Université Grenoble Alpes

ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

Van Tuan Pham

Des résultats d'annulation pour la tour de Taylor

Article à paraître, mis en ligne le 5 février 2025, 60 p.

Les *Annales de l'Institut Fourier* sont membres du Centre Mersenne pour l'édition scientifique ouverte
www.centre-mersenne.org e-ISSN : 1777-5310

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
Article à paraître
Mis en ligne le 5 février 2025.

DES RÉSULTATS D'ANNULATION POUR LA TOUR DE TAYLOR

par Van Tuan PHAM (*)

Résumé. — Nous obtenons des résultats d'annulation des foncteurs dérivés au sens de Dold–Puppe (Homologie nicht-additiver Funktoren. Anwendungen. *Ann. Inst. Fourier Grenoble*, 1961) et des approximations de Taylor d'un foncteur selon Johnson–McCarthy (calcul de Goodwillie algébrique) (Deriving calculus with cotriples. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 2004) en utilisant la combinatoire des blocs de la catégorie des foncteurs strictement polynomiaux de Friedlander et Suslin (Cohomology of finite group schemes over a field. *Invent. Math.*, 1997).

Abstract. — We obtain vanishing results for derived functors in the sense of Dold–Puppe (Homologie nicht-additiver Funktoren. Anwendungen. *Ann. Inst. Fourier Grenoble*, 1961) and Taylor approximations of a functor according to Johnson–McCarthy (algebraic Goodwillie calculus) (Deriving calculus with cotriples. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 2004) using the combination of blocks in the category of strictly polynomial functors of Friedlander and Suslin (Cohomology of finite group schemes over a field. *Invent. Math.*, 1997).

1. Introduction

Dans cet article, nous nous intéressons à deux notions de dérivation fondamentales en topologie algébrique : les foncteurs dérivés au sens de Dold et Puppe, et le calcul de Taylor au sens de Johnson–McCarthy (aussi connu sous le nom de « calcul de Goodwillie algébrique »). Notre objectif est d'utiliser la théorie des foncteurs strictement polynomiaux introduite par

Mots-clés : Théorie des blocs, Foncteurs dérivé, Tour de Taylor, Foncteur strictement polynomial, Foncteur simple.
Classification Mathématique (2020) : 18G30, 18G55, 20G05, 20G10.
(*) This research is funded by the Vietnam National University Hanoi (VNU) under project number QG.20.28.
Part of this work was done while the author was visiting the Vietnam Institute for Advanced Study in Mathematics (VIASM). We would like to thank the VIASM for hospitality.

Friedlander et Suslin [20] afin d'obtenir des résultats d'annulation nouveaux pour ces deux notions de dérivation.

La notion de foncteur dérivé au sens de Dold et Puppe a été introduite dans l'article fondateur [16]. Cette notion de dérivation repose sur la correspondance de Dold–Kan. Elle généralise la notion classique de foncteur dérivé à la Cartan–Eilenberg et elle permet de dériver des foncteurs *non additifs* entre catégories abéliennes. Ces foncteurs dérivés au sens de Dold et Puppe sont reliés à de nombreux calculs classiques de topologie algébrique. Par exemple, les foncteurs dérivés des puissances symétriques sont des morceaux de l'homologie des espaces d'Eilenberg–Mac Lane calculée par Cartan [12]. Le calcul des dérivés des puissances symétriques est non trivial, et une étude détaillée en a été faite par Bousfield [6, 7]. Les foncteurs dérivés des foncteurs de Lie apparaissent à la page initiale la suite spectrale de Curtis [14, 15] qui converge vers les groupes d'homotopie instable des espaces topologiques. D'après le célèbre article à six auteurs [8], les foncteurs dérivés au sens de Dold et Puppe permettent également de construire la suite spectrale d'Adams, qui donne accès aux groupes d'homotopie stable. Les foncteurs dérivés apparaissent également en lien avec la cohomologie continue des groupes de Lie [5, Section 4]. Récemment, de nouveaux résultats sur les dérivés des foncteurs non additifs ont été obtenus grâce à l'exploitation systématique de la structure des catégories de foncteurs, les travaux de Breen, Mikhailov et Touzé [9, 10, 36].

Dans cet article, nous étudions les dérivés des foncteurs $F : \mathcal{V}_{\Bbbk} \to \mathcal{V}_{\Bbbk}$, où $\mathcal{V}_{\Bbbk}$ désigne la catégorie des espaces vectoriels de dimension finie sur un corps commutatif $\Bbbk$ de caractéristique $p > 0$. Les dérivés de F sont alors des espaces vectoriels bigradués $L_qF(V, n)$ dépendant fonctoriellement de V (nous renvoyons à la section 4 pour des rappels plus complets sur les foncteurs dérivés). Comme nous l'avons déjà évoqué, le calcul explicite pour $F = S^d$ (les puissances symétriques) est une tâche difficile, et le calcul pour d'autres foncteurs usuels, tels que les foncteurs de Schur ou les foncteurs de Lie est encore plus difficile. Notre objectif ici n'est pas de donner des calculs exacts mais plutôt des critères effectifs sur un foncteur F et un espace vectoriel V pour que les espaces vectoriels $L_qF(V, n)$ s'annulent.

Pour nos résultats, nous nous restreignons à l'étude des foncteurs strictement polynomiaux au sens de Friedlander et Suslin [20]. Un foncteur strictement polynomial peut être vu comme un foncteur $F : \mathcal{V}_{\Bbbk} \to \mathcal{V}_{\Bbbk}$, muni d'une structure supplémentaire qui garantit que pour tout V le $\Bbbk$-espace vectoriel $F(V)$ soit naturellement une représentation polynomiale du groupe algébrique $GL(V)$. Les exemples usuels de foncteurs entre espaces vectoriels, tels que les puissances symétriques, extérieures ou divisées, ainsi que les foncteurs de Schur et de Weyl ou les foncteurs de Lie sont naturellement des foncteurs strictement polynomiaux. La catégorie $\mathcal{P}_{\Bbbk}$ des foncteurs strictement polynomiaux est équivalente à (une somme directe de) catégories de modules sur des algèbres de Schur, on connait sa décomposition en blocs d'après les travaux de Donkin [18]. Une idée introduite dans [36] est d'utiliser la connaissance de la décomposition en blocs de $\mathcal{P}_{\Bbbk}$ pour obtenir des résultats d'annulation sur les foncteurs dérivés au sens de Dold et Puppe. Nous reprenons cette idée dans notre article, mais nous la déclinons d'une manière différente, qui donne de meilleurs résultats d'annulation. Pour donner une idée des résultats obtenus, nous en donnons un cas particulier qui s'énonce simplement.

Théorème (Théorème 6.18). — *Soient $\Bbbk$ un corps de caractéristique $p > 0$, F un foncteur strictement polynomial homogène de degré d sur $\Bbbk$ et $n, q \in \mathbb{N}$. Supposons que $q + \mathrm{inj.dim}(F) < 2d + n\alpha_p(d)$, où $\alpha_p(d)$ désigne la somme des chiffres dans l'écriture p-adique de d. Alors $L_q(F; n+2) = 0$.*

On rappelle que la catégorie des foncteurs strictement polynomiaux homogènes de degré d sur $\Bbbk$ est de dimension globale finie, [34].

Notre méthode repose sur un critère d'annulation général (le théorème 3.34), qui peut s'appliquer à d'autres contextes. Nous en donnons une deuxième illustration concrète en l'appliquant à une autre forme de dérivation : le calcul de Goodwillie algébrique, introduit au début des années 2000 par Johnson et McCarthy [26], et qui intervient par exemple dans l'étude de la K-théorie algébrique rationnelle [28]. Cette théorie définit, pour tout foncteur (pas nécessairement additif) d'une catégorie additive vers une catégorie abélienne et tout entier positif n un complexe simplicial P_nF à partir du n-ième effet croisé de F. Ce complexe simplicial P_nF est une approximation de degré n de F, et on dispose de morphismes canoniques $F \to P_nF \to P_{n-1}F$ qui permettent de voir P_nF comme le n-ième étage d'une « tour de Taylor » de F. Si on note D_nF la fibre du morphisme $P_nF \to P_{n-1}F$, on peut ainsi penser aux foncteurs $H_q(D_nF)$ comme à des dérivés de F.

Les foncteurs $H_q(D_nF)$ sont difficiles à calculer en général. Nous nous restreignons ici encore au cas des foncteurs strictement polynomiaux entre espaces vectoriels. Pour $n = 1$, ces foncteurs dérivés au sens de Johnson–McCarthy s'interprètent comme des foncteurs dérivés stables au sens de Dold–Puppe, et le calcul de $H_q(D_1S^d)$ est donc connu d'après les calculs de l'homologie stable des espaces d'Eilenberg–Mac Lane de Cartan [12], voir aussi les calculs de Bousfield [7] et Betley [4]. Pour $n = d$, on peut interpréter $H_q(D_d S^d)$ comme l'homologie du groupe symétrique $\mathfrak{S}_d$ à coefficients dans $\otimes^d$, calculée récemment par Cohen–Hemmer–Nakano [13] (voir aussi [39]). Dans les cas où $1 < n < d$, nous proposons une suite spectrale pour calculer $H_q(D_n S^d)$. Si $n > d$ alors $H_q(D_n S^d) = 0$ pour des raisons de degré. Comme pour la théorie de Dold–Puppe, les calculs sont difficiles, et sont encore moins connus pour cette théorie beaucoup plus récente. Comme pour les foncteurs dérivés au sens de Dold et Puppe, notre approche donne des critères effectifs sur un foncteur F et un $\Bbbk$-espace vectoriel V pour que les espaces vectoriels $H_q\left(D_n F\right)(V)$ s'annulent. Un exemple simple est le suivant.

Théorème (Théorème 6.20). — *Soient $\Bbbk$ un corps de caractéristique $p > 0$, F un foncteur strictement polynomial homogène de degré d sur $\Bbbk$ et $n, q \in \mathbb{N}$. Supposons que $1 < n < d$ et que $q + \mathrm{inj.dim}(F) < 2(d - n)$. Alors*

$$H_q(D_n(F)) = 0.$$

Nous expliquons maintenant les grandes étapes qui permettent d'obtenir nos résultats d'annulation.

Étape 1. La catégorie $\mathcal{P}_\Bbbk$ se décompose comme la somme directe $\mathcal{P}_\Bbbk = \bigoplus_{d \geqslant 0} \mathcal{P}_d$ où $\mathcal{P}_d$ désigne la sous-catégorie pleine des foncteurs strictement polynomiaux homogènes de degré d. Chaque sous-catégorie $\mathcal{P}_d$ admet ensuite une décomposition plus fine en somme directe de blocs. Comme $\mathcal{P}_d$ est équivalente à la catégorie des modules finis sur l'algèbre de Schur $S(d, d)$, ces blocs sont connus d'après les travaux de Donkin [18]. Plus précisément, les simples de $\mathcal{P}_d$ sont indexés par les partitions de d, et deux simples sont dans le même bloc de $\mathcal{P}_d$ si et seulement si les partitions qui les indexent ont le même p-cœur.

Si F est un foncteur strictement polynomial, il possède une suite de composition finie, et on note $\mathfrak{Bl}(F)$ l'ensemble des p-cœurs correspondant aux partitions qui indexent les simples de cette suite de composition.

Notre première étape est une étape préliminaire, qui consiste à établir quelques propriétés élémentaires de la combinatoire des blocs. Plus précisément, on utilise les règles de Pieri, de Nakayama, et le théorème du produit tensoriel de Steinberg pour obtenir dans la proposition 3.20 et le théorème 3.22 des propriétés qui permettent de calculer facilement $\mathfrak{Bl}(F)$ pour certains foncteurs F qui apparaîtront dans la suite.

Étape 2. Notre deuxième étape donne un critère général permettant d'utiliser la combinatoire des blocs pour obtenir des résultats d'annulation. Nos résultats d'annulation s'appliquent au calcul de l'homologie des foncteurs du type :

$$\begin{aligned} \Phi = \Phi_X : \mathcal{P}_{\Bbbk} &\longrightarrow \mathbf{Ch}_{\geqslant 0}(\mathcal{P}_{\Bbbk}) \\ F &\longmapsto \underline{\mathrm{Hom}}(F^\sharp, X). \end{aligned} \tag{$\mathfrak{I}$}$$

où $X \in \mathbf{Ch}_{\geqslant 0}(\mathcal{P}_{\Bbbk})$ désigne un complexe d'injectifs de $\mathcal{P}_{\Bbbk}$, et $F^\sharp$ désigne le dual de Kuhn du foncteur F, et $\underline{\mathrm{Hom}}$ désigne le Hom interne de la catégorie des foncteurs strictement polynomiaux. Si G est un foncteur strictement polynomial et V est un espace vectoriel, on note G_V le « foncteur à paramètre » donné par $G_V(W) = G(V \otimes W)$. Notre résultat d'annulation s'énonce alors ainsi :

Théorème (Théorème 3.34). — *Soient $F \in \mathcal{P}_d, V \in \mathcal{V}_{\Bbbk}$ et Φ un foncteur de type $(\mathfrak{I})$. Alors $H_q(\Phi F)(V) = 0$ dès que*

$$\mathfrak{Bl}(F) \cap \left(\bigcup_{q \leqslant j \leqslant q + \mathrm{inj.dim}\, F} \mathfrak{Bl}((H_j(\Phi S^d))_V) \right) = \emptyset.$$

Nous montrons dans les propositions 4.6 et 4.17 que les foncteurs dérivés au sens de Dold–Puppe $L_q(-,n)$ et au sens Johnson–McCarthy $H_q(D_n-)$ sont l'homologie de foncteurs de type $(\mathfrak{I})$. Notre théorème d'annulation peut donc s'appliquer à ces foncteurs, si on parvient à calculer les blocs des foncteurs $H_j(\Phi S^d)_V$ pour $\Phi = L(-,n)$ et $\Phi = D_n$.

Étape 3. Cette étape consiste à extraire des travaux de Cartan [12], Touzé [37], Cohen–Hemmer–Nakano [13] et Johnson–McCarthy [26, 27], les calculs explicites des foncteurs $L_j S^d(-,n)$ et des résultats permettant de « majorer la taille » des foncteurs $H_j(D_n S^d)$. Les résultats sont donnés dans la section 5 de l'article.

Étape 4. Dans cette étape, nous calculons explicitement $\mathfrak{Bl}((H_*(\Phi S^d))_V)$, pour $\Phi = L(-,n)$ et $\Phi = D_n$ à partir des descriptions de $L_q S^d(-,n)$ et $H_q(D_n S^d)$ de l'étape précédente et des règles de calcul établies dans l'étape 1. Par exemple, on obtient dans le théorème 6.7 le résultat suivant.

Théorème (Théorème 6.7). — *Soient d, n deux entiers naturels et V un objet de $\mathcal{V}_{\Bbbk}$. On a l'égalité :*

$$\bigcup_{q=0}^{j} \mathfrak{Bl}((L_q S^d(-,n))_V) = \begin{cases} \emptyset & \text{si } j < j_0, \\ \mathfrak{Bl}(E_V^{d_0+kp}) & \text{si } j_k \leqslant j < j_{k+1}, \\ \mathfrak{Bl}(E_V^d) & \text{si } j > j_{\lfloor \frac{d}{p} \rfloor}, \end{cases}$$

où d_0 est le reste de la division de d par p, et $j_k = 2d + n\,(kp + \alpha_p(d - kp))$ pour $k = 0, 1, \ldots, \lfloor \frac{d}{p} \rfloor$, et $\alpha_p(d - kp)$ est la somme des chiffres dans la décomposition p-adique de $d - kp$. De plus, la notation E désigne le foncteur Γ si $p = 2$ ou n est pair, et le foncteur Λ sinon.

Nous pouvons donc utiliser le théorème d'annulation général obtenu à l'étape 2 pour obtenir des résultats d'annulation pour les deux notions de dérivation qui nous intéressent. Les résultats sont énoncés dans les théorèmes 6.18 et 6.20.

Remerciements

Cet article fait partie du doctorat de l'auteur, écrit sous la direction de Lionel Schwartz et Antoine Touzé à l'Université Paris 13. L'auteur doit beaucoup à Antoine Touzé pour avoir suggéré le problème et pour beaucoup de conversations stimulantes.

Nous remercions le rapporteur de l'article pour sa lecture minutieuse, et pour ses suggestions qui ont considérablement aidé à améliorer la présentation de l'article.

2. Rappels et notations pour les foncteurs strictement polynomiaux

Dans cette section, nous donnons quelques rappels sur les catégories de foncteurs strictement polynomiaux. Nos principales références sont [20, 35, 37].

Dans cette section et dans tout le reste de l'article, $\Bbbk$ est un corps commutatif de caractéristique $p > 0$. On note $\mathrm{Vect}_{\Bbbk}$ la catégorie des $\Bbbk$-espaces vectoriels et $\mathcal{V}_{\Bbbk}$ la sous-catégorie pleine des espaces vectoriels de dimension finie.

2.1. Catégories de foncteurs strictement polynomiaux

Soit d un entier positif. Pour tout espace vectoriel V le groupe symétrique $\mathfrak{S}_d$ agit sur $V^{\otimes d}$ en permutant les facteurs du produit tensoriel. On note $\Gamma^d(V)$ la d-ième puissance divisée de V, c'est-à-dire l'espace vectoriel $\Gamma^d(V) = (V^{\otimes d})^{\mathfrak{S}_d}$ des invariants sour l'action du groupe symétrique. Pour chaque paire (V, W) d'espaces vectoriels, on a un morphisme

$$\Gamma^d(V) \otimes \Gamma^d(W) \longrightarrow \Gamma^d(V \otimes W)$$

naturel en V, W, qui est la composition :

$$\left(V^{\otimes d}\right)^{\mathfrak{S}_d} \otimes \left(W^{\otimes d}\right)^{\mathfrak{S}_d} \simeq \left(V^{\otimes d} \otimes W^{\otimes d}\right)^{\mathfrak{S}_d \times \mathfrak{S}_d} \hookrightarrow \left((V \otimes W)^{\otimes d}\right)^{\mathfrak{S}_d}.$$

Si $\mathcal{A}$ est une catégorie $\Bbbk$-linéaire, on note $\Gamma^d\mathcal{A}$ la catégorie $\Bbbk$-linéaire ayant les mêmes objets que $\mathcal{A}$, dont les morphismes sont donnés par

$$\operatorname{Hom}_{\Gamma^d\mathcal{A}}(A, B) = \Gamma^d \operatorname{Hom}_{\mathcal{A}}(A, B)$$

et dont la loi de composition est donnée par la composée suivant, où le deuxième morphisme est induit par la composition dans $\mathcal{A}$:

$$\begin{aligned}\Gamma^d \operatorname{Hom}_{\mathcal{A}}(B, C) \otimes \Gamma^d \operatorname{Hom}_{\mathcal{A}}(A, B) &\longrightarrow \Gamma^d\big(\operatorname{Hom}_{\mathcal{A}}(B, C) \otimes \operatorname{Hom}_{\mathcal{A}}(A, B)\big) \\ &\longrightarrow \Gamma^d \operatorname{Hom}_{\mathcal{A}}(A, C).\end{aligned}$$

La catégorie $\mathcal{P}_d$ des foncteurs strictement polynomiaux homogènes de degré d est la catégorie dont les objets sont les foncteurs $\Bbbk$-linéaires de $\Gamma^d\mathcal{V}_\Bbbk$ dans $\mathcal{V}_\Bbbk$, dont les morphismes sont les transformations naturelles, la composition étant la composition usuelle des morphismes. La catégorie $\mathcal{P}_d$ est une catégorie abélienne et $\Bbbk$-linéaire (car c'est une catégorie de foncteurs dont le but est une catégorie abélienne et $\Bbbk$-linéaire : la somme directe, le produit direct, les noyaux et conoyaux sont définis dans la catégorie but, par exemple $(F \oplus G)(V) = F(V) \oplus G(V)$.)

Si F est un foncteur strictement polynomial homogène de degré d, alors $F(V)$ est naturellement un $\operatorname{End}_{\Gamma^d\mathcal{V}_\Bbbk}(V)$-module. L'algèbre $\operatorname{End}_{\Gamma^d\mathcal{V}_\Bbbk}(V) = \Gamma^d \operatorname{End}_\Bbbk(V) = \operatorname{End}_{\Bbbk\mathfrak{S}_d}(V^{\otimes d})$ est une algèbre de Schur, notée $S(n, d)$ si $\dim_\Bbbk V = n$. Le résultat suivant est dû à Friedlander et Suslin (voir aussi l'appendice de [35]).

Théorème 2.1 ([20, Theorem 3.2]). — *Si $n \geqslant d$, alors l'évaluation sur $\Bbbk^n$ induit une équivalence de catégories :*

$$\begin{aligned}\mathcal{P}_d &\xrightarrow{\simeq} S(d, n)\text{-mod} \\ F &\longmapsto F\left(\Bbbk^n\right).\end{aligned}$$

On définit la catégorie (abélienne et $\Bbbk$-linéaire) $\mathcal{P}_\Bbbk$ des foncteurs strictement polynomiaux (de degré borné et à valeurs de dimensions finies) par la formule :

$$\mathcal{P}_\Bbbk = \bigoplus_{d=0}^{\infty} \mathcal{P}_d.$$

En d'autres termes, tout foncteur strictement polynomial F s'écrit comme une somme directe *finie* de foncteurs strictement polynomiaux homogènes F_d, et $\mathrm{Hom}_{\mathcal{P}_\Bbbk}(F,G) = \prod_{d\geqslant 0} \mathrm{Hom}_{\mathcal{P}_d}(F_d, G_d)$.

Les faits suivants se déduisent facilement du théorème 2.1 et de la définition de $\mathcal{P}_\Bbbk$.

(1) Tout foncteur strictement polynomial admet une suite de composition finie.
(2) La catégorie $\mathcal{P}_\Bbbk$ admet assez de projectifs et d'injectifs.

2.2. La catégorie $\mathcal{F}_\Bbbk$ et le foncteur d'oubli de $\mathcal{P}_\Bbbk$ vers $\mathcal{F}_\Bbbk$

On note $\mathcal{F}_\Bbbk$ la catégorie dont les objets sont les foncteurs $F : \mathcal{V}_\Bbbk \to \mathrm{Vect}_\Bbbk$ dont les morphismes sont les transformations naturelles, et dont la loi de composition est donnée par la composition des transformations naturelles. On notera parfois simplement $\mathcal{F}$ au lieu de $\mathcal{F}_\Bbbk$.

On note $\gamma_d : \mathcal{V}_\Bbbk \to \Gamma^d\mathcal{V}_\Bbbk$ le foncteur qui est l'identité sur les objets et qui associe à une application $\Bbbk$-linéaire $f : V \to W$ l'application $f^{\otimes d} \in \Gamma^d \operatorname{Hom}(V,W)$. La précomposition par γ^d induit un foncteur d'oubli :

$$\begin{aligned} \mathcal{O} : \mathcal{P}_d &\longrightarrow \mathcal{F}_\Bbbk, \\ F &\longmapsto \mathcal{O}(F) = F \circ \gamma_d. \end{aligned}$$

On étend ce foncteur d'oubli en un foncteur d'oubli

$$\mathcal{O} : \mathcal{P}_\Bbbk \longrightarrow \mathcal{F}_\Bbbk$$

en posant $\mathcal{O}(F) = \bigoplus_{d\geqslant 0} \mathcal{O}(F_d)$. Le foncteur d'oubli obtenu est exact et fidèle. Si $\Bbbk$ est un corps infini, il est pleinement fidèle (cf. les commentaires sur la définition 2.1 dans [20]). Ce foncteur d'oubli permet de penser aux foncteurs strictement polynomiaux comme à des endofoncteurs de $\mathcal{V}_\Bbbk$ munis d'une structure supplémentaire. Lorsque cela n'engendre pas de confusion (c'est-à-dire presque systématiquement), on notera simplement F l'image d'un foncteur strictement polynomial F par le foncteur d'oubli.

2.3. Exemples de foncteurs strictement polynomiaux

La catégorie de Schur $\Gamma^d\mathcal{V}_{\Bbbk}$ est isomorphe à la sous-catégorie pleine de $\Bbbk\mathfrak{S}_d$-mod dont les objets sont les espaces vectoriels $V^{\otimes d}$, où $\mathfrak{S}_d$ agit par permutation des facteurs du produit tensoriel. Notons $\iota_d : \Gamma^d\mathcal{V}_{\Bbbk} \hookrightarrow \Bbbk\mathfrak{S}_d$-mod le plongement associé. Chaque foncteur $\Bbbk$-linéaire $\psi : \Bbbk\mathfrak{S}_d\text{-mod} \to \mathcal{V}_{\Bbbk}$ induit donc un foncteur strictement polynomial $\psi \circ \iota_d \in \mathcal{P}_d$.

Exemple 2.2.

(1) *Puissance tensorielle.* Si ψ est le foncteur d'oubli $\Bbbk\mathfrak{S}_d\text{-mod} \to \mathcal{V}_{\Bbbk}$, le foncteur $\psi \circ \iota_d$ est noté $\otimes^d$ et appelé foncteur d-ième puissance tensorielle.

(2) *Puissance divisée.* Si ψ est le foncteur des points fixes $(-)^{\mathfrak{S}_d}$, le foncteur $(-)^{\mathfrak{S}_d} \circ \iota_d$ est noté Γ^d et appelé foncteur d-ième puissance divisée. Plus généralement, si ψ est le foncteur cohomologique
$$H^n(\mathfrak{S}_d, -) : \Bbbk\mathfrak{S}_d\text{-mod} \longrightarrow \mathcal{V}_{\Bbbk},$$
le foncteur $H^n(\mathfrak{S}_d, -) \circ \iota_d$ est noté $H^n(\mathfrak{S}_d, \otimes^d)$.

(3) *Puissance symétrique.* Si ψ est le foncteur $(-)_{\mathfrak{S}_d}$, le foncteur $(-)_{\mathfrak{S}_d} \circ \iota_d$ est noté S^d et appelé foncteur d-ième puissance symétrique. Plus généralement, si ψ est le foncteur homologique
$$H_n(\mathfrak{S}_d, -) : \Bbbk\mathfrak{S}_d\text{-mod} \longrightarrow \mathcal{V}_{\Bbbk},$$
le foncteur $H_n(\mathfrak{S}_d, -) \circ \iota_d$ est noté $H_n(\mathfrak{S}_d, \otimes^d)$.

(4) *Puissance extérieure.* Nous définissons ensuite le *d-ième foncteur puissance extérieure* comme un foncteur strictement polynomial. Nous considérons deux cas suivant la caractéristique du corps $\Bbbk$.

- Dans le cas p est impair. Si ψ est le foncteur composé
$$\Bbbk\mathfrak{S}_d\text{-mod} \xrightarrow{\Bbbk^{\mathrm{sgn}}\otimes -} \Bbbk\mathfrak{S}_d\text{-mod} \xrightarrow{(-)_{\mathfrak{S}_d}} \mathcal{V}_{\Bbbk}$$
où $\Bbbk^{\mathrm{sgn}}$ est la représentation signature de $\mathfrak{S}_d$, le foncteur $\psi \circ \iota_d$ est noté Λ^d et appelé foncteur d-ième puissance extérieure.
- Dans le cas où $p = 2$, on définit le foncteur d-ième puissance extérieure Λ^d comme l'image du morphisme composé $S^d \to \otimes^d \to \Gamma^d$, où le premier morphisme envoie $v_1 \cdots v_d \in S^d(V)$ sur $\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_d} v_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes v_{\sigma(d)}$ et le deuxième morphisme envoie $v_1 \otimes \cdots \otimes v_d \in V^{\otimes d}$ sur $\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_d} v_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes v_{\sigma(d)} \in \Gamma^d(V)$.

(5) *Torsion de Frobenius.* Soit r un entier positif. Le r-ième foncteur de torsion de Frobenius $I^{(r)}$ est défini comme l'image du morphisme composé : $\Gamma^d \to \otimes^d \to S^d$, où le premier (resp. deuxième) morphisme est le morphisme canonique d'inclusion (resp. de quotient).

2.4. Opérations sur les foncteurs strictement polynomiaux

Nous rappelons maintenant certaines opérations usuelles qui permettent de construire des exemples supplémentaires de foncteurs strictement polynomiaux.

Si V est un espace vectoriel et d et e sont deux entiers naturels, l'inclusion $\mathfrak{S}_d \times \mathfrak{S}_e \subset \mathfrak{S}_{d+e}$ induit une inclusion

$$\Delta_{d,e} : \Gamma^{d+e}(V) \simeq V^{\otimes(d+e)^{\mathfrak{S}_{d+e}}} \hookrightarrow V^{\otimes(d+e)^{\mathfrak{S}_d \times \mathfrak{S}_e}} \simeq \Gamma^d(V) \otimes \Gamma^e(V) .$$

Cette inclusion induit un foncteur $\mathbb{k}$-linéaire $\Delta_{d,e} : \Gamma^{d+e}\mathcal{V}_{\mathbb{k}} \to \Gamma^d\mathcal{V}_{\mathbb{k}} \otimes \Gamma^e\mathcal{V}_{\mathbb{k}}$. De même on définit un foncteur $\mathbb{k}$-linéaire $c_{d,e} : \Gamma^{de}\mathcal{V}_{\mathbb{k}} \to \Gamma^d\left(\Gamma^e\mathcal{V}_{\mathbb{k}}\right)$ à partir de l'inclusion

$$\left(V^{\otimes de}\right)^{\mathfrak{S}_{de}} \hookrightarrow \left(\left(V^{\otimes de}\right)^{\Delta_d\mathfrak{S}_e}\right)^{\mathfrak{S}_d} \simeq \left(\left((V^{\otimes e})^{\mathfrak{S}_e}\right)^{\otimes d}\right)^{\mathfrak{S}_d},$$

où le groupe $\Delta_d\mathfrak{S}_e$ est l'image de l'application composée $\mathfrak{S}_e \xrightarrow{\Delta_d} (\mathfrak{S}_e)^{\times d} \hookrightarrow \mathfrak{S}_{de}$, où Δ_d est le foncteur diagonal. On dispose des opérations suivantes.

(1) *Produit tensoriel.* Soient d, e deux entiers naturels et $F \in \mathcal{P}_d, G \in \mathcal{P}_e$. On définit un foncteur strictement polynomial $F \otimes G \in \mathcal{P}_{d+e}$ comme le foncteur composé

$$\Gamma^{d+e}\mathcal{V}_{\mathbb{k}} \xrightarrow{\Delta_{d,e}} \Gamma^d\mathcal{V}_{\mathbb{k}} \otimes \Gamma^e\mathcal{V}_{\mathbb{k}} \xrightarrow{F\otimes G} \mathcal{V}_{\mathbb{k}}.$$

En particulier, on a $\otimes^d \otimes \otimes^e \simeq \otimes^{d+e}$. Le produit tensoriel induit un bifoncteur exact en chaque variable $\mathcal{P}_d \times \mathcal{P}_e \to \mathcal{P}_{d+e}$.

(2) *Composition.* Soient $F \in \mathcal{P}_d$ et $G \in \mathcal{P}_e$. On définit le foncteur strictement polynomial $F \circ G \in \mathcal{P}_{de}$ comme le foncteur composé

$$\Gamma^{de}\mathcal{V}_{\mathbb{k}} \xrightarrow{c_{d,e}} \Gamma^d\left(\Gamma^e\mathcal{V}_{\mathbb{k}}\right) \xrightarrow{\Gamma^d G} \Gamma^d\mathcal{V}_{\mathbb{k}} \xrightarrow{F} \mathcal{V}_{\mathbb{k}}.$$

La précomposition par G induit un foncteur exact $- \circ G : \mathcal{P}_d \to \mathcal{P}_d$ qu'on étend par additivité en un foncteur exact $- \circ G : \mathcal{P}_{\mathbb{k}} \to \mathcal{P}_{\mathbb{k}}$. Un foncteur composé $F \circ I^{(r)}$ sera noté $F^{(r)}$.

(3) *Foncteur à paramètre.* C'est un cas particulier de composition, qui nous sera très utile dans la suite de l'article. Soit $F \in \mathcal{P}_d$ et V un $\mathbb{k}$-espace vectoriel de dimension finie. On définit des « foncteurs à paramètre » $F_V(-) := F \circ (V \otimes -)$ et $F^V := F_{V^\vee}$ où $V^\vee$ est le dual $\mathbb{k}$-linéaire de V. Par définition, la paramétrisation par V définit un foncteur exact $\mathcal{P}_{\mathbb{k}} \to \mathcal{P}_{\mathbb{k}}$. Les « foncteurs à paramètre » peuvent se définir dans $\mathcal{F}_{\mathbb{k}}$ comme dans $\mathcal{P}_{\mathbb{k}}$, à partir de la même formule.

(4) *Dualité de Kuhn.* Soit $F \in \mathcal{P}_d$. On définit $F^\sharp \in \mathcal{P}_d$ comme le foncteur composé suivant, où le premier et le troisième morphismes sont induits par la dualité $\Bbbk$-linéaire $(-)^\vee : \mathcal{V}_\Bbbk^{\mathrm{op}} \to \mathcal{V}_\Bbbk$:

$$\Gamma^d \mathcal{V}_\Bbbk \longrightarrow \Gamma^d \mathcal{V}_\Bbbk^{\mathrm{op}} \xrightarrow{F} \mathcal{V}_\Bbbk^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathcal{V}_\Bbbk.$$

La dualité de Kuhn définit une équivalence de catégories $-^\sharp : \mathcal{P}_d \simeq \mathcal{P}_d^{\mathrm{op}}$, qu'on étend par additivité en une équivalence de catégories $-^\sharp : \mathcal{P}_\Bbbk \simeq \mathcal{P}_\Bbbk^{\mathrm{op}}$. On dispose des isomorphismes suivants (naturels en F et G) :

$$(F \oplus G)^\sharp \simeq F^\sharp \oplus G^\sharp, \quad (F \otimes G)^\sharp \simeq F^\sharp \otimes G^\sharp,$$
$$(F_V)^\sharp \simeq \left(F^\sharp\right)^V, \quad (F \circ G)^\sharp \simeq F^\sharp \circ G^\sharp,$$

ainsi que des isomorphismes de foncteurs

$$(\Lambda^d)^\sharp \simeq \Lambda^d, \quad (\Gamma^d)^\sharp \simeq S^d, \quad (I^{(r)})^\sharp \simeq I^{(r)}.$$

Le foncteur d'oubli $\mathcal{O} : \mathcal{P}_\Bbbk \to \mathcal{F}_\Bbbk$ commute aux opérations usuelles sur les foncteurs. Plus précisément, on a des isomorphismes naturels dans $\mathcal{F}_\Bbbk$

$$\mathcal{O}(F \oplus G) \simeq \mathcal{O}(F) \oplus \mathcal{O}(G), \quad \mathcal{O}(F \otimes G) \simeq \mathcal{O}(F) \otimes \mathcal{O}(G),$$
$$\mathcal{O}(F \circ G) \simeq \mathcal{O}(F) \circ \mathcal{O}(G), \quad \mathcal{O}(F_V) \simeq \mathcal{O}(F)_V.$$

Ceci permet de penser que les opérations sur les foncteurs strictement polynomiaux définies ci-dessus expriment simplement la compatibilité des opérations usuelles sur les endofoncteurs de $\mathcal{V}_\Bbbk$ avec les structures additionnelles de foncteurs strictement polynomiaux. En utilisant les foncteurs à paramètre, on peut définir (suivant [37, Section 4]) une opération de Hom interne pour les foncteurs strictement polynomiaux.

(5) *Hom interne.* Si F et G sont deux foncteurs strictement polynomiaux, on note

$$\underline{\mathrm{Hom}}(F, G)(V) := \mathrm{Hom}_{\mathcal{P}_\Bbbk}(F, G_V)$$

Si F et G sont homogènes de même degré d, le Hom interne est également homogène de degré d. On a un isomorphisme d'espaces vectoriels, naturel en F, G et V :

$$\underline{\mathrm{Hom}}(F, G)(V) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{P}_\Bbbk}(F^V, G) \ ,$$

de sorte que l'on a des isomorphismes, naturels en F et G

$$\underline{\mathrm{Hom}}(F, G) \simeq \underline{\mathrm{Hom}}(G^\sharp, F^\sharp).$$

On note $\underline{\mathrm{Ext}}^i(F, G)$ le foncteur strictement polynomial obtenu en dérivant le Hom interne, c'est-à-dire en dérivant le foncteur

$\underline{\mathrm{Hom}}(-,G) : \mathcal{P}_{\Bbbk}^{\mathrm{op}} \to \mathcal{P}_{\Bbbk}$ ou le foncteur $\underline{\mathrm{Hom}}(F,-) : \mathcal{P}_{\Bbbk} \to \mathcal{P}_{\Bbbk}$. (On peut dériver au choix l'un ou l'autre de ces foncteurs, les résultats obtenus seront naturellement isomorphes).

2.5. Algèbre homologique dans $\mathcal{P}_d$

On note $\Gamma^{d,V}$ le foncteur $\mathrm{Hom}_{\Gamma^d\mathcal{V}_{\Bbbk}}(V,-)$. Ce foncteur est isomorphe au foncteur $(\Gamma^d)^V$ obtenu en « paramétrisant » le foncteur Γ^d de d-ième puissance divisée. Par la version $\Bbbk$-linéaire du lemme de Yoneda, il existe un isomorphisme naturel en $F \in \mathcal{P}_d$ et $V \in \Gamma^d\mathcal{V}_{\Bbbk}$:

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{P}_d}(\Gamma^{d,V}, F) \simeq F(V). \tag{2.1}$$

On en déduit que les foncteurs $\Gamma^{d,V}$ sont projectifs. Le théorème 2.1 montre de plus que si $\dim_{\Bbbk} V \geqslant d$ alors $\Gamma^{d,V}$ est un générateur projectif de $\mathcal{P}_d$. En utilisant la dualité de Kuhn et l'isomorphisme $(\Gamma^{d,V})^\sharp \simeq S^d_V$ on en déduit que si $\dim_{\Bbbk} V \geqslant d$ alors S^d_V est un cogénérateur injectif de $\mathcal{P}_d$, et satisfait un isomorphisme (naturel en F et V) :

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{P}_d}(F, S^d_V) \simeq F^\sharp\,(V)\,.$$

On notera que les deux isomorphismes ci-dessus se réécrivent avec les Hom internes sous la forme :

$$\underline{\mathrm{Hom}}(\Gamma^d, F) \simeq F\,, \qquad \underline{\mathrm{Hom}}(F, S^d) \simeq F^\sharp\,.$$

2.6. Foncteurs strictement polynomiaux à plusieurs variables

En quelques points du texte, nous aurons besoin des foncteurs strictement polynomiaux à plusieurs variables. On note $\mathcal{P}_d(n)$ la catégorie des foncteurs strictement polynomiaux à n variables, homogènes de degré total d et à valeurs de dimensions finies. Les objets de cette catégorie sont les foncteurs $\Bbbk$-linéaires $\Gamma^d(\mathcal{V}_{\Bbbk}^{\times n}) \to \mathcal{V}_{\Bbbk}$, les morphismes sont les transformations naturelles et la composition est la composition usuelle des transformations naturelles. La catégorie $\mathcal{P}_{\Bbbk}(n)$ des foncteurs strictement polynomiaux à n variables (de degré total borné et à valeurs de dimensions finies) est définie par

$$\mathcal{P}_{\Bbbk}(n) = \bigoplus_{d=0}^{\infty} \mathcal{P}_d(n).$$

Tout se passe avec les foncteurs à n variables de même manière qu'avec les foncteurs à une variable. En particulier, si $\mathcal{F}_{\Bbbk}(n)$ désigne la catégorie des foncteurs $F : \mathcal{V}_{\Bbbk}^{\times n} \to \mathrm{Vect}_{\Bbbk}$ on a un foncteur d'oubli (exact et fidèle, et qui est pleinement fidèle si $\Bbbk$ est infini)

$$\mathcal{O} : \mathcal{P}_{\Bbbk}(n) \longrightarrow \mathcal{F}_{\Bbbk}(n) .$$

Les opérations de produit tensoriel, de composition etc. s'étendent de manière évidente au cas des foncteurs à n variables. Comme nous ne ferons qu'un usage très modéré des foncteurs strictement polynomiaux à plusieurs variables, nous laissons les détails au lecteur, ou le renvoyons à la littérature (par exemple [36, 38]).

3. Théorie des blocs dans $\mathcal{P}_{\Bbbk}$

Les blocs de la catégorie $\mathcal{P}_{\Bbbk}$ sont connus d'après Donkin [18]. Dans cette section, on présente les propriétés des blocs dont on a besoin dans la suite. Dans les deux premières sous-sections, on rappelle la théorie des partitions et des propriétés essentielles de foncteurs de Schur et foncteurs simples. Dans la troisième sous-section, on définit l'application $\mathfrak{Bl}$ qui calcule des blocs d'un foncteur strictement polynomial et on explique comment on peut calculer cette application. Enfin, un critère d'annulation est donné dans la sous-section 3.5.

3.1. Partitions

Les objets simples de la catégorie $\mathcal{P}_{\Bbbk}$ sont indexés par les partitions et les blocs de $\mathcal{P}_{\Bbbk}$ correspondent aux p-cœurs de ces partitions. Dans cette sous-section, on donne donc un bref rappel sur la théorie des partitions et des p-cœurs. Notre référence est le livre de James et Kerber [22].

3.1.1. Partitions

Une partition est une suite $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots)$ d'entiers naturels tels que $\lambda_i \geqslant \lambda_{i+1}$ pour tout i et $\lambda_i = 0$ pour i assez grand. On note $\mathbf{P}$ l'ensemble des partitions. Si λ est une partition avec $\lambda_{n+1} = 0$, on désignera simplement λ par $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$.

Pour chaque partition λ, *le diagramme de Young* $Y(\lambda)$ est le sous-ensemble de $\mathbb{Z}_+^2$ défini par

$$Y(\lambda) = \left\{(i,j) \in \mathbb{Z}_+^2 : j \leqslant \lambda_i\right\} ,$$

où $\mathbb{Z}_+$ est l'ensemble des entiers positifs. Un sous-ensemble de $\mathbb{Z}_+^2$ est appelé une partition s'il est de la forme $Y(\lambda)$ pour une certaine partition λ.

On définit *la longueur* $\ell(\lambda)$ et *le poids* $|\lambda|$ d'une partition λ par les formules :

$$\ell(\lambda) = \min\{n \in \mathbb{N} : \lambda_i = 0, \forall\, i > n\}, \qquad |\lambda| = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i.$$

Si $\lambda \neq (0)$, on a $\ell(\lambda) = \max\{i : (i,1) \in Y(\lambda)\}$. De plus, on a $|\lambda| = \#Y(\lambda)$. Si $|\lambda| = n$, on dit que λ est une partition de n. On désigne par $\mathbf{P}(n)$ le sous-ensemble de $\mathbf{P}$ des partitions de n. Par exemple, $\mathbf{P}(0) = \{(0)\}$, $\mathbf{P}(1) = \{(1)\}$, et $\mathbf{P}(2) = \{(2),(1,1)\}$, $\mathbf{P}(3) = \{(3),(2,1),(1,1,1)\}$. On a $\mathbf{P}(n) \cap \mathbf{P}(m) = \emptyset$ si $n \neq m$ et $\mathbf{P} = \bigcup_{n=0}^{\infty} \mathbf{P}(n)$.

Soit $\lambda \in \mathbf{P}$ une partition. La partition conjuguée de λ est la partition λ' définie par $\lambda'_i = \#\{j : \lambda_j \geqslant i\}$. La conjugaison des partitions définit une application $(-)' : \mathbf{P} \to \mathbf{P}$. On a

$$(\lambda')' = \lambda, \quad |\lambda'| = |\lambda|, \quad \ell(\lambda) = \lambda'_1, \quad \ell(\lambda') = \lambda_1.$$

De plus $\lambda'_j = \#\{i : (i,j) \in Y(\lambda)\}$ et $(i,j) \in Y(\lambda)$ si et seulement si $(j,i) \in Y(\lambda')$. Une partition λ est dite *p-restreinte* si $\lambda_i - \lambda_{i+1} < p$ pour tout $i \geqslant 1$. Si λ et μ sont des partitions et n est un entier naturel, on note $\lambda + \mu$ la partition $(\lambda_1 + \mu_1, \lambda_2 + \mu_2, \ldots)$ et $n\lambda$ la partition $(n\lambda_1, n\lambda_2, \ldots)$.

Exemple 3.1. — Soit $\lambda = (5,3,2)$. On a $|\lambda| = 10$ alors λ est une partition de 10. De plus, on a des égalités :

$$\ell(\lambda) = 3, \qquad \lambda' = (3,3,2,1,1), \qquad \ell(\lambda') = \lambda_1 = 5.$$

Par définition, λ est p-restreinte si et seulement si $p \geqslant 3$.

Le résultat suivant est la division euclidienne pour les partitions, voir par exemple [22, (6.1.4)–(6.1.7)].

Lemme 3.2. — *Soit $\lambda \in \mathbf{P}$ une partition. Il existe une unique partition p-restreinte μ et une unique partition ν telles que $\lambda = \mu + p\nu$.*

3.1.2. p-cœurs

Soit $Y \subset \mathbb{Z}_+^2$ une partition. Le bord de Y que l'on note ∂Y, est l'ensemble des éléments (i,j) de Y tel que $(i+1, j+1)$ n'appartient pas à Y

$$\partial Y = \{(i,j) \in Y : (i+1, j+1) \notin Y\}.$$

On définit une relation binaire $\prec$ sur $\mathbb{Z}_+^2$ de la façon suivante. Soient (i_1, j_1) et (i_2, j_2) deux éléments de $\mathbb{Z}_+^2$. On note $(i_1, j_1) \prec (i_2, j_2)$ si $i_1 \geqslant i_2$

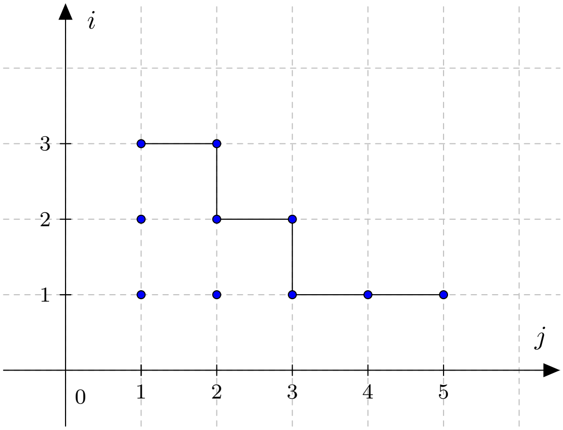

FIGURE 3.1. $\partial\left(Y(5,2,1)\right)$

et $j_1 \leqslant j_2$. Puisque $\leqslant$ est une relation d'ordre sur $\mathbb{Z}$, $\prec$ est une relation d'ordre sur $\mathbb{Z}_+^2$. De plus, si $Y \subset \mathbb{Z}_+^2$ est une partition, la relation d'ordre $\prec$ est totale sur ∂Y. Un *intervalle* de ∂Y est un sous-ensemble de ∂Y de la forme $\{(i,j) \in \partial Y : (i_1,j_1) \prec (i,j) \prec (i_2,j_2)\}$ pour $(i_1,j_1),(i_2,j_2) \in \partial Y$ quelconque.

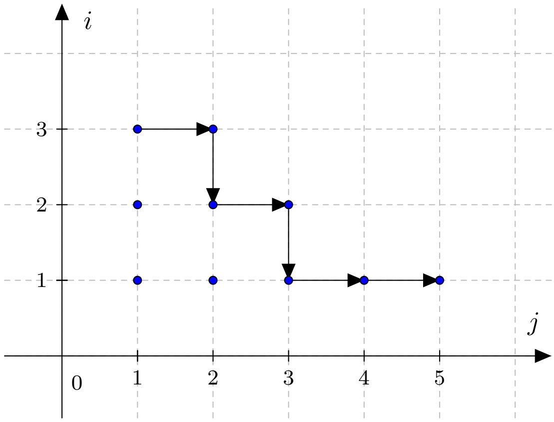

FIGURE 3.2. La relation d'ordre totale $\prec$ sur $\partial(Y(5,2,1))$

Soient λ, μ deux partitions. On note $\lambda \subset \mu$ si $Y(\lambda) \subset Y(\mu)$, ou de manière équivalente si $\lambda_i \leqslant \mu_i$ pour tout i. Cette relation binaire est une relation d'ordre partiel sur l'ensemble $\mathbf{P}$ des partitions. On définit également une autre relation d'ordre $\leqslant_p$ sur l'ensemble $\mathbf{P}$ comme suit. Soient λ, μ deux partitions. On note $\lambda \leqslant_p \mu$ s'il existe une suite des partitions $\nu^1, \ldots, \nu^n$ avec $\nu^1 = \lambda$ et $\nu^n = \mu$ satisfaisant les conditions : $\nu^i \subset \nu^{i+1}$ et $Y(\nu^{i+1}) \setminus Y(\nu^i)$ est un intervalle de $\partial(Y(\nu^{i+1}))$ de p éléments pour $i = 1, \ldots, n-1$.

LEMME 3.3. — *Soient λ et μ deux partitions. On a $\lambda \leqslant_p \lambda + p\mu$. En particulier, on a $(0) \leqslant_p p\lambda$.*

Démonstration. — Il existe (de façon non unique) des partitions distinctes μ^k avec $0 \leqslant k \leqslant |\mu|$ telles que $(0) = \mu^0 \subset \mu^1 \subset \cdots \subset \mu^{|\mu|-1} \subset \mu^{|\mu|} = \mu$. On pose $\nu^i = p\mu^i$ pour tout i. On obtient une suite de partitions $\nu^0, \ldots, \nu^{|\mu|}$ avec $\nu^0 = \lambda, \nu^{|\mu|} = \mu$, de plus, $\nu^i \subset \nu^{i+1}$ et $Y(\nu^{i+1}) \setminus Y(\nu^i)$ est un intervalle de $\partial(Y(\nu^{i+1}))$ de p éléments pour tout i. On a alors $\lambda \leqslant_p \lambda + p\mu$. □

DÉFINITION 3.4. — *Une partition λ est appelée un p-*cœur *si λ est un élément minimal de $\mathbf{P}$ par rapport à la relation $\leqslant_p$. On note $\mathbf{P}_{p\text{-}\mathfrak{coeur}}$ l'ensemble des p-coeurs.*

Si $p = 2$, l'ensemble $\mathbf{P}_{p\text{-}\mathfrak{coeur}}$ est très simple. En effet, un 2-cœur est une partition λ telle que $\lambda_n = \lambda_{n+1} + 1$ si $\lambda_n \neq 0$. Autrement dit, une partition est un 2-cœur si et seulement si λ et λ' sont des partitions 2-restreintes. Pour p quelconque, si la partition λ est un p-cœur, les partitions λ et λ' sont toujours p-restreintes, mais cette condition ne caractérise pas les p-cœurs. Par exemple, si $\lambda = (3, 2)$ alors λ et λ' sont 3-restreintes mais λ n'est pas un 3-cœur car $(1, 1) \leqslant_3 (3, 2)$. Le résultat fondamental sur la relation d'ordre $\leqslant_p$ est le suivant. Une démonstration de ce résultat peut être trouvée dans [22, Theorem 2.7.16].

THÉORÈME 3.5. — *Soit λ une partition. Alors l'ensemble $\{\mu \in \mathbf{P} : \mu \leqslant_p \lambda\}$ possède un plus petit élément.*

DÉFINITION 3.6. — *Si $\lambda \in \mathbf{P}$ est une partition, on note $\mathfrak{Co}_p(\lambda)$ le p-cœur de λ, c'est-à-dire le plus petit élément de l'ensemble $\{\mu \in \mathbf{P} : \mu \leqslant_p \lambda\}$. On obtient une application $\mathfrak{Co}_p : \mathbf{P} \to \mathbf{P}_{p\text{-}\mathfrak{coeur}}$ qui fixe tous les éléments de $\mathbf{P}_{p\text{-}\mathfrak{coeur}}$.*

PROPOSITION 3.7. — *Soient λ et μ deux partitions.*

(1) *On a $\mathfrak{Co}_p(\lambda) = \mathfrak{Co}_p(\lambda + p\mu)$. En particulier, on a $\mathfrak{Co}_p(p\mu) = (0)$.*
(2) *La partition $\mathfrak{Co}_p(\lambda')$ est la partition conjuguée de $\mathfrak{Co}_p(\lambda)$.*

Démonstration.

(1). — D'après la définition 3.6 et le théorème 3.5, on a que

$$\mathfrak{Co}_p(\lambda + p\mu) = \mathfrak{Co}_p(\nu)$$

si la partition ν satisfait l'inégalité $\nu \leqslant_p \lambda + p\mu$. Par le lemme 3.3, la partition λ satisfait cette condition. On a donc $\mathfrak{Co}_p(\lambda) = \mathfrak{Co}_p(\lambda + p\mu)$. Dans le cas $\lambda = 0$, on a que $\mathfrak{Co}_p(p\mu)$ est le p-cœur de la partition (0), qui est (0) par définition.

(2). — Par définition de la partition conjuguée, on a

$$Y(\lambda') = \{(i,j) : (j,i) \in Y(\lambda)\}.$$

De plus, l'application $(i,j) \mapsto (j,i)$ est une bijection de $\partial Y(\lambda')$ sur $\partial Y(\lambda)$. De plus, cette bijection est strictement décroissante. On a, par définition de la relation d'ordre, que $\mu \leqslant_p \lambda$ si et seulement si $\mu' \leqslant_p \lambda'$. On en déduit le résultat. □

3.2. Foncteurs de Schur et foncteurs simples

3.2.1. Foncteurs de Schur

On rappelle que l'ordre lexicographique est l'ordre total sur $\mathbb{Z}_+^2$ défini par $(i_1, j_1) \leqslant (i_2, j_2)$ si $i_1 < i_2$ ou si $i_1 = i_2$ et $j_1 \leqslant j_2$.

Pour tout sous-ensemble non vide A de $\mathbb{Z}_+^2$ on note α_A l'unique bijection de A vers $\{1, 2, \ldots, \#A\}$ préservant les ordres. Si $\lambda \in \mathbf{P}(d)$, on note σ_λ : $\{1, \ldots, d\} \to \{1, \ldots, d\}$ la composée suivante, où le deuxième morphisme envoie (i,j) sur (j,i) :

$$\{1, \ldots, d\} \xrightarrow{\alpha_{Y(\lambda)}^{-1}} Y(\lambda) \longrightarrow Y(\lambda') \xrightarrow{\alpha_{Y(\lambda')}} \{1, \ldots, d\}.$$

On obtient ainsi une application $\mathbf{P}(d) \to \mathfrak{S}_d$. On a évidemment que $\sigma_{\lambda'}$ est l'inverse de σ_λ pour toute partition λ. D'autre part, on a une application $\mathfrak{S}_d \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{P}_d}(\otimes^d, \otimes^d)$ qui à une permutation τ associe la transformation naturelle qui envoie $v_1 \otimes \cdots \otimes v_d$ vers $v_{\tau^{-1}(1)} \otimes \cdots \otimes v_{\tau^{-1}(d)}$. La composée de ces deux applications fournit une application

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(d) &\longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{P}_d}(\otimes^d, \otimes^d) \\ \lambda &\longmapsto \sigma_\lambda. \end{aligned}$$

Exemple 3.8.

(1) On considère la partition $\lambda = (3,1)$ de 4, on a $\sigma_{(3,1)} : \otimes^4 \to \otimes^4, v_1 \otimes v_2 \otimes v_3 \otimes v_4 \otimes \mapsto v_1 \otimes v_4 \otimes v_2 \otimes v_3$.

(2) Par définition, si $\lambda = (d)$ ou $\lambda = (1^d)$, c'est-à-dire si $\ell(\lambda) = 1$ ou $\ell(\lambda') = 1$, on a $\sigma_\lambda = \mathrm{Id}$.

On rappelle que si $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ est un n-uplet d'entiers naturels (par exemple une partition) et X désigne l'un des symboles S, Λ, Γ, on note X^λ le produit tensoriel $X^{\lambda_1} \otimes \cdots \otimes X^{\lambda_n}$. La définition suivante est due à Akin–Buchsbaum–Weyman [3, Section II].

Définition 3.9. — *Soit λ une partition de d. Le foncteur de Schur S_λ est l'image du morphisme composé*

$$\Lambda^{\lambda'} \hookrightarrow \otimes^d \xrightarrow{\sigma_{\lambda'}} \otimes^d \twoheadrightarrow S^\lambda.$$

Remarque 3.10. — Le foncteur de Schur S_λ est noté $L_{\lambda'}$ dans [3], voir aussi [41, Section 2.1]. Nous ne suivons pas cette notation et réservons la lettre "L" pour désigner les objets simples de $\mathcal{P}_d$. De plus, la convention d'indexation que l'on utilise est duale de celle des références [3] ou [1] pour les foncteurs de Schur.

Si λ est une partition de d, le foncteur de Schur S_λ est un objet de $\mathcal{P}_d$. Si la longueur de λ ou λ' est 1, le foncteur de Schur associé à λ correspond à des foncteurs bien connus : $S_{(d)} = S^d$ et $S_{(1^d)} = \Lambda^d$.

Théorème 3.11 (Règle de Pieri [1, Section 3]). — *Soit λ une partition et soit d un entier naturel.*

(1) *Le foncteur $S_\lambda \otimes S^d$ possède une filtration telle que* $\mathrm{Gr}(S_\lambda \otimes S^d) = \bigoplus_\nu S_\nu$ *où la somme directe est indexée par les partitions ν satisfaisant les conditions : $|\nu| = |\lambda| + d$ et $\lambda'_i \leqslant \nu'_i \leqslant \lambda'_i + 1$ pour tout i.*

(2) *Le foncteur $S_\lambda \otimes \Lambda^d$ possède une filtration telle que* $\mathrm{Gr}\left(S_\lambda \otimes \Lambda^d\right) = \bigoplus_\nu S_\nu$ *où la somme directe est indexée par les partitions ν satisfaisant les conditions : $|\nu| = |\lambda| + d$ et $\lambda_i \leqslant \nu_i \leqslant \lambda_i + 1$ pour tout i.*

Exemple 3.12.

(1) Soient $d_1, d_2 \in \mathbb{N}$. Le foncteur $S^{d_1} \otimes S^{d_2}$ possède une filtration telle que

$$\mathrm{Gr}\big(S^{d_1} \otimes S^{d_2}\big) = \bigoplus_{i=0}^{\min\{d_1,d_2\}} S_{(d_1+d_2-i,i)}.$$

(2) Le foncteur $S_{(2,1)} \otimes S^2$ possède une filtration telle que

$$\mathrm{Gr}\big(S_{(2,1)} \otimes S^2\big) = S_{(4,1)} \oplus S_{(3,2)} \oplus S_{(3,1,1)} \oplus S_{(2,2,1)}.$$

3.2.2. Foncteurs simples

Soit $d \in \mathbb{N}$. Un objet F de $\mathcal{P}_d$ est dit *simple* s'il est non nul et s'il ne contient aucun sous-foncteur distinct de F et 0. Le *socle* d'un foncteur F, noté $\mathrm{soc}(F)$, est le plus grand sous-foncteur semi-simple de F, c'est-à-dire la somme des sous-foncteurs simples de F. Si λ est une partition, on désigne par L_λ le socle du foncteur de Schur S_λ.

THÉORÈME 3.13 ([21, 30]).

(1) *Pour toute partition λ, L_λ est un foncteur simple.*
(2) *Si F est un objet simple de $\mathcal{P}_d$, il existe une unique partition $\lambda \in \mathbf{P}(d)$ telle que $F \simeq L_\lambda$.*
(3) *Les foncteurs simples sont autoduaux, c'est-à-dire que l'on a un isomorphisme $L_\lambda^\sharp \simeq L_\lambda$.*

D'après ce théorème, les classes d'isomorphisme de foncteurs simples de $\mathcal{P}_d$ sont indexées par les partitions de d.

THÉORÈME 3.14 (Théorème du produit tensoriel de Steinberg [24]). — *Soit λ une partition p-restreinte et soit μ une partition. On a un isomorphisme $L_\lambda \otimes L_\mu^{(1)} \simeq L_{\lambda+p\mu}$.*

Comme une application du théorème 3.14, on a le résultat suivant.

COROLLAIRE 3.15. — *Si $F \in \mathcal{P}_{\mathbb{k}}$ est le foncteur simple associé à la partition λ alors $F^{(r)}$ est le foncteur simple associé à $p^r\lambda$.*

3.3. Blocs de la catégorie $\mathcal{P}_{\mathbb{k}}$

3.3.1. Blocs

Les blocs de la catégorie $\mathcal{P}_{\mathbb{k}}$ ont été déterminés par Donkin [18]. Avant de donner le résultat, nous rappelons les définitions élémentaires relatives aux blocs.

DÉFINITION 3.16. — *Soient F et G deux foncteurs simples de $\mathcal{P}_d$. On note $F \sim G$ s'il existe une suite $L_0, L_1, \dots, L_n$ de foncteurs simples de $\mathcal{P}_d$ satisfaisant $L_0 = F, L_n = G$ et $\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{P}_{\mathbb{k}}}(L_i, L_{i+1}) \neq 0$ pour tout $i = 1, \dots, n-1$.*

La relation binaire $\sim$ est une relation d'équivalence sur les simples de $\mathcal{P}_d$. Un bloc de $\mathcal{P}_d$ est une classe d'équivalence de simples sous cette relation d'équivalence. On note $\mathcal{B}_d$ l'ensemble des blocs de $\mathcal{P}_d$. Pour $b \in \mathcal{B}_d$, on désigne par $(\mathcal{P}_d)_b$ la sous-catégorie pleine de $\mathcal{P}_d$ formée des foncteurs F dont tous les facteurs de composition sont dans le bloc b. On a une décomposition

$$\mathcal{P}_d = \bigoplus_{b \in \mathcal{B}_d} (\mathcal{P}_d)_b.$$

Cela signifie que tout foncteur se décompose de manière unique en une somme directe $F = \bigoplus_{b \in \mathcal{B}_d} F_b$ où $F_b \in (\mathcal{P}_d)_b$, et de plus $\mathrm{Hom}_{\mathcal{P}_d}(F_1, F_2) = 0$ si $F_i \in (\mathcal{P}_d)_{b_i}, i = 1, 2$ et $b_1 \neq b_2$. En particulier, si F est indécomposable, il existe un seul élément $b \in \mathcal{B}_d$ satisfaisant $F \in (\mathcal{P}_d)_b$. Le théorème suivant donne une description combinatoire des blocs de la catégorie $\mathcal{P}_d$.

Théorème 3.17 (Règle de Nakayama [18], [30, Theorem 5.1.1]). — *Soient λ et μ deux partitions de poids d. Les deux simples L_λ et L_μ sont dans le même bloc si et seulement si les deux partitions λ et μ ont le même p-cœur.*

On indexe donc les blocs de $\mathcal{P}_d$ par les p-cœurs des partitions de poids d, le bloc contenant L_λ est indexé par le p-cœur de λ. On obtient une bijection entre $\mathcal{B}_d$ et l'ensemble des partitions λ telles que $|\lambda| \leqslant d$ et $|\lambda| \equiv d \pmod p$.

3.3.2. L'application $\mathfrak{Bl}$

Définition 3.18. — *Si F est un foncteur strictement polynomial, on note $\mathfrak{Bl}(F)$ l'ensemble des p-cœurs des partitions indexant les facteurs de composition de F. On obtient donc une application :*

$$\begin{aligned} \mathfrak{Bl} : \mathrm{Obj}(\mathcal{P}_{\Bbbk}) &\longrightarrow 2^{\mathbf{P}_{p\text{-}\mathfrak{coeur}}} \\ F &\longmapsto \mathfrak{Bl}(F) = \{\mathfrak{Co}_p(\lambda) : \lambda \in \mathbf{P}, [F : L_\lambda] > 0\}. \end{aligned}$$

Dans cette définition, $[F : L_\lambda]$ est le nombre des facteurs de composition de F qui sont isomorphes au foncteur simple L_λ. En particulier, la condition $[F : L_\lambda] > 0$ veut dire que L_λ est isomorphe à un certain facteur de composition de F.

Proposition 3.19. — *Soient λ, μ deux partitions, F un objet de $\mathcal{P}_{\Bbbk}$ et G un sous-objet de F. On a :*

$$\mathfrak{Bl}(S_\lambda) = \mathfrak{Bl}(L_\lambda), \tag{3.1}$$

$$\mathfrak{Bl}(L_\lambda) = \mathfrak{Bl}(L_{\lambda + p\mu}), \tag{3.2}$$

$$\mathfrak{Bl}(F) = \mathfrak{Bl}(G) \cup \mathfrak{Bl}(F/G), \tag{3.3}$$

$$\mathfrak{Bl}(F^\sharp) = \mathfrak{Bl}(F), \tag{3.4}$$

$$\mathfrak{Bl}(F^{(1)}) = \begin{cases} \emptyset & \text{si } F = 0, \\ \{(0)\} & \text{si } F \neq 0. \end{cases} \tag{3.5}$$

Démonstration. — Comme le socle de S_λ est un foncteur simple, le foncteur S_λ est indécomposable. Cela implique que $S_\lambda \in (\mathcal{P}_d)_b$ où b est le bloc contenant le foncteur simple L_λ. On obtient donc la formule (3.1). D'après le corollaire 3.7, on a $\mathfrak{Bl}(L_{\lambda+p\mu}) = \mathfrak{Co}_p\,(\lambda + p\mu) = \mathfrak{Co}_p\,(\lambda) = \mathfrak{Bl}(L_\lambda)$, d'où la formule (3.2).

Comme G est un sous-foncteur de F, un simple L est un facteur de composition de F si et seulement si L est un facteur de composition de G ou de F/G. On obtient la formule (3.3). Pour obtenir (3.4), on utilise (3.2) et le fait que les foncteurs simples sont autoduaux. Il reste à montrer la formule (3.5). Cette formule est évidente dans le cas où $F = 0$. Si $F \neq 0$, soit $0 = F_0 \subset F_1 \subset \cdots \subset F_n = F$ une suite de composition de F avec $F_i/F_{i-1} \simeq L_{\lambda^i}$. On a donc $0 = F_0^{(1)} \subset F_1^{(1)} \subset \cdots \subset F_n^{(1)} = F^{(1)}$ avec $F_i^{(1)}/F_{i-1}^{(1)} \simeq L_{\lambda^i}^{(1)} \simeq L_{p\lambda^i}$. Par le corollaire 3.7, on a $\mathfrak{Bl}(L_{p\lambda^i}) = \mathfrak{Co}_p\left(p\lambda^i\right) = \{(0)\}$. On obtient (3.5). □

On connaît $\mathfrak{Bl}(S^d)$ pour tout $d \in \mathbb{N}$. En effet, $S^d = S_{(d)}$ est un foncteur de Schur. Par la proposition (3.1), $\mathfrak{Bl}(S^d) = \mathfrak{Bl}(L_{(d)}) = \{(r)\}$ où r est le reste de la division de d par p. La règle de Pieri permet de déterminer plus généralement $\mathfrak{Bl}(S_V^d)$ pour tout espace vectoriel V.

Proposition 3.20. — *Soient d un entier naturel et $V \neq 0$ un objet de $\mathcal{V}_{\Bbbk}$. On a les égalités :*

$$\mathfrak{Bl}(S_V^d) = \left\{ \lambda \in \mathbf{P}_{p\text{-}\mathfrak{coeur}} : \begin{cases} |\lambda| \leqslant d, \ell(\lambda) \leqslant \dim V, \\ |\lambda| \equiv d \pmod p \end{cases} \right\}, \tag{3.6}$$

$$\mathfrak{Bl}(\Gamma_V^d) = \mathfrak{Bl}(S_V^d), \tag{3.7}$$

$$\mathfrak{Bl}(\Lambda_V^d) = \left\{ \lambda \in \mathbf{P}_{p\text{-}\mathfrak{coeur}} : \lambda' \in \mathfrak{Bl}(S_V^d) \right\}. \tag{3.8}$$

Démonstration. — On note ℓ la dimension de V. Comme les foncteurs S, Λ, Γ sont des foncteurs exponentiels, si E désigne l'un des symboles S, Λ, Γ, on a la décomposition suivante, où la somme directe est indexée par les ℓ-uplets d'entiers naturels $\underline{d}$ de poids d :

$$E_V^d \simeq \bigoplus_{\underline{d}} E^{\underline{d}}. \tag{3.9}$$

En utilisant cet isomorphisme et l'égalité (3.4) de la proposition 3.19, on obtient l'égalité (3.7). Pour une partition λ et un entier naturel k, on note $A(\lambda; k)$ l'ensemble des partitions ν telles que $|\nu| = |\lambda| + d$ et $\lambda'_i \leqslant \nu'_i \leqslant \lambda'_i + 1$ pour tout i. Par définition, on a les deux propriétés suivantes de l'ensemble $A(\lambda; k)$.

(1) Pour $\nu \in A(\lambda; k)$, on a $\ell(\nu) \leqslant \ell(\lambda) + 1$.
(2) Si $k \leqslant \lambda_{\ell(\lambda)}$ alors $\nu := (\lambda, k)$ appartient à $A(\lambda; k)$.

D'autre part, par la règle de Pieri (théorème 3.11), il existe des filtrations de $S_\lambda \otimes S^k$ et $S_{\lambda'} \otimes \Lambda^k$ telles qu'on a des isomorphismes :

$$\mathrm{Gr}(S_\lambda \otimes S^k) \simeq \bigoplus_{\nu \in A(\lambda;k)} S_\nu, \qquad \mathrm{Gr}(S_{\lambda'} \otimes \Lambda^d) \simeq \bigoplus_{\nu \in A(\lambda;k)} S_{\nu'}. \tag{3.10}$$

Pour un m-uplet d'entiers naturels $\underline{d}, m \geqslant 1$, on définit un ensemble de partitions $B(\underline{d})$ par récurrence sur m. Si $m = 1$, on pose $B(\underline{d}) = \{(d_1)\}$. Dans le cas où $m \geqslant 2$, on pose $B(\underline{d}) = \bigcup_{\lambda \in B((d_1,\ldots,d_{m-1}))} A(\lambda; d_m)$. Par cette définition et les isomorphismes (3.10) on en déduit qu'il existe des filtrations de $S^{\underline{d}}$ et $\Lambda^{\underline{d}}$ telles qu'on ait des isomorphismes :

$$\mathrm{Gr}(S^{\underline{d}}) \simeq \bigoplus_{\nu \in B(\underline{d})} S_\nu, \qquad \mathrm{Gr}(\Lambda^{\underline{d}}) \simeq \bigoplus_{\nu \in B(\underline{d})} S_{\nu'}. \tag{3.11}$$

Par les isomorphismes (3.9), (3.11) et l'égalité (3.1), on obtient l'égalité 3.8. Il reste à montrer l'égalité (3.6). Par la propriété (1), on a $\ell(\nu) \leqslant \ell$ pour tout ℓ-uplet d'entiers naturels $\underline{d}$ et $\nu \in B(\underline{d})$. On a alors

$$\mathfrak{Bl}(S^d_V) \subseteq \{\lambda \in \mathbf{P}_{p\text{-}\mathfrak{coeur}} : |\lambda| \leqslant d, |\lambda| \equiv d \pmod p, \ell(\lambda) \leqslant \dim V\}.$$

Pour l'inclusion réciproque, prenons un élément λ du membre de droite dans (3.6). On note μ la partition $(\lambda_1 + d - |\lambda|, \lambda_2, \lambda_3, \ldots)$. On a $\mathfrak{Co}_p(\lambda) = \mathfrak{Co}_p(\mu)$. De plus, par la propriété (2), la partition μ appartient à l'ensemble $B(\mu)$. D'après les isomorphismes (3.11), on a $\mathfrak{Co}_p(\mu) \in \mathfrak{Bl}(S^\mu)$. On obtient le résultat. □

Corollaire 3.21. — *Soient d un entier naturel et V un objet de $\mathcal{V}_\Bbbk$. Si E désigne l'un des symboles Γ, Λ, S, on a*

$$\mathfrak{Bl}(E^d) = \mathfrak{Bl}(E^{d+p}), \qquad \mathfrak{Bl}(E^d_V) \subseteq E^{d+p}_V.$$

On termine cette sous-section par le résultat important suivant qui est une application du théorème du produit tensoriel de Steinberg (théorème 3.14).

Théorème 3.22. — *Soient $F, G \in \mathcal{P}_\Bbbk, G \neq 0$. Alors*

$$\mathfrak{Bl}(F \otimes G^{(1)}) = \mathfrak{Bl}(F).$$

Démonstration. — On traite tout d'abord le cas où F est un foncteur simple, de la forme L_λ. On a deux cas.

(1) Si λ est une partition p-restreinte. Si G est un foncteur simple, $G = L_\alpha$. Par le théorème de Steinberg et la proposition 3.7, on a $\mathfrak{Bl}(F \otimes G^{(1)}) = \mathfrak{Bl}(L_\lambda \otimes L_\alpha^{(1)}) = \mathfrak{Bl}(L_{\lambda+p\alpha}) = \mathfrak{Bl}(L_\lambda)$. Dans le cas général, soit $0 = G_0 \subset G_1 \subset \cdots \subset G_n = G$ une suite

de composition de G. Par la proposition 3.19, on a $\mathfrak{Bl}(F \otimes G) = \bigcup_{i=1}^{n} \mathfrak{Bl}(F \otimes (G_i/G_{i-1})) = \mathfrak{Bl}(F)$.

(2) Si λ est une certaine partition, d'après le lemme 3.2 il existe une partition p-restreinte μ et une partition ν telles que $\lambda = \mu + p\nu$. D'après le théorème de Steinberg, on a $L_\lambda = L_\mu \otimes L_\nu^{(1)}$. On a donc $F \otimes G^{(1)} = L_\mu \otimes (L_\nu \otimes G)^{(1)}$. Par la proposition 3.19, on a $\mathfrak{Bl}(F \otimes G^{(1)}) = \mathfrak{Bl}(L_\mu) = \mathfrak{Bl}(L_\lambda) = \mathfrak{Bl}(F)$.

On traite maintenant le cas où F est un foncteur quelconque. Soit $0 = F_0 \subset F_1 \subset \cdots \subset F_n = F$ une suite de composition de F. Par la proposition 3.19 et la partie (1), on a $\mathfrak{Bl}(F \otimes G^{(1)}) = \bigcup_{i=1}^{n} \mathfrak{Bl}((F_i/F_{i-1}) \otimes G^{(1)}) = \bigcup_{i=1}^{n} \mathfrak{Bl}(F_i/F_{i-1}) = \mathfrak{Bl}(F)$. □

3.4. Changement de base

Soit $\mathbb{K}$ un sur-corps du corps $\Bbbk$. Dans cette sous-section, on rappelle le foncteur de changement de base ${}_{\mathbb{K}}(-) : \mathcal{P}_{d,\Bbbk} \to \mathcal{P}_{d,\mathbb{K}}$ en suivant [33]. L'inclusion $\Bbbk \hookrightarrow \mathbb{K}$ induit un foncteur exact $\mathbb{K} \otimes - : \mathcal{V}_\Bbbk \to \mathcal{V}_\mathbb{K}$. Ce foncteur induit un foncteur $\mathbb{K} \otimes - : \Gamma^d \mathcal{V}_\Bbbk \to \Gamma^d \mathcal{V}_\mathbb{K}$.

Définition 3.23. — *Soit $F \in \mathcal{P}_{d,\Bbbk}$. On définit le foncteur ${}_{\mathbb{K}}F \in \mathcal{P}_{d,\mathbb{K}}$ comme suit. Chaque $V' \in \Gamma^d \mathcal{V}_\mathbb{K}$ détermine une catégorie $\mathcal{A}(V')$. Les objets de cette catégorie sont des paires (V, f) où $V \in \Gamma^d \mathcal{V}_\Bbbk$ et $f \in \Gamma^d \operatorname{Hom}_\mathbb{K}(\mathbb{K} \otimes V, V')$. Un morphisme de (V, f) vers (W, g) est un morphisme $\alpha : \mathbb{K} \otimes V \to \mathbb{K} \otimes W$ dans la catégorie $\Gamma^d \mathcal{V}_\mathbb{K}$ tel que $g \circ \alpha = f$. Le $\mathbb{K}$-espace vectoriel $({}_{\mathbb{K}}F)(V')$ est donc la colimite du foncteur $\mathcal{A}(V') \to \mathrm{Vect}_\mathbb{K}, (V, f) \mapsto \mathbb{K} \otimes F(V)$.*

De plus, chaque morphisme $h : V' \to W'$ dans la catégorie $\Gamma^d \mathcal{V}_\mathbb{K}$ induit naturellement un foncteur $\mathcal{A}(h) : \mathcal{A}(V') \to \mathcal{A}(W')$. On en déduit une application $\mathbb{K}$-linéaire $({}_{\mathbb{K}}F)(V') \to ({}_{\mathbb{K}}F)(W')$.

Comme la catégorie $\Gamma^d \mathcal{V}_\Bbbk$ est essentiellement petite et comme la catégorie $\mathrm{Vect}_\mathbb{K}$ est cocomplète, le foncteur ${}_{\mathbb{K}}F$ est bien défini. De plus, c'est un foncteur $\mathbb{K}$-linéaire. Par définition, pour $V \in \mathcal{V}_\Bbbk$, $(V, \mathrm{Id}_{\mathbb{K}\otimes V})$ est objet final de la catégorie $\mathcal{A}(\mathbb{K} \otimes V)$. On a donc un isomorphisme de $\mathbb{K}$-espaces vectoriels

$$({}_{\mathbb{K}}F)\,(\mathbb{K} \otimes V) \simeq \mathbb{K} \otimes F(V) \tag{3.12}$$

Pour chaque $V' \in \Gamma^d \mathcal{V}_\mathbb{K}$, on a donc un isomorphisme $({}_{\mathbb{K}}F)(V') \simeq \mathbb{K} \otimes F(\Bbbk^{\dim_\mathbb{K} V'})$. Par conséquent, le foncteur $\mathbb{K}$-linéaire ${}_{\mathbb{K}}F : \Gamma^d \mathcal{V}_\mathbb{K} \to \mathrm{Vect}_\mathbb{K}$

prend des valeurs de dimension finie. Le foncteur ${}_{\mathbb{K}}F$ est donc un objet de la catégorie $\mathcal{P}_{d,\mathbb{K}}$. On obtient ainsi un foncteur de changement de base

$$_{\mathbb{K}}(-) : \mathcal{P}_{d,\Bbbk} \longrightarrow \mathcal{P}_{d,\mathbb{K}}$$

Exemple 3.24. — Le changement de base envoie les foncteurs $\Gamma^{d,V}$ (resp. S^d_V, Λ^d_V) de $\mathcal{P}_{d,\Bbbk}$ sur les foncteurs $\Gamma^{d,\mathbb{K}\otimes V}$ (resp. $S^d_{\mathbb{K}\otimes V}, \Lambda^d_{\mathbb{K}\otimes V}$) de $\mathcal{P}_{d,\mathbb{K}}$. De plus, si on note $I^{(r)}_{\Bbbk}$ (resp. $I^{(r)}_{\mathbb{K}}$) le r-ième foncteur de torsion de Frobenius dans la catégorie $\mathcal{P}_{p^r,\Bbbk}$ (resp. $\mathcal{P}_{p^r,\mathbb{K}}$) alors il existe un isomorphisme ${}_{\mathbb{K}}(I^{(r)}_{\Bbbk}) \simeq I^{(r)}_{\mathbb{K}}$ dans la catégorie $\mathcal{P}_{p^r,\mathbb{K}}$.

Proposition 3.25 ([33, Proposition 2.6, Corollary 2.7]). — *Soit $\Bbbk \subseteq \mathbb{K}$ une extension de corps.*

(1) *Le foncteur de changement de base ${}_{\mathbb{K}}(-) : \mathcal{P}_{d,\Bbbk} \to \mathcal{P}_{d,\mathbb{K}}$ est exact et préserve les projectifs.*
(2) *Pour chaque entier naturel n, il existe un isomorphisme naturel en $F, G \in \mathcal{P}_{d,\Bbbk}$:*

$$\mathrm{Ext}^n_{\mathcal{P}_{d,\mathbb{K}}}({}_{\mathbb{K}}F, {}_{\mathbb{K}}G) \simeq \mathbb{K} \otimes \mathrm{Ext}^n_{\mathcal{P}_{d,\Bbbk}}(F, G)\,. \tag{3.13}$$

Théorème 3.26 ([23, Corollary 2.9, p. 203]). — *Soit $\Bbbk \subseteq \mathbb{K}$ une extension de corps. Le foncteur de changement de base ${}_{\mathbb{K}}(-) : \mathcal{P}_{d,\Bbbk} \to \mathcal{P}_{d,\mathbb{K}}$ préserve les foncteurs simples. Plus précisément si $L_{\lambda,\Bbbk}$ (resp. $L_{\lambda,\mathbb{K}}$) est le simple de $\mathcal{P}_{d,\Bbbk}$ (resp. $\mathcal{P}_{d,\mathbb{K}}$) correspondant à une partition λ alors on a un isomorphisme ${}_{\mathbb{K}}(L_{\lambda,\Bbbk}) \simeq L_{\lambda,\mathbb{K}}$ dans la catégorie $\mathcal{P}_{d,\mathbb{K}}$.*

Proposition 3.27. — *Soient $\Bbbk \subseteq \mathbb{K}$ une extension de corps et $F \in \mathcal{P}_{d,\Bbbk}$. On a l'égalité $\mathfrak{Bl}(F) = \mathfrak{Bl}({}_{\mathbb{K}}F)$.*

Démonstration. — Comme le foncteur de changement de base est exact et préserve les simples, $L_{\lambda,\mathbb{K}} \simeq {}_{\mathbb{K}}(L_{\lambda,\Bbbk})$ est facteur de composition de ${}_{\mathbb{K}}F$ si et seulement si $L_{\lambda,\Bbbk}$ est facteur de composition de F. Le résultat en découle. □

Corollaire 3.28. — *Soient $\Bbbk \subseteq \mathbb{K}$ une extension de corps et $F, G \in \mathcal{P}_{d,\Bbbk}$. On suppose que $\mathbb{K}$ est infini. S'il existe un isomorphisme ${}_{\mathbb{K}}F \simeq {}_{\mathbb{K}}G$ dans la catégorie $\mathcal{F}_{\mathbb{K}}$, on a alors l'égalité $\mathfrak{Bl}(F) = \mathfrak{Bl}(G)$.*

Démonstration. — Comme le corps $\mathbb{K}$ est infini, le foncteur d'oubli $\mathcal{P}_{d,\mathbb{K}} \to \mathcal{F}_{\mathbb{K}}$ est pleinement fidèle. L'isomorphisme ${}_{\mathbb{K}}F \simeq {}_{\mathbb{K}}G$ dans $\mathcal{F}_{\mathbb{K}}$ induit alors un isomorphisme ${}_{\mathbb{K}}F \simeq {}_{\mathbb{K}}G$ dans la catégorie $\mathcal{P}_{d,\mathbb{K}}$. Par définition, on a l'égalité $\mathfrak{Bl}({}_{\mathbb{K}}F) = \mathfrak{Bl}({}_{\mathbb{K}}G)$. D'autre part, d'après la proposition 3.27, on a des égalités $\mathfrak{Bl}(F) = \mathfrak{Bl}({}_{\mathbb{K}}F)$, $\mathfrak{Bl}(G) \simeq \mathfrak{Bl}({}_{\mathbb{K}}G)$. On en déduit le résultat. □

3.5. Un critère d'annulation

LEMME 3.29 (Lemme d'annulation). — *Soient F et G deux objets de $\mathcal{P}_d$. Si $\mathfrak{Bl}(F) \cap \mathfrak{Bl}(G) = \emptyset$ alors* $\operatorname{Ext}^*_{\mathcal{P}_\Bbbk}(F, G) = 0$.

Ce lemme est complètement général, et essentiellement évident (les blocs décomposent une catégorie abélienne en produit). Cependant, il est vraiment important dans cet article, donc, nous donnons sa preuve complète.

Démonstration. — Sans perte de généralité, on suppose que $F \in (\mathcal{P}_d)_{b_1}$ et $G \in (\mathcal{P}_d)_{b_2}$ avec $b_1 \neq b_2$. Comme $\mathcal{P}_d = \bigoplus_{b \in \mathcal{B}_d} (\mathcal{P}_d)_b$, on a $\operatorname{Hom}_{\mathcal{P}_d}(F, G) = 0$. Soit $P_\bullet$ une résolution projective de F dans $\mathcal{P}_d$. On obtient une résolution $(P_\bullet)_{b_1} = \cdots \to (P_1)_{b_1} \to (P_0)_{b_1} \to 0$ de F. De plus, cette résolution est une résolution projective car $(P_i)_{b_1}$ est un facteur direct du foncteur projectif P_i. On a donc $\operatorname{Ext}^*_{\mathcal{P}_d}(F, G) = H^*\left(\operatorname{Hom}_{\mathcal{P}_d}((P_\bullet)_{b_1}, G)\right)$. De plus, le complexe $\operatorname{Hom}_{\mathcal{P}_d}((P_\bullet)_{b_1}, G)$ est nul. On obtient le résultat. □

Remarque 3.30. — Il existe un autre résultat d'annulation, le résultat de Pirashvili [20, théorème 2.13] qui dit que si A est un foncteur additif et F, G sont des foncteurs réduits, c'est-à-dire $F(0) = 0 = G(0)$, alors

$$\operatorname{Ext}^*_{\mathcal{P}_d}(A, F \otimes G) = 0.$$

Ce résultat d'annulation est de nature différente du résultat d'annulation du lemme 3.29, comme le montrent les deux exemples suivants.

(1) Si $\Bbbk = \mathbb{F}_2, A = I^{(1)}$ et $F = G = S^1$, on a $\mathfrak{Bl}(A) = \mathfrak{Bl}(F \otimes G) = \{(0)\}$. Alors $\mathfrak{Bl}(A) \cap \mathfrak{Bl}(F \otimes G) \neq \emptyset$. Cependant, par le résultat de Pirashvili, on a $\operatorname{Ext}^*_{\mathcal{P}_2}(A, F \otimes G) = 0$.

(2) Si $\Bbbk = \mathbb{F}_5, A = I^{(1)}$ et $F = \Bbbk, G = S_{(3,2)}$. Le foncteur F n'est pas réduit. Cependant on a $\mathfrak{Bl}(A) = \{(0)\}$ et $\mathfrak{Bl}(F \otimes G) = \{(3, 2)\}$ et le lemme 3.29 donne $\operatorname{Ext}^*_{\mathcal{P}_5}(A, F \otimes G) = 0$.

DÉFINITION 3.31. — *Soit $\Phi : \mathcal{P}_\Bbbk \to \mathbf{Ch}_{\geqslant 0}(\mathcal{P}_\Bbbk)$ un foncteur. On dit que Φ est de* type $(\mathfrak{I})$ *s'il existe un complexe $X \in \mathbf{Ch}_{\geqslant 0}(\mathcal{P}_\Bbbk)$ d'objets injectifs et une équivalence d'homotopie $\Phi F \to \underline{\operatorname{Hom}}(F^\sharp, X)$ naturelle en F.*

Remarque 3.32. — Soit $\Phi : \mathcal{P}_d \to \mathbf{Ch}_{\geqslant 0}(\mathcal{P}_d)$ un foncteur de type $(\mathfrak{I})$. Par définition, il existe un complexe $X \in \mathbf{Ch}_{\geqslant 0}(\mathcal{P}_d)$ d'objets injectifs et une équivalence d'homotopie $\Phi F \to \underline{\operatorname{Hom}}(F^\sharp, X)$ naturelle en F. En particulier, on a une équivalence d'homotopie de complexes $\Phi(S^d) \to \underline{\operatorname{Hom}}(\Gamma^d, X) \simeq X$, et le foncteur Φ est entièrement déterminé par sa valeur sur S^d. Inversement, supposons qu'il existe une équivalence d'homotopie $\Phi F \to \underline{\operatorname{Hom}}(F^\sharp, \Phi S^d)$ naturelle en F. S'il existe un complexe d'injectifs

$X \in \mathbf{Ch}_{\geqslant 0}(\mathcal{P}_d)$ et une équivalence d'homotopie $\Phi S^d \to X$ alors le foncteur Φ est de type $(\mathfrak{I})$.

On montrera dans la section suivante que les foncteurs $F \mapsto L_q(F,n)$ et $F \mapsto H_q(D_n F)$ sont obtenus comme l'homologie de foncteurs de type $(\mathfrak{I})$. La suite spectrale de la proposition suivante est l'outil technique clé pour étudier l'homologie d'un foncteur de type $(\mathfrak{I})$.

Nous utilisons les notations standard de [40] pour les suites spectrales, et nous renvoyons à cette référence pour les détails des constructions des suites spectrales. En particulier, les différentielles de la r-ième page d'une suite spectrale *cohomologique* sont de la forme $d_r : E_r^{i,j} \to E_r^{i+r,j-r+1}$. La suite spectrale cohomologique de la proposition 3.33 est une instance de la suite spectrale hypercohomologique classique [40, Chap. 5, cohomological variant 5.7.9]. On fera toutefois attention au phénomène suivant. La notation cohomologique (avec les degrés des complexes notés en exposant et avec les différentielles qui augmentent le degré de 1) est la plus naturelle pour étudier les Ext, mais la notation homologique (avec les degrés des complexes notés en indice et avec les différentielles qui diminuent le degré de 1) est la plus naturelle pour étudier les dérivés à la Dold–Puppe et à la Johnson–McCarthy. On peut passer librement de l'une à l'autre des notations par la formule $H^j(X) = H_{-j}(X)$ pour tout entier relatif j. Si Φ est un foncteur de type $(\mathfrak{I})$ on a donc $H^j(\Phi F) = 0$ pour $j > 0$. La suite spectrale de la proposition 3.33 n'est donc pas une suite spectrale premier quadrant. La convergence de notre suite spectrale est assurée par la finitude de la dimension homologique de $\mathcal{P}_d$, démontrée par exemple dans [2, 17, 34].

Proposition 3.33. — *Soit $\Phi : \mathcal{P}_d \to \mathbf{Ch}_{\geqslant 0}(\mathcal{P}_d)$ un foncteur de type $(\mathfrak{I})$. On a une suite spectrale cohomologique de foncteurs strictement polynomiaux, naturelle en F :*

$$E_2^{i,j}(F) = \underline{\mathrm{Ext}}^i\left(F^\sharp, H^j\left(\Phi S^d\right)\right) \Longrightarrow H^{i+j}(\Phi F). \tag{3.14}$$

Démonstration. — On peut supposer que $\Phi F = \underline{\mathrm{Hom}}(F^\sharp, X)$ où $X \in \mathbf{Ch}_{\geqslant 0}(\mathcal{P}_d)$ est un complexe d'injectifs. Soit $P_\bullet$ une résolution projective de $F^\sharp$ dans la catégorie $\mathcal{P}_d$. On considère le bicomplexe

$$E_0^{i,j} = \underline{\mathrm{Hom}}(P_i, X^j), \qquad i \geqslant 0, j \leqslant 0.$$

Comme la dimension homologique de la catégorie $\mathcal{P}_d$ est finie [2, 17, 34], on peut supposer que le $P_\bullet$ est fini. Alors le bicomplexe $E_0^{\bullet\bullet}$ n'a qu'un nombre fini de colonnes, les deux filtrations standard (selon les lignes et selon les colonnes) associées au bicomplexe sont finies en chaque degré, ce qui assure qu'il n'y a pas de problème de convergence des suites spectrales standard [40, Chap. 5, 5.6] associées à ce bicomplexe. Comme les X^j sont injectifs, l'une des deux suites spectrales associées au bicomplexe montre que le quasi-isomorphisme $P_\bullet \to F^\sharp$ induit un quasi-isomorphisme $\Phi(F) = \underline{\mathrm{Hom}}(F^\sharp, X) \to \mathrm{Tot}(E_0)$. La deuxième suite spectrale du bicomplexe donne alors la suite spectrale annoncée. □

Le théorème suivant permet d'obtenir un résultat d'annulation générale à partir du calcul de $\mathfrak{Bl}(H_* \left(\Phi S^d\right)_V)$.

Théorème 3.34. — *Soient $F \in \mathcal{P}_d, V \in \mathcal{V}_{\Bbbk}$ et $\Phi : \mathcal{P}_d \to \mathbf{Ch}_{\geqslant 0}(\mathcal{P}_d)$ un foncteur de type $(\mathfrak{I})$. Alors $(H_q(\Phi F))(V) = 0$ dès que*

$$\mathfrak{Bl}(F) \cap \left(\bigcup_{q \leqslant j \leqslant q + \mathrm{inj.dim}\, F} \mathfrak{Bl}((H_j(\Phi S^d))_V) \right) = \emptyset.$$

Démonstration. — D'après la proposition 3.33, $(H_q(\Phi F))(V) = 0$ dès que

$$E_2^{i,j}(F)(V) = \mathrm{Ext}^i_{\mathcal{P}_d}\left(F^\sharp, \left(H_{-j}(\Phi S^d)\right)_V\right) = 0$$

si $-i - j = q$. On en déduit le résultat. □

4. Foncteurs dérivés non additifs et calcul de Goodwillie algébrique

Dans cette section, on rappelle quelques résultats sur les foncteurs dérivés au sens de Dold–Puppe et le calcul de Goodwillie algébrique. Nos références principales sont l'article de Dold et Puppe [16], les articles de Johnson et McCarthy [26, 27] et le livre de Weibel [40]. Classiquement, ces foncteurs dérivés sont définis pour les objets de $\mathcal{F}_{\Bbbk}$. Mais les définitions (et les principales propriétés) s'adaptent sans changement aux foncteurs strictement polynomiaux. L'étude des dérivés à la Dold–Puppe des foncteurs strictement polynomiaux est due initialement à Touzé [36, 37]. Pour donner une présentation uniforme de ces concepts, on utilisera souvent la notation suivante.

Notation 4.1. — Soient n un entier strictement positif et d un entier naturel. On désigne par $\mathfrak{C}(n)$ l'une des deux catégories $\mathcal{F}_{\Bbbk}(n)$ ou $\mathcal{P}_d(n)$. On note $\mathfrak{C}_*(n)$ la sous-catégorie pleine de $\mathfrak{C}(n)$ dont les objets sont des foncteurs réduits en chaque variable, c'est-à-dire des foncteurs $F \in \mathfrak{C}(n)$ tels que $F(V_1, \dots, V_n) = 0$ si au moins un des $V_1, \dots, V_n$ est nul.

Si $n = 1$, les catégories $\mathfrak{C}(1)$ et $\mathfrak{C}_*(1)$ seront plus simplement notées respectivement $\mathfrak{C}$ et $\mathfrak{C}_*$.

4.1. Objets Simpliciaux

La catégorie Δ est la petite catégorie dont les objets sont les ensembles ordonnés finis $[n] = \{0, 1, \dots, n\}$ avec $0 < 1 < \cdots < n$, $n \in \mathbb{N}$ et dont les morphismes sont les applications croissantes. Soit $\mathcal{A}$ une catégorie. La catégorie $s\mathcal{A}$ est la catégorie des foncteurs de Δ^{op} dans $\mathcal{A}$. Les morphismes sont les transformations naturelles. Les éléments de $s\mathcal{A}$ sont appelés objets simpliciaux dans $\mathcal{A}$.

Si A est un objet de $\mathcal{A}$, on a un objet simplicial constant canonique de $\mathcal{A}$; cette correspondance induit un foncteur $\mathcal{A} \to s\mathcal{A}$.De plus, chaque foncteur $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ induit un foncteur $F \circ - : s\mathcal{A} \to s\mathcal{B}$. On désigne simplement ce foncteur par F. Si la catégorie $\mathcal{A}$ est abélienne alors la catégorie $s\mathcal{A}$ l'est aussi : les noyaux, conoyaux, sommes directes et produits sont calculés au but.

Soit $\mathcal{A}$ une catégorie abélienne. Le *foncteur des chaînes* $\mathcal{C} : s\mathcal{A} \to \mathbf{Ch}_{\geqslant 0}(\mathcal{A})$ associe à un objet simplicial X de $\mathcal{A}$ le complexe $\mathcal{C}X$ tel que $(\mathcal{C}X)_n = X_n$ et dont la différentielle $d_n : (\mathcal{C}X)_n \to (\mathcal{C}X)_{n-1}$ est la somme alternée des opérateurs de faces $\partial_i^n : X_n \to X_{n-1}$

$$d_n = \partial_1^n - \partial_1^n + \cdots + (-1)^n \partial_n^n.$$

Le *foncteur des chaînes normalisées* $\mathcal{N} : s\mathcal{A} \to \mathbf{Ch}_{\geqslant 0}(\mathcal{A})$ associe à un objet simplicial X de $\mathcal{A}$ le complexe $\mathcal{N}X$ tel que $(\mathcal{N}X)_n$ est l'intersection $\bigcap_{i=1}^n \ker\left(\partial_i^n : X_n \to X_{n-1}\right)$ et dont la différentielle $d_n : (\mathcal{N}X)_n \to (\mathcal{N}X)_{n-1}$ est induite par le premier opérateur de face ∂_0^n.

Proposition 4.2 ([16, Satz 3.22],[29, Chapter VIII, Theorem 6.1]). — *Soit X un objet simplicial de la catégorie abélienne $\mathcal{A}$. Alors l'inclusion canonique $\mathcal{N}X \hookrightarrow \mathcal{C}X$ est une équivalence d'homotopie naturelle en X. De plus, il existe un inverse à gauche $\mathcal{C}X \to \mathcal{N}X$ (naturel en X) de $\mathcal{N}X \hookrightarrow \mathcal{C}X$ tel que $\mathcal{C}X \to \mathcal{N}X$ est également une équivalence d'homotopie.*

Théorème 4.3 (Correspondance de Dold–Kan). — *Soit $\mathcal{A}$ une catégorie abélienne. Alors le foncteur des chaînes normalisées $\mathcal{N} : s\mathcal{A} \to \mathbf{Ch}_{\geqslant 0}(\mathcal{A})$ est une équivalence de catégories.*

On désigne par $\mathcal{K}$ le quasi-inverse de $\mathcal{N}$. Nous renvoyons à [40, 8.4.4 p. 271] pour une formule explicite pour $\mathcal{K}$.

4.2. Effets croisés

Dans cette section on rappelle la notion d'effet croisé à la Eilenberg–Mac Lane [19] pour les foncteurs usuels et on donne une adaptation dans le cas des foncteurs strictement polynomiaux, voir par exemple [38].

On utilise la notation 4.1, la lettre $\mathfrak{C}$ renvoie donc à la catégorie $\mathcal{F}_{\Bbbk}$ ou à la catégorie $\mathcal{P}_d$. On définit les *effets croisés* $\mathrm{cr}_n : \mathfrak{C} \to \mathfrak{C}(n)$ par récurrence sur n. On définit tout d'abord $\mathrm{cr}_1 F$ comme le noyau du morphisme canonique $F \to F(0)$. Supposons qu'on a défini cr_{n-1}. Pour $i = 0, 1, 2$ on définit un foncteur $\pi_{n,i} : \mathcal{V}_{\Bbbk}^{\times n} \to \mathcal{V}_{\Bbbk}^{n-1}$ par les formules :

$$\mathrm{pr}_{n,i}(V_1, V_2, V_3, \ldots, V_n) = \begin{cases} (V_1, V_3, \ldots, V_n) & \text{si } i = 1, \\ (V_2, V_3, \ldots, V_n) & \text{si } i = 2, \\ (V_1 \oplus V_2, V_3, \ldots, V_n) & \text{si } i = 0. \end{cases} \tag{4.1}$$

De plus, on a des transformations naturelles canoniques $\mathrm{pr}_{n,0} \to \mathrm{pr}_{n,i}$, $i = 1, 2$. Ces foncteurs et transformations naturelles induisent des foncteurs $- \circ \mathrm{pr}_{n,i} : \mathfrak{C}(n-1) \to \mathfrak{C}(n)$ et des transformations naturelles $- \circ \mathrm{pr}_{n,0} \to - \circ \mathrm{pr}_{n,i}$, $i = 1, 2$. En composant avec le $(n-1)$-ième effet croisé $\mathrm{cr}_{n-1} : \mathfrak{C} \to \mathfrak{C}(n-1)$, on obtient des foncteurs $(- \circ \mathrm{pr}_{n,i}) \circ \mathrm{cr}_{n-1} : \mathfrak{C} \to \mathfrak{C}(n)$ et des transformations naturelles $(- \circ \mathrm{pr}_{n,0}) \circ \mathrm{cr}_{n-1} \to (- \circ \mathrm{pr}_{n,i}) \circ \mathrm{cr}_{n-1}$, $i = 1, 2$. On définit le n-ième effet croisé $\mathrm{cr}_n : \mathfrak{C} \to \mathfrak{C}(n)$ comme le noyau de la transformation naturelle

$$(- \circ \mathrm{pr}_{n,0}) \circ \mathrm{cr}_{n-1} \longrightarrow \bigoplus_{i=1}^{2} (- \circ \mathrm{pr}_{n,i}) \circ \mathrm{cr}_{n-1}\,. \tag{4.2}$$

Par définition, on peut voir $\mathrm{cr}_n F(V_1, \ldots, V_n)$ comme le noyau de l'application

$$\mathrm{cr}_{n-1} F(V_1 \oplus V_2, V_3, \ldots, V_n) \longrightarrow \bigoplus_{i=1}^{2} \mathrm{cr}_{n-1} F(V_i, V_3, \ldots, V_n)$$

induite par les projections canoniques

$$(V_1 \oplus V_2, V_3, \ldots, V_n) \longrightarrow (V_i, V_3, \ldots, V_n), \quad i = 1, 2.$$

Les foncteurs $\mathrm{cr}_n : \mathcal{F}_{\Bbbk} \to \mathcal{F}_{\Bbbk}(n)$ sont donc les effets croisés définis par Eilenberg–Mac Lane [19]. Soit n un entier naturel. On dit qu'un objet $F \in \mathfrak{C}$ est de degré d'Eilenberg–Mac Lane inférieur ou égal à n si $\mathrm{cr}_{n+1} F = 0$. Par définition, les foncteurs $\mathrm{cr}_n : \mathcal{P}_d \to \mathcal{P}_d(n)$ et $\mathrm{cr}_n : \mathcal{F}_{\Bbbk} \to \mathcal{F}_{\Bbbk}(n)$ sont compatibles avec les foncteurs d'oubli $\mathcal{P}_d \to \mathcal{F}_{\Bbbk}, \mathcal{P}_d(n) \to \mathcal{F}_{\Bbbk}(n)$, c'est-à-dire qu'on a un diagramme commutatif, où les morphismes verticaux sont les foncteurs d'oubli :

$$\begin{tikzcd} \mathcal{P}_d \arrow[r, "\mathrm{cr}_n"] \arrow[d] & \mathcal{P}_d(n) \arrow[d] \\ \mathcal{F}_{\Bbbk} \arrow[r, "\mathrm{cr}_n"] & \mathcal{F}_{\Bbbk}(n). \end{tikzcd}$$

Proposition 4.4. — *Soient $F \in \mathfrak{C}$ et n un entier strictement positif.*

(1) *Notons $\boxplus^n : \mathcal{V}_{\Bbbk}^{\times n} \to \mathcal{V}_{\Bbbk}$ le foncteur tel que $\boxplus^n(V_1, \dots, V_n) = V_1 \oplus \cdots \oplus V_n$. On a un isomorphisme dans $\mathfrak{C}(n)$, naturel en F :*

$$F \circ \boxplus^n \simeq F(0) \oplus \bigoplus_A \Big(\big(\mathrm{cr}_{|A|} F\big) \circ \mathrm{pr}_{n,A} \Big), \tag{4.3}$$

où la somme directe est indexée par les sous-ensembles non vides A de $\{1, 2, \dots, n\}$, $|A|$ désigne le cardinal de A, et $\mathrm{pr}_{n,A} : \mathcal{V}_{\Bbbk}^{\times n} \to \mathcal{V}_{\Bbbk}^{\times |A|}$ est la projection canonique.

(2) *Le foncteur $\mathrm{cr}_n F$ est réduit en chaque variable.*

(3) *Le n-ième effet croisé $\mathrm{cr}_n F$ est symétrique, c'est-à-dire que l'application suivante qui est induite par l'isomorphisme* (4.3), *est un isomorphisme où $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ et $V_1, \dots, V_n \in \mathcal{V}_{\Bbbk}$:*

$$\mathrm{cr}_n F(V_1, \dots, V_n) \xrightarrow{\simeq} \mathrm{cr}_n F\left(V_{\sigma(1)}, \dots, V_{\sigma(n)}\right).$$

Proposition 4.5. — *On a deux paires d'adjoints*

$$\Delta_n^* : \mathfrak{C}_*(n) \rightleftarrows \mathfrak{C}_* : \mathrm{cr}_n, \qquad \mathrm{cr}_n : \mathfrak{C}_* \rightleftarrows \mathfrak{C}_*(n) : \Delta_n^*,$$

où Δ_n^* est la précomposition par le foncteur diagonal $\Delta_n : \mathcal{V}_{\Bbbk} \to \mathcal{V}_{\Bbbk}^{\times n}$, et les catégories $\mathfrak{C}_*, \mathfrak{C}_*(n)$ définies dans la notation 4.1 sont respectivement des sous-catégories pleines des catégories $\mathfrak{C}, \mathfrak{C}(n)$ dont les objets sont des foncteurs réduits en chaque variable.

4.3. Foncteurs dérivés au sens de Dold–Puppe

Dans cette sous-section, on désigne par $\mathfrak{C}$ l'une des deux catégories $\mathcal{P}_{\Bbbk}$ ou $\mathcal{F}_{\Bbbk}$ comme indiqué dans la notation 4.1. On rappelle que pour chaque catégorie abélienne $\mathcal{A}$, on a, d'après Dold–Kan, des équivalences de catégories

$$\mathcal{N} : s\mathcal{A} \rightleftarrows \mathbf{Ch}_{\geqslant 0}(\mathcal{A}) : \mathcal{K}. \tag{4.4}$$

Pour chaque n, on note $K(n)$ l'objet simplicial $\mathcal{K}(\Bbbk[-n]) \in s\mathcal{V}_{\Bbbk}$. Pour $V \in \mathcal{V}_{\Bbbk}$, on a $\mathcal{K}(V[-n]) \simeq V \otimes K(n)$. La paramétrisation $\mathfrak{C} \times \mathcal{V}_{\Bbbk} \to \mathfrak{C}$, $(F, V) \mapsto$

F_V induit canoniquement des foncteurs $(-)_{K(n)} : \mathfrak{C} \to s\mathfrak{C}$. On note $L(-,n)$ le foncteur composé

$$\mathfrak{C} \xrightarrow{(-)_{K(n)}} s\mathfrak{C} \xrightarrow{\mathcal{N}} \mathbf{Ch}_{\geqslant 0}(\mathfrak{C}). \tag{4.5}$$

De plus, on désigne par $L_qF(-,n)$ la q-ième homologie du complexe $L(F,n)$. Les diagrammes suivants sont commutatifs, où les flèches verticales sont des foncteurs d'oubli :

$$\begin{tikzcd} \mathcal{P}_{\Bbbk} \arrow[r, "L(-,n)"] \arrow[d] & \mathbf{Ch}_{\geqslant 0}(\mathcal{P}_{\Bbbk}) \arrow[d] \\ \mathcal{F}_{\Bbbk} \arrow[r, "L(-,n)"] & \mathbf{Ch}_{\geqslant 0}(\mathcal{F}_{\Bbbk}), \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \mathcal{P}_{\Bbbk} \arrow[r, "F \mapsto L_qF(-,n)"] \arrow[d] & \mathcal{P}_{\Bbbk} \arrow[d] \\ \mathcal{F}_{\Bbbk} \arrow[r, "F \mapsto L_qF(-,n)"] & \mathcal{F}_{\Bbbk}. \end{tikzcd}$$

Par définition, on a $L_qF(V,n) = H_q\big(\mathcal{N}F\mathcal{K}(V[-n])\big)$. Pour un foncteur $F \in \mathcal{F}_{\Bbbk}$, les foncteurs $L_qF(-,n) \in \mathcal{F}_{\Bbbk}$ sont donc les foncteurs dérivés de F au sens de Dold–Puppe [16].

Pour pouvoir appliquer le théorème 3.34 aux foncteurs dérivés au sens de Dold–Puppe, nous vérifions que le foncteur $L_qF(-,n)$ satisfait les conditions de la définition 3.31.

Proposition 4.6. — *Soient $F \in \mathcal{P}_d$ et $n \in \mathbb{N}$. Le foncteur $L(-,n) : \mathcal{P}_d \to \mathbf{Ch}_{\geqslant 0}(\mathcal{P}_d)$ est de type $(\mathfrak{I})$.*

Démonstration. — Comme $L(S^d,n) = \mathcal{N}S^d_{K(n)}$ est un facteur direct du complexe $\mathcal{C}S^d_{K(n)}$ et comme S^d_V est un foncteur injectif pour tout $V \in \mathcal{V}_{\Bbbk}$, le complexe $L(S^d,n)$ est donc un complexe d'injectifs. L'isomorphisme $F_V \simeq \underline{\mathrm{Hom}}(F^\sharp, S^d_V)$ naturel en $F \in \mathcal{P}_d, V \in \mathcal{V}_{\Bbbk}$ induit un isomorphisme de complexes de foncteurs strictement polynomiaux $\mathcal{C}F_{K(n)} \simeq \underline{\mathrm{Hom}}(F^\sharp, \mathcal{C}S^d_{K(n)})$ naturel en F. De plus, on a des équivalences d'homotopie $\mathcal{C}S^d_{K(n)} \to \mathcal{N}S^d_{K(n)}$ et $\mathcal{N}F_{K(n)} \to \mathcal{C}F_{K(n)}$ naturelles en F. On obtient donc une équivalence d'homotopie $L(F,n) \to \underline{\mathrm{Hom}}(F^\sharp, L(S^d,n))$ naturelle en F comme la composée des équivalences d'homotopie suivantes :

$$\mathcal{N}F_{K(n)} \longrightarrow \mathcal{C}F_{K(n)} \simeq \underline{\mathrm{Hom}}(F^\sharp, \mathcal{C}S^d_{K(n)}) \longrightarrow \underline{\mathrm{Hom}}(F^\sharp, \mathcal{N}S^d_{K(n)}).$$

Le foncteur $L(-,n)$ est donc de type $(\mathfrak{I})$ pour tout entier naturel n. $\square$

4.4. La tour de Taylor d'un foncteur

Dans cette sous-section, nous rappelons les constructions du calcul de Goodwillie algébrique selon Johnson–McCarthy [26]. Cette théorie s'adapte aux foncteurs strictement polynomiaux, et nous désignons donc par $\mathfrak{C}_*$ l'une des deux catégories $\mathcal{F}_*$ ou $\mathcal{P}_d, d > 0$, comme indiqué dans la notation 4.1.

4.4.1. Comonade et objets simpliciaux

On rappelle qu'une comonade sur une catégorie $\mathcal{A}$ est un triplet $(\perp, \epsilon, \delta)$ formé d'un endofoncteur $\perp$ de $\mathcal{A}$ et de transformations naturelles $\epsilon : \perp \to \mathrm{Id}_{\mathcal{A}}$ et $\delta : \perp \to \perp^2$ telles que les diagrammes suivants sont commutatifs :

(4.6)
$$\begin{tikzcd} & \perp \arrow[dl, equal] \arrow[d, "\delta"] \arrow[dr, equal] & \\ \perp & \perp^2 \arrow[l, "\epsilon_\perp"] \arrow[r, "\perp(\epsilon)"'] & \perp, \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \perp \arrow[r, "\delta"] \arrow[d, "\delta"] & \perp^2 \arrow[d, "\perp(\delta)"] \\ \perp^2 \arrow[r, "\delta_\perp"] & \perp^3. \end{tikzcd}$$

Par définition, le triplet $(\mathrm{Id}_{\mathcal{A}}, \mathrm{Id}, \mathrm{Id})$ est une comonade sur la catégorie $\mathcal{A}$.

Soient $(\perp, \epsilon, \delta)$ et $(\widetilde{\perp}, \widetilde{\epsilon}, \widetilde{\delta})$ deux comonades sur la même catégorie $\mathcal{A}$. Un morphisme de $(\perp, \epsilon, \delta)$ vers $(\widetilde{\perp}, \widetilde{\epsilon}, \widetilde{\delta})$ est une transformation naturelle $\phi : \perp \to \widetilde{\perp}$ telle que les diagrammes suivants soient commutatifs

(4.7)
$$\begin{tikzcd} \perp \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "\epsilon"] & \widetilde{\perp} \arrow[d, "\tilde{\epsilon}"] \\ \mathrm{Id} \arrow[r, equal] & \mathrm{Id}, \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \perp \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "\delta"] & \widetilde{\perp} \arrow[d, "\tilde{\delta}"] \\ \perp^2 \arrow[r, "\phi^2"] & \widetilde{\perp}^2. \end{tikzcd}$$

En utilisant les diagrammes commutatifs (4.6), on voit que la transformation naturelle $\epsilon : \perp \to \mathrm{Id}_{\mathcal{A}}$ est un morphisme de $(\perp, \epsilon, \delta)$ vers $(\mathrm{Id}_{\mathcal{A}}, \mathrm{Id}, \mathrm{Id})$.

En utilisant les comonades, on peut construire des objets simpliciaux, puis des complexes. En effet, soit $(\perp, \epsilon, \delta)$ une comonade sur $\mathcal{A}$. On définit un foncteur $S^{\perp} : \mathcal{A} \to s\mathcal{A}$ par les formules :

$$\begin{aligned} S_n^{\perp} &:= \perp^{n+1}, \quad \forall\, n \in \mathbb{N}, \\ \partial_i : S_n^{\perp} &= \perp^{n+1} \xrightarrow{\perp^i \epsilon \perp^{n-i}} \perp^n = S_{n-1}^{\perp}, \\ \sigma_i : S_n^{\perp} &= \perp^{n+1} \xrightarrow{\perp^i \delta \perp^{n-i}} \perp^{n+2} = S_{n+1}^{\perp}. \end{aligned}$$

En particulier, $S^{\mathrm{Id}} : \mathcal{A} \to s\mathcal{A}$ est l'inclusion canonique qui envoie chaque objet A sur l'objet simplicial constant en A.

Nous remarquons que la notation S introduite dans cette sous section ne désignera pas de puissance symétrique.

Si $\phi : (\perp, \epsilon, \delta) \to (\widetilde{\perp}, \widetilde{\epsilon}, \widetilde{\delta})$ est un morphisme de comonades, par les diagrammes commutatifs (4.7), $S^{\phi} = (\phi^n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une transformation naturelle de $S^{\perp}$ vers $S^{\tilde{\perp}}$. En particulier, chaque comonade $(\perp, \epsilon, \delta)$ de $\mathcal{A}$ induit une transformation $S^{\epsilon} : S^{\perp} \to S^{\mathrm{Id}}$ de foncteurs $\mathcal{A} \to s\mathcal{A}$.

Si $\mathcal{A}$ est une catégorie abélienne, par composition avec le foncteur des chaînes $\mathcal{C}$ et le foncteur des chaînes normalisées $\mathcal{N}$, on obtient, pour chaque comonade $(\perp, \epsilon, \delta)$ de $\mathcal{A}$, des foncteurs :

$$\mathcal{N} \circ S^{\perp}, \mathcal{C} \circ S^{\perp} : \mathcal{A} \longrightarrow \mathbf{Ch}_{\geqslant 0}(\mathcal{A}).$$

De plus, d'après la proposition 4.2, l'inclusion canonique $\mathcal{N} \circ S^{\perp} \hookrightarrow \mathcal{C} \circ S^{\perp}$ et la projection canonique $\mathcal{C} \circ S^{\perp} \to \mathcal{N} \circ S^{\perp}$ sont des équivalences d'homotopie. Si $\phi : (\perp, \epsilon, \delta) \to (\widetilde{\perp}, \widetilde{\epsilon}, \widetilde{\delta})$ est un morphisme de comonades, les diagrammes suivants sont commutatifs :

$$\begin{tikzcd} \mathcal{N} \circ S^{\perp} \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{N} \circ S^{\tilde{\perp}} \arrow[d] \\ \mathcal{C} \circ S^{\perp} \arrow[r] & \mathcal{C} \circ S^{\tilde{\perp}}, \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \mathcal{C} \circ S^{\perp} \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{C} \circ S^{\tilde{\perp}} \arrow[d] \\ \mathcal{N} \circ S^{\perp} \arrow[r] & \mathcal{N} \circ S^{\tilde{\perp}}. \end{tikzcd} \tag{4.8}$$

Définition 4.7. — *Soit $(\perp, \epsilon, \delta)$ une comonade de $\mathcal{A}$. Un objet A de $\mathcal{A}$ est dit $\perp$-projectif si le morphisme $\epsilon_A : \perp A \to A$ a une section, c'est-à-dire qu'il existe un morphisme $f : A \to \perp A$ tel que $\epsilon_A \circ f = \mathrm{Id}_A$.*

Comme $\perp \xrightarrow{\delta} \perp^2 \xrightarrow{\perp(\epsilon)} \perp$ est l'identité de $\perp$ alors, par définition, $\perp A$ est $\perp$-projectif pour tout objet A de $\mathcal{A}$. La proposition importante suivante est démontrée dans [40, Proposition 8.6.8], voir aussi [26, Proposition 2.5].

Proposition 4.8. — *Soit $(\perp, \epsilon, \delta)$ une comonade sur la catégorie $\mathcal{A}$. Si $A \in \mathcal{A}$ est $\perp$-projectif alors $S^{\epsilon} : S^{\perp}(A) \to S^{\mathrm{Id}}(A)$ est une équivalence d'homotopie. En conséquence, l'augmentation $\epsilon : \mathcal{N} \circ S^{\perp}(A) \to A$ est une équivalence d'homotopie.*

4.4.2. Comonades $\perp_n$

Notation 4.9. — Pour chaque entier strictement positif n, on note $(\perp_n, \epsilon_n, \delta_n)$ la comonade de la catégorie $\mathfrak{C}_*$ induite par la paire d'adjoints $\Delta_n^* : \mathfrak{C}_*(n) \rightleftarrows \mathfrak{C}_* : \mathrm{cr}_n$. En particulier, $\perp_n$ est le foncteur composé $\Delta_n^* \circ \mathrm{cr}_n$.

Proposition 4.10. — *Soient $F \in \mathfrak{C}_*$ et n un entier strictement positif.*

(1) *Notons $\oplus^n : \mathcal{V}_{\Bbbk} \to \mathcal{V}_{\Bbbk}$ le foncteur tel que $\oplus^n(V) = V^{\oplus n}$. On a un isomorphisme dans $\mathfrak{C}_*$, naturel en F*

$$F \circ \oplus^n \simeq \perp_n F \oplus \bigoplus_{k=1}^{n-1} (\perp_k F)^{\oplus \binom{n}{k}}.$$

(2) *On a un isomorphisme, naturel en F : $(\perp_n F)^{\sharp} \simeq \perp_n (F^{\sharp})$.*

(3) *Le foncteur $\perp_n$ est l'adjoint des deux côtés à lui-même. En particulier, $\perp_n$ est un foncteur exact.*
(4) *Le foncteur F est de degré $\leqslant n-1$ si et seulement si $\perp_n F = 0$.*

Démonstration. — L'assertion (1) est une conséquence directe du l'assertion (1) de la proposition 4.4. L'assertion (2) se déduit par récurrence sur n de l'assertion (1) et de l'isomorphisme $(F \circ \bigoplus^n)^\sharp \simeq F^\sharp \circ \bigoplus^n$. Montrons l'assertion (3). Pour $F, G \in \mathfrak{C}_*$, la proposition 4.5 induit des isomorphismes naturels

$$\mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}_*}(\Delta_n^* \circ \mathrm{cr}_n F, G) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}_*(n)}(\mathrm{cr}_n F, \mathrm{cr}_n G) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}_*}(F, \Delta_n^* \circ \mathrm{cr}_n G).$$

On en déduit l'assertion (3). Il reste à montrer l'assertion (4). Par définition, le degré du foncteur F est inférieur ou égal à $n-1$ si et seulement si $\mathrm{cr}_n F = 0$. Comme $\perp_n = \Delta_n^* \circ \mathrm{cr}_n$, alors $\perp_n F = 0$ si $\mathrm{cr}_n F = 0$. On suppose maintenant que $\perp_n F = 0$. Soient $V_1, \ldots, V_n$ des $\Bbbk$-espaces vectoriels. On note $V = \bigoplus_{i=1}^n V_i$. Comme V_i est un facteur direct de V pour tout $i = 1, \ldots, n$, alors $\mathrm{cr}_n F(V_1, \ldots, V_n)$ est également un facteur direct de $\mathrm{cr}_n F(V, \ldots, V) = \perp_n F(V) = 0$. On obtient donc l'assertion (4). □

Proposition 4.11. — *Soient d, n deux entiers strictement positifs. Soit $F \in \mathcal{P}_d$. On a un isomorphisme de foncteurs strictement polynomiaux, naturel en F :*

$$\perp_n F \simeq \underline{\mathrm{Hom}}(F^\sharp, \perp_n S^d). \tag{4.9}$$

Démonstration. — On a des isomorphismes de foncteurs strictement polynomiaux, naturels en F :

$$\begin{aligned} \perp_n F &\simeq \underline{\mathrm{Hom}}(\Gamma^d, \perp_n F) \simeq \underline{\mathrm{Hom}}(\perp_n \Gamma^d, F) \\ &\simeq \underline{\mathrm{Hom}}(F^\sharp, (\perp_n \Gamma^d)^\sharp) \simeq \underline{\mathrm{Hom}}(F^\sharp, \perp_n S^d). \end{aligned}$$

Plus précisément, le premier isomorphisme est le lemme de Yoneda, le deuxième est donné par l'assertion (3) de la proposition 4.10, le troisième provient du fait que la dualité de Kuhn est une équivalence de catégories, et le dernier provient de l'assertion (2) de la proposition 4.10. Le résultat en découle. □

Par définition, le foncteur $\perp_1$ est l'identité $\mathrm{Id} : \mathfrak{C}_* \to \mathfrak{C}_*$. On peut donc voir ϵ_2 comme une transformation naturelle de $\perp_2$ vers $\perp_1$. On définit des transformations naturelles $\bar{\epsilon}_{n+1} : \perp_{n+1} \to \perp_n, n \geqslant 1$ par le morphisme composé suivant, où le premier morphisme est l'inclusion canonique et le deuxième est induit par la somme $V \oplus V \to V$:

$$\mathrm{cr}_{n+1} F(V, \ldots, V) \hookrightarrow \mathrm{cr}_n F(V \oplus V, V, \ldots, V) \longrightarrow \mathrm{cr}_n F(V, \ldots, V).$$

Par définition, on a $\bar{\epsilon}_2 = \epsilon_2$ et de plus, $\bar{\epsilon}_{n+1}$ est un morphisme de $(\perp_{n+1}, \epsilon_{n+1}, \delta_{n+1})$ vers $(\perp_n, \epsilon_n, \delta_n)$. En particulier, on a que les diagrammes suivants sont commutatifs

$$\begin{tikzcd}
\perp_{n+1} \arrow[r, "\epsilon_{n+1}"] \arrow[d, "\bar{\epsilon}_{n+1}"] & \mathrm{Id} \arrow[d, equal] \\
\perp_n \arrow[r, "\epsilon_n"] & \mathrm{Id}\,.
\end{tikzcd} \tag{4.10}$$

Ensuite, on donne une version de la tour de Taylor d'un foncteur.

Définition 4.12. — *Soient $F \in \mathfrak{C}_*$ et n un entier strictement positif.*

(1) *On définit $\mathsf{p}_n F$ comme le conoyau du morphisme $\epsilon_{n+1} : \perp_{n+1} F \to F$, on a une suite exacte $\perp_{n+1} F \xrightarrow{\epsilon_{n+1}} F \to \mathsf{p}_n F \to 0$.*

(2) *On définit $\mathsf{d}_n F$ comme le noyau du morphisme $\mathsf{p}_n F \to \mathsf{p}_{n-1} F$ qui est induit par le diagramme commutatif* (4.10).

Par définition, on a des diagrammes commutatifs

$$\begin{tikzcd}
\vdots \arrow[d] & \vdots \arrow[d] & \vdots \arrow[d] & & & \vdots \arrow[d] & \\
\perp_4 \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Id} \arrow[r] \arrow[d] & \mathsf{p}_3 \arrow[r] \arrow[d] & 0 & & \mathsf{p}_3 \arrow[d] & \mathsf{d}_3 \arrow[l] \\
\perp_3 \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Id} \arrow[r] \arrow[d] & \mathsf{p}_2 \arrow[r] \arrow[d] & 0 & & \mathsf{p}_2 \arrow[d] & \mathsf{d}_2 \arrow[l] \\
\perp_2 \arrow[r] & \mathrm{Id} \arrow[r] & \mathsf{p}_1 \arrow[r] & 0 & \mathrm{Id} \arrow[r, two heads] \arrow[ur, two heads] \arrow[uur, two heads] & \mathsf{p}_1 \arrow[r, equal] & \mathsf{d}_1
\end{tikzcd} \tag{4.11}$$

La tour de Taylor de Johnson et McCarthy, qui sera présentée dans la section suivante, est une version simpliciale des foncteurs p_n (on prendra garde au fait que cette version simpliciale n'est pas obtenue en dérivant les foncteurs p_n selon la notion usuelle (Cartan–Eilenberg) de foncteur dérivé). Les foncteurs p_n ont eux été introduits et étudiés bien avant les travaux de Johnson et McCarthy, voir par exemple [31].

La proposition suivante résume des propriétés bien connues des endofoncteurs $\mathsf{p}_n : \mathfrak{C}_* \to \mathfrak{C}_*$.

Proposition 4.13 ([26, Example 1.7]). — *Soient n un entier strictement positif et $F \in \mathfrak{C}_*$.*

(1) *Le foncteur* $\mathsf{p}_n F \in \mathfrak{C}_*$ *est un foncteur de degré d'Eilenberg–Mac Lane inférieur ou égal à* n*.*
(2) *Si le degré d'Eilenberg–Mac Lane de* F *est inférieur ou égal à* n *alors le morphisme canonique* $F \to \mathsf{p}_n F$ *est un isomorphisme.*
(3) *Soit* $G \in \mathfrak{C}_*$ *un foncteur de degré d'Eilenberg–Mac Lane inférieur ou égal à* n*. L'application induite par le morphisme canonique* $F \to \mathsf{p}_n F$ *est un isomorphisme naturel en* F, G *:*

$$\mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}_*}(\mathsf{p}_n F, G) \xrightarrow{\simeq} \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}_*}(F, G).$$

Démonstration. — Par la définition du foncteur p_n et l'exactitude du foncteur $\perp_{n+1}$, on a une suite exacte :

$$\perp_{n+1}^2 F \xrightarrow{\perp_{n+1}(\epsilon_{n+1})} \perp_{n+1} F \longrightarrow \perp_{n+1} \mathsf{p}_n F \longrightarrow 0.$$

De plus, le morphisme $\perp_{n+1}(\epsilon_{n+1})$ est un épimorphisme parce qu'il admet le morphisme $\delta_{n+1} : \perp_{n+1} F \to \perp_{n+1}^2 F$ comme un inverse à droite. On en déduit que $\perp_{n+1} \mathsf{p}_n F = 0$, d'où l'assertion (1). Si le degré d'Eilenberg–Mac Lane de F est inférieur ou égal à n, alors $\perp_{n+1} F = 0$. Dans ce cas-là, par la définition du foncteur p_n, le morphisme canonique $F \to \mathsf{p}_n F$ est un isomorphisme. Il reste à montrer l'assertion (3). Par l'exactitude à gauche du foncteur $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}_*}(-, G)$, on a une suite exacte :

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}_*}(\mathsf{p}_n F, G) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}_*}(F, G) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}_*}(\perp_{n+1} F, G).$$

De plus, comme le degré d'Eilenberg–Mac Lane de G est inférieur ou égal à n et par l'assertion (2) de la proposition 4.10, on a $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}_*}(\perp_{n+1} F, G) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}_*}(F, \perp_{n+1} G) = 0$. On en déduit donc l'assertion (3). ☐

4.4.3. Tour de Taylor d'un foncteur

Définition 4.14 ([26]). — *Soient* n *un entier strictement positif et* $F \in \mathfrak{C}_*$*. On définit un foncteur* $P_n : \mathfrak{C}_* \to \mathbf{Ch}_{\geqslant 0}(\mathfrak{C}_*)$ *comme le cône du morphisme*

$$\mathcal{N} \circ S^{\perp_{n+1}} \xrightarrow{\mathcal{N} S^{\epsilon_{n+1}}} \mathcal{N} \circ S^{\mathrm{Id}} = \mathrm{Id}[0].$$

On note $p_n F$ *l'inclusion canonique* $F \hookrightarrow P_n F$*. On note* $q_n F$ *le morphisme de* $P_n F \to P_{n-1} F$ *induit par le morphisme de comonades* $\bar{\epsilon}_n : \perp_n \to \perp_{n-1}$*. On définit un foncteur* $D_n : \mathfrak{C}_* \to \mathbf{Ch}_{\geqslant 0}(\mathfrak{C}_*)$ *comme la fibre homotopique (c'est-à-dire la suspension du cône) du morphisme* $q_n : P_n \to P_{n-1}$*. En particulier, pour tout* F*, on a une suite exacte longue en homologie :*

$$\cdots \to H_i(D_n F) \to H_i(P_n F) \xrightarrow{H_i(q_n)} H_i(P_{n-1} F) \to H_{i-1}(D_n F) \to \cdots .$$

Pour un foncteur $F \in \mathfrak{C}_*$, le diagramme suivant est appelé tour de Taylor de F

$$\begin{tikzcd} & & F \arrow[dl] \arrow[d, "p_n F"] \arrow[dr] & & \\ \cdots \arrow[r] & P_{n+1}F \arrow[r] & P_n F \arrow[r, "q_n F"'] & P_{n-1}F \arrow[r] & \cdots \end{tikzcd}$$

De plus, pour chaque entier strictement positif d, on a des diagrammes commutatifs :

$$\begin{tikzcd} \mathcal{P}_d \arrow[r, "P_n"] \arrow[d] & \mathbf{Ch}_{\geqslant 0}(\mathcal{P}_d) \arrow[d] \\ \mathcal{F}_* \arrow[r, "P_n"] & \mathbf{Ch}_{\geqslant 0}(\mathcal{F}_*), \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \mathcal{P}_d \arrow[r, "D_n"] \arrow[d] & \mathbf{Ch}_{\geqslant 0}(\mathcal{P}_d) \arrow[d] \\ \mathcal{F}_* \arrow[r, "D_n"] & \mathbf{Ch}_{\geqslant 0}(\mathcal{F}_*). \end{tikzcd}$$

Proposition 4.15 ([26, Lemma 2.11]). — *Soit $F \in \mathfrak{C}_*$. Les foncteurs $H_q(P_n F)$ sont de degré (au sens d'Eilenberg et Mac Lane) inférieur ou égal à n.*

Démonstration. — L'exactitude du foncteur $\perp_{n+1}$ et la définition du foncteur P_n impliquent que le complexe $\perp_{n+1} F$ est le cône du morphisme $\mathcal{N} \circ S^{\perp_{n+1}}(\perp_{n+1} F) \to \perp_{n+1} F$. Comme $\perp_{n+1} F$ est $\perp_{n+1}$-projectif, d'après la proposition 4.8, ce morphisme est une équivalence d'homotopie. Alors le complexe $\perp_{n+1} P_n F$ est homotope à 0. On en déduit le résultat. □

On démontre dans la proposition 4.17 ci-dessous que les foncteurs $D_n, P_n : \mathcal{P}_d \to \mathbf{Ch}_{\geqslant 0}(\mathcal{P}_d)$ vérifient les conditions de la définition 3.31 et qu'on peut donc leur appliquer le théorème d'annulation 3.34. Pour démontrer cette proposition, on a besoin du lemme suivant.

Lemme 4.16. — *Soient d, n, k des entiers strictement positifs. Soit $F \in \mathcal{P}_d$.*

(1) *Si le foncteur F est injectif, alors $\perp_n F$ est également un foncteur injectif.*
(2) *On a un isomorphisme $\perp_n^k F \simeq \underline{\mathrm{Hom}}(F^\sharp, \perp_n^k S^d)$ naturel en F.*

Démonstration. — Comme un foncteur injectif de $\mathcal{P}_d$ est toujours un facteur direct d'un foncteur injectif de la forme $V \otimes S^d_{\mathbb{k}^d}$ avec $V \in \mathcal{V}_{\mathbb{k}}$, il suffit alors de démontrer que le foncteur $\perp_n(S^d_{\mathbb{k}^d})$ est injectif. L'assertion (1) de la proposition 4.10 fournit que $\perp_n(S^d_{\mathbb{k}^d})$ est un facteur direct du foncteur $S^d_{\mathbb{k}^d} \circ \oplus^n$. Par l'isomorphisme exponentiel, ce foncteur est isomorphe au foncteur injectif $\bigoplus_\mu \bigotimes_{i=1}^n S^{\mu_i}_{\mathbb{k}^d}$, où la somme directe est indexée par les n-uplets d'entiers naturels $\mu = (\mu_1, \ldots, \mu_n)$ tels que $\sum_{i=1}^n \mu_i = d$. On obtient donc l'assertion (1). L'assertion (2) est démontrée par récurrence en utilisant la proposition 4.11 et la paire d'adjoints $(\perp_n, \perp_n)$ donnée dans la proposition 4.10. En effet, comme on a $\perp_n^k F \simeq \underline{\mathrm{Hom}}(F^\sharp, \perp_n^k S^d)$, on obtient des isomorphismes naturels en F :

$$\begin{aligned}\perp_n^{k+1} F \simeq \underline{\mathrm{Hom}}((\perp_n F)^\sharp, \perp_n^k S^d) &\simeq \underline{\mathrm{Hom}}(\perp_n\left(F^\sharp\right), \perp_n^k S^d)\\ &\simeq \underline{\mathrm{Hom}}(F^\sharp, \perp_n^{k+1} S^d),\end{aligned}$$

ce qui termine la démonstration. □

Proposition 4.17. — *Soient d, n deux entiers strictement positifs. Les foncteurs P_n, D_n de $\mathcal{P}_d$ vers $\mathbf{Ch}_{\geqslant 0}(\mathcal{P}_d)$ sont de type $(\mathfrak{I})$.*

Démonstration. — Par la définition 3.31 d'un foncteur de type $(\mathfrak{I})$, on a que :

(1) si Φ est un foncteur de type $(\mathfrak{I})$ alors la suspension $\Phi[1]$ est également un foncteur de type $(\mathfrak{I})$;
(2) le cône d'un morphisme entre deux foncteurs de type $(\mathfrak{I})$ est un foncteur de type $(\mathfrak{I})$.

En utilisant ces deux propriétés et les définitions des foncteurs P_n, D_n, pour démontrer cette proposition, il suffit de montrer que le foncteur $\mathcal{P}_d \to \mathbf{Ch}_{\geqslant 0}(\mathcal{P}_d), F \mapsto \mathcal{N}S^{\perp_{n+1}}(F)$ est de type $(\mathfrak{I})$. La démonstration est presque identique à la preuve que le foncteur dérivé $L(F, n) = \mathcal{N}F_{K(n)}$ est de type $(\mathfrak{I})$ dans la proposition 4.6.

Comme $\mathcal{N}S^{\perp_{n+1}}(F)$ est un facteur direct du complexe $\mathcal{C}S^{\perp_{n+1}}(F)$, l'assertion (1) du lemme 4.16 implique que le complexe $\mathcal{N}S^{\perp_{n+1}}(S^d)$ est un complexe d'injectifs. Par l'assertion (2) du lemme 4.16, on a un isomorphisme des complexes de foncteurs strictement polynomiaux

$$\mathcal{C}S^{\perp_{n+1}}(F) \simeq \underline{\mathrm{Hom}}(F^\sharp, \mathcal{C}S^{\perp_{n+1}}(S^d))$$

naturel en F. De plus, on a des équivalences d'homotopie $\mathcal{C}S^{\perp_{n+1}}(S^d) \to \mathcal{N}S^{\perp_{n+1}}(S^d)$ et $\mathcal{N}S^{\perp_{n+1}}(F) \to \mathcal{C}S^{\perp_{n+1}}(F)$ naturelles en F. On obtient donc une équivalence d'homotopie $\mathcal{N}S^{\perp_{n+1}}(F) \to \underline{\mathrm{Hom}}(F^\sharp, \mathcal{N}S^{\perp_{n+1}}(S^d))$ naturelle en F comme la composée des équivalences d'homotopie suivantes

$$\begin{aligned}\mathcal{N}S^{\perp_{n+1}}(F) \longrightarrow \mathcal{C}S^{\perp_{n+1}}(F) \simeq \underline{\mathrm{Hom}}(F^\sharp, \mathcal{C}S^{\perp_{n+1}}(S^d))&\\ \longrightarrow \underline{\mathrm{Hom}}(F^\sharp, \mathcal{N}S^{\perp_{n+1}}(S^d)).&\end{aligned}$$

Le foncteur $F \mapsto \mathcal{N}S^{\perp_{n+1}}(F)$ est donc de type $(\mathfrak{I})$. □

Convention 4.18. — *Soient $F_0, F_1, \ldots$ une suite de foncteurs et $t_0, t_1, \ldots$ une suite d'entiers naturels. Si $t_i = 0$ pour i assez grand, on* *désigne par* $\bigotimes_{i=0}^{\infty} F_i^{\otimes t_i}$ *le produit*

$$\bigotimes_{i\geqslant 0, t_i>0} F_i^{\otimes t_i}.$$

Le théorème important suivant de Johnson–McCarthy [27, Theorem 2.9] décrit le n-ième étage de la tour de Taylor du foncteur S^d en utilisant le premier étage.

Théorème 4.19. — *Soient d, n deux entiers strictement positifs, $n \leqslant d$. Il existe un quasi-isomorphisme entre D_nS^d et $\bigoplus_{\underline{t}} \bigotimes_{i=1}^{\infty}\big((D_1S^i)^{\otimes t_i}\big)_{h\mathfrak{S}_{t_i}}$ dans la catégorie $\mathbf{Ch}_{\geqslant 0}(\mathcal{F}_*)$, où la somme directe est indexée par les suites $\underline{t} = (t_1, t_2, \dots)$ d'entiers naturels telles que $\sum_{i=1}^{\infty} t_i = n$ et $\sum_{i=1}^{\infty} it_i = d$; et $(-)_{h\mathfrak{S}_{t_i}}$ est le foncteur dérivé $\Bbbk \otimes^{\mathbf{L}}_{\mathfrak{S}_{t_i}} -$.*

En particulier, il existe un quasi-isomorphisme entre D_dS^d et $(\otimes^d)_{h\mathfrak{S}_d}$ dans la catégorie $\mathbf{Ch}_{\geqslant 0}(\mathcal{F}_*)$

5. Résultats sur $L_qS^d(-,n)$ et $H_q(D_nS^d)$

5.1. Calcul de $L_qS^d(-,n)$

Le calcul des foncteurs dérivés $L_qS^d(-,n)$ est effectué par les travaux de Cartan [12], Dold–Puppe [16], Bousfield [6] et Touzé [37].

Proposition 5.1. — *On a les isomorphismes :*

$$L_qS^d(-,0) \simeq \begin{cases} S^d & \text{si } q = 0, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}, \quad L_qS^d(-,1) \simeq \begin{cases} \Lambda^d & \text{si } q = d, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

$$L_qS^d(-,2) \simeq \begin{cases} \Gamma^d & \text{si } q = 2d, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Démonstration. — Comme objet simplicial $K(0) = \mathcal{K}(\mathbb{K}[0]) \in s\mathcal{V}_{\Bbbk}$ est constant, donc $L(F,0) = \mathcal{N}F_{K(0)} \simeq F[0]$ pour tout $F \in \mathcal{P}_{\Bbbk}$. Par conséquent, le foncteur $L_qF(-,0)$ est isomorphe à F si $q = 0$ et 0 sinon. De plus, par le théorème de décalage (Bousfield [6, Theorems 7.1,7.2], Touzé [36, Proposition 6.4]), on a des isomorphismes :

$$L_qS^d(-,1) \simeq L_{q-d}\Lambda^d(-,0), \quad L_qS^d(-,2) \simeq L_{q-2d}\Gamma^d(-,0).$$

On en déduit le résultat. □

Pour énoncer les calculs de $L_q S^d(-,n)$ pour $n \geqslant 2$, on rappelle tout d'abord les définitions des mots p-admissibles de Cartan [12, pages 9-01 et 10-01]. Dans la suite, seuls les mots p-admissibles de première espèce nous seront utiles. Nous appellerons donc plus simplement mots p-admissibles les mots p-admissibles de première espèce.

Définition 5.2.

(1) *Cas $p=2$. Un mot* 2-admissible $\underline{w}$ *est une suite finie de lettres σ, γ_2 telle que : $\underline{w}$ n'est pas vide, la première lettre de $\underline{w}$ est σ et les deux dernières lettres de $\underline{w}$ sont σ, σ.*

(2) *Cas $p > 2$. Un mot* p-admissible $\underline{w}$ *est une suite finie de lettres σ, γ_p, ϕ_p telle que : $\underline{w}$ n'est pas vide, la première lettre de $\underline{w}$ est σ ou ϕ_p et la dernière lettre de $\underline{w}$ est σ, pour chaque lettre γ_p ou ϕ_p du mot, le nombre de lettres σ situées à sa droite est pair.*

On note $\mathcal{W}_p$ l'ensemble des mots p-admissibles. La hauteur $\mathrm{h}(\underline{w})$ *d'un mot $\underline{w}$ sera, par définition, le nombre de lettres du mot $\underline{w}$ égales à σ ou à ϕ_p ; la* torsion $\mathrm{t}_{\underline{w}}$ *de $\underline{w}$ sera, par définition, le nombre de lettres du mot $\underline{w}$ égales à γ_p ou à ϕ_p. Le* degré *d'un mot $\underline{w}$ se définit par récurrence :*

$$\deg \emptyset = 0, \qquad \deg(\sigma\underline{w}) = 1 + \deg \underline{w},$$
$$\deg(\gamma_p\underline{w}) = p \deg \underline{w}, \qquad \deg(\phi_p\underline{w}) = 2 + p \deg \underline{w}.$$

Pour un entier naturel n, on désigne par $\mathcal{W}_p(n)$ le sous-ensemble de $\mathcal{W}_p$ des mots p-admissibles de hauteur n. Les ensembles $\mathcal{W}_p(n)$ forment une partition de $\mathcal{W}_p$.

Exemple 5.3.

(1) Pour $n \in \mathbb{N}$, $\underline{w} = \sigma^{n+2}$ est un mot p-admissible. Il est de hauteur $n+2$, de torsion 0 et degré $n+2$. De plus, ce mot est l'unique mot p-admissible de degré $n+2$ et de la torsion 0.

(2) Pour $n, t \geqslant 1$, le mot $\underline{w} = \sigma^n \gamma_p^t \sigma^2$ est p-admissible. On a $\mathrm{h}(\underline{w}) = n+2$, $\mathrm{t}_{\underline{w}} = t$ et $\deg \underline{w} = 2p^t + n$. Ce mot va être caractérisé dans le lemme 6.3.

(3) On considère le cas $p=2$. Un mot 2-admissible $\underline{w}$ s'écrit sous la forme $\underline{w} = \sigma\gamma_2^{t_1}\sigma\gamma_2^{t_2}\cdots\sigma\gamma_2^{t_n}\sigma\sigma$ où $t_1, \dots, t_n$ sont des entiers naturels. En fait, on obtient une bijection de W_2 sur l'ensemble $\{t = (t_1, \dots, t_n) : n \in \mathbb{N}, t_i \in \mathbb{N}\}$. De plus, si $\underline{w} = \sigma\gamma_2^{t_1}\sigma\gamma_2^{t_2}\cdots\sigma\gamma_2^{t_n}\sigma\sigma$, on a $\mathrm{h}(\underline{w}) = n+2$, $\mathrm{t}_{\underline{w}} = \sum_{i=1}^n t_i$ et
$$\deg \underline{w} = 1 + 2^{t_1} + 2^{t_1+t_2} + \cdots + 2^{t_1+\cdots+t_{n-1}} + 2^{t_1+\cdots+t_n+1}.$$

Notation 5.4. — Soit V un espace vectoriel gradué de dimension finie en chaque degré, on définit les espaces vectoriels gradués $\mathrm{U}(V)$ et $\mathrm{U}^\sharp(V)$ respectivement par les formules :

$$\mathrm{U}(V)=\begin{cases}\Gamma(V) & \text{si } p=2,\\ \Gamma(V_{\text{pair}})\otimes\Lambda(V_{\text{impair}}) & \text{si } p>2,\end{cases}$$

$$\mathrm{U}^\sharp(V)=\begin{cases}S(V) & \text{si } p=2,\\ S(V_{\text{pair}})\otimes\Lambda(V_{\text{impair}}) & \text{si } p>2.\end{cases}$$

Alors, $\mathrm{U}^\sharp(V)$ est le dual gradué de $\mathrm{U}(V)$.

Le résultat suivant se déduit de [37, Theorem 10.14] et de l'isomorphisme de décalage $L_qS^d(-,n+2)\simeq L_q\Gamma^d(-,n)$ (dû à Bousfield et Quillen, et qui est démontré dans le cadre des foncteurs strictement polynomiaux dans [36, Section 6.1]).

Théorème 5.5 ([37, Theorem 10.14]). — *On a un isomorphisme de foncteurs strictement polynomiaux (qui est bigradué si $L_qS^d(-n)$ est placé en bidegré (q,d) et si la bigraduation sur le membre de droite est définie en plaçant $I^{(\mathrm{t}_{\underline{w}})}[\deg\underline{w}]$ en bidegré $(\deg\underline{w},p^{\mathrm{t}_{\underline{w}}})$) :*

$$\bigoplus_{q,d\in\mathbb{N}} L_qS^d(-,n+2)\simeq \mathrm{U}\left(\bigoplus_{\underline{w}\in\mathcal{W}_p(n+2)} I^{(\mathrm{t}_{\underline{w}})}[\deg\underline{w}]\right).$$

Afin de donner plus explicitement la partie homogène de bidegré (q,d) du membre de droite de l'isomorphisme du théorème 5.5, nous introduisons la notation suivante.

Notation 5.6. — On note $I(q,d,n)$ l'ensemble

$$\left\{a=(a_{\underline{w}})_{\underline{w}\in\mathcal{W}_p(n+2)} : a_{\underline{w}}\in\mathbb{N},\ d=\sum_{\underline{w}} a_{\underline{w}}p^{\mathrm{t}_{\underline{w}}},\ q=\sum_{\underline{w}} a_{\underline{w}}\deg\underline{w}\right\}.$$

Pour un mot p-admissible $\underline{w}$ et un entier naturel $a_{\underline{w}}$, on désigne par $X^{a_{\underline{w}}(\mathrm{t}_{\underline{w}})}$ le foncteur suivant

$$X^{a_{\underline{w}}(\mathrm{t}_{\underline{w}})}=\begin{cases}\Gamma^{a_{\underline{w}}(\mathrm{t}_{\underline{w}})} & \text{si } p=2 \text{ ou } \deg(\underline{w}) \text{ est pair},\\ \Lambda^{a_{\underline{w}}(\mathrm{t}_{\underline{w}})} & \text{sinon.}\end{cases}$$

Corollaire 5.7. — *On a un isomorphisme de foncteurs strictement polynomiaux :*

$$L_qS^d(-,n+2)=\bigoplus_{a\in I(q,d,n)}\ \bigotimes_{\underline{w}\in\mathcal{W}_p(n+2)} X^{a_{\underline{w}}(\mathrm{t}_{\underline{w}})}.$$

Exemple 5.8.

(1) Soient $d, n \in \mathbb{N}$. Par la démonstration de la proposition 6.5, l'ensemble $I(q,d,n)$ est vide si $q < 2d + \alpha_p(d)$, où $\alpha_p(d)$ est la somme des chiffres dans la décomposition p-adique de d. De plus, si $q = 2d + n\alpha_p(d)$, cet ensemble contient un seul élément $a = (a_{\underline{w}})_{\underline{w} \in \mathcal{W}_p(n+2)}$ où

$$a_{\underline{w}} = \begin{cases} d_t & \text{si } \underline{w} = \sigma^n \gamma_p^t \sigma^2, \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

où les entiers naturels $d_t, t \in \mathbb{N}$ sont déterminés par $0 \leqslant d_t < p$ et $\sum_{t=0}^{\infty} d_t p^t = d$. Par conséquent, on a $L_q S^d(-, n+2) = 0$ si $q < 2d + n\alpha_p(d)$; et

$$L_{2d+n\alpha_p(d)} S^d(-, n+2) \simeq \begin{cases} \bigotimes_{t=0}^{\infty} \Gamma^{d_t(t)} & \text{si } p = 2 \text{ ou } n \text{ pair}, \\ \bigotimes_{t=0}^{\infty} \Lambda^{d_t(t)} & \text{sinon.} \end{cases}$$

En particulier, si $p = 2$ et $d = 5$ et $q, n \in \mathbb{N}$, on a

$$L_q S^5(-, n+2) \simeq \begin{cases} 0 & \text{si } q < 2n + 10, \\ I \otimes I^{(2)} & \text{si } q = 2n + 10. \end{cases}$$

Si $p = 3$ et $d = 5$ et $q, n \in \mathbb{N}$, on a

$$L_q S^5(-, n+2) \simeq \begin{cases} 0 & \text{si } q < 3n + 10, \\ \Gamma^2 \otimes I^{(1)} & \text{si } q = 3n + 10 \text{ et } n \text{ pair}, \\ \Lambda^2 \otimes I^{(1)} & \text{si } q = 3n + 10 \text{ et } n \text{ impair}. \end{cases}$$

(2) Supposons que $p = 2$. On détermine $L_q S^d(-, 3)$. Un élément de $\mathcal{W}_2(3)$ est de la forme $\underline{w} = \sigma \gamma_2^t \sigma^2$ avec $t \in \mathbb{N}$. Par conséquent, on a

$$L_q S^d(-, 3) \simeq \bigoplus_{(a_t)_{t \in \mathbb{N}}} \bigotimes_{t=0}^{\infty} I^{a_t(t)}$$

où la somme directe est indexée par les suites $(a_t)_{t \in \mathbb{N}}$ d'entiers naturels satisfaisant les deux conditions suivantes : $\sum_{t=0}^{\infty} a_t 2^t = d$ et $\sum_{t=0}^{\infty} a_t = q - 2d$. En particulier, si $p = 2$ et $d = 5$, on a

$$L_q S^5(-, 3) \simeq \begin{cases} I \otimes I^{(2)} & \text{si } q = 12, \\ I \otimes \Gamma^{2(1)} & \text{si } q = 13, \\ \Gamma^3 \otimes I^{(1)} & \text{si } q = 14, \\ \Gamma^5 & \text{si } q = 15, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

5.2. Calcul de $H_q\left(D_1S^d\right)$

Dans cette sous-section, on démontre la proposition suivante.

Proposition 5.9. — *Soient d un entier strictement positif et $F \in \mathcal{P}_d$.*

(1) *Le foncteur $H_q\left(D_1F\right)$ est de la forme $H_q\left(D_1F\right)(\Bbbk) \otimes I^{(r)}$ pour $r \in \mathbb{N}$. Par conséquent, si d n'est pas une puissance de p, alors $H_q\left(D_1F\right) = 0$ pour tout q, c'est-à-dire que le complexe D_1F est acyclique.*

(2) *Si $d = p^r$, on a des isomorphismes de foncteurs strictement polynomiaux :*

$$H_q\left(D_1S^d\right) \simeq \begin{cases} 0 & \text{si } q < 2(d-1), \\ I^{(r)} & \text{si } q = 2(d-1). \end{cases}$$

Pour démontrer la proposition 5.9, on peut utiliser les foncteurs dérivés stables de Dold–Puppe et le lien entre ces foncteurs et l'homologie du complexe D_1F [25, 26]. Mais comme ce lien entre D_1F et les foncteurs dérivés stables de Dold et Puppe est un résultat profond et assez difficile, nous allons plutôt donner une démonstration directe et élémentaire de la proposition.

Le premier ingrédient de la proposition est le résultat d'annulation du lemme 5.10 suivant. Encore une fois, si on admet le lien entre D_1F et les foncteurs dérivés stables de F, le lemme 5.10 est une conséquence de l'annulation bien connue des foncteurs dérivés stables sur les produits tensoriels de foncteurs réduits. Nous allons donner une démonstration directe du lemme 5.10, via le lemme d'annulation de Pirashvili.

Lemme 5.10. — *Soient $F_i \in \mathcal{P}_{d_i}$, avec $d_i > 0$ pour $i = 1, 2$. Le complexe $D_1(F_1 \otimes F_2)$ est acyclique.*

Démonstration. — Par la proposition 4.17, le foncteur D_1 est de type $(\mathfrak{I})$. En utilisant la proposition 3.33, on a une suite spectrale

$$E_2^{i,j} = \underline{\mathrm{Ext}}^i\left(F_1^\sharp \otimes F_2^\sharp, H_{-j}\left(D_1S^{d_1+d_2}\right)\right) \Rightarrow H_{-i-j}\left(D_1(F_1 \otimes F_2)\right).$$

Pour obtenir le résultat souhaité, il suffit donc de démontrer que la deuxième page de cette suite spectrale s'annule. D'après la proposition 4.15, le complexe $D_1S^{d_1+d_2}$ est homogène de degré homologique 1 ; alors $H_{-j}(D_1S^{d_1+d_2})$ sont des foncteurs additifs. De plus, les foncteurs F_1, F_2 sont réduits. En appliquant le critère d'annulation de Pirashvili [20, Theorem 2.13], on voit que $E_2^{i,j}$ s'annule pour tout i, j. On en déduit le résultat. □

LEMME 5.11. — *On a des isomorphismes de foncteurs strictement polynomiaux*

$$H_q(D_1S^d) \simeq H_{q-(d-1)}(D_1\Lambda^d) \simeq H_{q-2(d-1)}(D_1\Gamma^d).$$

Démonstration. — Comme le foncteur $\perp_{n+1} : \mathcal{P}_d \to \mathcal{P}_d$ est exact, le foncteur $P_n : \mathcal{P}_d \to \mathbf{Ch}_{\geqslant 0}(\mathcal{P}_d)$ est également un foncteur exact. En particulier, le foncteur $D_1 = P_1$ préserve les suites exactes courtes. En utilisant ce fait avec le résultat d'annulation dans le lemme 5.10 et la suite exacte de Koszul et sa duale (pour la dualité de Kuhn) [32, Section 1.6]

$$0 \longrightarrow \Lambda^d \longrightarrow \Lambda^{d-1} \otimes S^1 \longrightarrow \cdots \longrightarrow \Lambda^1 \otimes S^{d-1} \longrightarrow S^d \longrightarrow 0,$$

$$0 \longrightarrow \Gamma^d \longrightarrow \Gamma^{d-1} \otimes \Lambda^1 \longrightarrow \cdots \longrightarrow \Gamma^1 \otimes \Lambda^{d-1} \longrightarrow \Lambda^d \longrightarrow 0,$$

on en déduit le résultat. □

Le dernier ingrédient pour la démonstration de la proposition 5.9 est la classification des foncteurs strictement polynomiaux additifs [38, Proposition 3.5] de Touzé.

PROPOSITION 5.12 (Touzé). — *Soient d un entier strictement positif et $F \in \mathcal{P}_d$. Si le foncteur F est additif, alors il est de la forme $F(\mathbb{k}) \otimes I^{(r)}$ pour un entier naturel r. En particulier, si d n'est pas une puissance de p alors F s'annule.*

Démonstration de la proposition 5.9. — Par la proposition 4.15, les foncteurs $H_q\left(D_1F\right)$ sont additifs. De plus, ces foncteurs strictement polynomiaux sont homogènes de degré d. En utilisant la proposition 5.12, on obtient l'assertion (1).

D'autre part, par le lemme 5.11, on a $H_q(D_1S^d) \simeq H_{q-2(d-1)}(D_1\Gamma^d)$. Comme le complexe $D_1\Gamma^d$ est positif, alors $H_{q-2(d-1)}(D_1\Gamma^d) = 0$ si $q < 2(d-1)$. De plus, par définition, le foncteur $H_0(D_1\Gamma^d)$ est isomorphe au foncteur $\mathsf{d}_1\Gamma^d$ qui est, par définition, le conoyau du morphisme $\perp_2\Gamma^d \to \Gamma^d$, c'est-à-dire que $H_0(D_1\Gamma^d)$ est le plus grand quotient additif de Γ^d. Puisque $d = p^r$ est une puissance de p et $\perp_2\Gamma^d = \bigoplus_{i=1}^{d-1} \Gamma^i \otimes \Gamma^{d-i}$, ce conoyau est isomorphe à $I^{(r)}$. On obtient l'assertion (2). □

5.3. Calcul de $H_q(D_dS^d)$

PROPOSITION 5.13. — *Il existe un isomorphisme dans la catégorie $\mathcal{F}_*$:*

$$H_q(D_dS^d) \simeq H_q(\mathfrak{S}_d, \otimes^d),$$

où $\mathcal{F}_*$ est la sous-catégorie pleine de $\mathcal{F}_{\mathbb{k}}$ dont les objets sont des foncteurs réduits.

Démonstration. — Par le théorème 4.19, on a un quasi-isomorphisme entre $D_d S^d$ et $\left(\otimes^d\right)_{h\mathfrak{S}_d}$ dans la catégorie $\mathbf{Ch}_{\geqslant 0}(\mathcal{F}_*)$. En prenant l'homologie, on obtient le résultat. □

Ce résultat est important. Il nous permet d'utiliser les résultats connus sur l'homologie du groupe symétrique. D'après un résultat récent de Cohen–Hemmer–Nakano, on a le théorème 5.15 suivant.

Notation 5.14. — On rappelle que $\mathbf{P}$ est l'ensemble de toutes les partitions. On désigne par $\mathbf{P}^{0,1}$ l'ensemble des couples $(\epsilon;\lambda)$ telles que $\lambda \in \mathbf{P}$ et $\epsilon = \left(\epsilon_1,\dots,\epsilon_{\ell(\lambda)}\right) \in \{0,1\}^{\ell(\lambda)}, \epsilon_1 = 0$. Le degré d'une partition λ ou d'une couple $(\epsilon;\lambda)$ est respectivement par définition :

$$\deg(\lambda) := \sum_{i=1}^{\ell(\lambda)} 2^{\ell(\lambda)-i}\lambda_i, \quad \deg(\epsilon;\lambda) := \sum_{i=1}^{\ell(\lambda)} p^{\ell(\lambda)-i}(-\epsilon_i + \lambda_i(p-1)).$$

De plus, on définit la longueur de $(\epsilon;\lambda) \in \mathbf{P}^{0,1}$ par $\ell(\epsilon;\lambda) = \ell(\lambda)$. On désigne par $\widetilde{\mathbf{P}}$ l'ensemble $\mathbf{P}$ si $p = 2$ et l'ensemble $\mathbf{P}^{0,1}$ si $p > 2$.

Théorème 5.15 ([13, Theorem 8.1.4]). — *Il existe un isomorphisme bigradué dans la catégorie $\mathcal{F}_{\overline{\mathbb{F}}_p}$, où $\mathrm{U}^\sharp$ est défini à la notation 5.4, la partie $H_q(\mathfrak{S}_d,\otimes^d)$ est de degré (q,d) et $I^{(\ell(\alpha))}[\deg(\alpha)]$ est de degré $\left(\deg(\alpha), p^{\ell(\alpha)}\right)$:*

$$\bigoplus_{q,d\in\mathbb{N}} H_q(\mathfrak{S}_d,\otimes^d) \simeq \mathrm{U}^\sharp\Big(\bigoplus_{\alpha\in\widetilde{\mathbf{P}}} I^{(\ell(\alpha))}[\deg(\alpha)]\Big).$$

Afin d'expliciter complètement la partie homogène de bidegré (q,d) du membre de droite de l'isomorphisme du théorème 5.15, nous introduisons une notation.

Notation 5.16. — On note $J(q,d)$ l'ensemble

$$\left\{ (a_\alpha)_{\alpha\in\widetilde{\mathbf{P}}} : a_\alpha \in \mathbb{N},\ d = \sum_{\alpha\in\widetilde{\mathbf{P}}} a_\alpha p^{\ell(\alpha)},\ q = \sum_{\alpha\in\widetilde{\mathbf{P}}} a_\alpha \deg(\alpha) \right\}.$$

Pour $\alpha \in \widetilde{\mathbf{P}}$ et un entier naturel a_α, on définit un foncteur $X^{\sharp a_\alpha(\ell(\lambda))}$ par la formule

$$X^{\sharp a_\alpha(\ell(\alpha))} = \begin{cases} S^{a_\alpha(\ell(\alpha))} & \text{si } p = 2 \text{ ou } \deg(\alpha) \text{ est pair,} \\ \Lambda^{a_\alpha(\ell(\alpha))} & \text{sinon.} \end{cases}$$

Corollaire 5.17. — *Soient q et d deux entiers naturels. On a un isomorphisme dans la catégorie $\mathcal{F}_{\overline{\mathbb{F}}_p}$ ou dans la catégorie $\mathcal{P}_{d,\overline{\mathbb{F}}_p}$:*

$$H_q(D_d S^d) \simeq \bigoplus_{a\in J(q,d)} \bigotimes_{\alpha\in\widetilde{\mathbf{P}}} X^{\sharp a_\alpha(\ell(\alpha))}.$$

Exemple 5.18.

(1) Si $q=0$, on a $H_0(D_dS^d)\simeq S^d$.
(2) On suppose que $p=2$. Si λ est une partition, on a

$$\begin{aligned}
\deg(\lambda)=0 &\Longleftrightarrow \lambda=(0)\\
\deg(\lambda)=1 &\Longleftrightarrow \lambda=(1)\\
\deg(\lambda)=2 &\Longleftrightarrow \lambda=(2)\\
\deg(\lambda)=3 &\Longleftrightarrow \lambda\in\{(3),(1,1)\}.
\end{aligned}$$

Par conséquent, on a les isomorphismes :

$$\begin{aligned}
H_1(D_dS^d) &\simeq S^{d-2}\otimes I^{(1)},\\
H_2(D_dS^d) &\simeq \left(S^{d-4}\otimes S^{2(1)}\right)\oplus\left(S^{d-2}\otimes I^{(1)}\right),\\
H_3(D_dS^d) &\simeq \left(S^{d-6}\otimes S^{3(1)}\right)\oplus\left(S^{d-4}\otimes \otimes^{2(1)}\right)\\
&\qquad \oplus\left(S^{d-2}\otimes I^{(1)}\right)\oplus\left(S^{d-4}\otimes I^{(2)}\right).
\end{aligned}$$

5.4. Calcul de $H_q(D_nS^d)$ avec $1<n<d$

Dans les deux sous-sections 5.2 et 5.3 précédentes, nous avons obtenu des calculs explicites de $H_q\left(D_1S^d\right)$ et $H_q(D_dS^d)$. En revanche, nous ne savons pas déterminer explicitement les foncteurs strictement polynomiaux $H_q(D_nS^d)$ pour $1<n<d$. Nous proposons dans la proposition 5.21 une suite spectrale pour calculer $H_q(D_nS^d)$. Nous avons besoin du résultat classique suivant, où $C_{h\mathfrak{S}}=C\otimes_{\Bbbk\mathfrak{S}}P$ où P est une résolution projective de $\Bbbk\mathfrak{S}$-module trivial $\Bbbk$.

Lemme 5.19 ([11, VII, Prop. (5.6)]). — *Soient $C\in\mathbf{Ch}_{\geqslant 0}(\mathcal{F}_{\Bbbk})$ un complexe et $\mathfrak{S}$ un groupe. On suppose que le groupe $\mathfrak{S}$ agit sur le complexe C. Il existe alors une suite spectrale homologique*

$$E^2_{k,\ell}=H_k(\mathfrak{S},H_\ell(C))\Longrightarrow H_{k+\ell}(C_{h\mathfrak{S}}).$$

Nous allons maintenant appliquer la suite spectrale du lemme 5.19 à notre situation. Pour écrire explicitement la deuxième page de la suite spectrale dans le cas qui nous concerne, nous introduisons la notation suivante.

Notation 5.20. — On note $\widetilde{J}(d,n)$ l'ensemble des suites $\mu=(\mu_i)_{i\in\mathbb{N}}$ d'entiers naturels telles que $d=\sum_{i=0}^{\infty}\mu_ip^i$ et $n=\sum_{i=0}^{\infty}\mu_i$.

Proposition 5.21. — *Il existe une suite spectrale*

$$E^2_{k,\ell}(D_nS^d)\Longrightarrow H_{k+\ell}(D_nS^d)$$

où la deuxième page est donnée par :

$$E^2_{k,\ell}(D_nS^d) = \bigoplus_{\mu\in\widetilde{J}(d,n)} H_k\left(\mathfrak{S}_\mu, H_\ell\left(\bigotimes_{i=0}^{\infty}(D_1S^{p^i})^{\otimes\mu_i}\right)\right),$$

où $\mathfrak{S}_\mu$ désigne le sous-groupe $\prod_{i=0}^{\infty}\mathfrak{S}_{\mu_i}$ de $\mathfrak{S}_n$.

Démonstration. — Dans cette démonstration, on désigne par $K(d,n)$ l'ensemble des suites $\underline{t}=(t_1,t_2,\ldots)$ d'entiers naturels telles que $\sum_{i=1}^{\infty} t_i = n$ et $\sum_{i=1}^{\infty} it_i = d$. Le théorème 4.19 induit un isomorphisme :

$$H_q(D_nS^d) \simeq \bigoplus_{\underline{t}\in K(d,n)} H_q\left(\bigotimes_{i=1}^{\infty}\left((D_1S^i)^{\otimes t_i}\right)_{h\mathfrak{S}_{t_i}}\right).$$

En combinant avec le lemme 5.19, il existe une suite spectrale

$$E^2_{k,\ell}(D_nS^d) = \bigoplus_{\underline{t}\in K(d,n)} H_k\left(\mathfrak{S}_{\underline{t}}, H_\ell\left(\bigotimes_{i=0}^{\infty}\left(D_1S^i\right)^{\otimes t_i}\right)\right) \Longrightarrow H_{k+\ell}(D_nS^d).$$

De plus, par l'assertion (1) de la proposition 5.9 et le fait que le bifoncteur $\otimes$ est exact en chaque variable, le complexe $\bigotimes_{i=0}^{\infty}\left(D_1S^i\right)^{\otimes t_i}$ est acyclique s'il existe au moins un i tel que t_i n'est pas une puissance de p. Ainsi, dans la somme directe donnant la deuxième page de la suite spectrale, seuls les éléments du sous-ensemble $\widetilde{J}(d,n) \subset K(d,n)$ sont éventuellement non nuls. On en déduit le résultat. □

6. Blocs de $L_qS^d(-,n)$ et $H_q(D_nS^d)$, et résultats d'annulation

Nous fixons un entier naturel j et un $\Bbbk$-espace vectoriel V de dimension finie non nulle. Nous calculons dans les sous-sections 6.1 et 6.2 les ensembles des partitions suivants :

$$\bigcup_{q=0}^{j}\mathfrak{Bl}\big((L_qS^d(-,n))_V\big), \qquad \bigcup_{q=0}^{j}\mathfrak{Bl}\big((H_q(D_nS^d))_V\big).$$

En utilisant ces calculs, on obtient des résultats d'annulation dans la sous-section 6.3.

6.1. Blocs de $L_qS^d(-,n)$

Le calcul de $\bigcup_{q=0}^{j} \mathfrak{Bl}\big((L_qS^d(-,n))_V\big)$ (théorème 6.7) est divisé en deux étapes. Dans la première étape, en utilisant les propriétés de l'application $\mathfrak{Bl}$ données dans la sous-section 3.3 et le calcul explicite du foncteur $L_qS^d(-,n)$ dans la sous-section 5.1, on obtient l'égalité (6.1), où l'entier naturel m_j est défini par l'ensemble des mots p-admissibles. Dans la deuxième étape, on déterminera explicitement dans la proposition 6.5 l'entier m_j.

Notation 6.1. — On définit $m_j \in \mathbb{N} \cup \{-\infty\}$ par la formule

$$m_j = \sup\left\{ a_{\sigma^{n+2}} : a \in \bigcup_{q=0}^{j} I(q,d,n) \right\}.$$

De plus, si $d = -\infty$, et X désigne l'un des symboles Γ, Λ, S on définit $X^d = 0$.

Proposition 6.2. — *On a alors l'égalité, où la notation E désigne le foncteur Γ si $p = 2$ ou n est pair, et le foncteur Λ sinon :*

$$\bigcup_{q=0}^{j} \mathfrak{Bl}\big((L_qS^d(-,n+2))_V\big) = \mathfrak{Bl}(E_V^{m_j}). \tag{6.1}$$

Démonstration. — Pour un mot $\underline{w} \in \mathcal{W}_p(n+2)$, on a $\mathrm{t}_{\underline{w}} \geqslant 0$ et $\mathrm{t}_{\underline{w}} = 0$ si et seulement si $\underline{w} = \sigma^{n+2}$. En combinant ce fait avec le corollaire 5.7, l'égalité (3.3) de la proposition 3.19 et le théorème 3.22, on a des égalités

$$\begin{aligned}
\bigcup_{q=0}^{j} \mathfrak{Bl}\big((L_qS^d(-,n+2))_V\big) &= \bigcup_{q=0}^{j} \mathfrak{Bl}\left(\bigoplus_{a\in I(q,d,n)} \bigotimes_{\underline{w}\in\mathcal{W}_p(n+2)} \big(X^{a_{\underline{w}}(\mathrm{t}_{\underline{w}})}\big)_V \right)\\
&= \bigcup_{q=0}^{j} \bigcup_{a\in I(q,d,n)} \mathfrak{Bl}\left(\bigotimes_{\underline{w}\in\mathcal{W}_p(n+2)} \big(X^{a_{\underline{w}}(\mathrm{t}_{\underline{w}})}\big)_V \right)\\
&= \bigcup_{q=0}^{j} \bigcup_{a\in I(q,d,n)} \mathfrak{Bl}\big(X_V^{a_{\sigma^{n+2}}}\big). && (6.2)
\end{aligned}$$

Pour $a \in I(q,d,n)$, on a $d = \sum_{\underline{w}\in\mathcal{W}_p(n+2)} a_{\underline{w}} p^{\mathrm{t}_{\underline{w}}} \equiv a_{\sigma^{n+2}} \pmod p$. L'égalité (6.2) et le corollaire 3.21 fournissent l'égalité souhaitée (6.1). □

Pour déterminerl'entier m_j, on a besoin du lemme suivant. Ce résultat est élémentaire et il est démontré directement à partir de la définition 5.2 des mots p-admissibles.

Lemme 6.3. — *Soit* $\underline{w} \in \mathcal{W}_p$. *On suppose que* $\mathrm{h}(\underline{w}) = n+2$ *et* $\mathrm{t}_{\underline{w}} = t$. *Alors* $\deg \underline{w} \geqslant 2p^t + n$. *De plus,* $\deg \underline{w} = 2p^t + n$ *si et seulement si* $\underline{w} = \sigma^n \gamma_p^t \sigma^2$.

Démonstration. — On note E_p l'ensemble des mots p-admissibles $\underline{w}$ tels que $\mathrm{h}(\underline{w}) = n+2$ et $\mathrm{t}_{\underline{w}} = t$. Cet ensemble n'est pas vide, il contient toujours le mot $\sigma^n \gamma_p^t \sigma^2$, le degré $\deg\left(\sigma^n \gamma_p^t \sigma^2\right)$ de $\sigma^n \gamma_p^t \sigma^2$ est $2p^t + n$. De plus, si $t = 0$, on a $E_p = \{\sigma^2\}$. Par la définition des fonctions h et t, l'ensemble E_p est fini. Alors il existe un mot $\underline{w}$ de E_p tel que $\deg(\underline{w}) = \min_{E_p} \deg$. Alors il suffit de montrer que $\underline{w} = \sigma^n \gamma_p^t \sigma^2$.

Cas $p = 2$. — Le mot $\underline{w}$ n'est pas de la forme $\underline{w} = \underline{w}^1 \gamma_2 \sigma^k \gamma_2 \underline{w}^2$ où $\underline{w}^1$ et $\underline{w}^2$ sont des mots et $k \geqslant 1$. En effet, si $\underline{w}$ a cette forme, on définit un mot $\underline{w}' = \underline{w}^1 \sigma \gamma_2 \sigma^{k-1} \gamma_2 \underline{w}^2$. Ce mot appartient à E_p et $\deg \underline{w}' < \deg \underline{w}$, contradiction. On a donc $\underline{w} = \sigma^{n_1} \gamma_2^t \sigma^{n_2}$. Par définition, $n_2 \geqslant 2$. Si $n_2 > 2$, on définit $\underline{w}' = \underline{w} = \sigma^{n_1+1} \gamma_2^t \sigma^{n_2-1}$, on a $\underline{w}' \in E_p$ et $\deg \underline{w}' < \deg \underline{w}$, contradiction. On obtient le résultat.

Cas $p > 2$. — Le mot $\underline{w}$ n'est pas de la forme $\underline{w} = \underline{w}^1 \gamma_p \sigma^2 \underline{w}^2$ (resp. $\underline{w} = \underline{w}^1 \phi \sigma^2 \underline{w}^2$) avec $\underline{w}^1$ et $\underline{w}^2$ sont des mots et $\underline{w}^2$ n'est pas vide. En effet, si $\underline{w}$ a cette forme, on définit un mot $\underline{w}' = \underline{w}^1 \sigma^2 \gamma_p \underline{w}^2$ (resp. $\underline{w}' = \underline{w}^1 \sigma^2 \phi \underline{w}^2$). Ce mot appartient à E_p et $\deg \underline{w}' < \deg \underline{w}$, contradiction. On a donc $\underline{w} = \sigma^n \underline{w}^1 \sigma^2$ où le mot $\underline{w}^1$ ne contient que les lettres γ_p et ϕ. Il suffit de montrer que $\underline{w}^1 = \gamma_p^t$. On suppose que $\underline{w}^1$ n'a pas cette forme. Alors $\underline{w}^2$ contient au moins une lettre ϕ. Alors il est de la forme $\underline{w}^1 = \gamma_p^{t_1} \phi \underline{w}^2$ avec $t_1 \geqslant 0$. On définit $\underline{w}' = \sigma^{n+1} \gamma_p^{t_1+1} \underline{w}^2 \sigma^2$. On a $\underline{w}' \in E_p$ et $\deg \underline{w}' < \deg \underline{w}$, contradiction. $\square$

Notation 6.4. — Soit d un entier naturel. On désigne par $\alpha_p(d)$ la somme des chiffres dans la décomposition p-adique de d, c'est-à-dire que si on a la décomposition $d = \sum_{t=0}^{\infty} d_t p^t$ avec $0 \leqslant d_t < p$, on a $\alpha_p(d) = \sum_{t=0}^{\infty} d_t$.

Proposition 6.5. — *L'entier* m_j *est égal à* $d_0 + kp$, *où* d_0 *est le reste de la division de* d *par* p *et* k *est le plus grand entier satisfaisant l'inégalité*

$$j \geqslant 2d + n\left(kp + \alpha_p(d - kp)\right).$$

Démonstration. — Si a est un élément de $I(q,d,n)$ pour q quelconque alors $d = \sum_{\underline{w} \in \mathcal{W}_p(n+2)} a_{\underline{w}} p^{\mathrm{t}_{\underline{w}}}$. On en déduit que $a_{\sigma^{n+2}} \leqslant d$ et $a_{\sigma^{n+1}} \equiv d \pmod p$. Par la définition de m_j, on a donc

$$0 \leqslant m_j \leqslant d, \qquad m_j \equiv d \pmod p. \tag{6.3}$$

Il reste à déterminer le plus grand k tel que $m_j \geqslant kp$. Par la définition 5.6 des ensembles $I(q,n,d)$, la définition de m_j et les égalités $\mathrm{t}_{\sigma^2} = 0$,

$\deg(\sigma^{n+2}) = n+2$, pour un entier naturel $k \leqslant \frac{d}{p}$, on a l'inégalité $m_j \geqslant kp$ si et seulement s'il existe des entiers naturels $x_{\underline{w}}$ avec $\underline{w} \in \mathcal{W}_p(n+2)$ tels que

$$\begin{cases} \sum_{\underline{w}\in\mathcal{W}_p(n+2)} x_{\underline{w}} p^{\mathrm{t}_{\underline{w}}} & = d - kp, \\ \sum_{\underline{w}\in\mathcal{W}_p(n+2)} x_{\underline{w}} \deg(\underline{w}) & \leqslant j - kp(n+2). \end{cases} \tag{6.4}$$

D'autre part, pour $a \in I(q,d,n)$, en utilisant le lemme 6.3, on a

$$\begin{aligned} q = \sum_{\underline{w}\in\mathcal{W}_p(n+2)} a_{\underline{w}} \deg(\underline{w}) &= \sum_{t=0}^{\infty} \left(\sum_{\underline{w}\in\mathcal{W}_p(n+2),\mathrm{t}_{\underline{w}}=t} a_{\underline{w}} \deg(\underline{w}) \right) \\ &\geqslant \sum_{t=0}^{\infty} \left(\sum_{\underline{w}\in\mathcal{W}_p(n+2),\mathrm{t}_{\underline{w}}=t} a_{\underline{w}} \right) \left(2p^t + n\right) \\ &= 2\sum_{t=0}^{\infty} \left(\sum_{\mathrm{t}_{\underline{w}}=t} a_{\underline{w}} \right) p^t + n \sum_{t=0}^{\infty} \sum_{\mathrm{t}_{\underline{w}}=t} a_{\underline{w}} \\ &\geqslant 2 \left(\sum_{\underline{w}\in\mathcal{W}_p(n+2)} a_{\underline{w}} p^{\mathrm{t}_{\underline{w}}} \right) + n\alpha_p(d) \\ &= 2d + n\alpha_p(d), \end{aligned}$$

où $\alpha_p(d)$ est la somme des chiffres dans la décomposition p-adique de d, c'est-à-dire que si on a la décomposition $d = \sum_{t=0}^{\infty} d_t p^t$ avec $0 \leqslant d_t < p$, on a $\alpha_p(d) = \sum_{t=0}^{\infty} d_t$. De plus, on a $q = 2d + n\alpha_p(d)$ si et seulement si $a_{\underline{w}}$ est égal à d_t si $\underline{w} = \sigma^n \gamma_p^t \sigma^2$ et 0 sinon. Le système (6.4) admet donc une solution $x_{\underline{w}} \in \mathbb{N}$ si et seulement si $j - kp(n+2) \geqslant 2d + n\alpha_p(d-kp)$, c'est-à-dire qu'on a $j \geqslant 2d + n\left(kp + \alpha_p(d-kp)\right)$. $\square$

Remarque 6.6. — On déduit de la démonstration de la proposition 6.5 que le plus petit q tel que $L_q S^d(-, n+2) \neq 0$ est $2d + n\alpha_p(d)$.

D'après les propositions 6.2 et 6.5, on a le résultat suivant.

Théorème 6.7. — *Soient d, n deux entiers naturels et V un objet de $\mathcal{V}_{\Bbbk}$. On a l'égalité :*

$$\bigcup_{q=0}^{j} \mathfrak{Bl}\big((L_q S^d(-, n+2))_V\big) = \begin{cases} \emptyset & \textit{si } j < j_0 \\ \mathfrak{Bl}(E_V^{d_0+kp}) & \textit{si } j_k \leqslant j < j_{k+1}, \\ \mathfrak{Bl}(E_V^d) & \textit{si } j > j_{\lfloor \frac{d}{p} \rfloor}, \end{cases}$$

où d_0 est le reste de la division de d par p, et $j_k = 2d + n\,(kp + \alpha_p(d-kp))$ pour $k = 0, 1, \ldots, \lfloor \frac{d}{p} \rfloor$, et $\alpha_p(d-kp)$ est la somme des chiffres dans la décomposition p-adique de $d-kp$. De plus, la notation E désigne le foncteur Γ si $p = 2$ ou n est pair, et le foncteur Λ sinon.

6.2. Blocs de $H_q(D_n S^d)$

Dans cette sous-section, nous démontrons le théorème suivant.

Théorème 6.8. — *Soient d, n deux entiers naturels, $1 < n < d$. Si on note $m_{d,n}$ le plus grand entier naturel μ_0 tel qu'il existe des entiers naturels $\mu_1, \mu_2, \ldots$ satisfaisant $d = \sum_{i=0}^{\infty} \mu_i p^i$ et $n = \sum_{i=0}^{\infty} \mu_i$, on a :*

$$\bigcup_{q=0}^{j} \mathfrak{Bl}\big((H_q\left(D_1 S^d\right)_V)\big) = \begin{cases} \emptyset & \text{si } d \notin p^{\mathbb{N}} \text{ ou } j < 2d-2, \\ \{(0)\} & \text{sinon.} \end{cases} \tag{6.5}$$

$$\bigcup_{q=0}^{j} \mathfrak{Bl}\big((H_q(D_d S^d)_V)\big) = \mathfrak{Bl}(X_V^{\sharp d}) \tag{6.6}$$

$$\bigcup_{q=0}^{j} \mathfrak{Bl}\big((H_q(D_n S^d)_V)\big) \subseteq \begin{cases} \emptyset & \text{si } j < 2(d-n) \\ \mathfrak{Bl}(X_V^{\sharp m_{d,n}}) & \text{sinon.} \end{cases} \tag{6.7}$$

Démonstration de l'égalité (6.5) du théorème 6.8. — Par l'assertion (1) de la proposition 5.9, le foncteur $H_q\left(D_1 S^d\right)$ est de la forme $W \otimes I^{(r)}$ pour $W \in \mathcal{V}_{\Bbbk}, r \in \mathbb{N}$. On en déduit que

$$\mathfrak{Bl}\big((H_q(D_1 S^d))_V\big) = \begin{cases} \emptyset & \text{si } H_q\left(D_1 S^d\right) = 0, \\ \{(0)\} & \text{sinon.} \end{cases}$$

En combinant avec la proposition 5.9 on en déduit le résultat. □

Lemme 6.9. — *Soient $n \leqslant d$ deux entiers strictement positifs et q un entier naturel. Soient $\Bbbk, \mathbb{K}$ deux corps de caractéristique p. On a l'égalité*

$$\mathfrak{Bl}\big(H_q(D_n S^d_{\Bbbk})\big) = \mathfrak{Bl}\big(H_q(D_n S^d_{\mathbb{K}})\big).$$

Démonstration. — On peut supposer que $\Bbbk$ est un sous-corps de $\mathbb{K}$. Par exactitude du foncteur de changement de base ${}_{\mathbb{K}}(-) : \mathcal{P}_{d,\Bbbk} \to \mathcal{P}_{d,\mathbb{K}}$, on a un isomorphisme $H_q(D_n S^d_{\mathbb{K}}) \simeq {}_{\mathbb{K}}\big(H_q(D_n S^d_{\Bbbk})\big)$ dans la catégorie $\mathcal{P}_{d,\mathbb{K}}$. Comme le foncteur de changement de base préserve les blocs (proposition 3.27), on obtient le résultat. □

D'après le lemme 6.9, pour démontrer le théorème 6.8, on peut supposer que le corps $\Bbbk$ est égal à $\overline{\mathbb{F}}_p$.

Démonstration de l'égalité (6.6) du théorème 6.8. — Pour un élément α de l'ensemble $\widetilde{\mathbf{P}}$ défini à la notation 5.14, on a $\ell(\alpha) \geqslant 0$ et $\ell(\alpha) = 0$ si et seulement si $\alpha = (0)$. En combinant ce fait avec le corollaire 5.17, l'égalité (3.3) de la proposition 3.19 et le théorème 3.22, on a des égalités

$$\begin{aligned}
\bigcup_{q=0}^{j} \mathfrak{Bl}\big((H_q(D_d S^d)_V)\big) &= \bigcup_{q=0}^{j} \mathfrak{Bl}\left(\bigoplus_{a\in J(q,d)} \bigotimes_{\alpha\in\widetilde{\mathbf{P}}} \left(X^{\sharp a_\alpha(\ell(\alpha))}\right)_V\right) \\
&= \bigcup_{q=0}^{j} \bigcup_{a\in J(q,d)} \mathfrak{Bl}\left(\bigotimes_{\alpha\in\widetilde{\mathbf{P}}} \left(X^{\sharp a_\alpha(\ell(\alpha))}\right)_V\right) \\
&= \bigcup_{q=0}^{j} \bigcup_{a\in J(q,d)} \mathfrak{Bl}(X_V^{\sharp a_{(0)}}). \qquad (6.8)
\end{aligned}$$

Pour $a \in J(q,d)$, on a $d = \sum_\alpha a_\alpha p^{\ell(\alpha)}$. On en déduit que $a_{(0)} \leqslant d$ et $a_{(0)} \equiv d \pmod p$. De plus, l'ensemble $J(0,d)$ contient, par définition, l'élément $(a_\alpha)_{\alpha\in\widetilde{\mathbf{P}}}$ où a_α est égal à d si $\alpha = (0)$ et à 0 sinon. En combinant ces faits avec l'égalité (6.8) et le corollaire 3.21, on obtient l'égalité souhaitée (6.6). □

Il nous reste à montrer l'inclusion (6.7) du théorème 6.8. Pour cela, on considère la suite spectrale $E^2_{k,\ell}(D_n S^d) \Rightarrow H_{k+\ell}(D_n S^d)$ donnée par la proposition 5.21. La deuxième page de cette suite spectrale est donnée par

$$E^2_{k,\ell}(D_n S^d) = \bigoplus_{\mu\in\widetilde{J}(d,n)} H_k\left(\mathfrak{S}_\mu, H_\ell\left(\bigotimes_{i=0}^{\infty}\left(D_1 S^{p^i}\right)^{\otimes\mu_i}\right)\right). \qquad (6.9)$$

Nous renvoyons à la convention 4.18 pour le produit tensoriel du type $\bigotimes_{i=0}^{\infty}$. Pour déterminer les blocs de l'aboutisement, nous aurons besoin des résultats suivants.

Lemme 6.10. — *On a une inclusion*

$$\bigcup_{q=0}^{j} \mathfrak{Bl}\big((H_q(D_n S^d)_V)\big) \subseteq \bigcup_{0\leqslant m+n\leqslant j} \mathfrak{Bl}\big((E^2_{k,\ell}(D_n S^d))_V\big). \qquad (6.10)$$

Démonstration. — Par définition de la suite spectrale (voir par exemple [40, Definition 5.2.1]), $E^{r+1}_{k,\ell}(D_n S^d)$ est un quotient d'un sous-objet de $E^r_{k,\ell}(D_n S^d)$. Par l'égalité (3.3) de la proposition 3.19, on a

$$\mathfrak{Bl}\big((E^{r+1}_{k,\ell}(D_n S^d))_V\big) \subseteq \mathfrak{Bl}\big((E^r_{k,\ell}(D_n S^d))_V\big).$$

Cela implique $\mathfrak{Bl}\big((E^{\infty}_{k,\ell}(D_nS^d))_V\big) \subset \mathfrak{Bl}\big((E^{2}_{k,\ell}(D_nS^d))_V\big)$. D'autre part, il y a une filtration de $H_q(D_nS^d)$ telle que

$$\mathrm{Gr}\left(H_q(D_nS^d)\right) = \bigoplus_{k+\ell=q} E^{\infty}_{k,\ell}(D_nS^d).$$

En combinant avec l'égalité (3.3) de la proposition 3.19, obtient

$$\mathfrak{Bl}\big((H_q(D_nS^d))_V\big) \subseteq \bigcup_{k+\ell=q} \mathfrak{Bl}\big((E^{2}_{k,\ell}(D_nS^d))_V\big).$$

On en déduit l'inclusion souhaitée. □

Notation 6.11. — Pour un élément μ de l'ensemble $\widetilde{J}(d,n)$ défini dans la notation 5.20, on définit

$$E^2_{k,\ell;\mu}(D_nS^d) = H_k\left(\mathfrak{S}_\mu, H_\ell\left(\bigotimes_{i=1}^{\infty}(D_1S^{p^i})^{\otimes\mu_i}\right)\right).$$

En comparant avec (6.9), on a $E^2_{k,\ell}(D_nS^d) = \bigoplus_{\mu\in\widetilde{J}(d,n)} E^2_{k,\ell;\mu}(D_nS^d)$.

Soit W un $\Bbbk\mathfrak{S}_d$-module de dimension finie, soit $F \in \mathcal{P}_e$ et V un espace vectoriel. Alors $F(V)^{\otimes d}$ est naturellement un $\Bbbk\mathfrak{S}_d$-module, où l'action de $\mathfrak{S}_d$ sur $F(V)^{\otimes d}$ est donnée par permutation des facteurs du produit tensoriel. Considérons l'homologie du groupe symétrique sur le produit tensoriel $W \otimes F(V)^{\otimes d}$. Comme l'action du groupe symétrique est naturelle en V, le foncteur

$$V \longmapsto H_n(\mathfrak{S}_d, W \otimes F(V)^{\otimes d})$$

est un foncteur strictement polynomial de la variable V. Plus précisément ce foncteur s'écrit comme la composée

$$(*) \qquad \Gamma^{de}\mathcal{V}_{\Bbbk} \xrightarrow{\Gamma^d(F)} \Gamma^d\mathcal{V}_{\Bbbk} \xrightarrow{W\otimes\otimes^d} \Bbbk\mathfrak{S}_d\text{-Mod} \xrightarrow{H_n(\mathfrak{S}_d,-)} \mathcal{V}_{\Bbbk}.$$

On note $H_n(\mathfrak{S}_d, G)$ le foncteur composé d'un foncteur strictement polynomial G muni d'une action de $\mathfrak{S}_d$ et du foncteur $H_n(\mathfrak{S}_d, -)$. L'associativité de la composition des foncteurs nous donne donc deux manières d'écrire la composée $(*)$. Nous consignons ce jeu d'écriture dans le lemme suivant.

Lemme 6.12. — *Soient $F \in \mathcal{P}_{\Bbbk}$ et W un $\Bbbk\mathfrak{S}_d$-module de dimension finie. On considère l'action du groupe symétrique $\mathfrak{S}_d$ sur le foncteur $W \otimes \otimes^d$ donnée par la formule $\sigma(w\otimes v_1\otimes\cdots\otimes v_d) = (\sigma w)\otimes v_{\sigma^{-1}(1)}\otimes\cdots\otimes v_{\sigma^{-1}(d)}$. Alors on a un isomorphisme de foncteurs strictement polynomiaux :*

$$(6.11) \qquad H_n\big(\mathfrak{S}_d, (W\otimes\otimes^d)\circ F\big) \simeq H_n\big(\mathfrak{S}_d, W\otimes\otimes^d\big)\circ F\,.$$

Lemme 6.13. — *Le foncteur strictement polynomial*

$$H_k\Big(\mathfrak{S}_d, H_\ell\Big(\big(D_1 S^{p^r}\big)^{\otimes d}\Big)\Big)$$

est isomorphe à un foncteur de la forme $G^{(r)}$.

Démonstration. — Par la proposition 5.9, on a un isomorphisme de foncteurs strictement polynomiaux $H_q\left(D_1 S^{p^r}\right) \simeq H_q\left(D_1 S^{p^r}\right)(\Bbbk) \otimes I^{(r)}$.On en déduit un isomorphisme $\mathfrak{S}_d$-équivariant de foncteurs strictement polynomiaux, où le groupe $\mathfrak{S}_d$ agit sur chaque côté de l'isomorphisme par permutation des facteurs :

$$H_\ell\Big(\big(D_1 S^{p^r}\big)^{\otimes d}\Big) \simeq H_\ell\Big(\big(D_1 S^{p^r}\big)^{\otimes d}\Big)(\Bbbk) \otimes \otimes^{d(r)}. \tag{6.12}$$

On note W le $\Bbbk\mathfrak{S}_d$-module $H_\ell\big((D_1 S^{p^r})^{\otimes d}\big)(\Bbbk)$. Par le lemme 6.12, on a des isomorphismes :

$$\begin{aligned} H_k\Big(\mathfrak{S}_d, H_\ell\Big(\big(D_1 S^{p^r}\big)^{\otimes d}\Big)\Big) &\simeq H_k\big(\mathfrak{S}_d, W \otimes \otimes^{d(r)}\big) \\ &\simeq H_k\big(\mathfrak{S}_d, (W \otimes \otimes^{d}) \circ I^{(r)}\big), \\ &\simeq H_k(\mathfrak{S}_d, W \otimes \otimes^{d})^{(r)} \end{aligned}$$

On en déduit le résultat. □

Proposition 6.14. — *Soit* $\mu \in \widetilde{J}(d,n)$.*On a l'égalité :*

$$\bigcup_{0 \leqslant k+\ell \leqslant j} \mathfrak{Bl}\big(\big(E^2_{k,\ell;\mu}(D_n S^d)\big)_V\big) = \begin{cases} \emptyset & \text{si } j < 2(d-n), \\ \mathfrak{Bl}(X_V^{\sharp\mu_0}) & \text{sinon.} \end{cases} \tag{6.13}$$

Démonstration. — On a un isomorphisme de foncteurs strictement polynomiaux :

$$E^2_{k,\ell;\mu}(D_n S^d) \simeq \bigoplus_{\sum k_i = k, \sum \ell_i = \ell} \underbrace{\bigotimes_{i=0}^{\infty} H_{k_i}\Big(\mathfrak{S}_{\mu_i}, H_{\ell_i}\Big(\big(D_1 S^{p^i}\big)^{\otimes \mu_i}\Big)\Big)}_{H(\underline{k},\underline{\ell})}. \tag{6.14}$$

De plus, comme l'homologie du complexe $D_1 S^{p^0} = D_1 I$ est concentrée en degré 0 et $H_0(D_1 I) = I$, par le lemme 6.13 et le théorème 3.22, si $H(\underline{k},\underline{\ell}) \neq 0$, on a :

$$\begin{aligned} \mathfrak{Bl}(H(\underline{k},\underline{\ell})_V) &= \mathfrak{Bl}\Big(H_{k_0}\Big(\mathfrak{S}_{\mu_0}, H_{\ell_0}\Big(\big(D_1 S^{p^0}\big)^{\otimes \mu_0}\Big)\Big)_V\Big) \\ &= \begin{cases} \mathfrak{Bl}(H_{k_0}(\mathfrak{S}_{\mu_0}, \otimes^{\mu_0})_V) & \text{si } \ell_0 = 0, \\ \emptyset & \text{sinon.} \end{cases} \\ &\subseteq \mathfrak{Bl}(X_V^{\sharp\mu_0}) \end{aligned}$$

Par conséquent, on a

$$
\begin{aligned}
\bigcup_{0\leqslant k+\ell\leqslant j} \mathfrak{Bl}\big((E^2_{k,\ell;\mu}(D_nS^d))_V\big) &= \bigcup_{k_0\in A} \mathfrak{Bl}\big((H_{k_0}(D_{\mu_0}S^{\mu_0}))_V\big)\\
&\subseteq \mathfrak{Bl}(S_V^{\mu_0}). \qquad (6.15)
\end{aligned}
$$

où A est l'ensemble des entiers naturels k_0 tels qu'il existe des entiers naturels $k_1, k_2, \dots, \ell_0, \ell_1, \dots$ pour que $\sum_{i=0}^{\infty}(k_i+\ell_i) \leqslant j$ et que le foncteur $H(\underline{k}, \underline{\ell})$ soit non nul. On remarque que $d-n = \sum_{i=0}^{\infty}\big(p^i-1\big)\,\mu_i$.

(1) Si $j < 2(d-n)$, alors l'ensemble A est vide. En effet, si $H(\underline{k}, \underline{\ell}) \neq 0$, par la proposition 5.9, on a $\ell_i \geqslant 2\mu_i\big(p^i-1\big)$ pour tout i. On en déduit donc $\sum_{i=0}^{\infty}\ell_i \geqslant 2(d-n)$.

(2) Si $j \geqslant 2(d-n)$, alors $0 \in A$. En effet, pour $k_1 = k_2 = \cdots = 0$ et $\ell_i = 2\mu_i(p^i-1)$, on a que $H(\underline{k}, \underline{\ell})$ est non nul. Par l'égalité (6.6) du théorème 6.8 et (6.15), on a $\bigcup_{0\leqslant k+\ell\leqslant j}\mathfrak{Bl}\big((E^2_{k,\ell;\mu}(D_nS^d))_V\big) = \mathfrak{Bl}(S_V^{\mu_0})$.

On obtient donc l'égalité (6.13). □

Démonstration de l'inclusion (6.7) du théorème 6.8. — D'après le lemme 6.10, il suffitde démontrer que les membres de droite des (6.7) et (6.10) sont égaux. D'autre part, la proposition 6.14 fournit l'égalité

$$
\bigcup_{0\leqslant k+\ell\leqslant j} \mathfrak{Bl}\big(\big(E^2_{k,\ell}(D_nS^d)\big)_V\big) = \begin{cases} \emptyset & \text{si } j < 2(d-n),\\ \bigcup_{\mu\in\widetilde{J}(d,n)}\mathfrak{Bl}(X_V^{\sharp\mu_0}) & \text{sinon.}\end{cases} \qquad (6.16)
$$

Pour $\mu \in \widetilde{J}(d,n)$, on a $\mu_0 \equiv d \pmod d$. Par le corollaire 3.21, on a

$$
\bigcup_{\mu\in\widetilde{J}(d,n)} \mathfrak{Bl}(X_V^{\sharp\mu_0}) = \mathfrak{Bl}(X_V^{\sharp m_{d,n}})
$$

où $m_{d,n} = \max\{\mu_0 : \mu \in \widetilde{J}(d,n)\}$. On obtient le résultat souhaité. □

6.3. Des critères d'annulation

Les foncteurs dérivés $L_q(S^d, n)$ pour $n = 0$, 1 ou 2 ont été calculés explicitement dans la proposition 5.1, et la proposition 3.20 donne les blocs de ces foncteurs dérivés. Le critère d'annulation du théorème 3.34 nous donne donc le résultat suivant.

Proposition 6.15. — *Soient $F \in \mathcal{P}_d$ et $V \in \mathcal{V}_{\Bbbk}$.*

(1) (a) *Si $q > 0$ alors $L_q F(-,0) = 0$.*
(b) *S'il n'existe pas d'élément $\lambda \in \mathfrak{Bl}(F)$ tel que $\ell(\lambda) \leqslant \dim V$ alors $L_* F(V,0) = 0$.*

(2) (a) *Si $q > d$ ou $q < d - \operatorname{inj.dim} F$ alors $L_q F(-,1) = 0$.*
(b) *S'il n'existe pas d'élément $\lambda \in \mathfrak{Bl}(F)$ tel que $\lambda_1 \leqslant \dim V$ alors $L_* F(V,1) = 0$.*

(3) (a) *i $q > 2d$ ou $q < 2d - \operatorname{inj.dim} F$ alors $L_q F(-,2) = 0$.*
(b) *S'il n'existe pas d'élément $\lambda \in \mathfrak{Bl}(F)$ tel que $\ell(\lambda) \leqslant \dim V$ alors $L_* F(V,2) = 0$.*

Exemple 6.16.

(1) On suppose que $d \geqslant 3, p \geqslant 3$ et $p \nmid d$. Si $\lambda = \big(3, 1^{d-3}\big)$, on a :

$$L_* S_\lambda\big(\Bbbk^2, 2\big) = 0 = L_* S_\lambda\big(\Bbbk, 2\big).$$

(2) Si $d \geqslant 4$ et $q < 2d - 2$, on a

$$L_q S_{(d-2,2)}(-,2) = 0.$$

Nous regardons maintenant des critères d'annulation pour les foncteurs dérivés $L_q F(-,n)$ lorsque $n \geqslant 2$. Nous introduisons la notation suivante.

Notation 6.17. — Soient d, n deux entiers naturels.

(1) Pour $k = 0, 1, \ldots, \lfloor \frac{d}{p} \rfloor$, on désigne par j_k le nombre $2d + n(kp + \alpha_p(d - kp))$. On obtient une suite croissante

$$0 < j_0 < j_1 < \cdots < j_{\lfloor \frac{d}{p} \rfloor}.$$

(2) On note $m_{d,n}$ le plus grand entier naturel μ_0 tel qu'il existe des entiers naturels $\mu_1, \mu_2, \ldots$ satisfaisant $d = \sum_{i=0}^{\infty} \mu_i p^i$ et $n = \sum_{i=0}^{\infty} \mu_i$

D'après la proposition 4.6, la dérivation au sens de Dold–Puppe est un foncteur de type $(\mathfrak{I})$. Nous avons calculé les blocs de $L_q S^d(-,n)$ dans le théorème 6.7. Ces blocs peuvent être complètement explicités en termes de partitions à l'aide de la proposition 3.20. Le critère d'annulation du théorème 3.34 nous donne donc le résultat suivant.

Théorème 6.18. — *Soient F un objet de $\mathcal{P}_d$ et V un objet de $\mathcal{V}_{\Bbbk}$. On a $L_q F(V, n+2) = 0$ si l'une des conditions suivantes est satisfaite :*

(1) $q + \operatorname{inj.dim} F < j_0$,

(2) $j_k \leqslant q + \text{inj.dim}\, F < j_{k+1}$ *et il n'existe pas d'élément* $\lambda \in \mathfrak{Bl}(F)$ *tel que* $|\lambda| \leqslant d_0 + kp$, *et*

$$\begin{cases} \ell(\lambda) \leqslant \dim V & \text{si } p = 2 \text{ ou } n \text{ est pair} \\ \lambda_1 \leqslant \dim V & \text{sinon} \end{cases}$$

où d_0 *est le reste de la division de* d *par* p.

(3) $q + \text{inj.dim}\, F \geqslant j_{\lfloor \frac{d}{p} \rfloor}$ *et il n'existe pas d'élément* $\lambda \in \mathfrak{Bl}(F)$ *tel que*

$$\begin{cases} \ell(\lambda) \leqslant \dim V & \text{si } p = 2 \text{ ou } n \text{ est pair} \\ \lambda_1 \leqslant \dim V & \text{sinon.} \end{cases}$$

Exemple 6.19.

(1) On suppose que $p = 2$. La partition $(3, 2, 1)$ est un 2-cœur. On obtient :

$$L_* S_{(3,2,1)}(\mathbb{k}, n) = 0 = L_* S_{(3,2,1)}(\mathbb{k}^2, n).$$

(2) On suppose que $p = 2$ et $d = 3$. On a $j_0 = 2d + n\alpha_p(d) = 2n + 6$, et $j_1 = 2d + n(p + \alpha_p(d-p)) = 3n + 6$. De plus, on a $\text{inj.dim}\, S_{(2,1)} \leqslant 1$. Par conséquent, si $q < j_1 - 1 = 3n + 5$, on a $L_q S_{(2,1)}(-, n+2) = 0$.

De même, d'après les théorèmes 3.34, 6.8 et les propositions 4.6 et 3.20, on obtient le théorème suivant.

THÉORÈME 6.20. — *Soient* $F \in \mathcal{P}_d$ *et* V *un objet de* $\mathcal{V}_{\mathbb{k}}$. *On a trois cas.*

(1) *Le cas* $n = 1$. *On a* $H_q(D_1 F) = 0$ *si l'une des conditions suivantes est satisfaite :*
   (a) $q + \text{inj.dim}\, F < 2d - 2$,
   (b) d *n'est pas une puissance de* p,
   (c) $(0) \notin \mathfrak{Bl}(F)$.

(2) *Le cas* $n = d$. *On a* $H_q(D_d F)(V) = 0$ *s'il n'existe pas d'élément* $\lambda \in \mathfrak{Bl}(F)$ *tel que*

$$\begin{cases} \ell(\lambda) \leqslant \dim V & \text{si } p = 2 \text{ ou } n \text{ est pair} \\ \lambda_1 \leqslant \dim V & \text{sinon.} \end{cases}$$

(3) *Le cas* $1 < n < d$. *On a* $H_q(D_n F)(V) = 0$ *si l'une des conditions suivantes est satisfaite*
   (a) $q + \text{inj.dim}\, F < 2(d - n)$
   (b) *il n'existe pas d'élément* $\lambda \in \mathfrak{Bl}(F)$ *tel que* $|\lambda| \leqslant m_{d,n}$ *et*

$$\begin{cases} \ell(\lambda) \leqslant \dim V & \text{si } p = 2 \text{ ou } n \text{ est pair} \\ \lambda_1 \leqslant \dim V & \text{sinon.} \end{cases}$$

Exemple 6.21.

(1) On suppose que $p = 2$. Si $\lambda = (5,2,1)$, on a $\mathfrak{Co}_p(\lambda) = (3,2,1) \neq 0$. On a donc $H_*(D_1 S_\lambda) = 0$.

(2) On suppose que $p = 3$. Comme $\lambda = (4,2,1,1)$ est un 3-cœur, on a

$$H_*(D_n S_\lambda)(\mathbb{k}^\ell) = 0$$

si $n > 1$ et $\ell \leqslant 3$.

(3) On suppose que $d \geqslant 2$. Si $1 < n < d$ et $q < 2(d-n) - 1$ alors

$$H_q(D_n S_{(d-1,1)}) = 0.$$

BIBLIOGRAPHIE

[1] K. Akin & D. A. Buchsbaum, « Characteristic-free representation theory of the general linear group », *Adv. Math.* **58** (1985), p. 149-200.

[2] ———, « Characteristic-free representation theory of the general linear group. II. Homological considerations », *Adv. Math.* **72** (1988), n° 2, p. 171-210.

[3] K. Akin, D. A. Buchsbaum & J. Weyman, « Schur functors and Schur complexes », *Adv. Math.* **44** (1982), n° 3, p. 207-278.

[4] S. Betley, « Stable derived functors, the Steenrod algebra and homological algebra in the category of functors », *Fundam. Math.* **168** (2001), n° 3, p. 279-293.

[5] R. Bott, « On the Chern–Weil homomorphism and the continuous cohomology of Lie-groups », *Adv. Math.* **11** (1973), p. 289-303.

[6] A. K. Bousfield, « Homogeneous functors and their derived functors », 1967, mimeographed notes.

[7] ———, « Operations on derived functors of non-additive functors », 1967, mimeographed notes.

[8] A. K. Bousfield, E. B. Curtis, D. M. Kan, D. G. Quillen, D. L. Rector & J. W. Schlesinger, « The mod-p lower central series and the Adams spectral sequence », *Topology* **5** (1966), p. 331-342.

[9] L. Breen & R. Mikhailov, « Derived functors of nonadditive functors and homotopy theory », *Algebr. Geom. Topol.* **11** (2011), n° 1, p. 327-415.

[10] L. Breen, R. Mikhailov & A. Touzé, « Derived functors of the divided power functors », *Geom. Topol.* **20** (2016), n° 1, p. 257-352.

[11] K. S. Brown, *Cohomology of Groups*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 182, Springer, 1982.

[12] H. Cartan, J. C. Moore, R. Thom & J.-P. Serre (éds.), *Séminaire Henri Cartan : Algèbres d'Eilenberg–MacLane et homotopie. 7e année 1954/55. Vols. I, II. Exposés I–XI, XII–XXII*, Secrétariat Mathématique, 1955.

[13] F. R. Cohen, D. J. Hemmer & D. K. Nakano, « On the cohomology of Young modules for the symmetric group », *Adv. Math.* **224** (2010), n° 4, p. 1419-1461.

[14] E. B. Curtis, « Lower central series of semi-simplicial complexes », *Topology* **2** (1963), p. 159-171.

[15] ———, « Some relations between homotopy and homology », *Ann. Math.* **82** (1965), p. 386-413.

[16] A. Dold & D. Puppe, « Homologie nicht-additiver Funktoren. Anwendungen », *Ann. Inst. Fourier* **11** (1961), p. 201-312.

[17] S. Donkin, « On Schur algebras and related algebras. I », *J. Algebra* **104** (1986), n° 2, p. 310-328.

[18] ———, « On Schur algebras and related algebras. II », *J. Algebra* **111** (1987), n° 2, p. 354-364.

[19] S. Eilenberg & S. Mac Lane, « On the groups $H(\Pi, n)$. II. Methods of computation », *Ann. Math.* **60** (1954), p. 49-139.

[20] E. M. Friedlander & A. Suslin, « Cohomology of finite group schemes over a field », *Invent. Math.* **127** (1997), n° 2, p. 209-270.

[21] J. A. Green, *Polynomial representations of* GL_n, Lecture Notes in Mathematics, vol. 830, Springer, 2007.

[22] G. James & A. Kerber, *The representation theory of the symmetric group*, Encyclopedia of Mathematics and Its Applications, vol. 16, Addison-Wesley Publishing Group, 1981, with an introduction by Gilbert de B. Robinson.

[23] J. C. Jantzen, *Representations of algebraic groups*, Pure and Applied Mathematics, vol. 131, Academic Press Inc., 1987.

[24] ———, *Representations of algebraic groups*, Mathematical Surveys and Monographs, vol. 107, American Mathematical Society, 2003.

[25] B. Johnson & R. McCarthy, « Linearization, Dold–Puppe stabilization and Mac Lane's Q-construction », *Trans. Am. Math. Soc.* **350** (1998), n° 4, p. 1555-1593.

[26] ———, « Trans. Amer. Math. Soc », *Trans. Am. Math. Soc.* **356** (2004), n° 2, p. 757-803.

[27] ———, « Taylor towers of symmetric and exterior powers », *Fundam. Math.* **201** (2008), n° 3, p. 197-216.

[28] M. R. Kantorovitz & R. McCarthy, « The Taylor towers for rational algebraic K-theory and Hochschild homology », *Homology Homotopy Appl.* **4** (2002), n° 1, p. 191-212.

[29] S. Mac Lane, *Homology*, Classics in Mathematics, Springer, 1995, reprint of the 1975 edition.

[30] S. Martin, *Schur algebras and representation theory*, Cambridge Tracts in Mathematics, vol. 112, Cambridge University Press, 1993.

[31] T. I. Pirashvili, « Polynomial functors », *Tr. Tbilis. Mat. Inst. Razmadze* **91** (1988), p. 55-66.

[32] ———, « Introduction to functor homology », in *Rational representations, the Steenrod algebra and functor homology*, Panoramas et Synthèses, vol. 16, Société Mathématique de France, 2003, p. 1-26.

[33] A. Suslin, E. M. Friedlander & C. P. Bendel, « Infinitesimal 1-parameter subgroups and cohomology », *J. Am. Math. Soc.* **10** (1997), n° 3, p. 693-728.

[34] B. Totaro, « Projective resolutions of representations of $\mathrm{GL}(n)$ », *J. Reine Angew. Math.* **482** (1997), p. 1-13.

[35] A. Touzé, « Cohomology of classical algebraic groups from the functorial viewpoint », *Adv. Math.* **225** (2010), n° 1, p. 33-68.

[36] ———, « Ringel duality and derivatives of non-additive functors », *J. Pure Appl. Algebra* **217** (2013), n° 9, p. 1642-1673.

[37] ———, « Bar complexes and extensions of classical exponential functors », *Ann. Inst. Fourier* **64** (2014), n° 6, p. 2563-2637.

[38] ———, « A functorial control of integral torsion in homology », *Fundam. Math.* **237** (2017), n° 2, p. 135-163.

[39] ———, « On the structure of graded commutative exponential functors », *Int. Math. Res. Not.* **2021** (2021), n° 17, p. 13305-13415.

[40] C. A. Weibel, *An introduction to homological algebra*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, vol. 38, Cambridge University Press, 1994.

[41] J. Weyman, *Cohomology of vector bundles and syzygies*, Cambridge Tracts in Mathematics, vol. 149, Cambridge University Press, 2003.

Manuscrit reçu le 11 septembre 2017,
révisé le 2 avril 2022,
accepté le 10 mars 2022.

Van Tuan PHAM
Faculty of Mathematics-Mechanics-Informatics,
Vietnam National University,
Hanoi, 334 Nguyen Trai St.,
Thanh Xuan, Hanoi, Vietnam
phamvantuan1987@vnu.edu.vn