) \leqslant \int u_l dg(l).$$

D'autre part, si Ω_n est un domaine tendant en croissant vers $\mathcal{E}$, avec $\overline{\Omega}_n \subset \mathcal{E}$, $H_u^{\Omega_n}$ tend en croissant vers $\overset{*}{u}$; et on remarquera que pour n fixé, on a pour λ assez petit $\Omega_n \subset D_P^\lambda$ d'où $H_u^{\Omega_n}(P) \leqslant H_u^{D_P^\lambda}$ parce que le premier membre prolongé par u est quasi-sousharmonique. D'où le résultat. On peut alors améliorer le théorème 18 selon le principe fondamental :

Théorème 25. — *Soit dans l'espace de Green $\mathcal{E}$ une fonction sousharmonique u bornée supérieurement, telle que u_l (ou même seulement, pour λ_n fixée, la fonction $\overset{(\lambda_n)}{u_l}$) soit $\leqslant 0$ presque partout sur $\mathcal{L}'$ (ensemble des lignes de Green régulières issues d'un pôle* P). *Alors $u \leqslant 0$.*

Car si on considère u^+, sa plus petite majorante harmonique est en P majorée par

$$\int \overset{(\lambda_n)}{(u^+)_l} dg_l = \int \overset{(\lambda_n)}{[u_l]}^+ dg(l) \leqslant 0.$$

Cette majorante harmonique, $\geqslant 0$ et nulle en P est partout nulle. Sous une forme voisine c'est le « *principe de maximum* » : *La borne supérieure d'une fonction sousharmonique u bornée supérieurement dans l'espace de Green $\mathcal{E}$ est égale à la borne supérieure, même en mesure de Green, de ses u_l $\left(\text{ou de ses } \overset{(\lambda_n)}{u_l} \text{ pour toute suite } (\lambda_n)\right)$.*

Application. — Donnons sur l'ensemble $\mathcal{L}'$ des lignes de Green régulières issues d'un pôle P dans l'espaee de Green $\mathcal{E}$, une fonction réelle $f(l)$. Considérons les fonctions u dans $\mathcal{E}$ valant $-\infty$ ou sousharmoniques, dont chacune est bornée supérieurement et telle que

(15) $\qquad u_l \leqslant f(l)$ *presque partout sur* $\mathcal{L}'$.

Elles ont une enveloppe supérieure notée $\underline{\mathcal{G}}_f^{\mathcal{E}}$ valant $+\infty$, $-\infty$ ou

harmonique et on introduira de même $\overline{\mathcal{G}}_f^{\mathcal{E}}$ qui vaut $-\underline{\mathcal{G}}^{\mathcal{E}}_{(-f)}$.
En remplaçant la condition (15) par:

(15') $\overset{(\lambda_n)}{u_l} \leqslant f(l)$ presque partout (et relativement à une suite fixée λ_n)

on obtiendra l'enveloppe $\underline{\overset{(\lambda_n)}{\mathcal{G}}}_f$ avec propriétés analogues.

Enfin : (16) $$\underline{\mathcal{G}}_f \leqslant \underline{\overset{(\lambda_n)}{\mathcal{G}}}_f \leqslant \overline{\overset{(\lambda_n)}{\mathcal{G}}}_f \leqslant \overline{\mathcal{G}}_f$$

et (17) $$\underline{\overset{(\lambda_n)}{\mathcal{G}}}_f(\mathrm{P}) \leqslant \underline{\int} f\,dg(l)$$ [20].

La nature des enveloppes vient comme pour les $\underline{\mathrm{H}}$ et $\overline{\mathrm{H}}$, du lemme 1. L'inégalité (16) vient du principe du maximum ou de (17) qui résulte du lemme 13.

Théorème 26. — *Soit dans l'espace de Green $\mathcal{E}$, u sousharmonique bornée supérieurement. L'ensemble des lignes de Green régulières issues d'un pôle* P *sur lesquelles $u_l = -\infty$ (ou seulement $\overset{(\lambda_n)}{u_l} = -\infty$ pour une suite λ_n) est de mesure de Green nulle. Plus généralement soit dans $\mathcal{E}$, u_p sousharmonique ou $-\infty$, $\leqslant$ A fini fixé. Si pour $p \to \infty$ $(u_p)_l$ $\left(\text{ou seulement } \overset{(\lambda_n)}{(u_p)_l}\right)$ tend vers $-\infty$ sur un ensemble de mesure de Green > 0, $u_p \to -\infty$ (d'ailleurs uniformément sur tout compact de $\mathcal{E}$).*

Dans ce second énoncé qui contient le premier (en prenant les u_p égaux) on se ramène au cas des u_p sousharmoniques. Alors

$$\overset{*}{u}_p(\mathrm{P}) \leqslant \int \overset{(\lambda_n)}{(u_p)_l}\, dg(l)$$

d'où le résultat.

Extension. — On peut dans les deux théorèmes précédents et leurs conséquences explicitées (sauf l'inégalité (17)) *remplacer les lignes de Green régulières issues d'un pôle par les lignes* ($\mathrm{U_K}$) *régulières* (*voir n° 24*) *et la mesure de Green par la mesure ν_{λ_0} sur un S^{λ_0} fixé.*

(20) Pour f définie sur le compact $\mathcal{L}$, l'intégrale inférieure $\underline{\int} f\,dg$ est la borne supérieure des $\int \varphi\,dg$ pour φ bornée supérieurement $\leqslant f$, et semi-continue supérieurement ou encore seulement mesurable. Si f n'est définie que presque partout (par exemple sur $\mathcal{L}'$) son intégrale inférieure est celle d'un prolongement, ce qui ne dépend pas de ce prolongement. Notion analogue pour $\overline{\int} f\,dg = -\underline{\int}(-f)\,dg \geqslant \underline{\int} f\,dg$.

On voit aisément en effet que $G_Q^{\Delta_K^\lambda}(M)/(U_K(M)-\lambda)$ est pour λ assez petit (Q et K fixés) compris entre deux nombres > 0 indépendants de λ hors d'un compact de $\mathcal{E}$ dont l'intérieur contient Q et K. D'où la même limitation pour le rapport des dérivées normales à S^λ. Donc pour u sousharmonique $\leqslant$ A fini fixé,

$$(18) \qquad H_{u^+}^{\Delta_K^\lambda}(Q) \leqslant a \int_{S^\lambda} \frac{dU_K}{dn} u^+ d\sigma$$

et si $u \leqslant 0$,
$$(19) \qquad H_u^{\Delta_K^\lambda}(Q) \leqslant b \int_{S^\lambda} \frac{dU_K}{dn} u d\sigma$$

(dérivées normales > 0; a, b constantes indépendantes de u). On adapte alors les raisonnements qui précèdent en se ramenant à des intégrales sur un S^{λ_0} fixé.

26. — *Application aux fonctions holomorphes sur une surface de Riemann hyperbolique.*

Théorème 27. — Soit $f(z)$ holomorphe sur une telle surface $\mathcal{E}$. Le principe du maximum étendu s'applique à $|f(z)|$ sousharmonique. De plus $\log |f(z)|$ étant $-\infty$, ou sousharmonique, on voit que si $|f(z)|$ tend vers zéro avec $\lambda = G_P$ sur des lignes de Green régulières issues de P formant un ensemble de mesure de Green extérieure > 0 (même seulement pour une suite $\lambda_n \to 0$), alors $f(z) \equiv 0$. Même énoncé avec les lignes régulières (U_K) et la mesure $\text{-}\nu_{\lambda_0}$.

Soit encore $f_n(z)$ une suite de fonctions holomorphes de module $\leqslant$ A fini fixé; supposons que $f_n(z)$ admette une limite φ_n lorsque $\lambda = G_P$ tend vers 0 (même seulement dans une même suite λ_n fixée) sur chaque ligne d'un ensemble α de lignes régulières de Green issues de P, α étant de mesure de Green extérieure > 0; enfin supposons que φ_n ait sur α une limite. Alors $f_n(z)$ a une limite dans $\mathcal{E}$ (cette convergence est nécessairement localement uniforme et la limite est holomorphe). Même énoncé avec les lignes régulières (U_K) et la mesure $\text{-}\nu_{\lambda_0}$.

Car quel que soit l'entier p_n fonction de n, $\log|f_{n+p_n}(z) - f_n(z)|$ tend vers $-\infty$ en tout z, donc $|f_{n+p}(z) - f_n(z)| \to 0$ pour $n \to \infty$ indépendamment de p. Il y a donc pour $f_n(z)$ convergence simple et par suite uniforme localement.

VI. — EXTENSION GÉNÉRALE DU PROBLÈME DE DIRICHLET CAS PARTICULIERS RAMIFIÉ ET GÉODÉSIQUE

27. — *Soit un espace de Green* $\mathcal{E}$. *On notera* $\overline{\mathcal{E}}$ *un espace métrisable dont une partie partout dense est homéomorphe à* $\mathcal{E}$ *et sera par la suite identifiée à* $\mathcal{E}$. *La frontière de* $\mathcal{E}$ *sera* $\overset{*}{\mathcal{E}} = \overline{\mathcal{E}} - \mathcal{E}$. *On suppose l'existence sur* $\mathcal{E}$ *d'une famille* $\mathfrak{F}$ *de filtres* $\mathcal{F}$ *convergents vers des points de* $\overset{*}{\mathcal{E}}$ *et satisfaisant aux conditions suivantes :*

Condition globale A (*principe de maximum*) : *Si u sousharmonique et bornée supérieurement admet une lim. sup.* $\leqslant 0$ *selon chacun de ces filtres,* $u \leqslant 0$.

Condition locale B (dite de *convergence régulière* des $\mathcal{F}$, et qui entraîne la régularité des $\mathcal{F}$) : *Pour chaque* $\mathcal{F}$ *il existe un voisinage ouvert* $\mathcal{W}$ *du point de convergence* Q *et une fonction surharmonique* $v > 0$ *sur* $\mathcal{W} \cap \mathcal{E}$, *tendant vers* 0 *selon cet* $\mathcal{F}$, *et de borne inférieure* > 0 *hors de tout voisinage de* Q.

Cela équivaut à ce que pour chaque $\mathcal{F}$ *et pour un voisinage ouvert arbitrairement petit de son point de convergence (et par suite pour tous les voisinages ouverts) l'intersection* ω *de ce voisinage avec* $\mathcal{E}$ *jouisse de la propriété suivante : la mesure harmonique de* $\overset{*}{\omega} \cap \mathcal{E}$ *relative à* ω (*au sens du problème de Dirichlet ordinaire pour ouverts de* $\mathcal{E}$) *tend vers* 0 *selon cet* $\mathcal{F}$.

La première forme de B entraîne la 2^e par majoration de la mesure harmonique au moyen d'une fonction surharmonique tendant vers 0 selon $\mathcal{F}$.

La 2^e forme donne en prolongeant par I la mesure harmonique, une fonction v quasi surharmonique qu'on régularisera selon $\hat{v}$. Considérons un système fondamental dénombrable de voisinages et les $\hat{v}_n$ correspondants. On voit que $\Sigma \frac{1}{n^2} v_n$ remplit la première forme de condition. Noter qu'elle est *surharmonique dans* $\mathcal{E}$ *tout entier*.

Une forme équivalente à la première et d'apparence plus faible est qu'il existe dans tout voisinage ouvert W arbitrairement petit de Q une fonction surharmonique $v > 0$ dans $W \cap \mathcal{E}$ tendant vers 0 selon $\mathcal{F}$ et de borne inférieure > 0 hors d'*un* voisinage d'adhérence contenue dans W. Car cela suffit à entraîner la seconde forme.

Nous allons très brièvement adapter à $\mathcal{E}$ et à sa frontière $\overset{*}{\mathcal{E}}$ la théorie antérieure du problème de Dirichlet, en utilisant essentiellement la topologie de $\overline{\mathcal{E}}$.

28. — Enveloppes fondamentales. — Soit f réelle quelconque sur $\mathcal{E}$; considérons les fonctions u valant $-\infty$ ou sousharmoniques, chacune étant bornée supérieurement, dont la $\limsup\limits_{M\in\mathcal{E},\, M\to Q} u \leqslant f(Q)$ en chaque $Q \in \overset{*}{\mathcal{E}}$. On notera $\underline{\mathcal{H}}_f\,\mathcal{E}$ ou brièvement $\underline{\mathcal{H}}_f$ l'enveloppe supérieure qui est $+\infty$, $-\infty$ ou harmonique. Définition analogue de $\overline{\mathcal{H}}_f$ d'ailleurs égale à $-\underline{\mathcal{H}}_{(-f)}$. Il est intéressant d'introduire les enveloppes analogues $\underline{\mathcal{H}}'_f$, $\overline{\mathcal{H}}'_f$ obtenues en remplaçant la condition sur la lim. sup. par $\limsup\limits_{\mathcal{F}} u \leqslant f(Q)$ pour tout filtre $\mathcal{F}$ de $\mathfrak{F}$, s'il y en a, convergent vers Q.

Grâce à (A) on a : (20) $\underline{\mathcal{H}}_f \leqslant \underline{\mathcal{H}}'_f \leqslant \overline{\mathcal{H}}'_f \leqslant \overline{\mathcal{H}}_f$

En cas d'égalité des termes extrêmes (l'égalité en un point entraîne l'égalité partout) avec une fonction harmonique, celle-ci sera notée $\mathcal{H}_f$ (solution) et f dite résolutive.

Propriété de ces enveloppes à la frontière. — Si f est bornée supérieurement

$$(21) \qquad \limsup_{\mathcal{F}} \overline{\mathcal{H}}_f \leqslant \text{lim. sup. de } f \text{ en } Q$$

pour tout filtre $\mathcal{F} \in \mathfrak{F}$ convergent vers Q. Soit λ fini majorant strictement le second membre, donc majorant f au voisinage de Q. Grâce à (B) on formera aisément (comme dans les cas classiques) une fonction surharmonique dans $\mathcal{E}$ de lim. inf. à la frontière $\geqslant f$ et tendant vers λ selon chaque $\mathcal{F}$ fixé de limite Q. D'où l'inégalité cherchée.

Approximation de $\mathcal{E}$. — En reprenant de même un raisonnement de [8, lemme 2] adapté de [16], on montre que si Φ est une fonction dans $\mathcal{E}$ bornée supérieurement et Ω_n un domaine croissant tendant vers $\mathcal{E}\left(\overline{\Omega}_n \subset \mathcal{E}\right)$:

$$(22) \qquad \limsup_{\mathcal{F}} \left(\limsup_{n\to\infty} H_{\Phi}^{\Omega_n}\right) \leqslant \text{lim sup. de } \Phi \text{ en } Q$$

pour tout $\mathcal{F} \in \mathfrak{F}$ convergent vers $Q \in \overset{*}{\mathcal{E}}$.

Résolutivité de f bornée continue. — La résolutivité vient de (21) et de (A). $\mathcal{H}_f$ est la seule fonction harmonique bornée de limite $f(Q)$ en tout Q selon tout $\mathcal{F}$ de limite Q. C'est aussi la limite de $H_{\Phi}^{\Omega_n}$, où Φ bornée prolonge continûment f dans $\bar{\mathcal{E}}$; car lim. sup. $H_{\Phi}^{\Omega_n}$ et lim. inf. $H_{\Phi}^{\Omega_n}$ sont respectivement sousharmonique et surharmonique et doivent d'après (22) et (A) minorer et majorer respectivement $\underline{\mathcal{H}}'_f$ et $\overline{\mathcal{H}}'_f$ alors égales à $\mathcal{H}_f$.

Mesure harmonique généralisée et résolutivité générale. — Partons des f bornées continues et de la fonctionnelle $\mathcal{H}_f(\mathrm{M})$ (M fixé) linéaire $\geqslant 0$ avec f. Si f_n bornée continue $\geqslant 0$ tend en décroissant vers 0. $\mathcal{H}_{f_n}$ tend vers 0 d'après le raisonnement du lemme 4. On peut donc à partir de $\mathcal{H}_f$ définir une *intégrale de Daniell* ([21]). Il y correspond une mesure μ^{M} (mesure harmonique généralisée) de total 1.

Pour f bornée supérieurement, semi-continue supérieurement, soit f_n bornée continue tendant en décroissant vers f; le même raisonnement du lemme 4 prouve que $\mathcal{H}_{f_n}$ a une limite égale à $\underline{\mathcal{H}}_f$, à $\overline{\mathcal{H}}_f$ et à $\int f\,d\mu^{\mathrm{M}}$.

Comme, pour f quelconque, $\underline{\mathcal{H}}_f(\mathrm{M})$ est la borne supérieure des $\underline{\mathcal{H}}_\varphi$ pour φ bornée supérieurement, semi-continue supérieurement et $\leqslant f$ on voit que $\underline{\mathcal{H}}_f(\mathrm{M})$ est l'intégrale inférieure de Daniell $\underline{\int} f\,d\mu^{\mathrm{M}}$. D'où le

Théorème de résolutivité 28. — *La sommabilité -μ^{M} de f est indépendante de* M *et équivalente à la résolutivité de f. Alors*

$$\mathcal{H}_f(\mathrm{M}) = \int f\,d\mu^{\mathrm{M}}. \tag{23}$$

Ensembles de mesure harmonique généralisée nulle : Un tel ensemble $e \subset \overset{*}{\mathcal{E}}$ de fonction caractéristique φ_e est caractérisé par $\overline{\mathcal{H}}_{\varphi_e} = 0$, ou par l'existence d'une fonction surharmonique > 0 tendant vers $+\infty$ aux points de e. Le changement d'un f sur un tel ensemble n'altère pas $\underline{\mathcal{H}}_f$ et $\overline{\mathcal{H}}_f$ et tout $\overline{\mathcal{H}}_f \neq -\infty$ a une borne supérieure égale au maximum en mesure de f.

La condition de mesure *intérieure* nulle équivaut à $\underline{\mathcal{H}}_{\varphi_e} = 0$. Noter que d'après (A), l'ensemble des points de $\overset{*}{\mathcal{E}}$ où aucun filtre $\mathcal{F}$ ne converge est de mesure -μ *intérieure* nulle.

29. — Domaines partiels. — Étant donné $\mathcal{E}$ et $\bar{\mathcal{E}}$ précédents, considérons un domaine $\Omega \subset \mathcal{E}$ et son adhérence $\bar{\Omega}$ dans la topologie

([21]) Voir J. Daniell, A general form of integral, Annals of Math. t. 19 (1917-18). On l'a utilisée dans [8] en rappelant la théorie d'une manière que nous adaptons ici.

de $\overline{\mathcal{E}}$; Ω et $\overline{\Omega}$ sont du type de $\mathcal{E}$ et $\overline{\mathcal{E}}$ et on va voir qu'il existe une famille de filtres dans Ω du type $\mathfrak{F}$. Il n'y a qu'à prendre d'abord les filtres qui sont les traces sur Ω de filtres $\mathcal{F}$ et adjoindre les filtres réguliers de Ω qui convergent vers les points de $\overset{*}{\Omega} \cap \mathcal{E}$. On voit que (A) est satisfaite en considérant à partir de u, $\overset{*}{u}$ et son prolongement par o; et pour voir (B) on se reportera au théorème 20.

On peut donc développer pour Ω la théorie précédente du problème de Dirichlet et démontrer comme au n° 13 (propriété 4) : soit f donnée sur $\overset{*}{\mathcal{E}}$; si φ vaut, sur $\overset{*}{\Omega}$, f aux points de $\mathcal{E}$ et $\underline{\mathcal{H}}_f^{\mathcal{E}}$ ailleurs, on a dans Ω : $\underline{\mathcal{H}}_\varphi^\Omega = \underline{\mathcal{H}}_f^{\mathcal{E}}$.

Cas de $\overline{\mathcal{E}}$ compact. — Comme au chap. III on voit grâce à cette hypothèse supplémentaire que si Φ est une fonction bornée continue dans $\overline{\mathcal{E}}$ et si le domaine Ω_n tend en croissant vers $\mathcal{E}$, $\mathcal{H}_\Phi^{\Omega_n}$ (qui vient d'être défini) tend vers $\mathcal{H}_\Phi^{\mathcal{E}}$ d'ailleurs uniformément sur tout compact de $\mathcal{E}$; donc la mesure harmonique sur $\overset{*}{\Omega}_n$ converge vaguement vers la mesure harmonique sur $\overset{*}{\mathcal{E}}$.

On peut d'autre part reprendre aussi les théorèmes 18-19 et on trouve que $\underline{\mathcal{H}}_f$ est l'enveloppe supérieure des u égales à $-\infty$ ou sousharmoniques, dont chacune est bornée supérieurement et telle que pour toute suite régulière $M_n \to Q \in \overset{*}{\mathcal{E}}$, lim. sup. $u(M_n) \leq f(Q)$. Les filtres associés à ces suites régulières convergentes satisfont à (A) ; s'ils satisfaisaient aussi à (B) on en déduirait l'extension des parties 2 et 3 du théorème 21.

30. Comparaison de deux espaces $\overline{\mathcal{E}}$ dérivant d'un même espace de Green $\mathcal{E}$.

THÉORÈME 29. — *Soient $\overline{\mathcal{E}}_1$ $\overline{\mathcal{E}}_2$ deux espaces métriques complets de type $\overline{\mathcal{E}}$ (à partir d'un même espace de Green $\mathcal{E}$) donc de base dénombrable comme $\mathcal{E}$. On suppose que dans $\mathcal{E}$ la structure uniforme de $\overline{\mathcal{E}}_2$ est plus fine que celle de $\overline{\mathcal{E}}_1$, de sorte que les voisinages dans $\overline{\mathcal{E}}_2$ d'un point Q de $\overline{\mathcal{E}}_2 - \mathcal{E}$ tracent dans $\mathcal{E}$ un filtre qui converge aussi dans $\overline{\mathcal{E}}_1$, vers un point $\underset{*}{Q}$ de $\overline{\mathcal{E}}_1 - \mathcal{E}$ dit support de Q ; l'application $Q \to \underset{*}{Q}$ est continue.*

Les points de $\overline{\mathcal{E}}_1 - \mathcal{E}$ non supports de points $\overline{\mathcal{E}}_2 - \mathcal{E}$ forment un ensemble de mesure harmonique généralisée nulle.

De plus soit f_1, quelconque sur $\overline{\mathcal{E}}_1 - \mathcal{E}$; prenons f_2 sur $\overline{\mathcal{E}}_2 - \mathcal{E}$ de sorte qu'en tout point Q elle vaille f_1 au support de Q. Alors en prenant les mêmes symboles des enveloppes fondamentales pour les deux espaces :

$$(24) \qquad \underline{\mathcal{H}}_{f_1} = \underline{\mathcal{H}}_{f_2}.$$

Employons 1 et 2 comme indices pour préciser la topologie correspondante. D'abord, si u sousharmonique, bornée supérieurement, admet des lim. $\sup_1 \leqslant 0$ aux points supports de $\mathcal{E}_1 - \mathcal{E}$, les lim. $\sup_2$ aux points de $\mathcal{E}_2 - \mathcal{E}$ seront $\leqslant 0$, d'où $u \leqslant 0$; et l'ensemble des points non supports est de mesure généralisée intérieure nulle. On achève en remarquant que cet ensemble est mesurable ; car son complémentaire l'est parce qu'analytique [22] comme image continue de $\mathcal{E}_2 - \mathcal{E}$ dans $\mathcal{E}_1$.

On montrera ensuite (24) en reprenant le raisonnement de [8, n° 6] D'abord $\underline{\mathcal{H}}_{f_1} \leqslant \underline{\mathcal{H}}_{f_2}$. Pour compléter, soit dans $\mathcal{E}$ une fonction u égale à $-\infty$ ou sousharmonique, bornée supérieurement, telle que à la frontière, la lim. $\sup_2$ notée φ_2 soit $\leqslant f_2$. On n'aura qu'à montrer $u \leqslant \underline{\mathcal{H}}_{f_1}$ et comme $u \leqslant \underline{\mathcal{H}}_{\varphi_2}$ il suffira de prouver $\underline{\mathcal{H}}_{\varphi_2} \leqslant \underline{\mathcal{H}}_{f_1}$.

Introduisons ψ_1 sur $\mathcal{E}_1 - \mathcal{E}$ valant 0 aux points non supports et valant au point-support Q la borne supérieure des φ_2 aux points de $\mathcal{E}_2 - \mathcal{E}$ dont le support est Q ; soit ψ_2 égale en chaque point de $\mathcal{E}_2 - \mathcal{E}$ à la valeur de ψ_1 au support de ce point. Alors $\psi_1 \leqslant f_1$ aux points de supports et $\varphi_2 \leqslant \psi_2$. D'où $\underline{\mathcal{H}}_{\psi_1} \leqslant \underline{\mathcal{H}}_{f_1}$ et $\underline{\mathcal{H}}_{\varphi_2} \leqslant \underline{\mathcal{H}}_{\psi_2}$. On achève donc en prouvant que $\underline{\mathcal{H}}_{\psi_2} \leqslant \underline{\mathcal{H}}_{\psi_1}$ (l'inégalité contraire étant d'ailleurs vraie). On est donc ramené à un problème analogue au problème initial, mais avec des données plus particulières.

Comme $\overline{\mathcal{H}}_{\psi_1} \geqslant \overline{\mathcal{H}}_{\psi_2} \geqslant \underline{\mathcal{H}}_{\psi_2}$, tout résulte de ce que $\underline{\mathcal{H}}_{\psi_1} = \overline{\mathcal{H}}_{\psi_1}$. Cela vient de ce que ψ_1 bornée supérieurement est mesurable (au sens du problème pour $\mathcal{E}$ et $\mathcal{E}_1$) : car l'ensemble e des points-supports où $\psi_1 > \mathrm{K}$ est l'image continue de l'ensemble borélien de $\mathcal{E}_2 - \mathcal{E}$ où φ_2 semi-continue est $> \mathrm{K}$; de sorte que e est analytique donc mesurable.

Corollaire. — Si e est un ensemble de $\mathcal{E}_1 - \mathcal{E}$ admettant une mesure harmonique généralisée, son image *réciproque* (relative à l'application $\underset{*}{\mathrm{Q}} \to \mathrm{Q}$) admet aussi, relativement à $\mathcal{E}_2$, une mesure analogue égale.

31. — Comparaison avec la mesure de Green.

Théorème 30. — *Soit $\overline{\mathcal{E}}$ du type considéré, et métrique complet. On*

[22] Voir sur cette notion utilisée dans les pages suivantes : Kuratowski, Topologie (monographies polonaises).

suppose que pour un pôle P presque toutes les lignes de Green régulières l issues de P convergent (c'est-à-dire que le point courant a une limite sur $\overset{*}{\mathcal{E}}$ quand $G_P \to 0$). A l'ensemble Λ de telles lignes régulières convergentes correspond donc l'ensemble de leurs points de convergence dans $\mathcal{E}$ et cette application $l \to \underset{*}{l}$ est une limite de suites de fonctions continues sur $\Lambda \subset \mathcal{L}$ et prenant leurs valeurs dans $\bar{\mathcal{E}}$.

Les points de $\overset{*}{\mathcal{E}}$ qui ne sont pas de tels points de convergence forment un ensemble de mesure harmonique généralisée nulle ; donc aussi les points non accessibles.

Soit de plus f une fonction quelconque réelle sur $\overset{*}{\mathcal{E}}$, f_l une fonction sur $\mathcal{L}$, égale pour presque tous les $l \in \Lambda$, à la valeur de f au point de convergence. Alors

$$(25) \qquad \underline{\mathcal{H}}_f = \underline{\mathcal{G}}_{fl} = \overset{(\lambda_n)}{\underline{\mathcal{G}}_{fl}} \text{ (suite } \lambda_n \text{ finie quelconque} > 0, \to 0).$$

Raisonnement analogue à celui du théorème précédent, les notions relatives à $\mathcal{E}_2$ étant remplacées par celles relatives aux lignes de Green, et l'application $(Q \to \underset{*}{Q})$ par $(l \to \underset{*}{l})$.

Prenons dans Λ un ensemble borélien quelconque β, de mesure de Green égale à 1. En considérant l'application continue de $\beta \subset \mathcal{L}$ dans Σ_P^λ par les lignes de Green, on voit que l'application $(l \to \underset{*}{l})$ *est limite de suite de fonctions continues sur* β. De sorte que l'image $\underset{*}{\beta}$ dans $\overset{*}{\mathcal{E}}$ est analytique ; elle est mesurable, donc aussi $\overset{*}{\mathcal{E}} - \overset{*}{\beta}$ et on verrait comme plus haut en introduisant une fonction sousharmonique convenable que cet ensemble est de mesure nulle. De même l'ensemble des points qui ne sont pas points de convergence.

Quant à (25), on a d'abord $\underline{\mathcal{H}}_f \leq \underline{\mathcal{G}}_{fl} \leq \overset{(\lambda_n)}{\underline{\mathcal{G}}_{fl}}$ (suite $\lambda_n > 0, \to 0$, fixée quelconque) (et les inégalités analogues en sens inverse avec les barres supérieures). Pour voir l'inégalité contraire des termes extrêmes, remarquons que le $\mathcal{G}$ ne change pas par altération du f_l aux points d'un ensemble de mesure de Green nulle et supposons donc f_l égale à f en tout point de convergence. Introduisons u sousharmonique, bornée supérieurement, admettant un $\overset{(\lambda_n)}{u_l}$ majoré par f_l presque partout dans Λ. Il faut voir que $u \leq \underline{\mathcal{H}}_f$. Soit Λ_0 un borélien dans Λ, de mesure de Green unité et où $\overset{(\lambda_n)}{u_l} \leq f_l$. Soit ψ une fonction dans $\overset{*}{\mathcal{E}}$, nulle hors $\underset{*}{\Lambda}_0$ et égale en chaque point de $\underset{*}{\Lambda}_0$ à la borne supérieure des $\overset{(\lambda_n)}{u_l}$ pour les $l \in \Lambda_0$ convergents vers ce point ; enfin soit v_l égale sur Λ_0 à la valeur de ψ au point de convergence de cet l. Alors :

$$\psi \leqslant f \text{ sur } \Lambda_0 \text{ (de mesure harmonique unité) ;}$$
$$\overset{(\lambda_n)}{u_l} \leqslant v_l \text{ sur } \Lambda_0 \text{ (de mesure de Green unité) ;}$$

d'où $\underline{\mathcal{H}}_\psi \leqslant \underline{\mathcal{H}}_f$ et $u \leqslant \underline{\mathcal{G}}^{(\lambda_n)}_{u_l} \leqslant \underline{\mathcal{G}}^{(\lambda_n)}_{v_l} \leqslant \overline{\mathcal{G}}^{(\lambda_n)}_{v_l} \leqslant \overline{\mathcal{H}}_\psi$.

Tout revient donc, comme plus haut, à voir que $\underline{\mathcal{H}}_\psi = \overline{\mathcal{H}}_\psi$.

L'ensemble de $\underset{*}{\Lambda}_0$ où $\psi > k$ est l'image de l'ensemble *borélien* de Λ_0 où $\overset{(\lambda_n)}{u_l} > k$ par l'application $(l \to \underset{*}{l})$. Il est analytique, donc mesurable et ψ est mesurable d'où le résultat.

Extension. — Il y a adaptation facile aux lignes (U_K) régulières supposées presque toutes convergentes.

Corollaire. — D'après l'inégalité (17), *la résolutivité de f entraîne la sommabilité-g de f_l. En particulier les mesures harmoniques généralisées intérieure et extérieure d'un ensemble e de $\overset{*}{\mathcal{E}}$ au pôle encadrent les mesures de Green intérieure et extérieure de l'ensemble des lignes de Green régulières qui convergent en des points de e ; de sorte que la mesurabilité harmonique de e entraîne la mesurabilité-g de l'ensemble des lignes précédentes, avec égalité des mesures correspondantes.*

32. — Cas particuliers : Les exemples que nous allons examiner dérivent d'un procédé uniforme. On part d'un domaine de Green (plus ou moins général) dans un espace $\mathcal{E}$. On choisit dans Ω une structure uniforme convenable (compatible avec la topologie) et on complète. Il s'agira de voir que Ω et cet espace complété $\widehat{\Omega}$ satisfont aux conditions fondamentales du n° 27. On y parviendra grâce à la convergence, qu'on aura assurée dans $\widehat{\Omega}$, de presque toutes les lignes de Green régulières et en prenant comme filtres $\mathcal{F}$ les filtres « associés » à ces lignes convergentes, et qui sont obtenus en considérant sur chacune, les ensembles où $G < \varepsilon$ pour définir une base de filtre.

Le problème de Dirichlet « ordinaire ». — Assurons-nous d'abord que la théorie du chapitre III qui a servi de base rentre bien dans le cadre général. Soit dans $\mathcal{E}$ un domaine de Green Ω quelconque.

L'adhérence $\overline{\Omega}$ dans la topologie de $\mathcal{E}'$ est aussi obtenue par complétion de Ω pourvu de la structure uniforme induite sur Ω par celle $S_{\mathcal{E}'}$, du compact $\mathcal{E}'$.

On voit que Ω et $\overline{\Omega}$ remplissent les conditions générales en prenant comme filtres $\mathcal{F}$ les filtres associés soit aux suites régulières convergentes, soit aux lignes de Green régulières convergentes.

Mais nous avons de plus le théorème 30 *qui compare la mesure de Green et la mesure harmonique*. Cela montre comment au chapitre v les théorèmes 25, 26 et leurs conséquences contiennent des théorèmes analogues antérieurs relatifs à la mesure harmonique [voir, 3, 7]. Il y a bien raffinement effectif comme le montreront des exemples plus loin.

Enfin, si l'on reprend les conditions du théorème 24 sous lesquelles presque toutes les lignes de Green régulières ont un L_l fini, *on voit que les points-frontière non accessibles par un chemin dont le $\int \Phi ds$ est fini forment un ensemble de mesure harmonique nulle.*

33. Le problème ramifié. — Généralisons la théorie développée dans $\overline{R}^\tau$ [8] et considérons *dans un espace $\mathcal{E}$, un domaine de Green Ω*. La structure uniforme $S_{\mathcal{E}'}$, de l'espace compact $\mathcal{E}'$ engendre comme il suit dans Ω *la structure uniforme dite « ramifiée »* S^r_Ω, *plus fine que* $S_{\mathcal{E}'}$: on considère sur $\Omega\times\Omega$ l'ensemble e_ν défini par la condition sur $M_1\in\Omega$, $M_2\in\Omega$ que ces points fassent partie d'un ensemble *connexe* de Ω, petit d'ordre ν selon la structure $S_{\mathcal{E}}$; les e_ν forment une base d'entourages définissant S^r_Ω.

Noter que S^r_Ω est définie à partir de la structure uniforme du compact $\overline{\Omega}$, adhérence de Ω dans $\mathcal{E}'$, puisque cette structure est induite par $S_{\mathcal{E}'}$. De sorte que si pour deux espaces du type $\mathcal{E}$ contenant Ω, les adhérences de Ω dans chacun d'eux sont homéomorphes (avec correspondance identique de Ω) il en sera de même des adhérences dans les deux espaces $\mathcal{E}'$ et on obtiendra la même structure S^r_Ω.

Remarquer aussi qu'en prenant dans $\overline{\Omega}$ une métrique $\mathcal{M}_{\overline{\Omega}}$ compatible avec la structure uniforme de ce compact (par exemple celle donnée par une métrique dans $\mathcal{E}'$ compatible avec $S_{\mathcal{E}'}$) on en déduit dans Ω une métrique $\mathcal{M}_\Omega$ compatible avec S^r_Ω en prenant comme distance de deux points de Ω la borne inférieure des diamètres selon $\mathcal{M}_{\overline{\Omega}}$ des ensembles *connexes tracés sur* Ω et contenant ces deux points.

Partons de Ω pourvu de la structure S^r_Ω. On obtient *par complétion* un espace noté Ω_r. La convergence selon la topologie de S^r_Ω d'un filtre sur Ω vers un point Q de $\Omega_r - \Omega$ entraîne la convergence dans $\mathcal{E}'$ vers un point $\underset{*}{Q}$ de la frontière de Ω dans $\mathcal{E}'$ et ce point sera dit *support* de Q.

Remarquer qu'à tout point $Q \in \Omega_r - \Omega$, on peut grâce à des suites de Cauchy associer des arcs ouverts de Jordan tracés dans Ω et admettant dans la topologie de Ω_r une extrémité en Q. Et tout arc dans Ω admettant selon la topologie de $\mathcal{E}'$ une extrémité en un point-frontière A de Ω admet selon la topologie de Ω_r une extrémité en un point dont le support est A. Les points-support sont les points-frontière accessibles dans la topologie de $\mathcal{E}'$.

Remarque fondamentale. — Tout voisinage w_1 de $Q \in \Omega_r - \Omega$ dans Ω_1 contient un voisinage analogue w_2 tel que $w_2 \cap \Omega$ est l'un des domaines composant l'intersection avec Ω d'un voisinage ouvert de $\underset{*}{Q}$ dans $\mathcal{E}'$.

On le voit en considérant les métriques $\mathcal{M}_{\mathcal{E}'}$, $\mathcal{M}_\Omega$ et prenant dans w_1 une boule ouverte de centre Q et rayon ε assez petit ; considérons dans $\mathcal{E}'$ la boule ouverte de centre $\underset{*}{Q}$ et rayon $\rho < \dfrac{\varepsilon}{2}$; elle rencontre Ω selon un ouvert dont l'un des domaines composants est, comme on le verra, l'intersection avec Ω, d'un w_2 cherché.

THÉORÈME 31. — *Ω et Ω_r remplissent les conditions fondamentales* du n° 27 (permettant le développement du problème de Dirichlet) *si l'on prend pour filtres $\mathcal{F}$ les filtres associés aux lignes de Green régulières* ([23]) (*issues d'un pôle fixé* P) *qui convergent selon la topologie de $\mathcal{E}'$.*

En effet ces lignes dont l'ensemble a une mesure de Green égale à l convergent bien dans Ω_r vers des points de $\Omega_r - \Omega$. La condition (A) est satisfaite d'après le théorème 25 ; la condition (B) l'est aussi grâce à la remarque fondamentale et au théorème 21, 1°. La mesure harmonique « ramifiée » de ce problème sera par le théorème 29 comparée à la mesure harmonique « ordinaire » et par le théorème 30, comparée à la mesure de Green. En perfectionnant la fin du n° 32, on voit encore que, sous les conditions du théorème 24, les points de la frontière $\Omega_r - \Omega$ non accessibles (au sens de la topologie de Ω_r) par un chemin dans Ω et dont le $\int \Phi ds$ est fini forment un ensemble de mesure harmonique ramifiée nulle.

([23]) On pourrait prendre de même les lignes régulières (U_K).

34. Le problème géodésique. — Limitons-nous à considérer dans un espace $\mathcal{E}$ un domaine de Green Ω *relativement compact* et dont *l'adhérence* $\overline{\Omega}$ dans $\mathcal{E}$ *ne contiennent pas de point à l'infini.*

Définissons dans Ω une *métrique géodésique* $\mathcal{M}^g_\Omega$ en prenant comme distance de deux points la borne inférieure des longueurs $\int ds$ des arcs tracés sur Ω, qui les joignent, le ds^2 étant le ds^2 euclidien local pour $\mathcal{E}_i$ ou un ds^2 fixé selon le théorème 2 pour $\mathcal{E}_c$.

Cette métrique est compatible avec la topologie de Ω. *Sa structure uniforme* S^g_Ω *est,* comme on va voir, *plus fine* que la structure ramifiée S^r_Ω : en effet considérons la métrique géodésique analogue $\mathcal{M}^g_{\mathcal{E}_0}$ relative au domaine $\mathcal{E}_0$ contenant $\overline{\Omega}$ mais aucun point à l'infini ; elle induit sur $\overline{\Omega}$ la structure uniforme de ce compact et fournit sur Ω une métrique compatible avec S^r_Ω (c'est une $\mathcal{M}_\Omega$ précisée plus haut). Or la distance dans cette métrique est majorée par celle de $\mathcal{M}^g_\Omega$ d'où le résultat. Nous *complétons* Ω pourvu de cette métrique $\mathcal{M}^g_\Omega$ ce qui donne un *espace* Ω_g et une frontière $\Omega_g - \Omega$ sur laquelle on prolonge cette métrique ; les points de cette frontière ont des *supports* dans $\Omega_r - \Omega$ et dans $\overline{\Omega} - \Omega$.

Lemme 14. — *Si* ω *est un domaine borné de* R^τ *et* P *quelconque* $\in \omega$, *l'intégrale en volume (aire)* $\int_\omega |grad\, G_P(M)|\, dv(M)$ *est majorée par* $2\varphi_\tau D$ *où* D *est le diamètre euclidien de* ω, (*et* φ_τ *le flux du potentiel de la masse* 1.)

Car G_P est la différence entre le potentiel de la masse 1 en P et de masses $\mu > 0$ réparties sur $\overset{*}{\omega}$ (et de total 1) :

$$G_P(M) = h(MP) - \int h(MQ)\, d\mu(Q)$$

d'où
$$|\text{grad}\, G_P| \leqslant |h'(MP)| + \int |h'(MQ)|\, d\mu(Q).$$

L'intégration en dv se fera en coordonnées sphériques de centre P pour le premier terme, ou de centre Q, et sous le signe $\int$ pour le second terme. D'où

$$\int |\text{grad}\, G_P|\, dv \leqslant \varphi_\tau D + \int \varphi_\tau D\, d\mu(Q) = 2\varphi_\tau D.$$

Lemme 15. — *Soit dans un domaine borné* Ω *de* R^τ, *ou mieux dans le domaine* Ω *de ce paragraphe 34 une suite* (M_n) *régulière. Soit e un ensemble borélien de la frontière* $\overline{\Omega} - \Omega$ [24] *tel que, si* e_1 *est* *l'ensemble des points de* $\Omega_g - \Omega$ *dont les supports sont sur e*, M_n *reste à une distance géodésique* (selon $\mathcal{M}^g_\Omega$ prolongée) *de* e_1 *majorant un nombre* $\delta > 0$ *fixe. Alors la mesure harmonique de e au point* M_n *tend vers* o [25].

On se ramène en effet à une suite M_n convergeant dans $\mathcal{E}$ vers un point Q de $\overline{\Omega} - \Omega$. Prenons un voisinage $\mathcal{W}$ de Q dans $\mathcal{E}$, qui coupera Ω selon un ouvert ω. On voit que la mesure harmonique de e en $M_n \in \omega$ est majorée par celle de $(e \cap \overset{*}{\omega}) \bigcup (\overset{*}{\omega} \cap \Omega)$ relative à ω. Or la mesure harmonique de $\overset{*}{\omega} \cap \Omega$ en M_n tend vers o puisque la suite (M_n) est régulière. Considérons donc celle de $e \cap \overset{*}{\omega}$. Si ω_n est parmi les domaines composants de ω celui qui contient M_n, on sait (théorème 30, corollaire) que la mesure harmonique $\mu(e_n)$ de $e_n = e \cap \overset{*}{\omega}_n$ relative à ω_n et M_n vaut la mesure de Green des lignes de Green régulières dans ω_n issues de M_n et convergeant vers des points de e_n. De sorte que si L_l est la longueur $\int ds$ de la ligne régulière l issue de M_n et g la mesure de Green dans ω_n autour de M_n, $\int L_e\, dg \geqslant \delta \mu(e_n)$. Or d'après le raisonnement du théorème 24 (où Φ vaudrait 1 dans $\overline{\Omega}$)

$$\int_{\omega_n} |\operatorname{grad} G^{\omega_n}_{M_n}|\, dv \text{ majore } \varphi_\tau \int L_l\, dg\,;$$

tandis qu'en supposant $\overline{\omega}$ assez petit pour être contenu dans un $\mathcal{V}_Q$, on peut lui appliquer la majoration du lemme 14, toutefois avec un facteur correctif dans le cas de $\mathcal{E}_c$. On trouve ainsi $\mu(e_n) \leqslant \dfrac{\lambda}{\delta}$, où λ peut être choisi arbitrairement, en prenant ensuite $\mathcal{W}$ assez petit, D'où la conclusion.

THÉORÈME 32. — Ω *et* Ω_g *remplissent les conditions du n° 27 en prenant pour filtres* $\mathcal{F}$ *les filtres associés aux lignes de Green* [26] *régulières* (issues de $P \in \Omega$) *de longueur* $\int ds$ *finie.*

On voit que ces lignes convergent dans Ω_g et l'on sait que la mesure de Green de leur ensemble vaut 1. Donc (A) est satisfaite.

Pour voir (B) sous sa seconde forme, on prendra dans Ω_g pourvu de sa métrique $\mathcal{M}^g_\Omega$ la boule ouverte de centre $Q \in \Omega_g - \Omega$ et rayon ρ.

[24] On pourrait prendre aussi la frontière ramifiée $\Omega_r - \Omega$.

[25] Même résultat (comme conséquence ou par adaptation de la démonstration) en remplaçant la suite M_n par une base de filtre régulier, dont les éléments sont à une distance de e_1 qui majore $\delta > 0$.

[26] On pourrait encore prendre les lignes (U_K).

Son intersection avec Ω est un *domaine* ω, et on considèrera la frontière e de ω dans l'espace Ω ; dans la métrique géodésique $\mathcal{M}^g_\omega$ de ω, l'ensemble des points-frontière dont le support est sur e, est à une distance du point variable $M\in\omega$, qui majore la même distance selon $\mathcal{M}^g_\Omega$ donc qui admet une lim inf $> \rho/2$ selon tout $\mathcal{F}$ convergent vers Q. Dans Ω_g on conclut par application du lemme 15 à ω.

On saura donc développer le « problème de Dirichlet géodésique » et étudier la « mesure harmonique géodésique » correspondante. Les théorèmes 29 et 30 la comparent aux mesures harmoniques ordinaire et ramifiée et à la mesure de Green ; on voit que les théorèmes 25 et 26 et leurs conséquences contiennent des énoncés analogues relatifs à la mesure harmonique géodésique, ou encore ramifiée. (Dans $\overline{R}_\tau$ voir sur ce dernier point le mémoire [8]).

35. — Exemples comparatifs. — *a*) La topologie ramifiée (qui fait disparaître les points-frontières ordinaires inaccessibles) peut décomposer effectivement certains points-frontière et l'application directe de la frontière ramifiée dans la frontière ordinaire *ne conserve pas* en général la mesure harmonique correspondante : Considérons en effet dans R^3 un domaine symétrique par rapport à xOy et dont la frontière au voisinage d'un point est une partie ouverte α de xOy. Les points de α sont supports de deux points-frontière ramifiés et cet ensemble de points-frontière ramifiés se décompose par symétrie en deux ensembles ayant même mesure harmonique ramifiée par rapport à un point P de xOy. Cette mesure vaut la moitié de la mesure harmonique ordinaire (non nulle) de α en P.

b) De même la métrique géodésique (qui fait disparaître les points inaccessibles par chemin de longueur finie) peut décomposer des points-frontière ramifiés et l'application directe de la frontière géodésique dans la frontière ordinaire ou ramifiée *ne conserve pas* en général la mesure harmonique correspondante :

Considérons en effet des axes rectangulaires $Oxyz$ de R^3 et dans un domaine circulaire D de xOy un compact K d'intérieur vide et d'aire (mesure de Lebesgue) non nulle. Soit $C_1 \ldots C_n \ldots$ une suite de disques fermés disjoints, de diamètre tendant vers 0, contenus dans D-K et dont les centres admettent K comme ensemble d'accumulation. Si $d(m)$ est la distance à K du point m de xOy, soient S_1 et S_2 les surfaces d'équations $z = \pm d^2(m)$ $(m\in D)$. Considérons le compact de projection D et situé entre S_1 et S_2. Perçons-le de tubes disjoints symétriques par rapport à xOy et joignant les trous formés dans S_1 et S_2 par les cylindres de bases C_i ; on peut faire en sorte pour ces tubes que leur diamètre tende vers o avec l'indice et que tout arc joignant deux points de l'espace (respectivement au-dessus de S_1 et au-dessous de S_2) et passant par l'un de ces tubes soit de longueur > 1. De ce dernier compact A prenons le complémentaire Δ dans un domaine sphérique Ω le contenant et voyons que Δ va répondre à notre recherche. Chaque point de K est support d'un seul point-frontière ramifié pour Δ, mais il est support de deux points-frontière géodésiques. Il n'y a plus qu'à voir que la mesure harmonique de K n'est pas nulle, car on pourra conclure alors comme plus haut en décomposant par symétrie l'ensemble des points-frontière géodésiques précédents. Or la mesure harmonique de K relativement au demi-espace $z > 0$ est > 0 ; c'est au facteur 4π près, l'angle solide sous lequel on voit K et elle est donc arbitrairement petite quand M est au-dessous de S_1 assez près de K. On en déduit que si, du domaine $z > 0$, on ôte les points au-dessous de S_1 dans un voisinage convenable de K, il restera un domaine par rapport auquel en un point P fixé à l'avance (strictement au-dessus de S_1) la mesure harmonique de K sera > 0. De même lorsque (par modification du domaine hors d'un voisinage de K) on passe au demi-espace diminué des points au-dessous de S_1 entier, puis réduit à sa partie contenue dans Ω. Il n'y a plus qu'à considérer le domaine symétrique et modifier l'ouvert-réunion par agrandissement pour aboutir à Δ.

Remarquer que si l'on remplace A par le compact contenu formé des surfaces S_1, S_2, moins les trous, plus la frontière des tubes, on peut obtenir un exemple analogue où les points de K sont supports de points géodésiques supplémentaires.

c) Constatons enfin le raffinement effectif qu'apportent en plus les lignes et la mesure de Green. On voit déjà dans l'exemple (*a*) qu'en presque tous les points de α aboutissent 2 lignes de Green symétriques issues de P. On va même réaliser une « décomposition » analogue des points-frontière géodésiques et voir que dans l'application d'un faisceau de lignes de Green régulières de longueur finie, dans la frontière géodésique, la mesure de Green du faisceau peut être différente de la mesure géodésique en P de l'ensemble des points-limite géodésiques correspondants.

Prenons en effet dans xOy un compact K d'intérieur vide et aire non nulle et dont presque tous les points sont inaccessibles dans xOy (ce qu'on peut réaliser en ôtant d'un cercle des cercles dénombrables disjoints). Plaçons-nous dans $Oxyz$ et prenons le complémentaire Δ de K dans un domaine sphérique le contenant. Alors tout point de K est support d'un seul point ramifié et d'un seul point géodésique. Considérons les lignes de Green de pôle $P \in xOy$ (P hors K). La partie K_1 de K formée de points inaccessibles dans xOy est d'aire $\neq 0$, donc aussi de mesure harmonique ordinaire ou géodésique $\mu > 0$ relativement à Δ ; son image réciproque dans l'ensemble des lignes régulières a une mesure de Green égale à $\mu > 0$. Il y a donc des lignes de Green formant un faisceau de mesure de Green > 0, aboutissant en certains points de K_1. Mais ces lignes qui ne peuvent être dans xOy sont deux à deux symétriques par rapport à xOy et on peut donc en faire deux faisceaux symétriques de mesure commune $\frac{\mu}{2}$ d'où la conclusion.

BIBLIOGRAPHIE SOMMAIRE

1. Bader. — La théorie du potentiel sur une surface de Riemann (*C. R. Ac. Sc.* t. 228, 1949, p. 2001).
2. Brelot. — Familles de Perron et problème de Dirichlet (*Acta Szeged*, IX, 1939, p. 133).
3. Brelot. — Quelques applications aux fonctions holomorphes de la théorie moderne du potentiel et du problème de Dirichlet (*Bull. Soc. roy. des Sc. de Liège*, 1939, p. 385).
4. Brelot. — Sur la théorie autonome des fonctions sousharmoniques (*Bull. Soc. Math.* t. 65, 1941, p. 72).
5. Brelot. — Sur le rôle du point à l'infini dans la théorie des fonctions harmoniques (*Annales ENS*, t. 61, p. 301).
6. Brelot. — Minorantes sousharmoniques, extrémales et capacités (*J. de Math.*, t. 24, 1944, p. 1).
7. Brelot. — Sur l'approximation et la convergence dans la théorie des fonctions harmoniques ou holomorphes (*Bull. Soc. Math. de France*, t. 73, 1945, p. 55-70).
8. Brelot. — Le problème de Dirichlet ramifié (*Ann. Univ. Grenoble*, t. 22, 1946, p. 167).
9. Brelot. — Le problème de Dirichlet géodésique (*C. R.*, t. 228, 1949, p. 1790).
10. Brelot et Choquet. — Lignes de Green et mesure harmonique (*C. R.*, t. 228, 1949, p. 1556).
11. G. C. Evans. — The logarithmic potential (*Am. Math. Soc., Coll. Public.*, vol. VI, New-York 1927).
12. G. C. Evans. — Multiple valued harmonic functions in space (*Univ. of. Calif., Public. in Math.*, New Series vol. I n° 8, p. 281-340).

13. HEINS. — The conformal mapping of simply connected Riemann surfaces *Ann. of math.*, t. 50, 1949, p. 686).
14. KURAMOCHI. — Potential theory and its applications (*Osaka. Math. J.*, vol. 2, 1951, p. 123-175).
15. LAVRENTIEFF. — Sur les fonctions d'une variable complexe représentables par des séries de polynomes (*Acta sc. et ind.* n° 441, Hermann, Paris, 1936).
16. DE LA VALLÉE POUSSIN. — Les nouvelles méthodes de la théorie du potentiel et le probième généralisé de Dirichlet (*Act. sc. et ind.* n° 578, Paris, 1937).
17. NEVANLINNA. — Über die Lösbarkeit des Dirichletsche Problems für eine Riemannsche Fläche (*Nachr. zu Gott. Bd*, I, 1938, S 181-193).
18. NEVANLINNA. — Über die Anvendung einer Klasse von Integralgleichungen für Existenzbeweise in der Potentialtheorie (*Acta Szeged*, t. 12, 1950, p. 146-160).
19. OHTSUKA. — Dirichlet problems on Riemann surfaces and conformal mappings (*Nagoya math. J.*, vol. 3, 1951, p. 91-137.
20. PARREAU. — Comportement à la frontière de la fonction de Green d'une surface de Riemann (*C. R. Ac. Sc.*, t. 230 (1950), p. 709).
21. PARREAU. — La théorie du potentiel sur les surfaces de Riemann à frontière positive (*C. R. Ac. Sc.*, t. 230, 1950, p. 914).
22. PARREAU. — Sur les moyennes des fonctions harmoniques et analytiques et la classification des surfaces de Riemann (*Annales de l'Institut Fourier*, t. 3 ; 1951, p. 103-197, ou *thèse*, Paris, 1952).
23. PRIVALOFF. — Sur quelques applications de la mesure harmonique à certains problèmes de la théorie des fonctions sousharmoniques (*Mat. Svorvik, nouv. série*, t. 3, 1938, p. 535).
24. SARIO. — Existence des fonctions d'allure donnée sur une surface de Riemann arbitraire (*C. R. Ac. Sc.*, t. 229, 1949, p. 1293).
25. SARIO. — Quelques propriétés à la frontière se rattachant à la classification des surfaces de Riemann (*C. R. Ac. Sc.*, t. 230, 1950, p. 42).

(Parvenu aux Annales le 22 mai 1952.)