



ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

Michel VAQUIÉ

**Valuation augmentée, paire minimale et valuation
approchée**

Article à paraître, mis en ligne le 5 février 2025, 55 p.

Article mis à disposition par son auteur selon les termes de la licence
CREATIVE COMMONS ATTRIBUTION – PAS DE MODIFICATION 3.0 FRANCE



<http://creativecommons.org/licenses/by-nd/3.0/fr/>



Les *Annales de l'Institut Fourier* sont membres du
Centre Mersenne pour l'édition scientifique ouverte
www.centre-mersenne.org e-ISSN : 1777-5310

VALUATION AUGMENTÉE, PAIRE MINIMALE ET VALUATION APPROCHÉE

par Michel VAQUIÉ (*)

RÉSUMÉ. — Soit (K, ν) un corps valué, les notions de *valuation augmentée*, de *valuation augmentée limite* et de *famille admise* de valuations permettent de donner une description de toute valuation μ de $K[x]$ prolongeant ν . Dans le cas où le corps K est algébriquement clos cette description est particulièrement simple et nous pouvons la réduire aux notions de *paire minimale* et de *famille pseudo-convergente*.

Soient (K, ν) un corps valué hensélien et $\bar{\nu}$ l'unique extension de ν à la clôture algébrique \bar{K} de K et soit μ une valuation de $K[x]$ prolongeant ν , nous étudions les extensions $\bar{\mu}$ de μ à $\bar{K}[x]$ et nous donnons une description des valuations $\bar{\mu}_i$ de $\bar{K}[x]$ qui sont les extensions des valuations μ_i appartenant à la famille admise associée à μ .

ABSTRACT. — Let (K, ν) be a valued field, the notions of *augmented valuation*, of *limit augmented valuation* and of *admissible family* of valuations enable to give a description of any valuation μ of $K[x]$ extending ν . In the case where the field K is algebraically closed, this description is particularly simple and we can reduce it to the notions of *minimal pair* and *pseudo-convergent family*.

Let (K, ν) be a henselian valued field and $\bar{\nu}$ the unique extension of ν to the algebraic closure \bar{K} of K and let μ be a valuation of $K[x]$ extending ν , we study the extensions $\bar{\mu}$ from μ to $\bar{K}[x]$ and we give a description of the valuations $\bar{\mu}_i$ of $\bar{K}[x]$ which are the extensions of the valuations μ_i belonging to the admissible family associated with μ .

Introduction

Soit K un corps muni d'une valuation ν , nous pouvons obtenir toute valuation ou pseudo-valuation μ de l'anneau des polynômes $K[x]$ qui prolonge ν grâce à *une famille admise de valuations* $\mathcal{A} = (\mu_i)_{i \in I}$, où l'ensemble I est un ensemble totalement ordonné (cf. [19, théorèmes 2.4 et 2.5]). De plus

Mots-clés : valuation, extension, famille admise, paire minimale.

Classification Mathématique (2020) : 13A18, 12J10, 14E15.

(*) The author is partially supported by the grant of the Agence Nationale de la Recherche "CatAG" ANR-17-CE40-0014.

chaque valuation μ_i de la famille est obtenue comme valuation augmentée ou comme valuation augmentée limite associée à un polynôme-clé ou un polynôme-clé limite ϕ_i .

La famille $\mathcal{A} = (\mu_i)_{i \in I}$ converge vers la valuation μ dans le sens où pour tout polynôme f de $K[x]$ la famille de valeurs $(\mu_i(f))_{i \in I}$ est croissante et vérifie $\mu(f) = \text{Sup}(\mu_i(f); i \in I)$, où le Sup est toujours atteint par définition d'une famille admise. En particulier si la famille I a un plus grand élément \bar{i} la valuation μ est égale à la valuation $\mu_{\bar{i}}$ et il existe un polynôme $\phi = \phi_{\bar{i}}$ qui définit la valuation μ comme valuation augmentée ou valuation augmentée limite. Nous disons dans ce cas que la valuation est *bien spécifiée* et que le polynôme ϕ *définit* la valuation. Par définition ce polynôme apparaît dans la construction de la famille admise $\mathcal{A} = (\mu_i)_{i \in I}$ associée à la valuation μ .

Comme tout polynôme-clé ou polynôme-clé limite est un polynôme irréductible de $K[x]$ dans le cas où le corps K est algébriquement clos les seuls polynômes-clés sont de degré un et les familles admises sont particulièrement simples : si la valuation μ est bien spécifiée elle est définie par un polynôme-clé ϕ de la forme $\phi(x) = x - a$, sinon elle est définie par une famille infinie de polynômes (ϕ_α) de la forme $\phi_\alpha(x) = x - a_\alpha$. Plus précisément, comme K est algébriquement clos la valuation μ est entièrement déterminée par les valeurs prises pour les polynômes f de la forme $f(x) = (x - b)$, et nous avons dans le cas où μ est bien spécifiée $\mu(x - b) = \text{Inf}(\nu(a - b), \delta)$, avec $\delta = \mu(x - a)$, et la valuation μ est associée à une *paire minimale*, et dans le cas d'une famille infinie la valuation μ est la valuation associée à la *famille pseudo-convergente* (a_α) (proposition 2.11). Il est aussi possible de décrire une valuation μ de $K[x]$ par une boule fermée ou par une famille décroissante de boules fermées dans K pour la distance ultramétrique associée à la valuation ν de K (proposition 2.12).

Soient (K, ν) un corps valué quelconque et μ une valuation de $K[x]$ prolongeant ν , alors si $\bar{\nu}$ est une extension de ν à la clôture algébrique \bar{K} de K il existe une extension $\bar{\mu}$ de μ à $\bar{K}[x]$ qui prolonge $\bar{\nu}$. Soit $\mathcal{A} = (\mu_i)_{i \in I}$ la famille admise associée à μ , nous voulons décrire les valuations $\bar{\mu}_i$ de $\bar{K}[x]$ obtenues comme prolongement des valuations μ_i appartenant à la famille \mathcal{A} , et les familles de boules fermées de \bar{K} associées aux valuations $\bar{\mu}_i$.

Dans le cas où (K, ν) est un corps valué hensélien nous associons à la famille admise associée à la valuation μ une famille décroissante $(\mathcal{B}_i)_{i \in I}$ de réunions finies de boules fermées de \bar{K} . Plus précisément chaque \mathcal{B}_i est la réunion des boules disjointes $B_i^{(r)}$, le groupe de Galois agit transitivement sur l'ensemble fini $\{B_i^{(r)}\}$, et pour tout $i < j$ dans I chaque boule $B_i^{(r)}$ de \mathcal{B}_i contient s boules $B_j^{(l)}$ appartenant à \mathcal{B}_j , où s est un entier indépendant

de la boule $B_i^{(r)}$ choisie, et toute boule $B_j^{(l)}$ de \mathcal{B}_j est contenue dans une boule $B_i^{(r)}$ de \mathcal{B}_i (proposition 3.23).

L'intersection des \mathcal{B}_i est un sous-ensemble $\mathbf{B}(\mu)$ de \overline{K} , appelé *ensemble caractéristique de la valuation μ* , cet ensemble est vide dans le cas où la valuation μ n'est pas bien spécifiée, sinon c'est la réunion d'un ensemble fini de boules fermées non vides de \overline{K} , qui correspondent aux différentes extensions de μ à $\overline{K}[x]$ (théorème 3.24).

Dans la quatrième partie nous montrons comment à partir d'une valuation $\overline{\mu}$ de $\overline{K}[x]$ nous pouvons construire la famille admise $\mathcal{A} = (\mu_i)_{i \in I}$ associée à la restriction μ de $\overline{\mu}$ à $K[x]$. Plus précisément nous construisons une famille décroissante de boules fermées B_i de \overline{K} , telle que la valuation μ_i de la famille admise \mathcal{A} soit la restriction à $K[x]$ de la valuation $\overline{\mu}_i$ de $\overline{K}[x]$ définie par la boule B_i .

Alors que la construction de la famille admise $\mathcal{A} = (\mu_i)_{i \in I}$ se fait de *manière croissante*, c'est-à-dire la valuation μ_i est construite à partir des valuations μ_j pour $j < i$, la construction des boules B_i , et par conséquent des valuations $\overline{\mu}_i$ se fait de *manière décroissante*, c'est-à-dire la boule B_i est construite à partir des boules B_j pour $j > i$ (théorème 4.6).

Dans la cinquième partie nous revenons sur les notions de *valuations approchées* et de *polynômes approchés*. Nous définissons une notion de distance dist_ν entre les polynômes de $K[x]$ et pour toute valuation bien spécifiée μ définie par un polynôme ϕ nous donnons une caractérisation des polynômes approchés ϕ' de μ en considérant la distance $\text{dist}_\nu(\phi, \phi')$ (corollaire 5.8).

Nous comparons ensuite cette notion avec la notion de polynôme-clé introduite par Mark Spivakovsky (cf. [6]) et nous retrouvons que ces deux notions coïncident (corollaire 5.11).

Enfin dans l'annexe nous interprétons les résultats de Kaplansky sur les extensions immédiates et les suites pseudo-convergentes à partir des propriétés des familles admises continues que nous avons définies précédemment.

Remerciements

L'auteur remercie Franz-Viktor Kuhlmann pour les remarques qu'il lui a faites concernant une première version de ce texte et le rapporteur pour ses corrections, ses commentaires et ses remarques.

1. Rappels

Dans ce qui suit nous nous donnons une valuation ν sur un corps K et toutes les valuations ou pseudo-valuations μ de l'anneau des polynômes $K[x]$ que nous considérons sont des prolongements de ν . Nous nous donnons aussi un groupe totalement ordonné $\tilde{\Gamma}$, contenant le groupe des ordres Γ_ν de la valuation ν , et toutes les valuations ou pseudo-valuations μ de $K[x]$ ont leur groupe des ordres Γ_μ qui est un sous-groupe ordonné de $\tilde{\Gamma}$.

Pour toute valuation μ de $K[x]$ nous pouvons définir la notion de *polynôme-clé* ϕ , et si ϕ est un polynôme-clé pour μ et si γ est un élément de $\tilde{\Gamma}$ vérifiant $\gamma > \mu(\phi)$, nous pouvons définir une nouvelle valuation μ' de $K[x]$, appelée *valuation augmentée* associée au polynôme-clé ϕ et à la valeur γ que nous notons $\mu' = [\mu; \mu'(\phi) = \gamma]$, de la manière suivante : pour tout polynôme f de $K[x]$, nous écrivons le développement de f selon les puissances de ϕ , $f = g_m\phi^m + \dots + g_1\phi + g_0$, où les polynômes g_j , $0 \leq j \leq m$, sont de degré strictement inférieur au degré du polynôme-clé ϕ , et nous avons :

$$\mu'(f) = \text{Inf}(\mu(g_j) + j\gamma; 0 \leq j \leq m).$$

Nous pouvons définir aussi pour tout polynôme unitaire ϕ de degré un, $\phi = x - b$, et pour toute valeur γ de $\tilde{\Gamma}$ une valuation μ de $K[x]$, que nous appelons encore *valuation augmentée* associée au polynôme-clé ϕ et à la valeur γ que nous notons $\mu = [\nu; \mu(\phi) = \gamma]$, de la manière suivante : tout polynôme f de $K[x]$ s'écrit de manière unique sous la forme $f = a_d\phi^d + \dots + a_1\phi + a_0$, avec $a_j \in K$, et nous posons

$$\mu(f) = \text{Inf}(\nu(a_j) + j\gamma; 0 \leq j \leq d).$$

Dans ce cas cette valuation μ est aussi notée $\omega_{(b,\gamma)}$ (cf. [3]).

Nous pouvons définir la notion de *famille de valuations augmentées itérées* comme une famille dénombrable $(\mu_i)_{i \in I}$ de valuations de $K[x]$, $I = \{1, \dots, n\}$ ou $I = \mathbb{N}^* := \mathbb{N} \setminus \{0\}$, associée à une famille de polynômes $(\phi_i)_{i \in I}$ et à une famille $(\gamma_i)_{i \in I}$ d'éléments de $\tilde{\Gamma}$, telle que chaque valuation μ_i , $i > 1$, est une valuation augmentée de la forme $\mu_i = [\mu_{i-1}; \mu_i(\phi_i) = \gamma_i]$ et où la famille des polynômes-clés (ϕ_i) vérifie les deux propriétés suivantes : pour tout $i > 2$ nous avons $\deg \phi_i \geq \deg \phi_{i-1}$ et les polynômes ϕ_i et ϕ_{i-1} ne sont pas μ_{i-1} -équivalents. Nous renvoyons aux articles [11], [12], et [19], pour les définitions et les propriétés des polynômes-clés, des valuations augmentées et des familles de valuations augmentées itérées.

Nous définissons aussi la notion de *famille admissible continue* comme une famille $\mathcal{C} = (\mu_\alpha)_{\alpha \in A}$ de valuations de $K[x]$, indexée par un ensemble totalement ordonné A sans plus grand élément, associée à la famille de

polynômes-clés $(\phi_\alpha)_{\alpha \in A}$ et à la famille de valeurs $(\gamma_\alpha)_{\alpha \in A}$. Par définition chaque valuation μ_α est une valuation augmentée de la forme $\mu_\alpha = [\mu; \mu_\alpha(\phi_\alpha) = \gamma_\alpha]$, où μ est une valuation de $K[x]$ donnée, les polynômes-clés ϕ_α sont tous de même degré d et les valeurs γ_α forment une famille croissante sans plus grand élément dans $\tilde{\Gamma}$.

Nous définissons l'ensemble

$$\tilde{\Phi}(\mathcal{C}) = \tilde{\Phi}((\mu_\alpha)_{\alpha \in A}) = \{f \in K[x] \mid \mu_\alpha(f) < \mu_\beta(f), \forall \alpha < \beta \in A\},$$

nous supposons que cet ensemble est non vide, nous appelons $d_{\mathcal{C}}$ le degré minimal des polynômes appartenant à $\tilde{\Phi}(\mathcal{C})$ et nous supposons aussi que nous avons l'inégalité $d < d_{\mathcal{C}}$, alors nous définissons l'ensemble

$$\Phi(\mathcal{C}) = \Phi((\mu_\alpha)_{\alpha \in A}) = \{\phi \in \tilde{\Phi}(\mathcal{C}), \deg \phi = d_{\mathcal{C}} \text{ et } \phi \text{ unitaire}\}.$$

Un polynôme ϕ appartenant à $\Phi(\mathcal{C})$ est appelé un *polynôme-clé limite* pour la famille \mathcal{C} , et pour ϕ un polynôme-clé limite et γ un élément de $\tilde{\Gamma}$ vérifiant $\gamma > \mu_\alpha(\phi)$ pour tout α dans A , nous pouvons définir une nouvelle valuation μ' de $K[x]$, appelée *valuation augmentée limite* pour \mathcal{C} associée au polynôme-clé limite ϕ et à la valeur γ que nous notons $\mu' = [(\mu_\alpha)_{\alpha \in A}; \mu'(\phi) = \gamma]$, de la manière suivante : pour tout polynôme f de $K[x]$, nous écrivons le développement de f selon les puissances de ϕ , $f = g_m \phi^m + \dots + g_1 \phi + g_0$, où les polynômes g_j , $0 \leq j \leq m$, sont de degré strictement inférieur au degré du polynôme-clé limite ϕ , et nous posons :

$$\mu'(f) = \text{Inf}(\mu_A(g_j) + j\gamma; 0 \leq j \leq m),$$

où nous posons $\mu_A(g) = \text{Sup}(\mu_\alpha(g); \alpha \in A)$ pour tout g n'appartenant pas à $\tilde{\Phi}(\mathcal{C})$. Nous renvoyons à [19] pour les définitions précises et les propriétés des polynômes-clés limites et des valuations augmentées limites.

Remarque 1.1. — Si nous prenons la valeur $\gamma = +\infty$, la valuation augmentée $\mu = [\nu; \mu(\phi) = \gamma]$ associée à un polynôme-clé ϕ ou la valuation augmentée limite $\mu' = [(\mu_\alpha)_{\alpha \in A}; \mu'(\phi) = \gamma]$ associée à un polynôme-clé limite ϕ est une pseudo-valuation de l'anneau $K[x]$ dont le noyau est l'idéal engendré par le polynôme ϕ .

Par abus de terminologie, et pour simplifier les définitions, nous continuons à appeler ces pseudo-valuations une valuation augmentée ou une valuation augmentée limite.

DÉFINITION. — Une famille admissible simple \mathcal{S} pour la valuation ν de K est une famille de valuations $(\mu_i)_{i \in I}$ de $K[x]$ constituée d'une partie discrète \mathcal{D} et d'une partie continue \mathcal{C} :

- La partie discrète $\mathcal{D} = (\mu_l)_{l \in L}$ est une famille non vide de valuations augmentées itérées de $K[x]$ telle que la famille de polynômes-clés $(\phi_l)_{l \in L}$ associée vérifie l'inégalité stricte $\deg \phi_l > \deg \phi_{l-1}$.
- La partie continue $\mathcal{C} = (\mu_\alpha)_{\alpha \in A}$ est une famille admissible continue éventuellement vide ; si elle est non vide la famille \mathcal{D} est finie, le degré d des polynômes-clé ϕ_α est égal au degré du dernier polynôme-clé ϕ_n de la famille $(\phi_l)_{l \in L}$ associée à \mathcal{D} , et pour tout α dans A , la valuation μ_α est la valuation augmentée $\mu_\alpha = [\mu_n; \mu_\alpha(\phi_\alpha) = \gamma_\alpha]$.

Si la partie discrète \mathcal{D} d'une famille admise simple \mathcal{S} est constituée d'une seule valuation μ_1 , et si la partie continue \mathcal{C} est non vide, nous pouvons toujours considérer que la valuation μ_1 appartient à la famille \mathcal{C} , nous écrivons $\mathcal{S} = \mathcal{C}$ et nous disons alors que la famille simple \mathcal{S} est continue.

DÉFINITION. — Une famille admissible \mathcal{A} pour la valuation ν de K est une famille de valuations $(\mu_i)_{i \in I}$ de $K[x]$, obtenue comme réunion de familles admissibles simples

$$\mathcal{A} = \bigcup_{j \in J} \mathcal{S}^{(j)} = \bigcup_{j \in J} (\mathcal{D}^{(j)}; \mathcal{C}^{(j)})$$

où J est un ensemble dénombrable, $J = \{1, \dots, N\}$ ou $J = \mathbb{N}^*$, et nous définissons J^* par $J^* = \{1, \dots, N-1\}$ si J est fini et par $J^* = J = \mathbb{N}^*$ sinon, vérifiant :

- pour j appartenant à J^* , la partie discrète $\mathcal{D}^{(j)} = (\mu_l^{(j)})_{l \in L^{(j)}}$ est finie, la partie continue $\mathcal{C}^{(j)} = (\mu_\alpha^{(j)})_{\alpha \in A^{(j)}}$ est non vide et la première valuation $\mu_1^{(j+1)}$ de la famille simple $\mathcal{S}^{(j+1)}$ est une valuation augmentée limite pour la famille admissible continue $\mathcal{C}^{(j)}$;
- la première valuation $\mu_1^{(1)}$ de la famille est la valuation associée à un polynôme unitaire de degré un, $\phi_1^{(1)} = x - a$, et à une valeur $\gamma_1^{(1)}$, $\mu_1^{(1)} = [\nu; \mu_1^{(1)}(\phi_1^{(1)}) = \gamma_1^{(1)}] = \omega_{(a, \gamma_1^{(1)})}$.

Dans la suite, comme la valuation ν de K est fixée nous dirons simplement que \mathcal{A} est une famille admissible de valuations de $K[x]$.

Remarque 1.2. — Dans les deux définitions précédentes une famille admissible simple ou une famille admissible de valuations peut contenir des pseudo-valuations obtenues comme valuations augmentées (cf. 1.1).

Nous pouvons aussi écrire la famille admissible \mathcal{A} comme une famille indexée par un ensemble totalement ordonné I ,

$$\mathcal{A} = (\mu_i)_{i \in I},$$

et l'ensemble I peut être décrit de la manière suivante : pour tout j dans J , nous munissons l'ensemble $B^{(j)} = L^{(j)} \sqcup A^{(j)}$ de l'ordre total induit par les ordres sur $L^{(j)}$ et sur $A^{(j)}$ et défini par $l < \alpha$ pour tout $l \in L^{(j)}$ et tout $\alpha \in A^{(j)}$; et nous posons

$$I = \{(j, b) \mid j \in J \text{ et } b \in B^{(j)}\},$$

muni de l'ordre lexicographique. L'ordre sur l'ensemble I peut être caractérisé par la relation suivante : $i < k$ dans I si et seulement si pour tout polynôme f de $K[x]$ nous avons $\mu_i(f) \leq \mu_k(f)$ et il existe au moins un polynôme g avec $\mu_i(g) < \mu_k(g)$.

La première valuation μ_1 de la famille \mathcal{A} est obtenue à partir de la valuation ν de K grâce à un polynôme ϕ_1 unitaire de degré un et à une valeur γ_1 . Nous considérerons parfois que la valuation $\nu = \mu_0$ appartient à la famille \mathcal{A} et par abus de notation nous considérerons que 0 est le plus petit élément de l'ensemble I . La valuation μ_1 est ainsi considérée comme une valuation augmentée, définie par le polynôme ϕ_1 .

À toute famille admissible \mathcal{A} nous associons la famille des polynômes-clés ou polynômes-clés limites $(\phi_i)_{i \in I}$, que nous appelons pour simplifier la famille des polynômes-clés, et la famille des valeurs $(\gamma_i)_{i \in I}$.

DÉFINITION. — Une famille admissible $\mathcal{A} = (\mu_i)_{i \in I}$ est une famille admise si pour tout polynôme f dans $K[x]$ la famille $(\mu_i(f))_{i \in I}$ admet un plus grand élément dans le groupe Γ .

Nous pouvons aussi définir une famille admise de valuations $\mathcal{A} = (\mu_i)_{i \in I}$ comme une famille de valuations ou de pseudo-valuations distinctes de l'anneau des polynômes $K[x]$, indexée par un ensemble totalement ordonné I possédant un plus petit élément 1, vérifiant les propriétés suivantes :

- (1) pour tout polynôme f dans $K[x]$ la famille $(\mu_i(f))_{i \in I}$ est croissante dans le groupe Γ , c'est-à-dire $\mu_i(f) \leq \mu_j(f)$ pour $i < j$ dans I , de plus s'il existe $i < j$ avec $\mu_i(f) = \mu_j(f)$ alors pour tout $i' \geq i$ nous avons $\mu_i(f) = \mu_{i'}(f)$;
- (2) si $i \in I$ admet un prédécesseur $i - 1$ dans I , la valuation μ_i de la famille est obtenue comme valuation augmentée de la valuation μ_{i-1} , sinon la valuation μ_i est obtenue comme valuation augmentée limite d'une sous-famille admissible continue \mathcal{C} de $\mathcal{A}_{<i} = (\mu_j)_{j \in I, j < i}$;

- (3) pour tout polynôme f dans $K[x]$ la famille $(\mu_i(f))_{i \in I}$ admet un plus grand élément dans le groupe Γ , c'est-à-dire si l'ensemble I n'a pas de plus grand élément pour tout polynôme f il existe $i \in I$ tel que $\mu_i(f) = \mu_j(f)$ pour tout $j \geq i$.

DÉFINITION.

- (1) Une famille admissible $\mathcal{A} = (\mu_i)_{i \in I}$ de valuations de $K[x]$ est dite complète si l'ensemble I possède un plus grand élément \bar{i} , sinon la famille admissible \mathcal{A} est dite ouverte.
- (2) Si l'ensemble I possède un plus grand élément \bar{i} nous posons $I^* = I \setminus \{\bar{i}\}$, sinon nous posons $I^* = I$. Nous notons \mathcal{A}^* la sous-famille de \mathcal{A} définie par famille $\mathcal{A}^* = (\mu_i)_{i \in I^*}$.

Remarque 1.3. — Une famille admissible \mathcal{A} est complète uniquement dans le cas où \mathcal{A} est réunion d'un nombre fini de familles simples et où la dernière famille simple $\mathcal{S}^{(N)}$ est discrète finie, $\mathcal{S}^{(N)} = (\mu_1^{(N)}, \dots, \mu_{n_N}^{(N)})$. Dans ce cas la famille \mathcal{A} est admise et la dernière valuation $\mu_{\bar{i}} = \mu_{n_N}^{(N)}$ de la famille peut être une pseudo-valuation de $K[x]$.

Remarque 1.4. — Si la famille admissible $\mathcal{A} = (\mu_i)_{i \in I}$ est ouverte, elle est admise si pour tout polynôme f il existe $i \in I$ tel que $\mu_i(f) = \mu_j(f)$ pour tout $j \geq i$. C'est le cas si la famille \mathcal{A} est réunion infinie de familles admissibles simples, ou si la famille \mathcal{A} est réunion de N familles admissibles simples $\mathcal{A} = \mathcal{S}^{(1)} \cup \dots \cup \mathcal{S}^{(N)}$, telle que la dernière famille simple $\mathcal{S}^{(N)}$ est une famille discrète infinie, c'est-à-dire $\mathcal{S}^{(N)} = (\mu_l^{(N)})_{l \in L^{(N)}}$ avec $L^{(N)}$ infini, ou enfin si la famille simple $\mathcal{S}^{(N)}$ est de la forme $\mathcal{S}^{(N)} = ((\mu_l^{(N)})_{l \in L^{(N)}}; (\mu_\alpha^{(N)})_{\alpha \in A^{(N)}})$, avec $\tilde{\Phi}((\mu_\alpha^{(N)})_{\alpha \in A^{(N)}}) = \emptyset$, c'est-à-dire telle que pour tout f dans $K[x]$ il existe $\alpha < \beta$ dans $A^{(N)}$ avec $\mu_\alpha^{(N)}(f) = \mu_\beta^{(N)}(f)$.

Remarque 1.5. — Si μ est une pseudo-valuation de noyau non trivial, il n'existe aucune valuation ou pseudo-valuation μ' différente de μ vérifiant $\mu \leq \mu'$. Par conséquent la sous-famille \mathcal{A}^* d'une famille admise \mathcal{A} est constituée uniquement de valuations.

DÉFINITION. — La famille admise $\mathcal{A} = (\mu_i)_{i \in I}$ converge vers la valuation ou pseudo-valuation μ de $K[x]$ définie pour tout polynôme f par

$$\mu(f) = \text{Sup}(\mu_i(f); i \in I).$$

Si l'ensemble I admet un plus grand élément \bar{i} , la limite de la famille est la valuation ou pseudo-valuation $\mu_{\bar{i}}$, sinon la limite est une valuation définie par $\mu(f) = \mu_i(f)$ pour i assez grand dans I .

Nous avons une réciproque au résultat précédent.

THÉOREME 1.6 ([19, théorèmes 2.4 et 2.5]). — *Soit μ une valuation ou pseudo-valuation de $K[x]$ prolongeant une valuation ν de K , alors il existe une famille admise de valuations de $K[x]$, notée $\mathcal{A}(\mu)$ et appelée famille admise associée à la valuation μ qui converge vers μ .*

Remarque 1.7. — La famille admise associée à une valuation μ n'est pas unique, mais est déterminée à équivalence près, où deux familles admissibles $\mathcal{A} = \bigcup_{j \in J} \mathcal{S}^{(j)}$ et $\mathcal{A}' = \bigcup_{j \in J'} \mathcal{S}'^{(j)}$ sont dites équivalentes si $J = J'$, si les familles discrètes $\mathcal{D}^{(j)} = (\mu_i^{(j)})_{1 \leq i \leq n}$ et $\mathcal{D}'^{(j)} = (\mu'_i{}^{(j)})_{1 \leq i \leq n'}$ coïncident jusqu'à l'avant-dernière valuation, c'est-à-dire quand $n = n'$ et $\mu_i^{(j)} = \mu'_i{}^{(j)}$ pour tout i , $1 \leq i \leq n - 1$, et si les sous-familles continues $\mathcal{C}^{(j)}$ et $\mathcal{C}'^{(j)}$ coïncident asymptotiquement (cf. [17, proposition 2.9]).

DÉFINITION. — *Une valuation μ de $K[x]$ est dite bien spécifiée si la famille admise $\mathcal{A}(\mu)$ associée est complète. Dans ce cas la valuation μ est la dernière valuation $\mu_{\bar{i}}$ de la famille $\mathcal{A}(\mu) = (\mu_i)_{i \in I}$.*

Nous avons le résultat suivant :

PROPOSITION 1.8 ([18, proposition 1.4]). — *Les propositions suivantes sont équivalentes :*

- (1) *La valuation μ est bien spécifiée.*
- (2) *La valuation μ n'est pas maximale pour la relation d'ordre \leq .*
- (3) *La valuation μ admet un polynôme-clé.*
- (4) *La valuation μ peut être obtenue comme valuation augmentée*

$$\mu = [\mu_0; \mu(\phi) = \gamma],$$

ou comme valuation augmentée limite

$$\mu = [(\mu_\alpha)_{\alpha \in A}; \mu(\phi) = \gamma].$$

Si μ est une valuation bien spécifiée, nous disons que le polynôme $\phi_{\bar{i}}$ apparaissant comme dernier polynôme de la famille $(\phi_i)_{i \in I}$ définit la valuation ou pseudo-valuation μ . Si μ est obtenue comme valuation augmentée $\mu = [\mu_0; \mu(\phi) = \gamma]$, ou comme valuation augmentée limite, $\mu = [(\mu_\alpha)_{\alpha \in A}; \mu(\phi) = \gamma]$, nous pouvons en particulier choisir $\phi_{\bar{i}} = \phi$.

Soit μ une valuation ou une pseudo-valuation de $K[x]$, alors toute valuation μ_i d'une famille admissible associée à μ est une valuation bien spécifiée, définie par le polynôme ϕ_i .

Pour toute valuation ou pseudo-valuation μ de $K[x]$, les valuations μ_i appartenant à une famille admise associée à μ sont définies de manière

essentiellement unique (cf. remarque 1.7), en particulier quand μ est bien spécifiée, si μ est une valuation augmentée, $\mu = [\mu_0; \mu(\phi) = \gamma]$, la valuation μ_0 est définie de manière unique, et si μ est une valuation augmentée limite, $\mu = [(\mu_\alpha)_{\alpha \in A}; \mu(\phi) = \gamma]$, la famille $(\mu_\alpha)_{\alpha \in A}$ est bien définie *asymptotiquement*.

Dans la suite nous noterons alors

$$\mu = [\mu_b; \mu(\phi) = \gamma],$$

où μ_b est la valuation μ_0 , resp. une famille continue de valuations $(\mu_\alpha)_{\alpha \in A}$, et où ϕ est un polynôme-clé, resp. un polynôme-clé limite, pour μ_b . En général le polynôme ϕ n'est pas défini de manière unique, en fait les polynômes ϕ et ψ définissent la même valuation μ si et seulement si ce sont des polynômes unitaires de même degré vérifiant $\mu_b(\phi - \psi) \geq \gamma$, où nous posons $\mu_b(f) = \mu_A(f) = \text{Sup}(\mu_\alpha(f); \alpha \in A)$ dans le cas où μ_b est la famille $(\mu_\alpha)_{\alpha \in A}$ [17].

Remarque 1.9. — Comme un polynôme-clé est irréductible, dans le cas où le corps \bar{K} est algébriquement clos, une valuation bien spécifiée μ est de la forme

$$\mu = [\nu; \mu(\phi) = \delta],$$

avec $\phi(x) = x - a$ et $\delta = \mu(x - a)$. Cela correspond à la valuation associée à la paire minimale (a, δ) notée $\omega_{(a, \delta)}$ définie dans [3].

2. Groupe des valeurs et algèbre graduée

Soit μ une valuation sur un corps K de groupe des valeurs Γ_μ , pour tout sous-anneau A de K et pour tout γ dans $\bar{\Gamma}_\mu = \Gamma_\mu \cup \{+\infty\}$, nous définissons les groupes $\mathcal{P}_\gamma(A) = \{x \in A \mid \mu(x) \geq \gamma\}$ et $\mathcal{P}_\gamma^+(A) = \{x \in A \mid \mu(x) > \gamma\}$, et l'algèbre graduée $\text{gr}_\mu A$ associée à la valuation μ par :

$$\text{gr}_\mu A = \bigoplus_{\gamma \in \bar{\Gamma}} \mathcal{P}_\gamma(A) / \mathcal{P}_\gamma^+(A).$$

Nous notons H_μ l'application de A dans $\text{gr}_\mu A$ définie par $H_\mu(0) = 0$ et qui à tout élément x de $A \setminus \{0\}$ avec $\mu(x) = \gamma$ associe l'image de x dans $\mathcal{P}_\gamma(A) / \mathcal{P}_\gamma^+(A)$, et nous notons $\Delta_\mu(A)$ la partie homogène de degré 0, $\Delta_\mu(A) = \mathcal{P}_0(A) / \mathcal{P}_0^+(A)$.

En particulier pour $A = K$ les groupes $\mathcal{P}_0(K)$ et $\mathcal{P}_0^+(K)$ sont respectivement l'anneau V_μ de la valuation et son idéal maximal, $\Delta_\mu(K)$ est égal à son corps résiduel κ_μ et l'algèbre graduée $\text{gr}_\mu K$ est *simple*, i.e. tout élément homogène non nul admet un inverse. Plus généralement si K est le

corps des fractions de A , l'algèbre $\text{gr}_\mu K$ est la plus petite algèbre graduée simple contenant $\text{gr}_\mu A$ et le corps résiduel κ_μ est le corps des fractions de l'anneau $\Delta_\mu(A)$.

Soit $\mathcal{A} = (\mu_i)_{i \in I}$ une famille admissible de valuations, et pour tout $i \in I$ nous appelons Γ_{μ_i} le groupe des ordres de la valuation μ_i .

Si μ_k et μ_l sont deux valuations appartenant à la même sous-famille simple \mathcal{S} de la famille \mathcal{A} telles que μ_l est obtenue comme valuation augmentée $\mu_l = [\mu_k; \mu_l(\phi_l) = \gamma_l]$, nous disons que (μ_k, μ_l) forment *un couple de valuations successives* de la famille. Le groupe des ordres Γ_{μ_l} de la valuation μ_l est égal à $\Gamma_{\mu_l} = \Gamma_{\mu_k} + \mathbb{Z}\gamma_l$, d'où l'égalité

$$[\Gamma_{\mu_l} : \Gamma_{\mu_k}] = \tau_l$$

où τ_l est le plus petit entier $t > 0$ tel que $t\gamma_l$ appartienne à Γ_{μ_k} si γ_l appartient à $\Gamma_{\mu_l} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$, et où τ_l est $+\infty$ sinon. Remarquons que la valuation μ_l admet un polynôme-clé qui n'est pas μ_l -équivalent au polynôme ϕ_l si et seulement si la valeur γ_l appartient au groupe $\Gamma_k \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$, en particulier si γ_l n'appartient pas à $\Gamma_{\mu_l} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ la valuation μ_l est la dernière valuation de la famille admissible \mathcal{A} .

Comme les valuations μ_k et μ_l vérifient $\mu_k(f) \leq \mu_l(f)$ pour tout f dans $K[x]$ nous avons une application naturelle $g: \text{gr}_{\mu_k} K[x] \rightarrow \text{gr}_{\mu_l} K[x]$, et celle-ci induit un isomorphisme

$$G: \left(\text{gr}_{\mu_k} K[x] / (H_{\mu_k}(\phi_l)) \right) [T] \longrightarrow \text{gr}_{\mu_l} K[x],$$

qui envoie T sur $G(T) = H_{\mu_l}(\phi_l)$ (cf. [19]).

Rappelons qu'il existe q_k et q'_k dans $K[x]$ vérifiant $q_k q'_k$ μ_k -équivalent à 1 et $\mu_k(q_k) = -\mu_k(q'_k) = \mu_k(\phi_l)$, et nous posons $\varphi_l = H_{\mu_k}(q'_k \phi_l)$ (cf. [20, proposition 2.2]). De plus si γ_l appartient à $\Gamma_{\mu_k} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$, il existe p_l et p'_l vérifiant $p_l p'_l$ μ_l -équivalent à 1 et $\mu_l(p_l) = -\mu_l(p'_l) = \tau_l \gamma_l$ (cf. [18]). Alors le noyau de la composante de degré 0 de l'application G , $G_0: \Delta_{\mu_k} \rightarrow \Delta_{\mu_l}$, est l'idéal engendré par φ_l , et nous avons :

- si γ_l n'appartient pas à $\Gamma_{\mu_k} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$

$$(\Delta_{\mu_k} / (\varphi_l)) \xrightarrow{\sim} \Delta_{\mu_l},$$

- si γ_l appartient à $\Gamma_{\mu_k} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$

$$(\Delta_{\mu_k} / (\varphi_l)) [S_l] \xrightarrow{\sim} \Delta_{\mu_l},$$

avec $S_l = H_{\mu_l}(p'_l \phi_l^{\tau_l})$ (cf. [19, remarque 1.5]).

Si μ_l est la valuation augmentée limite d'une famille continue $\mathcal{C} = (\mu_\alpha)_{\alpha \in A}$, associée au polynôme-clé limite ϕ_l , $\mu_l = [(\mu_\alpha)_{\alpha \in A}; \mu_l(\phi_l) = \gamma_l]$, nous définissons l'algèbre graduée $\mathbf{gr}_{\mathbf{A}} = \text{gr}_{\mu_\alpha} K[x] / (H_{\mu_\alpha}(\phi_\beta))$ qui ne dépend pas du

couple $\alpha < \beta$ dans A , et l'application naturelle de $\text{gr}_{\mu_\alpha} K[x]$ dans $\text{gr}_{\mu_l} K[x]$ induit un isomorphisme d'algèbres graduées :

$$Q: \mathbf{gr}_A[T] \xrightarrow{\sim} \text{gr}_{\mu_l} K[x],$$

qui envoie T sur $Q(T) = H_{\mu_l}(\phi_l)$. Nous appelons Δ_A la composante de degré 0 de \mathbf{gr}_A , cet anneau est isomorphe à $\Delta_{\mu_\beta}/(\varphi_\alpha)$ où (μ_α, μ_β) est un couple de valuations successives de \mathcal{A} appartenant à \mathcal{C} , avec $\varphi_\alpha = H_{\mu_\alpha}(q'_\alpha \phi_\beta)$.

Tous les groupes de valuation Γ_{μ_α} sont égaux et nous notons ce groupe Γ_A . Pour tout γ dans Γ_A il existe p et $p' = p'(\gamma)$ dans $K[x]$ vérifiant $pp'(\gamma) \equiv \mu_\alpha 1$ et $\mu_\alpha(p) = -\mu_\alpha(p'(\gamma)) = \gamma$, pour $\alpha \in A$.

De plus si γ_l appartient à $\Gamma_A \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ et si nous appelons comme précédemment τ_l le plus petit entier $t > 0$ tel que $t\gamma_l$ appartienne à Γ_A il existe p et p' dans $K[x]$ tels que pp' soit μ_α -équivalent à 1 pour α suffisamment grand et tels que $\mu_\alpha(p') = -\tau_l \gamma_l$ (cf. [18, proposition 2.2]).

Alors le morphisme Q induit un isomorphisme en degré 0 :

- si γ_l n'appartient pas à $\Gamma_A \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$

$$Q_0: \Delta_A \xrightarrow{\sim} \Delta_{\mu_l},$$

- si γ_l appartient à $\Gamma_A \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$

$$Q_0: \Delta_A[S] \xrightarrow{\sim} \Delta_{\mu_l},$$

qui envoie S sur $H_{\mu_l}(p'\phi_l^{\tau_l})$.

Remarque 2.1. — Soit μ_l une valuation de la famille \mathcal{A} , nous notons Γ_b le groupe des ordres Γ_{μ_k} de la valuation μ_k si μ_l est obtenue comme valuation augmentée, $\mu_l = [\mu_k; \mu_l(\phi_l) = \gamma_l]$, ou le groupe des ordres Γ_A si la valuation μ_l est obtenue comme valuation augmentée limite,

$$\mu_l = [(\mu_\alpha)_{\alpha \in A}; \mu_l(\phi_l) = \gamma_l].$$

Si μ_l n'est pas la dernière valuation de la famille \mathcal{A} , il existe une valuation μ_m telle que (μ_l, μ_m) est un couple de valuations successives. Nous écrivons le polynôme-clé ϕ_m sous la forme $\phi_m = \phi_l^{r_l} + \dots + g_0$ et nous avons $r_l \gamma_l \in \Gamma_b$, en particulier γ_l appartient à $\Gamma_b \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ et nous pouvons définir l'entier s_l par $r_l = \tau_l s_l$.

PROPOSITION 2.2. — *Il existe une famille croissante de corps $(F_k)_{k \in I^*}$, avec F_0 égal au corps résiduel κ_ν de la valuation ν de K , telle que pour tout couple (μ_k, μ_l) de valuations successives de \mathcal{A} nous avons :*

- si γ_l appartient à $\Gamma_{\mu_k} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$,

$$\Delta_{\mu_l} = F_k[S_l], \quad \text{avec} \quad S_l = H_{\mu_l}(p'_l \phi_l^{\tau_l});$$

- si γ_l n'appartient pas à $\Gamma_{\mu_k} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$,

$$\Delta_{\mu_l} = F_k.$$

De plus si l appartient à I^* , F_l est une extension finie de F_k de degré s_l , et pour l tel que la valuation μ_l appartienne à une famille continue $\mathcal{C} = (\mu_\alpha)_{\alpha \in A}$, le corps F_l est isomorphe à $\Delta_{\mathbf{A}}$.

En particulier tous les corps F_l sont des extensions algébriques du corps résiduel κ_ν , et si la famille \mathcal{A} est constituée d'un nombre fini de sous-familles simples, tous les corps F_l sont des extensions finies de κ_ν .

Démonstration. — La proposition est une généralisation du résultat de MacLane (cf. [11, théorème 12.1] et [19, théorème 1.12]) et se démontre par récurrence (cf. [18]). \square

Remarque 2.3. — Nous avons montré de plus que si μ_k est la première valuation $\mu_1^{(j)}$ d'une sous-famille simple $\mathcal{S}^{(j)}$, et si nous notons $F_0^{(j)}$ le corps tel que Δ_{μ_k} soit égal à $F_0^{(j)}[S]$, alors F_k est une extension algébrique finie de $F_0^{(j)}$ de degré s_k . En effet nous avons $S = H_{\mu_k}(p'_k \phi_k^{\tau_k})$ et le corps F_k est égal à $\Delta_{\mu_k}/(\varphi_l)$ où $\varphi_l = H_{\mu_k}(q'_l \phi_l)$ avec $\phi_l = \phi_k^{\tau_k s_k} + \dots + g_0$.

PROPOSITION 2.4 ([18, proposition 2.3]). — Soit μ une valuation de l'anneau des polynômes $K[x]$, alors l'algèbre graduée associée $\text{gr}_\mu K[x]$ est de la forme suivante :

- (1) si la valuation μ n'est pas bien spécifiée

$$\text{gr}_\mu K[x] = G^{(0)},$$

où $G^{(0)}$ est une algèbre graduée simple, c'est-à-dire telle que tout élément homogène non nul admette un inverse ;

- (2) si la valuation μ est bien spécifiée

$$\text{gr}_\mu K[x] = G^{(0)}[T],$$

où $G^{(0)}$ est une algèbre graduée simple et T est l'image $H_\mu(\phi)$ du polynôme ϕ définissant la valuation μ .

De plus un élément homogène ψ de $\text{gr}_\mu K[x]$ est irréductible si et seulement si il existe f polynôme-clé pour la valuation μ dans $K[x]$ et ε élément homogène inversible de $\text{gr}_\mu K[x]$ tels que $\varepsilon\psi$ soit égal à l'image $H_\mu(f)$ de f dans $\text{gr}_\mu K[x]$.

Rappelons le résultat suivant qui est énoncé sans démonstration dans [18, remarque 1.1].

PROPOSITION 2.5. — *La valuation μ de $K[x]$ est bien spécifiée si et seulement si l'extension $(K(x), \mu)/(K, \nu)$ de corps valués vérifie l'égalité d'Abhyankar :*

$$\dim \operatorname{alg}_K K(x) = \dim \operatorname{alg}_{\kappa_\nu} \kappa_\mu + \operatorname{rang} \operatorname{rat} \Gamma_\mu / \Gamma_\nu = 1.$$

Démonstration. — Rappelons que le corps résiduel κ_μ est égal au corps des fractions de la partie homogène de degré 0, Δ_μ de l'algèbre graduée $\operatorname{gr}_\mu K[x]$.

Dans le cas où la valuation μ est obtenue comme valuation augmentée, $\mu = [\mu_b; \mu(\phi) = \gamma]$, l'algèbre graduée $\operatorname{gr}_\mu K[x]$ est de la forme $G^{(0)}[T]$ où l'algèbre simple $G^{(0)}$ est isomorphe à l'algèbre quotient $\operatorname{gr}_{\mu_b} K[x]/(H_{\mu_b}(\phi))$ et où $T = H_\mu(\phi)$.

Si γ n'appartient pas à $\Gamma_{\mu_b} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$, la partie homogène de degré 0, Δ_μ , est isomorphe à $\Delta_{\mu_b}/(\varphi_b)$, c'est-à-dire au corps F_b , nous en déduisons que le corps résiduel κ_μ de la valuation μ est isomorphe à F_b , par conséquent est une extension algébrique finie du corps résiduel κ_ν .

Si γ appartient à $\Gamma_{\mu_b} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$, la partie homogène de degré 0, Δ_μ , est isomorphe à $\Delta_{\mu_b}/(\varphi_b)[S]$, avec $S = H_\mu(p'\phi^\tau)$ où τ est égal à $[\Gamma_\mu : \Gamma_\nu]$, et le corps résiduel κ_μ de la valuation μ est isomorphe à $F_b(S)$, par conséquent est une extension transcendante de degré 1 du corps résiduel κ_ν .

Dans le cas où la valuation μ est obtenue comme valuation augmentée limite, $\mu = [(\mu_\alpha); \mu(\phi) = \gamma]$, nous avons un résultat analogue.

Si γ n'appartient pas à $\Gamma_{\mathbf{A}} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$, la partie homogène Δ_μ est isomorphe à $\Delta_{\mathbf{A}}$, le corps résiduel κ_μ de la valuation μ est isomorphe au corps $\Delta_{\mathbf{A}}$ et est donc une extension algébrique finie du corps résiduel κ_ν .

Si γ appartient à $\Gamma_{\mathbf{A}} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$, la partie homogène Δ_μ est isomorphe à $\Delta_{\mathbf{A}}[S]$, avec $S = H_{\mu_\alpha}(p'\phi^\tau)$ où τ est égal à $[\Gamma_\mu : \Gamma_{\mathbf{A}}]$, et le corps résiduel κ_μ de la valuation μ est isomorphe à $\Delta_{\mathbf{A}}(S)$, par conséquent est une extension transcendante de degré 1 du corps résiduel κ_ν .

Si la valuation μ n'est pas bien spécifiée, chacune des valuations μ_i de la famille admise \mathcal{A} associée à la valuation μ a un groupe des ordres Γ_{μ_i} qui est une extension finie du groupe Γ_ν , donc le groupe Γ_μ , réunion des groupes Γ_{μ_i} a même rang rationnel que le groupe Γ_ν .

Le corps résiduel κ_μ est la réunion des corps F_i , extensions finies de κ_ν , donc une extension algébrique du corps résiduel κ_ν . \square

Remarque 2.6. — Nous déduisons de la proposition précédente que les *valuations bien spécifiées* que nous avons définies correspondent exactement aux *valuations transcendantes*, « *valuation-transcendental* », définies par F.-V. Kuhlmann au paragraphe 3.1 de [8].

Nous pouvons aussi déduire de ce qui précède le résultat suivant, qui répond à une question posée par Nagata (cf. [13]) et a été résolue par J. Ohm [15]. Rappelons que nous disons qu'une extension de corps l/k est réglée s'il existe $k \subset k_1 \subset l$ avec l/k_1 extension transcendante pure de degré 1 et k_1/k extension algébrique finie.

COROLLAIRE 2.7 (The ruled residue conjecture). — *Soit $(K(x), \mu)/(K, \nu)$ une extension de corps valués, alors le corps résiduel κ_μ est une extension algébrique ou réglée du corps résiduel κ_ν .*

Le rang $\text{rg}(\mu)$ de la valuation μ est compris entre $\text{rg}(\nu)$ et $\text{rg}(\nu) + 1$, la valuation μ a le même rang que la valuation ν si γ appartient au groupe $\Gamma_\nu \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$.

Dans le cas où $\text{rg}(\mu) = \text{rg}(\nu) + 1$ et où la valeur γ appartient à un groupe totalement ordonné $\tilde{\Gamma}$ qui contient Γ_ν comme sous groupe isolé et vérifie $\gamma > \delta$ pour tout δ dans Γ_ν , la valuation μ est essentiellement unique, c'est-à-dire que si nous nous donnons un polynôme ϕ qui est polynôme-clé pour une valuation μ_\flat ou polynôme-clé limite pour une famille de valuation $(\mu_\alpha)_{\alpha \in A}$, la valuation bien spécifiée μ définie par le polynôme ϕ et la valeur γ est indépendante à équivalence près de la valeur γ choisie dans $\tilde{\Gamma} \setminus \Gamma_\nu$. De plus le polynôme ϕ qui définit une valuation μ de rang $\text{rg}(\mu) = \text{rg}(\nu) + 1$ est unique. En effet si deux polynômes ϕ et ψ définissent la même valuation μ comme valuation augmentée ou comme valuation augmentée limite avec la valeur γ , nous avons l'inégalité $\mu(\psi - \phi) \geq \gamma$.

Remarque 2.8. — Si nous prenons $\gamma = +\infty$ nous trouvons une pseudo-valuation de $K[x]$ dont le noyau est égal à l'idéal engendré par ϕ . Il y a une bijection entre l'ensemble des valuations μ de $K[x]$ de rang $\text{rg}(\mu) = \text{rg}(\nu) + 1$ vérifiant la propriété précédente et l'ensemble des pseudo-valuations de $K[x]$ de noyau non trivial, et l'étude de ces valuations définies par le polynôme ϕ est équivalente à l'étude des pseudo-valuations de noyau (ϕ) , c'est-à-dire à l'étude des valuations de l'extension $L = K[x]/(\phi)$ de K qui prolongent ν .

PROPOSITION 2.9. — *Soit μ une valuation bien spécifiée de $K[x]$ définie par le polynôme ϕ , et soit $\text{gr}_\mu K[x] = G^{(0)}[T]$ l'algèbre graduée associée avec $T = H_\mu(\phi)$. Si ψ est un autre polynôme qui définit la valuation μ nous avons $S = H_\mu(\psi)$ qui est égal à T ou à $T - h$ avec $h \in G^{(0)}$ de valuation $\mu(h) = \mu(\phi) = \mu(\psi)$.*

Réciproquement tout générateur homogène S de l'algèbre graduée $\text{gr}_\mu K[x]$ sur l'algèbre simple $G^{(0)}$ est de la forme $S = T - h$ avec $h \in G^{(0)}$ de degré

$\mu(h) = \mu(\phi) = \mu(\psi)$, et il existe un polynôme ψ dans $K[x]$ qui définit la valuation μ avec $H_\mu(\psi) = S$.

Démonstration. — Si la valuation μ est obtenue comme valuation augmentée $\mu = [\mu'; \mu(\phi) = \gamma]$ c'est une conséquence du résultat suivant : deux valuations augmentées μ_1 et μ_2 d'une même valuation μ définies respectivement par des polynômes-clés ϕ_1 et ϕ_2 et des valeurs γ_1 et γ_2 sont égales si et seulement si $\gamma_1 = \gamma_2$ et si les polynômes ϕ_1 et ϕ_2 ont même degré et vérifient $\mu(\phi_1 - \phi_2) \geq \gamma_1$ [17, proposition 1.2].

Si la valuation μ est obtenue comme valuation augmentée limite $\mu = [(\mu_\alpha)_{\alpha \in A}; \mu(\phi) = \gamma]$ c'est une conséquence du résultat analogue : deux valuations augmentées limites μ_1 et μ_2 d'une même famille admissible continue $\mathcal{C} = (\mu_\alpha)_{\alpha \in A}$ définies respectivement par des polynômes-clés limites ϕ_1 et ϕ_2 et des valeurs γ_1 et γ_2 sont égales si et seulement si $\gamma_1 = \gamma_2$ et si les polynômes ϕ_1 et ϕ_2 ont même degré et vérifient $\mu_A(\phi_1 - \phi_2) \geq \gamma_1$ [17, proposition 1.4]. \square

Nous rappelons aussi le résultat suivant, qui est une conséquence de la proposition précédente, mais qui peut se démontrer aussi directement à partir des propositions 1.2 et 1.4 de [17].

PROPOSITION 2.10. — *Soit μ une valuation bien spécifiée de $K[x]$ définie par le polynôme ϕ , et soit ψ un polynôme unitaire de $K[x]$ vérifiant $\deg \psi = \deg \phi$ et $\mu(\psi) = \mu(\phi)$, alors le polynôme ψ définit la valuation μ .*

Dans la suite de ce paragraphe nous allons supposer que le corps K est algébriquement clos, alors pour toute valuation ν de K le corps résiduel κ_ν est aussi algébriquement clos et le groupe des valeurs Γ_ν est divisible. De plus dans le cas où K est algébriquement clos, les éléments irréductibles de l'anneau $K[x]$ sont les polynômes de degré 1, nous en déduisons que toute valuation μ de $K[x]$ est définie entièrement par les valeurs $\mu(x - b)$, pour $b \in K$, et que tout polynôme f de degré plus grand que 2 ne peut pas être un polynôme-clé ou un polynôme-clé limite.

Nous rappelons que pour tout corps L , pour trouver la famille admise \mathcal{A} associée à une valuation μ de $L[x]$ le premier pas est de considérer l'ensemble $\Lambda_\mu = \{\mu(x - b) \mid b \in L\}$. Si cet ensemble a un plus grand élément δ nous choisissons un polynôme $\phi = x - a$ pour lequel cette valeur est atteinte et la première valuation μ_1 de la famille est la valuation associée, c'est-à-dire la valuation $\mu_1 = \omega_{(a, \delta)}$. Alors soit la valuation μ_1 est la valuation μ cherchée, soit il existe un polynôme-clé ϕ pour la valuation μ_1 dans $L[x]$ de degré strictement supérieur à 1.

Si l'ensemble Λ_μ n'a pas de plus grand élément nous trouvons un sous-ensemble $\{\delta_\alpha; \alpha \in A\}$ cofinal dans Λ_μ , indexé par un ensemble totalement ordonné A , sans plus grand élément, avec $\delta_\alpha < \delta_\beta$ pour $\alpha < \beta$, et pour tout $\alpha \in A$ nous choisissons un polynôme $\phi_\alpha = x - a_\alpha$ vérifiant $\mu(\phi_\alpha) = \delta_\alpha$. Alors la famille \mathcal{C} de valuation définie par $\mathcal{C} = (\omega_{(a_\alpha, \delta_\alpha)})_{\alpha \in A}$ est une famille continue de valuations de $L[x]$. Pour tout $\alpha < \beta$ dans A nous avons $\nu(a_\beta - a_\alpha) = \gamma_\alpha$, en particulier la famille $(a_\alpha)_{\alpha \in A}$ vérifie

$$\nu(a_\tau - a_\sigma) > \nu(a_\sigma - a_\rho)$$

pour tous $\tau > \sigma > \rho$ dans A , et nous retrouvons la définition d'Ostrowski de famille pseudo-convergente [7, 16]. De plus si cette famille admet un polynôme-clé limite celui-ci est de degré strictement supérieur à 1.

Nous en déduisons le résultat suivant.

PROPOSITION 2.11. — *Supposons que le corps K est algébriquement clos, alors une valuation μ de $K[x]$ est soit une valuation de la forme $\mu = \omega_{(a, \delta)}$, soit une valuation associée à une famille pseudo-convergente.*

Démonstration. — Comme il ne peut pas exister de polynôme-clé ou polynôme-clé limite de degré strictement plus grand que 1, soit l'ensemble $\Lambda_\mu = \{\mu(x - b) \mid b \in K\}$ a un plus grand élément δ , la valuation μ est bien spécifiée et est de la forme $\mu = \omega_{(a, \delta)}$, soit l'ensemble Λ_μ n'a pas de plus grand élément, la valuation μ n'est pas bien spécifiée et elle est associée à la famille pseudo-convergente $(a_\alpha)_{\alpha \in A}$. \square

En particulier si la valuation μ n'est pas bien spécifiée, le corps résiduel κ_μ de la valuation μ est égal au corps résiduel κ_ν de la valuation ν et le groupe des ordres Γ_μ est égal au groupe des ordres Γ_ν , et nous en déduisons que l'extension de corps valués $(K(x), \mu)/(K, \nu)$ est immédiate (cf. [7]). Nous étudions dans l'annexe (partie 6) le lien entre les résultats de Kaplansky sur les extensions immédiates et la présentation des extensions de valuations à partir des familles admissibles.

Dans le cas où le corps K est algébriquement clos, pour décrire toutes les valuations de $K[x]$ prolongeant la valuation ν de K , nous munissons K de la distance ultramétrique associée à ν . Pour tout $a \in K$ et tout $\delta \in \Gamma$ nous définissons les boules fermée B et ouverte B° de centre a et de rayon δ respectivement par

$$B = B(a, \delta) = \{c \in K \mid \nu(a - c) \geq \delta\},$$

$$B^\circ = B^\circ(a, \delta) = \{c \in K \mid \nu(a - c) > \delta\}.$$

Comme la distance définie par la valuation ν est ultramétrique tout élément appartenant à une boule ouverte ou fermée est son centre, plus précisément

si $b \in B^\circ(a, \delta)$, resp. $b \in B(a, \delta)$, alors $B^\circ(a, \delta) = B^\circ(b, \delta)$, resp. $B(a, \delta) = B(b, \delta)$.

PROPOSITION 2.12. — *Toute boule fermée $B = B(a, \delta)$ définit une valuation bien spécifiée μ de $K[x]$ par $\mu = \omega_{(a, \delta)}$, qui ne dépend pas du centre a , et toute valuation bien spécifiée μ est de cette forme. À toute valuation μ qui n'est pas bien spécifiée, on peut associer une famille décroissante $(B_\alpha = B(a_\alpha, \delta_\alpha))_{\alpha \in A}$ de boules fermées, où A est un ensemble totalement ordonné sans plus grand élément, dont l'intersection $\bigcap_\alpha B_\alpha$ est vide, telle que la valuation μ est définie par*

$$\mu(x - c) = \text{Sup}(\nu(c - a_\alpha); \alpha \in A).$$

Démonstration. — La première partie concernant les valuations bien spécifiées μ est une conséquence directe de ce qui précède.

Pour une valuation qui n'est pas bien spécifiée μ il reste à vérifier que l'intersection $\bigcap_\alpha B_\alpha$ est vide. En effet la valuation μ est définie par une famille continue $\mathcal{C} = (\omega_{(a_\alpha, \delta_\alpha)})_{\alpha \in A}$, et par hypothèse pour tout $c \in K$ il existe $\alpha \in A$ tel que $\mu(x - c) < \mu(x - a_\alpha) = \delta_\alpha$, d'où $\nu(a_\alpha - c) < \delta_\alpha$. \square

Remarque 2.13. — Si μ_1 et μ_2 sont deux valuations bien spécifiées de $K[x]$ définies respectivement par $\mu_1 = \omega_{(a_1, \delta_1)}$ et $\mu_2 = \omega_{(a_2, \delta_2)}$, nous avons $\mu_1 \leq \mu_2$ si et seulement si $\delta_1 \leq \delta_2$ et $\delta_1 \leq \nu(a_1 - a_2)$, c'est-à-dire si et seulement si $B(a_2, \delta_2) \subset B(a_1, \delta_1)$.

Soit μ une valuation bien spécifiée de $K[x]$ de la forme $\mu = \omega_{(a, \delta)}$, sans supposer que le corps K soit algébriquement clos. Si δ n'appartient pas au groupe $\Gamma_\nu \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$, le groupe des ordres Γ_μ est égal à $\Gamma_\nu \oplus \delta\mathbb{Z}$ et nous avons

$$\text{rang } \Gamma_\mu / \Gamma_\nu = \text{rang rat } \Gamma_\mu / \Gamma_\nu = 1 \quad \text{et} \quad \kappa_\mu = \kappa_\nu.$$

Si δ appartient au groupe Γ_ν , alors le groupe des ordres Γ_μ est égal à Γ_ν et le corps résiduel κ_μ est une extension transcendante de κ_ν engendré par l'image de $b(x - a)$ où $b \in K$ avec $\nu(b) = -\delta$, d'où :

$$\Gamma_\mu = \Gamma_\nu \quad \text{et} \quad \dim \text{alg}_{\kappa_\nu} \kappa_\mu = 1.$$

Dans tous les cas l'algèbre graduée associée $\text{gr}_\mu K[x]$ associée à la valuation bien spécifiée $\mu = \omega_{(a, \delta)}$ est isomorphe à $G^{(0)}[S]$, où $G^{(0)}$ est une algèbre graduée simple isomorphe à $\text{gr}_\nu K$, et S est l'image $H_\mu(x - a)$. Pour tout $a' \in K$ nous avons

$$H_\mu(x - a') = \begin{cases} S & \text{si } \mu(x - a') = \mu(x - a) < \nu(a - a'), \\ S - H_\nu(a - a') & \text{si } \mu(x - a') = \mu(x - a) = \nu(a - a'), \\ H_\nu(a - a') & \text{si } \mu(x - a') = \nu(a - a') < \mu(x - a), \end{cases}$$

d'où la remarque suivante.

Remarque 2.14. — Soit μ une valuation bien spécifiée de $K[x]$ de la forme $\mu = \omega_{(a,\delta)}$, alors le polynôme $(x - b)$ a son image $H_\mu(x - b)$ inversible dans l'algèbre graduée $\text{gr}_\mu K$ si et seulement si $\nu(a - b) < \delta$.

3. Passage à la clôture algébrique

Dans cette partie nous nous donnons un corps valué (K, ν) , une clôture algébrique \bar{K} de K et une valuation $\bar{\nu}$ de \bar{K} qui prolonge la valuation ν , nous considérons une valuation μ de $K[x]$ qui prolonge la valuation ν et nous allons étudier les prolongements $\bar{\mu}$ à $\bar{K}[x]$ de μ qui sont aussi des prolongements de la valuation $\bar{\nu}$.

DÉFINITION. — Pour tout polynôme f de $K[x]$ nous définissons l'étendue de f , que nous notons $\varepsilon_\mu(f)$, par

$$\varepsilon_\mu(f) = \text{Sup}(\bar{\mu}(x - a); a \text{ racine de } f \text{ dans } \bar{K}),$$

où $\bar{\mu}$ est un prolongement de la valuation μ .

PROPOSITION 3.1. — L'étendue du polynôme f est indépendante du prolongement $\bar{\mu}$ choisi.

Démonstration. — Soient $\bar{\mu}_1$ et $\bar{\mu}_2$ deux prolongements de la valuation μ de $K[x]$ à $\bar{K}[x]$, alors il existe σ dans $\text{Aut}(\bar{K}(x)/K(x)) \simeq \text{Aut}(\bar{K}/K)$ tel que $\mu_1 = \mu_2 \circ \sigma$, en particulier pour tout $a \in \bar{K}$ nous avons

$$\bar{\mu}_1(x - a) = \bar{\mu}_2(x - \sigma(a)).$$

Comme le groupe $\text{Aut}(\bar{K}/K)$ agit transitivement sur les racines du polynôme f nous en déduisons que les ensembles

$$\{\bar{\mu}_1(x - a); a \text{ racine de } f \text{ dans } \bar{K}\} \text{ et } \{\bar{\mu}_2(x - a); a \text{ racine de } f \text{ dans } \bar{K}\}$$

sont égaux. \square

PROPOSITION 3.2. — La valuation $\bar{\mu}$ est bien spécifiée si et seulement si la valuation μ l'est.

Démonstration. — Comme la valuation $\bar{\mu}$ est une extension de la valuation μ nous avons un morphisme injectif canonique d'algèbres graduées intègres

$$\rho: \text{gr}_\mu(K[x]) \hookrightarrow \text{gr}_{\bar{\mu}}(\bar{K}[x]).$$

Nous supposons d'abord que la valuation μ n'est pas bien spécifiée, alors l'algèbre graduée $\text{gr}_\mu(K[x])$ est simple, et nous devons montrer que pour

tout $a \in \bar{K}$, l'élément $H_{\bar{\mu}}(x-a)$ est inversible dans $\text{gr}_{\bar{\mu}}(\bar{K}[x])$. Soit $a \in \bar{K}$, et soit ϕ le polynôme minimal de a sur K , nous écrivons $\phi(x) = \prod_{i=1}^d (x - a_i)$, où les a_i sont les racines de ϕ dans \bar{K} . L'image de $H_{\mu}(\phi)$ par ρ est égale au produit

$$\prod_{i=1}^d H_{\bar{\mu}}(x - a_i),$$

et comme $H_{\mu}(\phi)$ est inversible dans $\text{gr}_{\mu}(K[x])$, chacun des facteurs $H_{\bar{\mu}}(x - a_i)$ est inversible dans $\text{gr}_{\bar{\mu}}(\bar{K}[x])$.

Réciproquement nous supposons que la valuation μ est bien spécifiée, alors l'algèbre graduée $\text{gr}_{\mu}(K[x])$ est isomorphe à une algèbre de polynômes $G^{(0)}[T]$, où $G^{(0)}$ est une algèbre simple et T est l'image $H_{\mu}(\phi)$ du polynôme-clé ϕ qui définit la valuation μ .

Si la valuation $\bar{\mu}$ n'était pas bien spécifiée, l'image de T par ρ serait inversible dans $\text{gr}_{\bar{\mu}}(\bar{K}[x])$ et il existerait en particulier $b \in \bar{K}$ tel $\rho(T) = H_{\bar{\mu}}(b)$. Il existe un polynôme à coefficients dans K , dont b est une racine, $c_n X^n + c_{n-1} X^{n-1} + \dots + c_1 X + c_0$, avec $c_j \in K$ et $c_0 \neq 0$. En particulier, si nous nous restreignons aux termes de valuation minimale, il existe k , $k \geq 2$, et $0 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n$ tels que

$$H_{\bar{\mu}}(c_{i_k} b^{i_k}) + H_{\bar{\mu}}(c_{i_{k-1}} b^{i_{k-1}}) + \dots + H_{\bar{\mu}}(c_{i_1} b^{i_1}) = 0$$

dans $\text{gr}_{\bar{\mu}}(\bar{K}[x])$. Nous en déduisons la relation

$$H_{\mu}(c_{i_k}) T^{i_k} + H_{\mu}(c_{i_{k-1}}) T^{i_{k-1}} + \dots + H_{\mu}(c_{i_1}) T^{i_1} = 0$$

dans $\text{gr}_{\mu}(K[x]) = G^{(0)}[T]$, ce qui est impossible car les $H_{\mu}(c_i)$ sont dans $G^{(0)}$. \square

PROPOSITION 3.3. — *Soit f un polynôme dans $K[x]$, alors son image $H_{\mu}(f)$ est inversible dans $\text{gr}_{\mu}(K[x])$ si et seulement si son image $H_{\bar{\mu}}(f) = \rho(H_{\mu}(f))$ est inversible dans $\text{gr}_{\bar{\mu}}(\bar{K}[x])$.*

Démonstration. — L'implication $H_{\mu}(f)$ inversible $\Rightarrow H_{\bar{\mu}}(f)$ inversible est évidente.

Pour montrer l'implication réciproque, nous pouvons supposer que les valuations μ et $\bar{\mu}$ sont bien spécifiées, et soit $f \in K[x]$ tel que $H_{\bar{\mu}}(f)$ est inversible. Alors il existe $b \in \bar{K}$ tel que $H_{\bar{\mu}}(f) = H_{\bar{\mu}}(b)$, et comme dans la démonstration précédente nous pouvons trouver des entiers k , $k \geq 2$, et $0 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n$, et des éléments c_{i_1}, \dots, c_{i_k} dans K non nuls tels que

$$H_{\bar{\mu}}(c_{i_k} b^{i_k}) + H_{\bar{\mu}}(c_{i_{k-1}} b^{i_{k-1}}) + \dots + H_{\bar{\mu}}(c_{i_1} b^{i_1}) = 0$$

dans $\text{gr}_{\bar{\mu}}(\bar{K}[x])$. Nous en déduisons que nous avons

$$(H_{\mu}(c_{i_k} f^{i_k - i_1 - 1}) + \dots + H_{\mu}(c_{i_2} f^{i_2 - i_1 - 1}))H_{\mu}(f) + H_{\mu}(c_{i_1}) = 0,$$

et par conséquent $H_{\mu}(f)$ est inversible. \square

THÉORÈME 3.4. — *La valuation μ est bien spécifiée si et seulement si l'ensemble*

$$E_{\mu} = \{\varepsilon_{\mu}(f) \mid f \in K[x]\}$$

admet un plus grand élément $\bar{\varepsilon}_{\mu}$.

Dans ce cas un polynôme ϕ définit la valuation μ si et seulement si ϕ est un polynôme unitaire de $K[x]$ de degré minimal vérifiant $\varepsilon_{\mu}(\phi) = \bar{\varepsilon}_{\mu}$.

Démonstration. — D'après la proposition 3.2 la valuation μ est bien spécifiée si et seulement si la valuation $\bar{\mu}$ l'est, c'est-à-dire si et seulement si l'ensemble $\Lambda_{\bar{\mu}} = \{\bar{\mu}(x - b) \mid b \in \bar{K}\}$ admet un plus grand élément $\lambda_{\bar{\mu}}$ (cf. proposition 2.11).

Supposons que la valuation μ est bien spécifiée et soit $a \in \bar{K}$ tel que $\lambda_{\bar{\mu}} = \bar{\mu}(x - a)$, alors par définition pour tout polynôme f dans $K[x]$ nous avons l'inégalité $\varepsilon_{\mu}(f) \leq \lambda_{\bar{\mu}}$. Si ϕ est le polynôme minimal de a dans $K[x]$, plus généralement si ϕ est un polynôme dans $K[x]$ qui admet a comme racine, nous avons par définition $\bar{\mu}(x - a) \leq \varepsilon_{\mu}(\phi)$. Nous en déduisons que l'ensemble E_{μ} admet un plus grand élément $\bar{\varepsilon}_{\mu}$ égal à $\lambda_{\bar{\mu}}$, et que la valeur $\bar{\varepsilon}_{\mu}$ est atteinte pour tout polynôme ϕ de $K[x]$ admettant a comme racine.

Réciproquement supposons que la valuation μ n'est pas bien spécifiée, l'ensemble $\Lambda_{\bar{\mu}}$ n'admet pas de plus grand élément, en particulier pour tout polynôme f de $K[x]$ nous pouvons trouver $a \in \bar{K}$ tel que $\bar{\mu}(x - a) > \bar{\mu}(x - b)$ pour toute racine b de f . Un polynôme g dans $K[x]$ admettant a comme racine vérifie alors $\varepsilon_{\mu}(g) > \varepsilon_{\mu}(f)$, par conséquent l'ensemble E_{μ} n'admet pas de plus grand élément.

Soit ϕ un polynôme de $K[x]$ qui définit la valuation μ , alors nous avons un isomorphisme

$$\text{gr}_{\mu} K[x] = G^{(0)}[T],$$

où $G^{(0)}$ est une algèbre graduée simple et T est l'image $H_{\mu}(\phi)$ du polynôme ϕ et nous écrivons comme précédemment $\phi(x) = \prod_{i=1}^d (x - a_i)$, où les racines a_i de ϕ dans \bar{K} vérifient

$$\varepsilon_{\mu}(\phi) = \bar{\mu}(x - a_1) = \dots = \bar{\mu}(x - a_c) > \bar{\mu}(x - a_{c+1}) \geq \dots \geq \bar{\mu}(x - a_d).$$

Nous ne supposons pas que le polynôme ϕ est séparable, par conséquent les racines a_1, \dots, a_d de ϕ ne sont pas supposées distinctes. L'image $\rho(T)$

de T dans $\text{gr}_{\bar{\mu}}(\bar{K}[x])$ est alors égale au produit

$$\prod_{i=1}^d H_{\bar{\mu}}(x - a_i),$$

et nous déduisons de la démonstration de la proposition 3.2 que $\rho(T)$ n'est pas inversible. En particulier un des facteurs $H_{\bar{\mu}}(x - a_i)$ est non inversible, par conséquent nous avons l'égalité $\bar{\mu}(x - a_i) = \lambda_{\bar{\mu}} = \text{Sup}\{\bar{\mu}(x - b) \mid b \in \bar{K}\}$, d'où $\varepsilon_{\mu}(\phi) = \lambda_{\bar{\mu}}$.

Réciproquement supposons que l'ensemble $E_{\mu} = \{\varepsilon_{\mu}(f) \mid f \in K[x]\}$ admet un plus grand élément $\bar{\varepsilon}_{\mu}$ et soit ϕ un polynôme unitaire de $K[x]$ vérifiant $\varepsilon_{\mu}(\phi) = \bar{\varepsilon}_{\mu}$. Nous écrivons encore $\phi = \prod_{i=1}^d (x - a_i)$ et si $H_{\mu}(\phi)$ était inversible dans $\text{gr}_{\mu}(K[x])$ nous déduirions comme précédemment que chacun des facteurs $H_{\bar{\mu}}(x - a_i)$ serait inversible dans $\text{gr}_{\bar{\mu}}(\bar{K}[x])$, en particulier il existerait $a \in \bar{K}$ tel que $\bar{\mu}(x - a_i) < \bar{\mu}(x - a)$, ce qui contredit l'hypothèse $\varepsilon_{\mu}(\phi) = \bar{\varepsilon}_{\mu}$. \square

COROLLAIRE 3.5. — *Le polynôme irréductible ϕ de $K[x]$ définit la valuation μ si et seulement si une racine a de ϕ dans \bar{K} définit une valuation $\bar{\mu}$ de $\bar{K}[x]$ qui prolonge μ .*

Plus précisément si nous écrivons $\phi(x) = \prod_{i=1}^d (x - a_i)$, avec $a = a_1$ et où les racines a_i de ϕ dans \bar{K} vérifient

$$\varepsilon_{\mu}(\phi) = \bar{\mu}(x - a_1) = \cdots = \bar{\mu}(x - a_c) > \bar{\mu}(x - a_{c+1}) \geq \cdots \geq \bar{\mu}(x - a_d),$$

la valuation $\bar{\mu}$ est la valuation associée à la paire (a_i, δ) pour $1 \leq i \leq c$ et $\delta = \varepsilon_{\mu}(\phi)$.

Dans la suite nous appelons p l'exposant caractéristique du corps K , i.e. $p = 1$ si K est de caractéristique nulle et p est égal à la caractéristique de K sinon.

Soit a un élément de \bar{K} et soit ϕ son polynôme irréductible sur K alors il existe un polynôme irréductible séparable sur K , ϕ_{sep} , et un entier $n \geq 0$ tel que nous ayons l'égalité $\phi(x) = \phi_{\text{sep}}(x^{p^n})$. Le degré d_s du polynôme ϕ_{sep} est par définition le degré de séparabilité de l'extension (L/K) , où L est la sous-extension de \bar{K} engendrée par a , $L = K(a) \simeq K[x]/(\phi)$, et nous avons $d = [L : K] = p^n d_s$ et $d_s = [L : K]_{\text{sep}} = [G : H]$, où nous appelons respectivement G et H les groupes de Galois $\text{Gal}(\bar{K}/K)$ et $\text{Gal}(\bar{K}/L)$. En particulier nous pouvons identifier H au sous-groupe $\{\sigma \in G \mid \sigma(a) = a\}$. Si nous posons $\text{Rac}(\phi) = \{a_1, \dots, a_{d_s}\}$ alors nous avons :

$$\phi(x) = \phi_{\text{sep}}(x^{p^n}) = \prod_{i=1}^{d_s} (x - a_i)^{p^n},$$

Comme précédemment nous considérons une valuation μ de l'anneau des polynômes $K[x]$ bien spécifiée, c'est à dire de la forme

$$\mu = [\mu_b; \mu(\phi) = \gamma],$$

telle que le polynôme-clé ou le polynôme-clé limite ϕ est de degré d , $d \geq 2$, et nous posons $\phi(x) = \phi_{\text{sep}}(x^{p^n})$ avec ϕ_{sep} séparable de degré d_s .

Il existe une racine a_1 du polynôme ϕ dans \bar{K} et une valuation $\bar{\mu}$ de l'anneau $\bar{K}[x]$ qui prolonge la valuation μ qui est de la forme $\bar{\mu} = \omega_{(a_1, \delta)}$ pour une certaine valeur δ , et nous notons a_j , $1 \leq j \leq d_s$, les racines de ϕ de telle façon que nous ayons

$$\bar{\nu}(a_1 - a_j) \geq \bar{\nu}(a_1 - a_{j+1}) \quad \text{pour} \quad 2 \leq j \leq d_s - 1.$$

Pour toute valeur ε dans $\tilde{\Gamma}$ nous notons $c(\varepsilon)$ le plus grand entier j , $1 \leq j \leq d_s$, tel que nous ayons $\bar{\nu}(a_1 - a_j) \geq \varepsilon$, en particulier si $c(\varepsilon) < d_s$ nous avons

$$\bar{\nu}(a_1 - a_{c(\varepsilon)}) \geq \varepsilon > \bar{\nu}(a_1 - a_{c(\varepsilon)+1}).$$

La valuation $\omega_{(a_1, \delta)}$ vérifie alors $\omega_{(a_1, \delta)} = \omega_{(a_j, \delta)}$ pour $1 \leq j \leq c(\delta)$ et nous avons les égalités suivantes :

$$\omega_{(a_1, \delta)}(x - a_j) = \begin{cases} \delta & \text{pour } 1 \leq j \leq c(\delta), \\ \bar{\nu}(a_1 - a_j) < \delta & \text{pour } c(\delta) + 1 \leq j \leq d_s. \end{cases}$$

LEMME 3.6. — *Avec les notations précédentes supposons que la valuation $\omega_{(a_1, \delta)}$ soit un prolongement $\bar{\mu}$ de la valuation μ à $\bar{K}[x]$, alors nous avons :*

$$\mu(\phi) = \gamma = p^n \left(c(\delta)\delta + \sum_{j=c(\delta)+1}^{d_s} \bar{\nu}(a_1 - a_j) \right) \leq p^n d_s \delta = \deg \phi \delta,$$

avec l'inégalité stricte $\mu(\phi) < \deg \phi \delta$ seulement dans le cas où $c(\delta) < d_s$.

Démonstration. — La preuve découle du paragraphe précédent. \square

PROPOSITION 3.7. — *Pour toute racine a du polynôme-clé ϕ il existe une et une seule valuation $\bar{\mu}$ de $\bar{K}[x]$ qui prolonge les valuations $\bar{\nu}$ et μ qui soit de la forme $\bar{\mu} = \omega_{(a, \delta)}$.*

Démonstration. — Soit $a = a_1$ une racine de ϕ , nous choisissons les autres racines a_i de façon à avoir les inégalités $\bar{\nu}(a_1 - a_j) \geq \bar{\nu}(a_1 - a_{j+1})$. Supposons que nous ayons deux valeurs δ et δ' dans $\tilde{\Gamma}$ telles que les valuations $\omega_{(a_1, \delta)}$ et $\omega_{(a_1, \delta')}$ soient des prolongements de la valuation μ , et notons respectivement c et c' les plus grands entiers tels que nous ayons $\bar{\nu}(a_1 - a_c) \geq \delta$ et $\bar{\nu}(a_1 - a_{c'}) \geq \delta'$.

D'après le lemme 3.6 nous avons l'égalité :

$$p^n \left(c\delta + \sum_{j=c+1}^{d_s} \bar{\nu}(a_1 - a_j) \right) = p^n \left(c'\delta' + \sum_{j=c'+1}^{d_s} \bar{\nu}(a_1 - a_j) \right).$$

Si $c = c'$ nous en déduisons l'égalité $\delta = \delta'$.

Si $c' > c$ alors nous avons $\delta > \bar{\nu}(a_1 - a_{c'}) \geq \delta'$, et nous déduisons de l'égalité précédente que nous avons

$$c\delta + \sum_{j=c+1}^{c'} \bar{\nu}(a_1 - a_j) = c'\delta',$$

avec $\delta > \delta'$ et $\bar{\nu}(a_1 - a_j) \geq \delta'$ pour tout $j \leq c'$, ce qui est impossible. \square

Remarque 3.8. — Comme le groupe $\text{Aut}(\bar{K}/K)$ agit transitivement sur les racines du polynôme ϕ et sur l'ensemble des valuations $\bar{\mu}$ qui prolongent la valuation μ , nous déduisons de la proposition précédente que nous avons l'inégalité stricte $\mu(\phi) < \deg \phi \delta$, c'est-à-dire l'inégalité $c(\delta) < d_s$, si et seulement si la valuation μ admet plusieurs prolongements distincts à $\bar{K}[x]$.

Nous déduisons de ce qui précède que si les racines du polynôme ϕ sont très proches pour la distance définie par $\bar{\nu}$ sur \bar{K} , la valuation μ définie par le polynôme ϕ admet un seul prolongement.

PROPOSITION 3.9. — *La valuation μ admet un unique prolongement $\bar{\mu}$ à $\bar{K}[x]$ si et seulement si nous avons pour tout couple de racines (a, b) de ϕ :*

$$\bar{\nu}(a - b) \geq \mu(\phi) / \deg \phi.$$

Démonstration. — Supposons que la valuation μ admette un seul prolongement $\bar{\mu} = \omega_{(a, \delta)}$, alors nous avons pour toute racine b l'inégalité $\bar{\nu}(a - b) \geq \delta$ avec $\delta = \mu(\phi) / \deg \phi$.

Réciproquement supposons maintenant que nous ayons l'inégalité $\bar{\nu}(a - b) \geq \mu(\phi) / \deg \phi$ pour tout couple (a, b) de racines, et soit $\bar{\mu}$ le prolongement de μ de la forme $\bar{\mu} = \omega_{(a, \delta)}$. Nous notons c le nombre de racines b vérifiant $\bar{\nu}(a - b) \geq \delta$ et $d = p^n d_s = \deg \phi$, et nous déduisons alors du lemme 3.6 la relation

$$\mu(\phi) = p^n \left(c\delta + \sum_{\{b/\bar{\nu}(a-b) < \delta\}} \bar{\nu}(a - b) \right) \geq p^n c\delta + p^n (d_s - c)(\mu(\phi)/d),$$

d'où le résultat. \square

Dans le cas particulier où la valuation μ est définie par un polynôme de degré un, nous avons le résultat suivant.

PROPOSITION 3.10. — *La valuation bien spécifiée de $K[x]$ associée au polynôme $\phi(x) = x - a$ et à la valeur δ , c'est-à-dire la valuation $\mu = [\nu; \mu(\phi) = \delta]$, est la restriction à $K[x]$ de la valuation $\omega_{(a,\delta)}$ de $\overline{K}[x]$ associée à la boule fermée $B(a, \delta)$.*

Démonstration. — Posons $\mu = [\nu; \mu(\phi) = \delta]$ et $\omega = \omega_{(a,\delta)}$. Nous allons montrer l'égalité $\mu(f) = \omega(f)$ pour tout polynôme unitaire f de $K[x]$. Nous appelons c_1, \dots, c_d les racines de f , c'est-à-dire nous écrivons f sous la forme $f = \prod_{j=1}^d (x - c_j)$, et par définition de la valuation $\omega = \omega_{(a,\delta)}$ nous avons :

$$\omega(f) = \sum_{j=1}^d \text{Inf}(\delta, \bar{\nu}(d_j)) \quad \text{avec} \quad d_j = a - c_j.$$

Si nous ordonnons les racines de f de manière à avoir

$$\bar{\nu}(d_1) \geq \dots \geq \bar{\nu}(d_r) \geq \delta > \bar{\nu}(d_{r+1}) \geq \dots \geq \bar{\nu}(d_d),$$

nous trouvons l'égalité

$$\omega(f) = r\delta + \bar{\nu}(d_{r+1}) + \dots + \bar{\nu}(d_d).$$

Nous écrivons f sous la forme $f = (x - a)^d + \dots + a_1(x - a) + a_0$, les coefficients a_j sont reliés aux racines de f par la relation

$$a_t = (-1)^t \sum_{j_1 < \dots < j_{d-t}} \prod_{i=1}^{d-t} d_{j_i},$$

et nous déduisons de ce qui précède que pour tout t , $0 \leq t \leq d$, nous avons l'inégalité :

$$\nu(a_t) \geq \text{Inf} \left(\nu \left(\prod_{i=1}^{d-t} d_{j_i} \right), 1 \leq j_1 < \dots < j_{d-t} \leq d \right) = \nu \left(\prod_{j=t+1}^d d_j \right),$$

avec l'égalité pour $t = r$:

$$\nu(a_r) = \bar{\nu} \left(\prod_{i=1}^{d-r} d_{r+i} \right) = \bar{\nu}(d_{r+1}) + \dots + \bar{\nu}(d_d),$$

d'où l'égalité cherchée

$$\mu(f) = \text{Inf}(\nu(a_j) + j\delta; 0 \leq j \leq d) = \nu(a_r) + r\delta = \omega(f). \quad \square$$

Nous retrouvons le résultat de la proposition 1.2 de [17] dans le cas où les polynômes-clés sont de degré un, plus précisément nous avons le résultat suivant.

COROLLAIRE 3.11. — Les valuations $\mu_1 = [\nu; \mu_1(\phi_1) = \gamma_1]$ et $\mu_2 = [\nu; \mu_2(\phi_2) = \gamma_2]$, avec $\phi_1 = x - b_1$ et $\phi_2 = x - b_2$, sont égales si et seulement si nous avons $\nu(b_1 - b_2) \geq \gamma_1 = \gamma_2$.

PROPOSITION 3.12. — Soit μ une valuation bien spécifiée de $K[x]$ ayant le même rang rationnel que la valuation ν de K , alors nous pouvons toujours choisir un polynôme séparable pour le polynôme qui définit la valuation μ .

Démonstration. — En effet si la valuation μ est définie par le polynôme-clé ou polynôme-clé limite ϕ et la valeur γ , on peut toujours remplacer ϕ par un polynôme ϕ' de la forme $\phi' = \phi + h$ où h vérifie $\deg h < \deg \phi$ et $\mu(h) \geq \gamma$.

On peut supposer $\deg \phi > 1$ et par hypothèse on peut toujours trouver $a \in K$ tel que $\mu(ax) \geq \gamma$, alors si le polynôme ϕ n'est pas séparable il suffit de le remplacer par $\phi' = \phi + ax$. \square

Si μ est une valuation de $K[x]$ qui possède un polynôme-clé ϕ le groupe des ordres Γ_μ a le même rang rationnel que le groupe des ordres Γ_ν , c'est une conséquence du théorème 6.7 de [11]. Nous pouvons aussi le déduire du fait que le groupe des ordres Γ_μ est égal au groupe des ordres de la valuation μ' de l'extension finie L de K définie par le polynôme ϕ , $L \simeq K[x]/(\phi)$, avec μ' prolongement de la valuation ν associée à la pseudo-valuation $\tilde{\mu}' = [\mu; \tilde{\mu}'(\phi) = +\infty]$.

COROLLAIRE 3.13. — Soit $\mathcal{A} = (\mu_i)_{i \in I}$ la famille admissible associée à une valuation μ de $K[x]$, alors toutes les valuations μ_i de la famille, à l'exception peut-être de μ , sont des valuations bien spécifiées définies par des polynômes ϕ_i séparables.

Dans la suite de ce paragraphe nous supposons que le corps valué (K, ν) est hensélien, la valuation ν admet donc un seul prolongement noté $\bar{\nu}$ au corps \bar{K} , en particulier pour tout automorphisme σ dans le groupe de Galois $G = \text{Gal}(\bar{K}/K)$ la valuation $\bar{\nu} \circ \sigma$ est égale à la valuation $\bar{\nu}$.

THÉORÈME 3.14. — Soit μ une valuation bien spécifiée de $K[x]$ définie par un polynôme ϕ de degré d , et soit a une racine de ϕ dans \bar{K} . Alors il existe une valeur δ dans $\tilde{\Gamma}$ et des automorphismes $\sigma_1 = \text{id}, \sigma_2, \dots, \sigma_k$, avec $1 \leq k \leq d$, dans le groupe de Galois $G = \text{Gal}(\bar{K}/K)$ tels que les prolongements $\bar{\mu}^{(l)}$ de la valuation μ à $\bar{K}[x]$ sont les valuations $\omega_{(\sigma_l(a), \delta)}$, pour $1 \leq l \leq k$.

Démonstration. — Si $\bar{\mu}$ est un prolongement de la valuation μ , alors tous les prolongements de μ sont de la forme $\bar{\mu} \circ \sigma$ pour σ appartenant au groupe de Galois $\text{Gal}(\bar{K}/K)$. Supposons que $\bar{\mu}$ soit la valuation $\omega_{(a, \delta)}$ pour

une racine a de ϕ , alors la valuation $\bar{\mu} \circ \sigma$ est la valuation $\omega_{(\sigma^{-1}(a), \delta)}$. En effet la valuation $\bar{\mu} = \omega_{(a, \delta)}$ est déterminée par l'égalité

$$\bar{\mu}(x - b) = \text{Inf}(\delta, \bar{\nu}(a - b)),$$

où b parcourt \bar{K} .

Comme (K, ν) est hensélien nous en déduisons que pour tout b nous avons

$$\bar{\mu} \circ \sigma(x - b) = \text{Inf}(\delta, \bar{\nu}(a - \sigma(b))) = \text{Inf}(\delta, \bar{\nu}(\sigma^{-1}(a) - b)).$$

Comme le groupe de Galois agit transitivement sur les racines du polynôme ϕ nous en déduisons que pour toute racine a de ϕ il existe un prolongement $\bar{\mu}$ de la valuation μ de la forme $\omega_{(a, \delta)}$, et nous déduisons de la proposition 3.7 que la valeur δ est déterminée uniquement par la valuation μ . \square

Les différents prolongements de la valuation μ à $\bar{K}[x]$ correspondent aux différentes boules fermées $B(a, \delta)$ de \bar{K} où a parcourt l'ensemble $\text{Rac}(\phi)$ des racines distinctes de ϕ , et deux boules $B(a, \delta)$ et $B(a', \delta)$ sont disjointes si $\bar{\nu}(a - a') < \delta$ ou égales sinon.

Soit B une boule fermée de \bar{K} , alors pour tout σ dans le groupe de Galois G la boule $\sigma.B$ est égale à B si pour tout a dans B l'image $\sigma(a)$ appartient à B et est disjointe de B sinon, en fait il suffit qu'il existe un élément a de B tel que son image appartienne à B pour que $\sigma.B$ soit égale à B . Nous pouvons définir H_B par

$$H_B := \{\sigma \in G \mid \sigma.B = B\}.$$

Il est facile de vérifier que les H_B sont des sous-groupes du groupe de Galois G qui vérifient

- (1) $H_B \subset H_{B'}$ pour $B \subset B'$;
- (2) $H_{\tau.B} = \tau.H_B.\tau^{-1}$.

Il y a une bijection naturelle entre l'ensemble quotient G/H_B et l'ensemble $\{B^{(l)}\}$ des boules fermées disjointes conjuguées à B par l'action du groupe de Galois G .

Si un élément b de \bar{K} appartient à B , la boule B est la boule fermée $B(b, \delta)$ et le sous-groupe H_B s'identifie au sous-groupe $H_{(b, \delta)}$ défini par

$$H_{(b, \delta)} := \{\sigma \in G \mid \bar{\nu}(b - \sigma(b)) \geq \delta\},$$

et comme précédemment nous avons $H_{(b, \delta)} \subset H_{(b, \delta')}$ pour $\delta \geq \delta'$, et $H_{(\tau(b), \delta)} = \tau.H_{(b, \delta)}.\tau^{-1}$. Rappelons que pour tout élément b de \bar{K} nous définissons la constante de Krasner $\Delta_K(b)$ par

$$\Delta_K(b) = \text{Sup}(\bar{\nu}(b - b'); b' \text{ conjugué de } b, b' \neq b).$$

Alors, pour $\delta > \Delta_K(b)$ le sous-groupe $H_{(b,\delta)}$ est égal au groupe de Galois $H = \text{Gal}(\bar{K}/K(b))$.

La bijection naturelle entre l'ensemble quotient G/H et l'ensemble $\text{Rac}(\psi)$ des racines du polynôme irréductible $\psi = \text{Irr}_K(b)$ de b sur K induit une bijection entre H_B/H et l'ensemble $\text{Rac}_B(\psi)$ des racines de ψ appartenant à la boule fermée $B = B(b, \delta)$. En particulier l'ensemble G/H_B est fini et il existe $\sigma_1, \dots, \sigma_k$ dans G tels que l'ensemble $\{B^{(l)}\}$ des boules fermées conjuguées à B soit égal à $\{\sigma_l.B\}$, avec $\sigma_1 = \text{id}$ et $B_{(1)} = B$. En particulier les prolongements $\bar{\mu}^{(l)}$ de la valuation μ à $\bar{K}[x]$ définis au théorème 3.14 sont les valuations associées aux boules $B^{(l)}$.

Nous définissons la *distance* $\eta_{l,l'}$ entre deux boules distinctes $B_{(l)}$ et $B_{(l')}$ par

$$\eta_{l,l'} = \bar{\nu}(b - b') \text{ pour } b \in B_{(l)} \text{ et } b' \in B_{(l')},$$

et ceci est indépendant des éléments b et b' choisis car la distance associée à $\bar{\nu}$ est ultra-métrique, et vérifie $\eta_{l,l'} < \delta$.

Soit b appartenant à \bar{K} , nous notons L l'extension $K(b)$, ψ son polynôme irréductible sur K , ψ_{sep} le polynôme irréductible séparable associé, et nous posons $d = p^n d_s$ où $d = \deg \psi = [L : K]$ et $d_s = \deg \psi_{\text{sep}} = [L : K]_{\text{sep}} = [G : H]$, avec $H = \text{Gal}(\bar{K}/L)$.

PROPOSITION 3.15. — *Si b appartient à la boule B nous avons l'inclusion $H \subset H_B$ et si nous posons $c = [H_B : H]$ et $k = [G : H_B]$, nous avons l'égalité*

$$d_s = kc.$$

De plus nous pouvons trouver $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_c$ dans G avec $\delta_1 = \text{id}$, tels que pour tout l , $1 \leq l \leq k$, l'ensemble $\text{Rac}_{B^{(l)}}(\phi)$ des racines de ϕ appartenant à la boule $B^{(l)}$ est égal à l'ensemble $\{\sigma_l \delta_i(b), 1 \leq i \leq c\}$.

Démonstration. — C'est une conséquence de l'égalité $H_B = H_{(b,\delta)}$ et du fait que la valuation $\bar{\nu} \circ \sigma$ est égale à la valuation $\bar{\nu}$ pour tout σ dans G . \square

COROLLAIRE 3.16. — *Soient μ une valuation bien spécifiée de $K[x]$, $\bar{\mu}$ un prolongement de μ à $\bar{K}[x]$ associé à la boule fermée B de diamètre δ , b un élément de \bar{K} appartenant à B et $\psi = \text{Irr}_K(b)$ son polynôme irréductible sur K . Alors avec les notations précédentes nous avons*

$$\mu(\psi) = p^n c \left(\delta + \sum_{l=2}^k \eta_{1,l} \right) \leq (\deg \psi) \delta.$$

En particulier nous retrouvons que si la valuation μ est définie par le polynôme ϕ nous avons l'inégalité $\gamma = \mu(\phi) \leq (\deg \phi) \delta$, avec égalité si et seulement si la valuation μ admet un seul prolongement à $\bar{K}[x]$.

D'après la proposition 2.12 nous pouvons associer à une valuation de la forme $\bar{\mu} = \omega_{(a,\delta)}$ la boule fermée $B = B(a, \delta)$ de \bar{K} , et la valuation est entièrement déterminée par B , et nous déduisons du théorème 3.14 que nous pouvons associer à la valuation μ de $K[x]$ une famille $\mathcal{B}(\mu) = (B^{(l)})_{1 \leq l \leq k}$ de boules fermées disjointes, de même diamètre δ , chacune des boules $B^{(l)}$ correspondant à la valuation $\bar{\mu}^{(l)}$.

PROPOSITION 3.17. — *Soit μ une valuation bien spécifiée de $K[x]$ et soit $\mathcal{B}(\mu) = (B^{(l)})_{1 \leq l \leq k}$ la famille de boules fermées de \bar{K} associée. Alors un polynôme f de $K[x]$ a son image $H_\mu(f)$ non inversible dans $\text{gr}_\mu(K[x])$ si et seulement si l'ensemble $\text{Rac}(f)$ des racines de f est inclus dans la réunion des boules fermées $\bigcup_{1 \leq l \leq k} B^{(l)}$.*

Démonstration. — Soit $\bar{\mu}$ un prolongement de μ à $\bar{K}[x]$ de la forme $\bar{\mu} = \omega_{(a,\delta)}$, d'après la proposition 3.3 et la remarque 2.14 le polynôme f a son image $H_\mu(f)$ non inversible dans $\text{gr}_\mu(K[x])$ si et seulement si f a une racine b tel que $\bar{\nu}(a - b) \geq \delta$. Comme le groupe de Galois agit transitivement sur l'ensemble des racines $\text{Rac}(f)$ et sur l'ensemble des boules $\mathcal{B}(\mu)$, nous en déduisons le résultat. \square

Remarque 3.18. — A toute valuation bien spécifiée μ de $K[x]$, nous pouvons associer l'entier k défini comme le nombre de boules fermées distinctes $B^{(l)}$ conjuguées à la boule fermée B associée à un prolongement $\bar{\mu}$ de μ à $\bar{K}[x]$.

Nous déduisons de ce qui précède que tout polynôme irréductible ψ de $K[x]$ ayant une racine dans B est de degré divisible par k . En particulier si k ne divise pas le degré d'un polynôme f son image $H_\mu(f)$ est inversible dans $\text{gr}_\mu(K[x])$.

Nous voulons étudier les prolongements $\bar{\mu}_i$ des valuations μ_i appartenant à une famille admise $\mathcal{A} = (\mu_i)_{i \in I}$ de valuations de $K[x]$. Pour cela il nous faut d'abord étudier les prolongements à $\bar{K}[x]$ de deux valuations dont l'une est valuation augmentée de l'autre.

THÉORÈME 3.19. — *Soit μ une valuation bien spécifiée de $K[x]$ obtenue comme valuation augmentée $\mu = [\mu_b; \mu(\phi) = \gamma]$ et soit $\bar{\mu}_b$ un prolongement de la valuation μ_b à $\bar{K}[x]$. Alors il existe un prolongement $\bar{\mu}$ de la valuation μ à $\bar{K}[x]$ qui est obtenu comme valuation augmentée $\bar{\mu} = [\bar{\mu}_b; \bar{\mu}(\bar{\phi}) = \bar{\gamma}]$.*

Démonstration. — Comme la valuation μ_b admet une valuation augmentée elle est bien spécifiée, alors pour tout prolongement $\bar{\mu}_b$ il existe une racine a_b du polynôme-clé ϕ_b définissant la valuation μ_b et une valeur δ_b dans $\tilde{\Gamma}$ telles que le prolongement $\bar{\mu}_b$ soit la valuation $\omega_{(a_b, \delta_b)}$.

Comme le polynôme ϕ est un polynôme-clé pour la valuation μ_b son image $H_{\mu_b}(\phi)$ dans l'anneau gradué $\text{gr}_{\mu_b} K[x]$ n'est pas inversible. Par conséquent il existe au moins une racine a de ϕ dans \bar{K} telle que $H_{\bar{\mu}_b}(x-a)$ ne soit pas inversible dans l'anneau gradué $\text{gr}_{\bar{\mu}_b} \bar{K}[x]$, d'où d'après la remarque 2.14 l'inégalité $\bar{\nu}(a - a_b) \geq \delta_b$. Nous en déduisons que la valuation $\bar{\mu}_b$ peut s'écrire $\bar{\mu}_b = \omega_{(a, \delta_b)}$.

Soit $\bar{\mu}$ le prolongement de la valuation μ associé à la racine a du polynôme ϕ , c'est-à-dire qui est de la forme $\bar{\mu} = \omega_{(a, \delta)}$. Deux valuations de la forme $\rho_1 = \omega_{(a, \delta_1)}$ et $\rho_2 = \omega_{(a, \delta_2)}$ sont comparables et vérifient $\rho_1 \leq \rho_2$ si et seulement si $\delta_1 \leq \delta_2$. Par conséquent comme nous avons l'inégalité $\mu_b \leq \mu$ nous avons les inégalités $\delta_b \leq \delta$ et $\bar{\mu}_b \leq \bar{\mu}$. Nous en déduisons le résultat car les seuls polynômes-clés sur $\bar{K}[x]$ sont des polynômes de degré 1, et nous pouvons prendre $\bar{\phi} = x - a$. \square

PROPOSITION 3.20. — *Soient $\bar{\mu}_b = \omega_{(a_b, \delta_b)}$ et $\bar{\mu} = \omega_{(a, \delta)}$ les deux valuations définies dans le théorème précédent, et supposons que les polynômes ϕ_b et ϕ ne sont pas μ_b -équivalents, alors nous avons l'égalité :*

$$\bar{\nu}(a - a_b) = \delta_b.$$

Démonstration. — Nous déduisons de la proposition 3.3 et de la remarque 2.14 que pour toute valuation μ de $K[x]$ et tout prolongement $\bar{\mu} = \omega_{(a, \delta)}$ de μ à $\bar{K}[x]$, si un polynôme f de $K[x]$ n'est pas μ -inversible alors il existe une racine b de f telle que $\bar{\nu}(a - b) \geq \delta$.

Comme les polynômes ϕ_b et ϕ ne sont pas μ_b -équivalents, le polynôme ϕ_b est μ -inversible, nous en déduisons l'inégalité $\bar{\nu}(a - a_b) < \delta$, par conséquent nous avons $\bar{\mu}(x - a_b) = \bar{\nu}(a - a_b) < \delta = \bar{\mu}(x - a)$. Nous déduisons aussi du fait que ϕ_b est μ -inversible, l'égalité $\delta_b = \bar{\mu}_b(x - a_b) = \bar{\mu}(x - a_b)$, d'où le résultat. \square

Soit μ une valuation bien spécifiée obtenue comme valuation augmentée de la valuation μ_b telle que les polynômes ϕ_b et ϕ ne sont pas μ_b -équivalents, nous appelons $\mathcal{B}(\mu_b) = (B_b^{(l)})_{1 \leq l \leq k_b}$ et $\mathcal{B}(\mu) = (B^{(l)})_{1 \leq l \leq k}$ les familles de boules fermées de \bar{K} associées respectivement aux valuations μ_b et μ .

Soit $\bar{\mu}_b^{(r)}$ le prolongement de la valuation μ_b associé à la boule $B_b^{(r)} = B(a_b^{(r)}, \delta_b)$, alors pour toute racine $a^{(l)}$ du polynôme ϕ vérifiant $\bar{\nu}(a^{(l)} - a_b^{(r)}) \geq \delta_b$ la boule fermée associée $B^{(l)} = B(a^{(l)}, \delta)$ est incluse dans $B_b^{(r)}$. Comme le groupe de Galois $G = \text{Gal}(\bar{K}/K)$ agit transitivement sur les ensembles des racines $\{a_b^{(r)}\}$ et $\{a^{(l)}\}$ respectivement des polynômes ϕ_b et ϕ nous en déduisons le résultat suivant.

PROPOSITION 3.21. — Chaque boule $B_b^{(r)}$ de $\mathcal{B}(\mu_b)$ contient s boules $B^{(l)}$ appartenant à $\mathcal{B}(\mu)$, où s est un entier strictement positif indépendant de la boule $B_b^{(r)}$ choisie, et toute boule $B^{(l)}$ de $\mathcal{B}(\mu)$ est contenue dans une boule $B_b^{(r)}$ de $\mathcal{B}(\mu_b)$.

Nous pouvons représenter les boules dans \overline{K} associées aux prolongements des valuations μ_b et μ par le diagramme suivant :

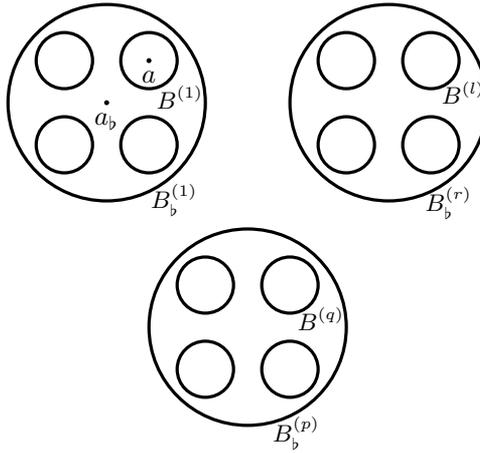


FIGURE 3.1. Disposition des boules fermées des familles $\mathcal{B}(\mu_b)$ et $\mathcal{B}(\mu)$ dans \overline{K} .

Dans le cas où les polynômes ϕ_b et ϕ sont μ_b -équivalents nous obtenons un résultat identique. En effet considérons deux valuations bien spécifiées μ_b et μ de $K[x]$ définies par le même polynôme ϕ et par des valeurs γ_b et γ différentes avec $\gamma_b < \gamma$. Soit a une racine de ϕ dans \overline{K} et choisissons deux prolongements $\bar{\mu}_b$ et $\bar{\mu}$ respectivement de μ_b et μ à $\overline{K}[x]$, de la forme $\bar{\mu}_b = \omega_{(a,\delta_b)}$ et $\bar{\mu} = \omega_{(a,\delta)}$. Comme les valuations $\omega_{(a,\delta_b)}$ et $\omega_{(a,\delta)}$ sont comparables et comme nous avons $\mu_b \leq \mu$ nous en déduisons l'inégalité $\delta_b < \delta$. Si nous appelons $\mathcal{I}(\mu_b) = (I_b^{(l)}; 1 \leq l \leq k_b)$ et $\mathcal{I}(\mu) = (I^{(l)}; 1 \leq l \leq k)$ les partitions de l'ensemble des racines de ϕ associées respectivement aux valuations μ_b et μ , alors $\mathcal{I}(\mu)$ est plus fine que $\mathcal{I}(\mu_b)$, et nous trouvons la même disposition des boules fermées associées aux valuations que précédemment.

Nous voulons étudier maintenant le cas d'une famille continue $\mathcal{C} = (\mu_\alpha)_{\alpha \in A}$ de valuations de $K[x]$, pour tout α dans A nous notons $\mathcal{B}(\mu_\alpha) = (B_\alpha^{(l)})_{1 \leq l \leq k_\alpha}$ la famille de boules fermées de \overline{K} associée à la valuation μ_α et B_α la réunion $B_\alpha = \bigcup_{1 \leq l \leq k_\alpha} B_\alpha^{(l)}$. Nous déduisons de la proposition 3.21

qu'il existe α_0 tel que pour tout $\beta \geq \alpha \geq \alpha_0$ dans A nous avons $k_\beta = k_\alpha$ et chaque boule $B_\alpha^{(l)}$ de $\mathcal{B}(\mu_\alpha)$ contient une unique boule $B_\beta^{(l)}$ de $\mathcal{B}(\mu_\beta)$, et notons $k_C = k_\alpha$ pour $\alpha \geq \alpha_0$. Nous posons alors

$$B_C^{(l)} = \bigcap_{\alpha \in A, \alpha \geq \alpha_0} B_\alpha^{(l)} \quad \text{et} \quad B_C = \bigcap_{\alpha \in A} B_\alpha = \bigcup_{1 \leq l \leq k_C} B_C^{(l)}.$$

L'ensemble $B_C^{(l)}$ obtenu comme intersection d'une famille décroissante de boules fermées est une boule fermée, éventuellement vide. Le groupe de Galois $G = \text{Gal}(\overline{K}/K)$ agit transitivement sur les racines des polynômes ϕ_α définissant les valuations μ_α , par conséquent toutes les boules $B_\alpha^{(l)}$ sont isomorphes.

PROPOSITION 3.22. — *Le polynôme ϕ appartient à*

$$\tilde{\Phi}(C) = \{f \in K[x] \mid \mu_\alpha(f) < \mu_\beta(f), \forall \alpha < \beta \in A\}$$

si et seulement si l'ensemble des racines $\text{Rac}(\phi)$ de ϕ est inclus dans B_C .

Démonstration. — Si ϕ appartient à $\tilde{\Phi}(C)$, pour tout α dans A l'image de ϕ dans $\text{gr}_{\mu_\alpha} K[x]$ est non inversible et nous déduisons le résultat de la proposition 3.17. □

Soient μ une valuation de $K[x]$ et $\mathcal{A} = (\mu_i)_{i \in I}$ la famille admise de valuations associée, chaque valuation μ_i de la famille \mathcal{A} est bien spécifiée, définie par le polynôme-clé ϕ_i , et soit $\mathcal{B}_i = \mathcal{B}(\mu_i)$ la famille de boules fermées de \overline{K} associée à μ_i par le théorème 3.14.

PROPOSITION 3.23. — *La famille $(\mathcal{B}_i)_{i \in I}$ est décroissante, c'est-à-dire pour tout $i < j$ dans I chaque boule $B_i^{(r)}$ de \mathcal{B}_i contient s boules $B_j^{(l)}$ appartenant à \mathcal{B}_j , où s est un entier strictement positif indépendant de la boule $B_i^{(r)}$ choisie, et toute boule $B_j^{(l)}$ de \mathcal{B}_j est contenue dans une boule $B_i^{(r)}$ de \mathcal{B}_i .*

Démonstration. — C'est une conséquence de 3.21 et 3.22. □

DÉFINITION. — *Nous appelons ensemble caractéristique de la valuation μ le sous-ensemble $\mathbf{B} = \mathbf{B}(\mu)$ de \overline{K} obtenu comme l'intersection des ensembles B_i pour i dans I , où chaque B_i est la réunion des boules fermées $B_i^{(r)}$ appartenant à $\mathcal{B}(\mu_i)$.*

Si la valuation μ possède un nombre fini s de prolongements $\overline{\mu}^{(r)}$ à $\overline{K}[x]$, il existe $i_0 \in I$ tel que les ensembles $\mathcal{B}(\mu_i)$ pour $i \geq i_0$ ont tous le même nombre s d'éléments, c'est-à-dire que pour tout $j \geq i \geq i_0$ chaque boule fermée $B_i^{(r)}$ de $\mathcal{B}(\mu_i)$ contient une unique boule fermée $B_j^{(r)}$ de $\mathcal{B}(\mu_j)$.

Pour tout r , nous appelons $\mathcal{B}^{(r)}$ la famille décroissante de boules fermées $(B_i^{(r)})_{i \geq i_0}$, et nous notons $\mathbf{B}^{(r)}$ l'intersection

$$\mathbf{B}^{(r)} = \bigcap_{i \geq i_0} B_i^{(r)}.$$

Le groupe de Galois $\text{Gal}(\overline{K}/K)$ agit transitivement sur l'ensemble des familles $\mathcal{B}^{(r)}$, donc ces familles sont isomorphes et nous avons l'égalité :

$$\mathbf{B} = \bigcup_{1 \leq r \leq s} \mathbf{B}^{(r)},$$

et d'après la proposition 2.12 chaque famille de boules fermées $\mathcal{B}^{(r)}$ définit un prolongement $\overline{\mu}^{(r)}$ de μ à $\overline{K}[x]$. La valuation μ admet un nombre fini de prolongements $\overline{\mu}^{(r)}$ à $\overline{K}[x]$ si l'ensemble $\{\deg \phi_i \mid i \in I\}$ est borné où $(\phi_i)_{i \in I}$ est une famille de polynômes-clés correspondant à la famille admise $\mathcal{A} = (\mu_i)_{i \in I}$ associée à la valuation μ .

Si la valuation μ possède un nombre infini de prolongements $\overline{\mu}^{(r)}$ à $\overline{K}[x]$, c'est le cas si la famille admise associée \mathcal{A} est obtenue comme réunion infinie de familles admissibles simples ou dans le cas où \mathcal{A} est obtenue comme réunion finie de familles admises simples telle que la dernière $\mathcal{S}^{(N)}$ est constituée d'une famille discrète $\mathcal{D}^{(N)}$ infinie, nous obtenons un ensemble infini de familles de boules fermées $\mathcal{B}^{(r)}$, correspondant chacune à un prolongement $\overline{\mu}^{(r)}$, dont l'intersection est vide.

Nous déduisons de ce qui précède le théorème suivant.

THÉORÈME 3.24. — *Les valuations $\overline{\mu}^{(r)}$ associées aux familles $\mathcal{B}^{(r)}$ sont les extensions à $\overline{K}[x]$ de la valuation μ .*

Si l'ensemble caractéristique $\mathbf{B}(\mu)$ de μ est vide la valuation μ n'est pas bien spécifiée, et chaque valuation $\overline{\mu}^{(r)}$ est définie par la suite pseudo-convergente associée à la famille $\mathcal{B}^{(r)}$.

Si l'ensemble caractéristique $\mathbf{B}(\mu)$ de μ est non vide la valuation μ est bien spécifiée, et chaque valuation $\overline{\mu}^{(r)}$ est définie par la boule fermée non vide $\mathbf{B}^{(r)}$.

COROLLAIRE 3.25. — *Soit μ une valuation de $K[x]$ et soit $\mathcal{A} = (\mu_i)_{i \in I}$ une famille admise associée, alors pour toute extension $\overline{\mu}$ de μ à $\overline{K}[x]$, il existe une famille $\mathcal{A}_{\overline{\mu}} = (\overline{\mu}_i)_{i \in I}$ de valuations de $\overline{K}[x]$ correspondant à une suite décroissante $(B_i)_{i \in I}$ de boules fermées de \overline{K} telle que pour tout $i \in I$ la valuation $\overline{\mu}_i$ est une extension de la valuation μ_i .*

Remarque 3.26. — Soit $(C, 0)$ une singularité de courbe plane dans \mathbb{A}_k^2 définie par un polynôme $f \in k[x, y]$ pour un choix judicieux des coordonnées x et y , nous considérons alors f comme un élément P de $K[x]$ où K est le

corps $k(y)$ que nous munissons de la valuation y -adique ν . Alors l'étude de la singularité $(C, 0)$ est liée à l'étude des prolongements μ de la valuation ν au corps $L = K[x]/(P)$ et les valuations μ_i apparaissant dans la famille admise \mathcal{A} associée à la pseudo-valuation $\bar{\mu}$ de $K[x]$ de noyau (P) définie par μ sont reliées aux *paires de Puiseux* de la singularité $(C, 0)$ (cf. [20, exemple 3.2]).

Il est alors possible de voir une analogie entre la famille des boules $(B_i)_{i \in I}$ définie à la proposition 3.23 et l'action du groupe de Galois sur celle-ci, et la construction du *carousel* donnée par Lê D. T. (voir par exemple [9] ou [10]).

Remarque 3.27. — Soient ν une valuation de K , μ un prolongement de ν à l'extension $K(x)$ de K et $\mathcal{A} = (\mu_i)_{i \in I}$ la famille de valuations de $K(x)$ associée à μ considérée comme valuation de l'anneau des polynômes $K[x]$. D'après ce qui précède la famille \mathcal{A} peut être définie en considérant la famille des boules $(B_i)_{i \in I}$ de \bar{K} , en particulier on peut en déduire que cette famille ne dépend pas du générateur x de l'extension $K(x)$ de K .

Nous retrouvons ainsi le résultat principal de [22].

4. Restriction d'une valuation définie sur $\bar{K}[x]$

Dans cette partie nous nous donnons une valuation $\bar{\mu}$ définie sur $\bar{K}[x]$ et nous voulons étudier sa restriction μ à l'anneau $K[x]$. Comme précédemment nous supposons que (K, ν) est un corps valué hensélien et la valuation $\bar{\mu}$ de $\bar{K}[x]$ est un prolongement de l'unique extension $\bar{\nu}$ de ν à la clôture algébrique \bar{K} de K .

Pour tout b appartenant à \bar{K} nous définissons le degré de b sur K comme le degré de l'extension algébrique qu'il engendre, c'est aussi le degré du polynôme irréductible $\text{Irr}_K(b)$ de b sur K :

$$\deg_K(b) = \deg \text{Irr}_K(b) = [K(b) : K].$$

PROPOSITION 4.1. — *Soient $\bar{\mu}$ une valuation bien spécifiée de $\bar{K}[x]$ associée à une boule fermée B , μ la restriction de $\bar{\mu}$ à $K[x]$ et ϕ un polynôme de $K[x]$ définissant la valuation μ . Alors pour tout $b \in B$ nous avons l'inégalité :*

$$\deg_K(b) \geq \deg \phi.$$

Démonstration. — Nous déduisons de la remarque 2.14 que si b appartient à B l'image de $(x - b)$ est non-inversible dans $\text{gr}_{\bar{\mu}} \bar{K}[x]$, alors l'image du polynôme $\text{Irr}_K(b)$ est non inversible dans $\text{gr}_{\mu} K[x]$, et par conséquent il vérifie l'inégalité $\deg \text{Irr}_K(b) \geq \deg \phi$. \square

Pour tout sous-ensemble E de \overline{K} nous définissons le *degré de E sur k* par

$$\deg_K(E) := \text{Inf}(\deg_K(b) \mid b \in E).$$

THÉOREME 4.2. — Soient $\bar{\mu}$ une valuation bien spécifiée de $\overline{K}[x]$ et B la boule fermée de \overline{K} associée. Alors un polynôme irréductible ϕ de $K[x]$ définit la valuation μ restriction de $\bar{\mu}$ à $K[x]$ si et seulement si ϕ a une racine a appartenant à B avec

$$\deg_K(a) = \deg_K(B).$$

Démonstration. — Soit ϕ un polynôme qui définit la valuation μ , alors nous déduisons de la proposition 4.1 que tout b appartenant à B vérifie $\deg_K(b) \geq \deg \phi$ et comme ϕ a une racine appartenant à B nous trouvons $\deg \phi = \deg_K(B)$.

Réciproquement soit b appartenant à B avec $\deg_K(b) = \deg_K(B)$, et soit ψ son polynôme irréductible sur K . Les polynômes ϕ et ψ ont même degré d et si nous appelons respectivement d_s et d'_s le nombre de racines distinctes de ϕ et ψ nous pouvons écrire $d = p^n d_s$ et $d = p^{n'} d'_s$.

Soit k le nombre de boules fermées $B^{(l)}$ conjuguées à B , alors d'après la proposition 3.15 nous avons les égalités $d_s = kc$ et $d'_s = k'c'$ où c et c' sont respectivement le nombre de racines de ϕ et de ψ appartenant à une boule $B^{(l)}$. Nous en déduisons l'égalité

$$p^n c = p^{n'} c' = d/k,$$

et d'après le corollaire 3.16 nous trouvons $\mu(\phi) = \mu(\psi)$. Le théorème est alors une conséquence de la proposition 2.10. \square

Soit a appartenant à \overline{K} , alors pour tout δ dans $\Gamma_{\bar{\nu}}$ nous pouvons définir l'entier $\mathbf{d}_a(\delta)$ par

$$\mathbf{d}_a(\delta) = \deg_K(B(a, \delta)).$$

Nous avons ainsi une application croissante \mathbf{d}_a de $\Gamma_{\bar{\nu}}$ dans \mathbb{N} majorée par $d = \deg_K(a)$. De plus la valeur de \mathbf{d}_a sur $\{\delta' \in \Gamma_{\bar{\nu}} / \delta' \leq \delta\}$ ne dépend pas de a mais uniquement de la boule $B = B(a, \delta)$, en effet si b appartient à B alors pour tout $\delta' \leq \delta$ nous avons encore $B(a, \delta') = B(b, \delta')$.

Pour tout $e \in \mathbb{N}$, avec $e \leq d$ nous définissons l'ensemble

$$R_a(e) = \{\delta' \in \Gamma_{\bar{\nu}} \mid \mathbf{d}_a(\delta') \leq e\}.$$

Nous considérons une valuation bien spécifiée $\bar{\mu}$ de $\overline{K}[x]$ associée à la boule fermée B , sa restriction μ à $K[x]$ et a dans B tel que ϕ le polynôme irréductible de a sur K définisse la valuation μ . D'après ce qui précède

le degré d de ϕ est égal à $\deg_K(B)$, et soient δ et γ tels que nous ayons $B = B(a, \delta)$ et $\mu(\phi) = \gamma$.

Supposons que l'ensemble $R_a(d-1)$ a un plus grand élément δ_1 et soit $d_1 = \mathbf{d}_a(\delta_1)$, alors pour tout $\delta' \leq \delta_1$ nous avons $\mathbf{d}_a(\delta') \leq d_1$ et pour tout $\delta' > \delta_1$ nous avons $\mathbf{d}_a(\delta') = d$. Nous posons $B_1 = B(a, \delta_1)$ et nous choisissons $a_1 \in B_1$ avec $\deg_K(a_1) = d_1$.

Nous appelons $\bar{\mu}_1$ la valuation de $\bar{K}[x]$ associée à la boule B_1 , μ_1 sa restriction à $K[x]$ qui est définie par ϕ_1 le polynôme irréductible de a_1 sur K .

PROPOSITION 4.3. — *Le polynôme ϕ est un polynôme-clé pour la valuation μ_1 et la valuation μ est la valuation augmentée $[\mu_1; \mu(\phi) = \gamma]$.*

Démonstration. — La valuation μ_1 vérifie $\mu_1 \leq \mu$ et nous pouvons considérer l'ensemble

$$\tilde{\Phi}_\mu(\mu_1) = \{f \in K[x] \mid \mu_1(f) < \mu(f)\},$$

cet ensemble est non vide car ϕ vérifie $\mu_1(\phi) < \mu(\phi)$. En effet si nous écrivons

$$\phi = \prod_{i=1}^{d_s} (x - b_i)^{p_i},$$

avec $b_1 = a$ nous avons $\bar{\mu}_1(x - b_i) \leq \bar{\mu}(x - b_i)$ pour tout $i \geq 2$ et $\bar{\mu}_1(x - a) < \bar{\mu}(x - a)$.

Nous appelons d' le degré minimal d'un polynôme appartenant à $\tilde{\Phi}_\mu(\mu_1)$ et nous considérons l'ensemble

$$\Phi_\mu(\mu_1) = \{\psi \in K[x] \mid \mu_1(\psi) < \mu(\psi), \deg \psi = d' \text{ et } \psi \text{ unitaire}\}.$$

Soit ψ dans $\Phi_\mu(\mu_1)$, alors par construction nous avons $d_1 \leq \deg \psi \leq d$, et d'après [19, théorème 1.15] nous savons que ψ est un polynôme-clé pour la valuation μ_1 et que la valuation augmentée $\mu' = [\mu_1; \mu'(\psi) = \gamma']$, avec $\gamma' = \mu(\psi)$ vérifie $\mu_1 \leq \mu' \leq \mu$.

Nous déduisons du théorème 3.19 qu'il existe un prolongement $\bar{\mu}'$ de la valuation μ' à $\bar{K}[x]$ vérifiant $\bar{\mu}_1 \leq \bar{\mu}' \leq \bar{\mu}$. Soit B' la boule associée à $\bar{\mu}'$, nous avons alors $B \subset B' \subset B_1$, en particulier il existe δ' tel que $B' = B(a, \delta')$ et comme la valuation μ' est différente de μ_1 nous avons $\delta' > \delta_1$. Par conséquent nous avons $\deg \psi = \deg \phi$, le polynôme ϕ appartient à l'ensemble $\Phi_\mu(\mu_1)$ et est donc un polynôme-clé pour la valuation μ_1 . \square

Supposons maintenant que l'ensemble $R_a(d-1)$ n'a pas de plus grand élément, il existe alors δ_1 dans $R_a(d-1)$ tel que pour tout δ' appartenant à $R_a(d-1)$ avec $\delta' \geq \delta_1$ nous ayons $\mathbf{d}_a(\delta') = \mathbf{d}_a(\delta_1)$, et comme précédemment

nous posons $B_1 = B(a, \delta_1)$, et nous choisissons $a_1 \in B_1$ avec $\deg_K(a_1) = d_1 = \mathbf{d}_a(\delta_1)$.

Nous choisissons un sous-ensemble $\{\delta_\alpha \mid \alpha \in A\}$ de $\Gamma_{\bar{v}}$, indexé par un ensemble totalement ordonné A sans plus grand élément, avec $\delta_\alpha < \delta_{\alpha'}$ pour $\alpha < \alpha'$ dans A , qui soit cofinal dans l'ensemble $\{\delta' \in R_a(d-1) \mid \delta' \geq \delta_1\}$.

Nous appelons $\bar{\mu}_\alpha$ la valuation de $\bar{K}[x]$ associée à la boule $B_\alpha = B(a, \delta_\alpha)$ et μ_α sa restriction à $K[x]$. Pour tout $\alpha \in A$ nous choisissons a_α dans la boule $B_\alpha = B(a, \delta_\alpha)$ avec $\deg_K(a_\alpha) = d_1$, et nous appelons ϕ_α le polynôme irréductible de a_α sur K .

PROPOSITION 4.4. — *La famille de valuations $\mathcal{C} = (\mu_\alpha)_{\alpha \in A}$ est une famille continue de valuations de $K[x]$, le polynôme ϕ est un polynôme-clé limite pour cette famille et la valuation μ est la valuation augmentée limite $[(\mu_\alpha)_{\alpha \in A}; \mu(\phi) = \gamma]$.*

Démonstration. — Tous les polynômes ϕ_α sont de même degré et les valuations μ_α vérifient $\mu_\alpha \leq \mu_{\alpha'}$ pour $\alpha \leq \alpha'$, nous en déduisons que la famille $\mathcal{C} = (\mu_\alpha)_{\alpha \in A}$ est une famille continue de valuations de $K[x]$.

De façon analogue à la démonstration de la proposition 4.3 nous considérons l'ensemble

$$\tilde{\Phi}(\mathcal{C}) = \{f \in K[x] \mid \mu_\alpha(f) < \mu_{\alpha'}(f) \text{ pour tout } \alpha < \alpha' \text{ dans } A\},$$

qui est non vide car ϕ y appartient. Si nous appelons $d_{\mathcal{C}}$ le degré minimal d'un polynôme dans $\tilde{\Phi}(\mathcal{C})$, par construction nous avons $d_{\mathcal{C}} = d = \deg \phi$, c'est-à-dire que ϕ appartient à l'ensemble

$$\Phi(\mathcal{C}) = \{\psi \in \tilde{\Phi}(\mathcal{C}) \mid \psi \text{ unitaire et } \deg \psi = d_{\mathcal{C}}\},$$

et nous déduisons de la proposition 1.21 de [19] que ϕ est un polynôme-clé limite pour la famille \mathcal{C} et que la valuation μ est la valuation augmentée limite $[(\mu_\alpha)_{\alpha \in A}; \mu(\phi) = \gamma]$. \square

Remarque 4.5. — Grâce au corollaire 3.25 nous pouvons associer à toute valuation bien spécifiée $\bar{\mu}$ de $\bar{K}[x]$ une famille de valuations $\mathcal{A}_{\bar{\mu}} = (\bar{\mu}_i)_{i \in I}$ vérifiant :

- (1) la famille $\mathcal{A} = (\mu_i)_{i \in I}$ est une famille associée à la valuation μ de $K[x]$, où nous notons respectivement μ et μ_i la valuation de $K[x]$ restriction de la valuation $\bar{\mu}$ et $\bar{\mu}_i$;
- (2) pour tout $i \leq j$ dans I nous avons $\bar{\mu}_i \leq \bar{\mu}_j$, ce qui est équivalent à $B_j \subset B_i$, où nous appelons B_i la boule fermée de \bar{K} associée à la valuation $\bar{\mu}_i$ de $\bar{K}[x]$.

Nous avons construit cette famille à partir de la construction de la famille \mathcal{A} associée à la valuation μ , et la famille $\mathcal{A} = (\mu_i)_{i \in I}$ est construite en suivant un ordre croissant, c'est-à-dire que pour déterminer la valuation μ_i nous avons besoin de connaître les valuations μ_j pour $j < i$, plus précisément nous considérons les ensembles $\tilde{\Phi}_\mu(\mu_j) = \{f \in K[x] \mid \mu_j(f) < \mu(f)\}$.

Nous pouvons utiliser les résultats précédents pour construire la famille $\mathcal{A}_{\bar{\mu}} = (\bar{\mu}_i)_{i \in I}$ en suivant un ordre décroissant, c'est-à-dire en construisant la valuation $\bar{\mu}_i$ à partir des valuations μ_j pour $j > i$.

THÉORÈME 4.6. — *Soit $\bar{\mu}$ une valuation bien spécifiée de $\bar{K}[x]$, alors il existe une famille $\mathcal{A}_{\bar{\mu}} = (\bar{\mu}_i)_{i \in I}$ de valuations de $\bar{K}[x]$ vérifiant les propriétés (1) et (2) de la remarque 4.5 obtenue de la façon suivante.*

D'après la propriété (2) les boules B_i associées aux valuations $\bar{\mu}_i$ sont de la forme $B_i = B(a, \delta_i)$ avec une famille $(\delta_i)_{i \in I}$ décroissante. Si nous connaissons la valuation $\bar{\mu}_i$ de la famille, les valuations $\bar{\mu}_j$ pour $j < i$ sont déterminées en considérant l'ensemble

$$R_K(\bar{\mu}_i) = \{\delta \mid \deg_K(B(a, \delta)) < \deg_K(B(a, \delta_i))\}.$$

Si cet ensemble a un plus grand élément δ_{i-1} nous construisons la valuation $\bar{\mu}_{i-1}$ comme la valuation associée à la boule $B(a, \delta_{i-1})$, et $i - 1$ est le prédécesseur de i dans I .

Si cet ensemble n'a pas de plus grand élément nous choisissons une famille $(\delta_\alpha)_{\alpha \in A}$ cofinale dans $R_K(\bar{\mu}_i)$ et nous définissons la famille $(\bar{\mu}_{i_\alpha})_{i_\alpha \in I_A}$ où la valuation $\bar{\mu}_{i_\alpha}$ est la valuation associée à la boule $B(a, \delta_\alpha)$, et $I_A = (i_\alpha)_{\alpha \in A}$ est la sous-famille de I sans plus grand élément cofinale dans $\{j \in I \mid j < i\}$.

Nous nous arrêtons, c'est-à-dire nous trouvons la première valuation $\bar{\mu}_1$ de la famille quand nous trouvons un ensemble $R_K(\bar{\mu}_i)$ tel que

$$\deg_K(B(a, \delta)) = 1,$$

où $\delta = \delta_{i-1}$ ou $\delta = \delta_\alpha$, avec les notations précédentes.

Démonstration. — C'est une conséquence immédiate des propositions 4.3 et 4.4. □

Soit ϕ un polynôme irréductible de $K[x]$, alors comme le corps valué (K, ν) est hensélien l'application croissante \mathbf{d}_a de $\Gamma_{\bar{\nu}}$ dans \mathbb{N} ne dépend pas de la racine a de ϕ , en particulier nous déduisons de ce qui précède que nous pouvons associer à ϕ de $K[x]$ une section finissante Δ_ϕ du groupe des valeurs $\Gamma_{\bar{\nu}}$ définie par

$$\Delta_\phi = \Gamma_{\bar{\nu}} \setminus R_a(d-1) = \{\delta \in \Gamma_{\bar{\nu}} \mid \deg_K B(a, \delta) = \deg \phi\},$$

où a est une racine quelconque de ϕ .

DÉFINITION. — La section finissante Δ_ϕ est appelée la section caractéristique du polynôme ϕ .

En particulier dans le cas où le polynôme ϕ est de degré un, sa section caractéristique est égale au groupe des valeurs $\Gamma_{\bar{\nu}}$ tout entier.

Pour tout polynôme irréductible nous pouvons trouver des valuations μ de $K[x]$ qui sont bien spécifiées et définies par le polynôme ϕ . Toutes ces valuations peuvent être obtenues de la manière suivante.

Nous considérons une valuation ρ prolongement de la valuation ν au corps L extension de K associée au polynôme ϕ , plus précisément nous choisissons une racine θ de ϕ dans \bar{K} et L est la sous-extension $K(\theta)$. Alors la valuation ρ de L correspond à une pseudo-valuation $\tilde{\mu}$ de $K[x]$ de noyau l'idéal (ϕ) , et nous considérons la famille admise $\mathcal{A}(\tilde{\mu}) = (\mu_i)_{i \in I}$ associée à $\tilde{\mu}$.

L'ensemble I admet un plus grand élément \bar{i} et $\mu_{\bar{i}}$ est la pseudo-valuation $\tilde{\mu}$, elle est obtenue comme valuation augmentée ou comme valuation augmentée limite $\mu_{\bar{i}} = [\mu_b; \mu_{\bar{i}}(\phi) = +\infty]$. Pour toute valeur γ suffisamment grande, c'est à-dire pour $\gamma > \mu_b(\phi)$ si $\mu_{\bar{i}}$ est une valuation augmentée de la valuation μ_b et pour $\gamma > \mu_\alpha(\phi)$ pour tout $\alpha \in A$ si $\mu_{\bar{i}}$ est une valuation augmentée limite d'une famille continue $\mu_b = (\mu_\alpha)_{\alpha \in A}$, nous pouvons définir une valuation μ de $K[x]$ en posant $\mu = [\mu_b; \mu(\phi) = \gamma]$. Toutes ces valuations μ de $K[x]$ ont une famille admise associée $\mathcal{A}(\mu)$ qui coïncide avec la famille $\mathcal{A}(\tilde{\mu})$ jusqu'à la valuation ou la famille continue μ_b .

Dans le cas où le corps valué (K, ν) est hensélien, il existe un unique prolongement ρ de la valuation ν à l'extension L , par conséquent il existe une valuation ou une famille continue μ_b , qui ne dépend que du polynôme ϕ telle que toute valuation bien spécifiée μ définie par ϕ est de la forme $\mu = [\mu_b; \mu(\phi) = \gamma]$, pour γ suffisamment grand. Nous avons un analogue de ce résultat au niveau des valuations de $\bar{K}[x]$.

PROPOSITION 4.7. — Soit ϕ un polynôme irréductible de $K[x]$ et soit a une racine de ϕ . Alors la valuation bien spécifiée $\mu = \mu_\delta$ de $K[x]$, obtenue comme restriction de la valuation ω_B de $\bar{K}[x]$ associée à la boule fermée $B = B(a, \delta)$, est définie par le polynôme ϕ si et seulement si δ appartient à la section caractéristique Δ_ϕ du polynôme ϕ .

Démonstration. — C'est une conséquence de la définition de Δ_ϕ et du théorème 4.2. \square

Dans le cas où les valuations μ bien spécifiées de $K[x]$ définies par le polynôme ϕ sont obtenues comme valuations augmentées, la section caractéristique Δ_ϕ du polynôme ϕ est de la forme $\Delta_\phi = \{\delta \in \Gamma_{\bar{\nu}} \mid \delta > \delta_b\}$.

5. Valuations approchées

Nous pouvons affaiblir la définition de famille admissible et définir une *famille pré-admissible* de valuations de $K[x]$ (cf. [21, remarque 2.4]), pour cela nous rappelons que dans la définition d'une famille discrète de valuations, $\mathcal{D} = (\mu_l)_{l \in L}$, apparaissant dans une famille admissible \mathcal{A} nous demandons l'inégalité stricte $\deg \phi_l > \deg \phi_{l-1}$ pour la famille de polynômes-clés associée à \mathcal{D} . Si nous demandons seulement que les familles \mathcal{D} soient des familles de valuations augmentées itérées, nous obtenons les définitions suivantes.

DÉFINITION. — Une famille pré-admissible simple \mathcal{S} pour la valuation ν de K est une famille de valuations $(\mu_i)_{i \in I}$ de $K[x]$ constituée d'une partie discrète \mathcal{D} et d'une partie continue \mathcal{C} :

- La partie discrète $\mathcal{D} = (\mu_l)_{l \in L}$ est une famille non vide de valuations augmentées itérées de $K[x]$ telle que la famille de polynômes-clés $(\phi_l)_{l \in L}$ associée vérifie l'inégalité large $\deg \phi_l \geq \deg \phi_{l-1}$.
- La partie continue $\mathcal{C} = (\mu_\alpha)_{\alpha \in A}$ est une famille admissible continue éventuellement vide; si elle est non vide la famille \mathcal{D} est finie, le degré d des polynômes-clé ϕ_α est égal au degré du dernier polynôme-clé ϕ_n de la famille $(\phi_l)_{l \in L}$ associée à \mathcal{D} , et pour tout α dans A , la valuation μ_α est la valuation augmentée $\mu_\alpha = [\mu_n; \mu_\alpha(\phi_\alpha) = \gamma_\alpha]$.

DÉFINITION. — Une famille pré-admissible \mathcal{A} pour la valuation ν de K est une famille de valuations $(\mu_i)_{i \in I}$ de $K[x]$, obtenue comme réunion de familles pré-admissibles simples

$$\mathcal{A} = \bigcup_{j \in J} \mathcal{S}^{(j)} = \bigcup_{j \in J} (\mathcal{D}^{(j)}; \mathcal{C}^{(j)})$$

où J est un ensemble dénombrable, $J = \{1, \dots, N\}$ ou $J = \mathbb{N}^*$, et nous définissons J^* par $J^* = \{1, \dots, N-1\}$ si J est fini et par $J^* = J = \mathbb{N}^*$ sinon, vérifiant les mêmes conditions que celles apparaissant dans la définition d'une famille admissible.

Si $\mathcal{A} = (\mu_i)_{i \in I}$ est une famille pré-admissible de valuations de $K[x]$, il existe un sous-ensemble I° de I tel que la sous-famille $\mathcal{A}^\circ = (\mu_i)_{i \in I^\circ}$ de \mathcal{A} est une famille admissible. Pour passer d'une famille pré-admissible à une famille admissible nous utilisons le résultat suivant.

LEMME 5.1 ([11, lemme 6.3]). — Si μ_2 et μ_3 sont deux valuations définies comme valuations augmentées

$$\mu_2 = [\mu_1; \mu_2(\phi_2) = \gamma_2] \quad \text{et} \quad \mu_3 = [\mu_2; \mu_3(\phi_3) = \gamma_3]$$

avec $\deg \phi_2 = \deg \phi_3$ alors ϕ_3 est un polynôme-clé pour la valuation μ_1 , $\gamma_3 > \gamma_2$ et $\mu_3 = [\mu_1; \mu_3(\phi_3) = \gamma_3]$.

Si la famille admissible \mathcal{A}° est la famille admise associée à une valuation ou une pseudo-valuation μ de $K[x]$, nous disons aussi que la famille pré-admissible \mathcal{A} est associée à μ ou converge vers μ .

Nous rappelons la construction de la famille admise $\mathcal{A} = (\mu_i)_{i \in I}$ associée à la valuation μ , si la valuation μ_k n'est pas égale à la valuation μ , l'ensemble

$$\tilde{\Phi}_\mu(\mu_k) = \{f \in K[x] \mid \mu_k(f) < \mu(f)\},$$

est non vide et pour déterminer les valuations μ_l pour $l > k$ nous devons considérer les ensembles suivants

$$\Phi_\mu(\mu_k) = \{\phi \in K[x] \mid \mu_k(\phi) < \mu(\phi), \deg \phi = d_k \text{ et } \phi \text{ unitaire}\},$$

où d_k est le degré minimal des polynômes appartenant à $\tilde{\Phi}_\mu(\mu_k)$, et

$$\Lambda_\mu(\mu_k) = \{\mu(\phi) \mid \phi \in \Phi_\mu(\mu_k)\}.$$

Si l'ensemble $\Lambda_\mu(\mu_k)$ n'a pas de plus grand élément $\bar{\gamma}_k$ alors il est nécessaire de construire une sous-famille continue $\mathcal{C} = (\mu_\alpha)_{\alpha \in A}$ de la famille admise \mathcal{A} , et les polynômes-clés ϕ_α définissant les valuations de la famille \mathcal{C} appartiennent à $\tilde{\Phi}_\mu(\mu_k)$ et donc ont tous le même degré.

Si l'ensemble $\Lambda_\mu(\mu_k)$ a un plus grand élément $\bar{\gamma}_k$ alors on choisit un polynôme ϕ_{k+1} dans $\Phi_\mu(\mu_k)$ vérifiant $\mu(\phi_{k+1}) = \bar{\gamma}_k$ pour définir la nouvelle valuation μ_{k+1} de la famille comme étant la valuation augmentée $\mu_{k+1} = [\mu_k; \mu_{k+1}(\phi_{k+1}) = \gamma_{k+1}]$, en posant $\gamma_{k+1} = \mu(\phi_{k+1}) = \bar{\gamma}_k$. Les valuations μ_k et μ_{k+1} appartiennent à une sous-famille discrète \mathcal{D} de la famille admise \mathcal{A} et si la valuation μ_{k+1} est différente de la valuation μ nous avons l'inégalité stricte $\deg \phi_{k+1} < \deg \phi_l$ pour toute valuation μ_l de la famille \mathcal{A} avec $l > k + 1$.

Mais dans le cas où l'ensemble $\Lambda_\mu(\mu_k)$ a un plus grand élément $\bar{\gamma}_k$ si on s'autorise à choisir un polynôme ϕ_{k+1} dans $\Phi_\mu(\mu_k)$ avec $\mu(\phi_{k+1}) < \bar{\gamma}_k$ pour définir la nouvelle valuation μ_{k+1} , la famille de valuations augmentées itérées que nous construisons ne vérifie plus la condition de croissance stricte des degrés des polynômes-clés, et nous pouvons seulement obtenir une famille pré-admissible associée à μ .

De manière analogue si $\mathcal{C} = (\mu_\alpha)$ est une sous-famille continue de \mathcal{A} telle que l'ensemble

$$\tilde{\Phi}(\mathcal{C}) = \{f \in K[x] \mid \mu_\alpha(f) < \mu_\beta(f) \forall \alpha < \beta \in A\}$$

est non vide nous devons considérer les ensembles

$$\Phi(\mathcal{C}) = \{\phi \in K[x] \mid \phi \in \tilde{\Phi}(\mathcal{C}), \deg \phi = d_{\mathcal{C}} \text{ et } \phi \text{ unitaire}\},$$

où $d_{\mathcal{C}}$ est le degré minimal des polynômes appartenant à $\tilde{\Phi}(\mathcal{C})$, et

$$\Lambda(\mathcal{C}) = \{\mu(\phi) \mid \phi \in \Phi(\mathcal{C})\}.$$

Et de même si l'ensemble $\Lambda(\mathcal{C})$ a un plus grand élément $\bar{\gamma}_{\mathcal{C}}$ alors on choisit un polynôme ϕ_l dans $\Phi(\mathcal{C})$ vérifiant $\mu(\phi_l) = \bar{\gamma}_{\mathcal{C}}$ pour définir la nouvelle valuation μ_l de la famille comme étant la valuation augmentée limite $\mu_l = [(\mu_{\alpha}); \mu_l(\phi_l) = \gamma_l]$, en posant $\gamma_l = \mu(\phi_l) = \bar{\gamma}_{\mathcal{C}}$. Mais si on s'autorise à choisir un polynôme ϕ_l dans $\Phi(\mathcal{C})$ avec $\mu(\phi_l) < \bar{\gamma}_{\mathcal{C}}$, nous obtenons une famille pré-admissible.

Soit μ une valuation ou une pseudo-valuation de $K[x]$ et soit $\mathcal{A} = (\mu_i)_{i \in I}$ une famille admissible, ou pré-admissible, associée à μ . La plus grande sous-famille admissible, ou pré-admissible, ouverte contenue dans \mathcal{A} est appelée la *sous-famille ouverte maximale* de \mathcal{A} , elle est égale à \mathcal{A} si la valuation μ n'est pas bien spécifiée et est égale à la famille \mathcal{A} privée de la valuation μ si la famille \mathcal{A} est complète, c'est-à-dire si la valuation μ est bien spécifiée.

DÉFINITION. — Soit μ une valuation ou une pseudo-valuation de $K[x]$. Une valuation μ' est appelée une valuation approchée de μ si μ' appartient à une famille pré-admissible \mathcal{A} associée à μ .

Nous notons $\text{Appr}(\mu)$ l'ensemble des valuations approchées de μ .

En particulier toute valuation approchée μ' appartient à une famille pré-admissible et par conséquent est bien spécifiée. La valuation μ est ainsi une valuation approchée d'elle-même si et seulement si elle est bien spécifiée. Nous pouvons alors poser la définition suivante.

DÉFINITION. — Soit μ une valuation ou une pseudo-valuation de $K[x]$. Un polynôme ϕ' est appelé un polynôme approché ou une racine approchée de la valuation μ si ϕ' définit une valuation approchée μ' de μ .

Dans le cas où la valuation μ est bien spécifiée et définie par un polynôme ϕ , nous disons aussi que ϕ' est un polynôme approché ou une racine approchée du polynôme ϕ .

Remarque 5.2. — Soit ϕ un polynôme irréductible à coefficients dans un corps valué (K, ν) , alors il existe un nombre fini de valuations μ de l'anneau $K[x]$ qui soient définies par le polynôme ϕ , elles correspondent aux valuations de l'extension algébrique L de K définie par le polynôme ϕ .

Pour chacune de ces valuations μ il existe une notion de racine approchée du polynôme ϕ .

Soit μ une valuation ou une pseudo-valuation bien spécifiée de $K[x]$ et soit ϕ un polynôme qui définit μ , tel que μ soit de la forme $\mu = [\mu_\nu; \mu(\phi) = \gamma]$, où μ_ν est soit une valuation soit une famille continue de valuations, et γ appartient à $\tilde{\Gamma} \cup \{+\infty\}$. Nous pouvons alors définir une section finissante $\Theta(\mu)$ de $\tilde{\Gamma} \cup \{+\infty\}$ de la façon suivante :

$$\Theta(\mu) = \{\theta \in \tilde{\Gamma} \cup \{+\infty\} \mid \theta > \mu'(\phi) \forall \mu' \in \text{Appr}(\mu)\}.$$

Alors nous avons $\gamma \in \Theta(\mu)$ et pour tout $\theta \in \Theta(\mu)$ nous pouvons définir la valuation, ou pseudo-valuation μ_θ par $\mu_\theta = [\mu_\nu; \mu_\theta(\phi) = \theta]$.

Remarque 5.3. — Dans le cas où le corps valué (K, ν) est hensélien la section finissante $\Theta(\mu)$ ne dépend que du polynôme ϕ , et nous la notons Θ_ϕ . En effet il suffit de considérer la pseudo-valuation μ_L de $K[x]$ de noyau (ϕ) associée à l'unique prolongement de ν à l'extension finie $L = K[x]/(\phi)$, et nous avons $\Theta_\phi = \Theta(\mu_L)$.

Grâce au corollaire 3.16 nous pouvons trouver une relation entre la section finissante Θ_ϕ et la section caractéristique Δ_ϕ , mais il n'existe pas de formule simple reliant ces deux sections finissantes.

Nous pouvons définir une relation d'ordre notée \ll sur les valuations de $K[x]$ en posant

$$\mu' \ll \mu \quad \text{si et seulement si} \quad \mu' \text{ est une valuation approchée de } \mu.$$

Cette relation a été introduite dans [17], avec la terminologie μ' est induite par μ et nous avons comparé la relation d'ordre \ll avec la relation d'ordre \leq définie par

$$\mu' \leq \mu \quad \text{si et seulement si} \quad \mu'(f) \leq \mu(f) \text{ pour tout polynôme } f \in K[x].$$

Remarque 5.4. — Soit μ' une valuation de $K[x]$, s'il existe une valuation ou une pseudo-valuation μ différente de μ' telle que nous ayons $\mu' \ll \mu$ ou $\mu' \leq \mu$, la valuation μ' est bien spécifiée (cf. proposition 1.8).

Nous rappelons que si μ_i et μ sont deux valuations distinctes de $K[x]$ vérifiant $\mu_i \leq \mu$ alors tout polynôme ϕ appartenant à $\Phi_\mu(\mu_i)$ est un polynôme-clé pour la valuation μ_i , de plus un polynôme f appartient à $\tilde{\Phi}_\mu(\mu_i)$ si et seulement si f est μ_i -divisible par ϕ .

LEMME 5.5. — Soient μ_i , μ' et μ trois valuations distinctes de $K[x]$ vérifiant $\mu_i \leq \mu' \leq \mu$, alors nous avons l'égalité :

$$\tilde{\Phi}_{\mu'}(\mu_i) = \tilde{\Phi}_\mu(\mu_i).$$

Démonstration. — Nous déduisons de l'inégalité $\mu' \leq \mu$ l'inclusion

$$\tilde{\Phi}_{\mu'}(\mu_i) \subset \tilde{\Phi}_{\mu}(\mu_i).$$

Soient $\phi' \in \tilde{\Phi}_{\mu'}(\mu_i)$ et $\phi \in \tilde{\Phi}_{\mu}(\mu_i)$, comme ϕ' appartient à $\tilde{\Phi}_{\mu'}(\mu_i)$ il est μ_i -divisible par ϕ , et comme ϕ et ϕ' sont des polynômes-clés pour μ_i nous en déduisons qu'ils sont μ_i -équivalents, d'où $\phi' \in \tilde{\Phi}_{\mu}(\mu_i)$ et $\phi \in \tilde{\Phi}_{\mu'}(\mu_i)$. L'égalité cherchée est alors une conséquence de l'égalité

$$\tilde{\Phi}_{\mu'}(\mu_i) = \tilde{\Phi}_{\mu}(\mu_i). \quad \square$$

PROPOSITION 5.6 ([17, proposition 2.18]). — Soient μ et μ' deux valuations de $K[x]$ et supposons que μ' est bien spécifiée, définie par le polynôme ϕ' ; alors nous avons l'équivalence suivante :

$$\mu' \ll \mu \iff \mu' \leq \mu \text{ et } \mu'(\phi') = \mu(\phi').$$

Démonstration. — L'implication $\mu' \ll \mu \Rightarrow \mu' \leq \mu$ et $\mu'(\phi') = \mu(\phi')$ est une conséquence immédiate de la construction d'une famille pré-admissible associée à la valuation μ .

Supposons maintenant que μ et μ' sont deux valuations vérifiant $\mu' \leq \mu$. Alors la valuation μ' est bien spécifiée, toute famille pré-admissible \mathcal{A}' associée à la valuation μ' est de la forme $\mathcal{A}' = (\mu_i)_{i \in I}$ avec I ensemble totalement ordonné ayant un plus grand élément \bar{i} et $\mu' = \mu_{\bar{i}}$. Nous déduisons de la proposition 2.18 de [17] qu'il existe une famille pré-admissible \mathcal{A} associée à la valuation μ qui contient la famille \mathcal{A}'^* obtenue en enlevant μ' de la famille \mathcal{A}' , c'est-à-dire $\mathcal{A}'^* = (\mu_i)_{i \in I^*}$ avec $I^* = I \setminus \{\bar{i}\}$.

Supposons que l'ensemble I^* a un plus grand élément ι^* et que la valuation μ' est la valuation augmentée $\mu' = [\mu_{\iota^*}; \mu'(\phi') = \gamma']$. Alors nous avons $\mu_{\iota^*} \leq \mu' \leq \mu$, les ensembles $\tilde{\Phi}_{\mu'}(\mu_{\iota^*})$ et $\tilde{\Phi}_{\mu}(\mu_{\iota^*})$ sont égaux, en particulier le polynôme ϕ' appartient à $\tilde{\Phi}_{\mu'}(\mu_i) = \tilde{\Phi}_{\mu}(\mu_i)$ et comme par hypothèse γ' est égal à $\mu(\phi')$ la valuation augmentée $\mu' = [\mu_{\iota^*}; \mu'(\phi') = \gamma']$ appartient à une famille pré-admissible associée à la valuation μ .

Dans le cas où l'ensemble I^* n'a pas de plus grand élément, la valuation μ' est une valuation augmentée limite $\mu' = [(\mu_{\alpha})_{\alpha \in A}; \mu'(\phi') = \gamma']$, et de manière analogue, comme $\gamma' = \mu(\phi')$ nous en déduisons que μ' appartient à une famille pré-admissible associée à μ . \square

Nous voulons décrire la notion de valuation approchée en regardant les prolongements des valuations de $K[x]$ à $\overline{K}[x]$. Nous rappelons d'abord que si μ est une valuation bien spécifiée de $K[x]$, nous pouvons lui associer un polynôme ϕ , qui n'est pas unique, et $\delta \in \overline{\Gamma}$ de la manière suivante.

Si $\bar{\mu}$ est un prolongement de la valuation μ à $\overline{K}[x]$, nous pouvons lui associer une boule fermée $B = B(b, \delta)$, où le rayon δ ne dépend pas du

prolongement $\bar{\mu}$ choisi, mais uniquement de la valuation μ . Alors pour tout b dans B vérifiant $\deg_K(b) = \deg_K(B)$, le polynôme irréductible de b sur K est un polynôme ϕ qui définit la valuation μ .

DÉFINITION. — Soit (K, ν) un corps valué hensélien, et soient ϕ et ϕ' deux polynômes irréductibles de $K[x]$, alors nous définissons la ν -distance de ϕ à ϕ' par

$$\text{dist}_\nu(\phi, \phi') = \text{Sup}(\bar{\nu}(b - b') \mid b \in \text{Rac}(\phi) \text{ et } b' \in \text{Rac}(\phi')),$$

où $\bar{\nu}$ est le prolongement de ν à \bar{K} et où $\text{Rac}(\phi)$ et $\text{Rac}(\phi')$ sont les ensembles des racines respectivement des polynômes ϕ et ϕ' .

Nous pouvons alors énoncer le résultat suivant.

PROPOSITION 5.7. — Soient μ et μ' deux valuations bien spécifiées distinctes de $K[x]$, définies respectivement par les polynômes ϕ et ϕ' et associées respectivement aux valeurs δ et δ' dans $\bar{\Gamma}$. Alors nous avons l'équivalence suivante :

$$\mu' \ll \mu \iff \text{dist}_\nu(\phi, \phi') = \delta' < \delta.$$

Démonstration. — Nous choisissons $b \in \text{Rac}(\phi)$ et $b' \in \text{Rac}(\phi')$ vérifiant $\bar{\nu}(b - b') = \text{dist}_\nu(\phi, \phi')$, et nous considérons les prolongements $\bar{\mu}$ et $\bar{\mu}'$ des valuations respectives μ et μ' associés aux boules fermées $B = B(b, \delta)$ et $B' = B(b', \delta')$, c'est-à-dire $\bar{\mu} = \omega_B$ et $\bar{\mu}' = \omega_{B'}$.

Nous supposons d'abord que nous avons $\text{dist}_\nu(\phi, \phi') = \delta' < \delta$, de l'hypothèse $\bar{\nu}(b - b') = \delta' < \delta$ nous déduisons l'inclusion $B \subset B'$, d'où l'inégalité $\bar{\mu} \leq \bar{\mu}'$, et par conséquent $\mu \leq \mu'$. Il nous reste à montrer que nous avons $\mu'(\phi') = \mu(\phi)$, et pour cela nous allons montrer que pour toute racine c' de ϕ' nous avons l'égalité $\omega_B(x - c') = \omega_{B'}(x - c')$. Remarquons d'abord que c' n'appartient pas à B car nous avons $\bar{\nu}(b - c') \leq \text{dist}_\nu(\phi, \phi') < \delta$, d'où $\omega_B(x - c') = \bar{\nu}(b - c')$.

Si c' n'appartient pas à B' alors nous avons $\omega_{B'}(x - c') = \bar{\nu}(b' - c') = \bar{\nu}(b - c')$ car $B' = B(b, \delta')$, et si c' appartient à B' nous avons $\omega_{B'}(x - c') = \delta'$ et $\bar{\nu}(b - c') \geq \delta'$, car $B' = B(b, \delta')$, et $\bar{\nu}(b - c') \leq \delta' = \text{dist}_\nu(\phi, \phi')$.

Nous supposons maintenant que μ' est une valuation approchée de la valuation μ . Alors si nous choisissons le prolongement $\bar{\mu} = \omega_B$ de la valuation μ , d'après le théorème 3.19 nous savons qu'il existe un prolongement $\bar{\mu}'$ de la valuation μ' qui vérifie $\bar{\mu}' \leq \bar{\mu}$, et en particulier la boule B' associée à la valuation $\bar{\mu}'$ contient la racine b' de ϕ' telle que $\bar{\nu}(b - b') = \text{dist}_\nu(\phi, \phi')$ et nous avons les inégalités $\delta' \leq \bar{\nu}(b - b') < \delta$.

Par hypothèse nous avons $\mu(\phi') = \mu'(\phi')$, par conséquent comme $\bar{\mu}' \leq \bar{\mu}$ pour toute racine c' de ϕ' nous devons avoir l'égalité $\bar{\mu}'(x - c') = \bar{\mu}(x - c')$, en particulier $\delta' = \bar{\mu}'(x - b') = \bar{\mu}(x - b') = \bar{\nu}(b - b') = \text{dist}_{\nu}(\phi, \phi')$. \square

COROLLAIRE 5.8. — *Soit μ une valuation bien spécifiée de $K[x]$ définie par le polynôme ϕ et soit ϕ' un polynôme unitaire irréductible de $K[x]$ vérifiant $\deg \phi' < \deg \phi$. Alors ϕ' est un polynôme approché de la valuation μ si et seulement si $\text{dist}_{\nu}(\phi, \phi')$ appartient à la section finissante $\Delta_{\phi'}$.*

Démonstration. — De l'inégalité $\deg \phi' < \deg \phi$ et comme la valuation μ est définie par le polynôme ϕ nous déduisons que nous avons $\text{dist}_{\nu}(\phi, \phi') < \delta$.

Alors le polynôme ϕ' est un polynôme approché si et seulement si il existe une valuation bien spécifiée μ' définie par ϕ' et la valeur $\delta' = \text{dist}_{\nu}(\phi, \phi')$, et le résultat est une conséquence immédiate de la proposition 4.7. \square

Pour tout polynôme f de $K[x]$ et pour tout entier $b \geq 0$, nous définissons la b -ième dérivée formelle de f par

$$\partial_b f = \frac{\partial^b f}{b! \partial x^b} = \frac{1}{b!} \left(\frac{\partial}{\partial x} \right)^b f.$$

Nous rappelons que $\frac{\partial}{\partial x}$ est la dérivation d de $K[x]$ dans $K[x]$ définie par $d(x) = 1$, où une dérivation est une application K -linéaire d vérifiant la règle de Leibniz $d(fg) = fd(g) + gd(f)$. En particulier nous avons le développement de Taylor :

$$f(x + h) = \sum_{b \geq 0} \partial_b f(x) h^b.$$

Nous définissons alors $\tilde{\varepsilon}_{\mu}(f)$ par

$$\tilde{\varepsilon}_{\mu}(f) = \text{Sup} \left(\frac{\mu(f) - \mu(\partial_b f)}{b}; 1 \leq b \leq \deg f \right)$$

Nous rappelons que nous avons défini l'étendue $\varepsilon_{\mu}(f)$ d'un polynôme f de $K[x]$ par

$$\varepsilon_{\mu}(f) = \text{Sup} (\bar{\mu}(x - a); a \text{ racine de } f \text{ dans } \bar{K}),$$

où $\bar{\mu}$ est une extension de la valuation μ à l'anneau $\bar{K}[x]$, et nous avons montré que $\varepsilon_{\mu}(f)$ est indépendant de cette extension.

PROPOSITION 5.9 ([14]). — *Pour tout polynôme f nous avons l'égalité*

$$\varepsilon_{\mu}(f) = \tilde{\varepsilon}_{\mu}(f).$$

Démonstration. — Nous pouvons supposer que le polynôme f est unitaire de degré $d \geq 1$, et nous écrivons $f(x) = \prod_{i=1}^d (x - a_i)$, où les racines a_i de f dans \overline{K} vérifient

$$\bar{\mu}(x - a_1) \geq \bar{\mu}(x - a_2) \geq \dots \geq \bar{\mu}(x - a_{d-1}) \geq \bar{\mu}(x - a_d).$$

Pour tout entier b , $0 \leq b \leq \deg f$, nous avons l'égalité

$$\partial_b f(x) = \sum_{\substack{I \subset \{1, \dots, d\} \\ \#I = b}} \prod_{i \notin I} (x - a_i),$$

dont nous déduisons :

$$\mu(f) - \mu(\partial_b f) = -\mu \left(\frac{\partial_b f}{f} \right) = -\bar{\mu} \left(\sum_{I \subset \{1, \dots, d\}} \prod_{i \in I} (x - a_i)^{-1} \right),$$

d'où l'inégalité :

$$\frac{\mu(f) - \mu(\partial_b f)}{b} \leq \frac{1}{b} \text{Sup} \left(\sum_{i \in I} \bar{\mu}(x - a_i); I \subset \{1, \dots, d\} \text{ et } \#I = b \right) \leq \delta_{\bar{\mu}}(f).$$

Soit c le nombre de racines a de f dans \overline{K} telles que nous ayons l'égalité $\delta_{\bar{\mu}}(f) = \bar{\mu}(x - a)$, c'est-à-dire nous avons

$$\delta_{\bar{\mu}}(f) = \bar{\mu}(x - a_1) = \dots = \bar{\mu}(x - a_c) > \bar{\mu}(x - a_{c+1}) \geq \dots \geq \bar{\mu}(x - a_d).$$

Comme

$$\bar{\mu} \left(\prod_{i \in I} (x - a_i)^{-1} \right) < \bar{\mu} \left(\prod_{i=1}^c (x - a_i)^{-1} \right)$$

pour tout sous-ensemble I avec $\#I = c$ et $I \neq \{1, \dots, c\}$, nous avons pour $b = c$ l'égalité :

$$\begin{aligned} \frac{\mu(f) - \mu(\partial_c f)}{c} &= \frac{1}{c} \text{Sup} \left(\sum_{i \in I} \bar{\mu}(x - a_i); I \subset \{1, \dots, d\} \text{ and } \#I = c \right) \\ &= \delta_{\bar{\mu}}(f). \end{aligned} \quad \square$$

THÉOREME 5.10. — Soit ϕ' un polynôme vérifiant $\deg \phi' < \deg \phi$, alors nous avons l'égalité

$$\text{dist}_{\nu}(\phi, \phi') = \varepsilon_{\mu}(\phi')$$

pour toute valuation bien spécifiée μ de $K[x]$ définie par le polynôme ϕ .

Démonstration. — Nous remarquons d'abord que nous avons l'égalité

$$\text{dist}_{\nu}(\phi, \phi') = \text{Sup}(\bar{\nu}(b - b') \mid b' \in \text{Rac}(\phi')),$$

où b est une racine quelconque du polynôme ϕ . En effet le groupe de Galois $G = \text{Gal}(\overline{K}/K)$ agit transitivement sur les racines de ϕ et ϕ' et pour tout $\sigma \in G$ nous avons $\bar{\nu} \circ \sigma = \bar{\nu}$.

Toute extension $\bar{\mu}$ de la valuation μ à $\overline{K}[x]$ est une valuation de la forme $\bar{\mu} = \omega_B$ où B est une boule fermée $B(b, \delta)$ telle que b est une racine du polynôme ϕ définissant μ et telle que $\deg_K(B(b, \delta)) = \deg \phi$. En particulier comme nous avons supposé $\deg \phi' < \deg \phi$, la boule B ne contient aucune racine de ϕ' , par conséquent pour tout $b' \in \text{Rac}(\phi')$ nous avons $\bar{\mu}(x - b') = \bar{\nu}(b - b')$, d'où le résultat. \square

Rappelons la définition de polynôme-clé abstrait donnée par M. Spivakovsky :

DÉFINITION. — Soit ϕ un polynôme unitaire de $K[x]$, alors ϕ est polynôme approché abstrait pour la valuation μ si pour tout polynôme f satisfaisant

$$\varepsilon_\mu(f) \geq \varepsilon_\mu(\phi),$$

nous avons $\deg(f) \geq \deg(\phi)$.

Nous retrouvons alors le résultat de Decaup, Mahboub et Spivakovsky [4].

COROLLAIRE 5.11. — Soit μ une valuation bien spécifiée de $K[x]$ définie par un polynôme ϕ , et soit ϕ' un polynôme unitaire de $K[x]$ vérifiant $\deg \phi' < \deg \phi$, alors ϕ' est un polynôme approché de la valuation μ si et seulement si ϕ' est un polynôme-clé abstrait pour la valuation μ .

Démonstration. — D'après le corollaire 5.8, le polynôme ϕ' est un polynôme approché de la valuation μ si et seulement si $\text{dist}_\nu(\phi, \phi')$ appartient à la section caractéristique $\Delta_{\phi'}$, \square

Nous gardons la terminologie *polynôme-clé* telle qu'elle a été introduite par S. MacLane dans les deux articles [11] et [12] de 1936, et pour les polynômes vérifiant la propriété précédente nous préférons utiliser la terminologie *polynôme approché* par analogie avec la notion de *racine approchée* introduite par Abhyankar et Moh [1, 2], de plus le corollaire 5.8 justifie cette terminologie car les polynômes approchés sont des polynômes suffisamment proches du polynôme ϕ dans le sens donné par la distance dist_ν .

6. Annexe : Suites pseudo-convergentes et extension immédiate

Dans cette partie nous allons montrer comment il est possible d'interpréter les résultats de Kaplansky sur les familles pseudo-convergentes et

les extensions immédiates [7] à partir des notions de familles admissibles continues et de valuations augmentées limites.

Soit $\mathcal{C} = (\mu_\alpha)_{\alpha \in A}$ une famille continue de valuations, nous notons respectivement $(\phi_\alpha)_{\alpha \in A}$ et $(\gamma_\alpha)_{\alpha \in A}$ les familles de polynômes-clés et de valeurs dans Γ associées. Nous pouvons supposer que l'ensemble A a un plus petit élément ϑ_0 , nous notons μ la valuation μ_{ϑ_0} et toute valuation μ_α pour $\alpha > \vartheta_0$ est la valuation augmentée $\mu_\alpha = [\mu; \mu_\alpha(\phi_\alpha) = \gamma_\alpha]$, et nous notons d le degré des polynômes ϕ_α . Rappelons le résultat suivant qui décrit le comportement des valeurs $\mu_\alpha(f)$ pour un polynôme f de $K[x]$ quand α parcourt l'ensemble A , et qui est une conséquence directe du théorème 1.19 de [19].

THÉORÈME 6.1. — *Soit f dans $K[x]$ de degré m , il existe un entier $v = v_{\mathcal{C}}(f)$ vérifiant $0 \leq v \leq k = [m/d]$, une famille $(\alpha_i)_{0 \leq i \leq j}$ dans A avec $\vartheta_0 = \alpha_0 \leq \alpha_1 \leq \dots \leq \alpha_j$ et δ dans Γ , où $j = k - v$, tels que*

$$\mu_\alpha(f) = \delta + \sum_{i=1}^j \text{Inf}(\gamma_\alpha, \gamma_{\alpha_i}) + v\gamma_\alpha.$$

En particulier f appartient à l'ensemble $\tilde{\Phi}(\mathcal{C}) = \{f \in K[x] \mid \mu_\alpha(f) < \mu_\beta(f), \forall \alpha < \beta \in A\}$ si et seulement si $v_{\mathcal{C}}(f) > 0$.

COROLLAIRE 6.2. — *La fonction*

$$\begin{aligned} \mu.(f): A &\longrightarrow \Gamma \\ \alpha &\longmapsto \mu_\alpha(f) \end{aligned}$$

est linéaire par morceaux et concave.

Plus précisément nous avons

$$\mu_\alpha(f) = \begin{cases} \delta_i + (k+1-i)\gamma_\alpha & \text{pour } \alpha_{i-1} \leq \alpha \leq \alpha_i \text{ et } 1 \leq i \leq j, \\ \delta_{j+1} + (k-j)\gamma_\alpha & \text{pour } \alpha \geq \alpha_j, \end{cases}$$

où $\delta_i = \delta + \sum_{l=1}^{i-1} \gamma_l$.

Soit f dans $K[x]$ et pour tout α nous considérons la division euclidienne de f par ϕ_α que nous notons $f = q_\alpha \phi_\alpha + r_\alpha$. Comme le polynôme ϕ_β est un polynôme-clé pour la valuation μ_α pour tout $\beta \geq \alpha$, d'après le lemme 1.1 de [19], nous avons l'inégalité :

$$\mu(r_\beta) = \mu_\alpha(r_\beta) \geq \mu_\alpha(f),$$

avec l'inégalité stricte si et seulement si f est μ_α -divisible par ϕ_β .

THÉORÈME 6.3. — Soit f un polynôme dans $K[x]$ et soit $f = q_\alpha \phi_\alpha + r_\alpha$ la division euclidienne de f par le polynôme-clé ϕ_α .

- (1) Si f n'appartient pas à $\tilde{\Phi}(\mathcal{C})$, il existe α_1 tel que pour tout $\alpha > \alpha_1$ nous avons

$$\mu_\alpha(f) = \mu(r_\alpha).$$

- (2) Si f appartient à $\tilde{\Phi}(\mathcal{C})$, il existe α_1 tel que pour tout $\beta > \alpha > \alpha_1$ nous avons

$$\mu_\alpha(f) \leq \mu(r_\alpha) < \mu_\beta(f).$$

COROLLAIRE 6.4.

- (1) Si f n'appartient pas à $\tilde{\Phi}(\mathcal{C})$, il existe α_1 tel que pour tout $\beta > \alpha > \alpha_1$ nous avons $\mu(r_\beta) = \mu(r_\alpha)$.
- (2) Si f appartient à $\tilde{\Phi}(\mathcal{C})$, il existe α_1 tel que pour tout $\beta > \alpha > \alpha_1$ nous avons $\mu(r_\beta) > \mu(r_\alpha)$.

Démonstration du théorème 6.3. — Si f n'appartient pas à $\tilde{\Phi}(\mathcal{C})$, il existe α_1 tel que pour tout $\beta \geq \alpha \geq \alpha_1$ nous avons l'égalité $\mu_\beta(f) = \mu_\alpha(f)$, et de plus le polynôme f n'est pas μ_α -divisible par ϕ_β , d'où l'égalité $\mu(r_\beta) = \mu_\alpha(f)$.

Si f appartient à $\tilde{\Phi}(\mathcal{C})$, nous déduisons du corollaire 6.2 qu'il existe $\alpha_{[f]}$ dans A , $\delta_{[f]}$ dans Γ et un entier $v_{[f]} \geq 1$ tels que pour tout $\beta \geq \alpha_{[f]}$ nous avons l'égalité $\mu_\beta(f) = \delta_{[f]} + v_{[f]}\gamma_\beta$.

Pour tout $\omega \leq \alpha$, le polynôme ϕ_α est un polynôme-clé pour la valuation μ_ω , par conséquent nous avons $\mu_\omega(f) \leq \mu(r_\alpha)$, de plus pour $\omega < \alpha$ nous avons l'inégalité $\mu_\omega(f) < \mu_\alpha(f)$, par conséquent f est μ_ω -divisible par ϕ_α d'où l'inégalité $\mu(r_\alpha) > \mu_\omega(f)$. Nous en déduisons que pour tout ω avec $\alpha_{[f]} < \omega < \alpha$ nous avons $\mu_\omega(q_\alpha) = \delta_{[f]} + (v_{[f]} - 1)\gamma_\omega$.

Nous déduisons du corollaire 6.2 que nous avons $\mu_\beta(q_\alpha) \leq \delta_{[f]} + (v_{[f]} - 1)\gamma_\beta$ pour tout $\beta > \alpha_{[f]}$, par conséquent pour tout $\beta > \alpha$ nous avons l'inégalité stricte

$$\mu_\beta(q_\alpha \phi_\alpha) \leq \delta_{[f]} + (v_{[f]} - 1)\gamma_\beta + \gamma_\alpha < \delta_{[f]} + v_{[f]}\gamma_\beta = \mu_\beta(f),$$

et nous en déduisons $\mu_\beta(f) > \mu(r_\alpha)$. \square

COROLLAIRE 6.5. — Si le groupe des valeurs Γ ne possède pas de plus petit élément strictement positif, c'est-à-dire si le sous-groupe isolé minimal de Γ n'est pas discret, il existe α_1 tel que pour tout $\alpha \geq \alpha_1$ nous avons

$$\mu_\alpha(f) = \mu(r_\alpha).$$

Démonstration. — Grâce au lemme 1.17 de [19] nous pouvons choisir la famille \mathcal{C} de telle façon que toute valeur de Γ dans un certain intervalle,

supérieure à $\mu_\alpha(f)$ soit atteinte par $\mu_\beta(f)$, pour un β dans A . Par conséquent si Γ ne possède pas de plus petit élément strictement positif nous déduisons le résultat des inégalités $\mu_\beta(f) > \mu(r_\alpha) \geq \mu_\alpha(f)$. \square

Remarque 6.6. — Nous pouvons déduire de la proposition 4.7 de [5] que l'égalité $\mu_\alpha(f) = \mu(r_\alpha)$, pour α suffisamment grand, est vérifiée sans aucune hypothèse sur le groupe des valeurs Γ .

Nous avons vu qu'il est équivalent de se donner une famille pseudo-convergente $(a_\alpha)_{\alpha \in A}$ d'éléments de K et de se donner une famille continue $\mathcal{C} = (\mu_\alpha)_{\alpha \in A}$ de valuations de $K[x]$ telle que les polynômes ϕ_α qui la définissent sont de degré un, c'est-à-dire sont de la forme $\phi_\alpha = x - a_\alpha$ (cf. proposition 2.11). Dans ce cas pour tout polynôme f de $K[x]$ le reste de la division de f par le polynôme-clé $\phi_\alpha = x - a_\alpha$ est égal à $f(a_\alpha)$.

Nous déduisons alors de ce qui précède le résultat suivant.

COROLLAIRE 6.7. — *Soit $(a_\alpha)_{\alpha \in A}$ une famille pseudo-convergente d'éléments de K , et soit f un polynôme de $K[x]$, alors il existe α_1 tel que pour tout $\beta > \alpha > \alpha_1$ nous avons :*

- (1) *si f n'appartient pas à $\tilde{\Phi}(\mathcal{C})$, alors $\nu(f(a_\beta)) = \nu(f(a_\alpha))$;*
- (2) *si f appartient à $\tilde{\Phi}(\mathcal{C})$, alors $\nu(f(a_\beta)) > \nu(f(a_\alpha))$.*

Nous considérons maintenant un corps valué (K, ν) et nous voulons étudier ses extensions immédiates, c'est-à-dire les extensions de corps valués $(L, \nu_L)/(K, \nu)$ telles que les extensions de groupes $\Gamma_{\nu_L}/\Gamma_\nu$ et les extensions résiduelles $\kappa_{\nu_L}/\kappa_\nu$ soient triviales.

Nous remarquons d'abord que d'après la proposition 2.5 si μ est une valuation bien spécifiée de $K(x)$ vérifiant $\Gamma_\nu = \Gamma_\mu$ l'extension résiduelle κ_μ/κ_ν est de degré de transcendance un, en particulier n'est pas triviale. Par conséquent les extensions monogènes immédiates (L, ν_L) de (K, ν) sont définies soit par des pseudo-valuations, c'est le cas d'une extension algébrique L de K , soit par une valuation de $K[x]$ qui n'est pas bien spécifiée, c'est le cas $L = K(x)$.

PROPOSITION 6.8. — *Si (L, ν_L) est une extension immédiate monogène de (K, ν) , la famille admise \mathcal{A} associée à la valuation ou pseudo-valuation μ de $K[x]$ définie par ν_L est de la forme suivante :*

- (1) *si L est une extension transcendante pure, $L = K(x)$, la famille \mathcal{A} est une famille admissible continue $\mathcal{C} = (\mu_\alpha)_{\alpha \in A}$ telle que les polynômes ϕ_α sont de degré un et telle que l'ensemble $\tilde{\Phi}(\mathcal{C})$ est vide ;*

- (2) si L est une extension algébrique, $L = K(a) \simeq K[x]/(\phi)$ avec ϕ polynôme irréductible de a sur K , la famille \mathcal{A} est composée d'une famille admissible continue $\mathcal{C} = (\mu_\alpha)_{\alpha \in A}$ telle que les polynômes ϕ_α sont de degré un et de la pseudo-valuation μ , où μ est obtenue comme valuation augmentée-limite de la famille \mathcal{C} associée au polynôme-clé limite ϕ .

Démonstration. — Si la famille \mathcal{A} associée à la valuation, ou pseudo-valuation μ contient un couple de valuations successives (μ_{i-1}, μ_i) , c'est-à-dire telle que la valuation μ_i est obtenue comme valuation augmentée $\mu_i = [\mu_{i-1}; \mu_i(\phi_i) = \gamma_i]$, nous déduisons de la proposition 2.5 et de la démonstration de la proposition 2.9 de [20] que nous avons l'inégalité

$$e(\nu_L/\nu)f(\nu_L/\nu) \geq \deg \phi_i / \deg \phi_{i-1},$$

où nous notons respectivement $e(\nu_L/\nu)$ et $f(\nu_L/\nu)$ l'indice de ramification et le degré de l'extension résiduelle de $(L, \nu_L) = /(K, \nu)$, et où ϕ_{i-1} et ϕ_i sont les polynômes définissant les valuations μ_{i-1} et μ_i .

En particulier si l'extension $(L, \nu_L)/(K, \nu)$ est immédiate nous en déduisons que pour tout couple de valuations successives (μ_{i-1}, μ_i) de la famille \mathcal{A} nous avons l'égalité $\deg \phi_i = \deg \phi_{i-1}$, par conséquent que la famille ne contient pas de partie discrète.

Dans le cas où la valuation μ n'est pas bien spécifiée, la famille admise \mathcal{A} associée à μ est ouverte, elle est constituée d'une seule famille simple \mathcal{S} qui est de la forme $\mathcal{S} = ((\mu_\alpha)_{\alpha \in A})$, avec $\tilde{\Phi}((\mu_\alpha)_{\alpha \in A}) = \emptyset$ (cf. remarque 1.4), et de plus nous déduisons de ce qui précède, et du fait que le polynôme ϕ_1 associé à la première valuation de toute famille admissible est de degré un, que tous les polynômes-clés ϕ_α sont de degré un.

Dans le cas où la valuation μ est bien spécifiée, μ est une pseudo-valuation obtenue comme valuation augmentée limite de la famille continue $\mathcal{S} = ((\mu_\alpha)_{\alpha \in A})$, telle que les polynômes-clés ϕ_α sont de degré un, $\mu = [(\mu_\alpha)_{\alpha \in A}; \mu(\phi) = +\infty]$. \square

PROPOSITION 6.9. — Soit (L, ν_L) une extension immédiate monogène de (K, ν) et soit $\mathcal{C} = (\mu_\alpha)_{\alpha \in A}$ la famille admissible continue associée définie à la proposition 6.8. Alors un polynôme f n'appartient pas à l'ensemble $\tilde{\Phi}(\mathcal{C})$ si et seulement si il existe α dans A tel que nous ayons $\nu_L(f) = \nu(f(a_\beta))$ pour tout $\beta \geq \alpha$.

Démonstration. — Si le polynôme f n'appartient pas à l'ensemble $\tilde{\Phi}(\mathcal{C})$ il existe α dans A tel que pour tout $\beta \geq \alpha$ nous ayons $\mu_\alpha(f) = \mu_\beta(f) = \nu_L(f)$, c'est-à-dire tel que f n'est pas μ_α -divisible par ϕ_β . Par conséquent d'après le corollaire 6.7, nous avons pour tout $\beta \geq \alpha$ l'égalité $\nu_L(f) = \nu(f(a_\beta))$. \square

Nous pouvons déduire de ce qui précède les résultats suivants, qui sont des reformulations des théorèmes 2 et 3 de [7].

COROLLAIRE 6.10. — Soit (L, ν_L) une extension immédiate monogène de (K, ν) et soit $(a_\alpha)_{\alpha \in A}$ la famille pseudo-convergente associée, alors l'extension L/K est transcendante si et seulement si pour tout f dans $K[x]$ il existe α dans A tel que nous ayons $\nu_L(f) = \nu(f(a_\beta))$ pour tout $\beta \geq \alpha$.

Démonstration. — Nous sommes dans le cas d'une extension transcendante si et seulement si l'ensemble $\tilde{\Phi}(\mathcal{C})$ est vide, c'est-à-dire si et seulement si pour tout f dans $K[x]$ il existe α dans A tel que nous ayons $\mu_\beta(f) = \nu(f(a_\beta))$ pour tout $\beta \geq \alpha$. \square

COROLLAIRE 6.11. — Soit (L, ν_L) une extension immédiate monogène de (K, ν) et soit $(a_\alpha)_{\alpha \in A}$ la famille pseudo-convergente associée, et nous supposons que l'extension L/K est algébrique. Alors si ϕ est un polynôme vérifiant $\nu(f(a_\beta)) > \nu(f(a_\alpha))$ de degré minimal, l'extension L est l'extension $L = K(z)$ où z est une racine du polynôme ϕ .

De plus pour tout y dans L il existe $r(x)$ dans $K[x]$ avec $\deg r < \deg \phi$ tel que $y = r(z)$ et la valuation ν_L est définie par $\nu_L(y) = \nu(r(a_\alpha))$ pour α assez grand.

Démonstration. — Nous sommes dans le cas d'une extension algébrique si et seulement si l'ensemble $\tilde{\Phi}(\mathcal{C})$ est non vide, tout polynôme unitaire ϕ de degré minimal dans $\tilde{\Phi}(\mathcal{C})$ est un polynôme-clé limite pour la famille continue $\mathcal{C} = (\mu_\alpha)_{\alpha \in A}$ et la pseudo-valuation augmentée limite μ de $K[x]$ définie par $\mu = [(\mu_\alpha)_{\alpha \in A}; \mu(\phi) = +\infty]$ induit une valuation ν_L de l'extension $L = K[x]/(\phi)$ telle que l'extension est immédiate.

De plus tout élément y de L est défini par un polynôme r de degré strictement inférieur au degré de ϕ , par conséquent r n'appartient pas à $\tilde{\Phi}(\mathcal{C})$ et nous trouvons $\nu_L(y) = \mu(r) = \mu_\alpha(r)$ pour α assez grand. \square

BIBLIOGRAPHIE

- [1] S. S. ABHYANKAR & T.-T. MOH, « Newton-Puiseux expansion and generalized Tschirnhausen transformation. I », *J. Reine Angew. Math.* **260** (1973), p. 47-83.
- [2] ———, « Newton-Puiseux expansion and generalized Tschirnhausen transformation. II », *J. Reine Angew. Math.* **261** (1973), p. 29-54.
- [3] V. ALEXANDRU & N. POPESCU, « Sur une classe de prolongements à $K(X)$ d'une valuation sur un corps K », *Rev. Roum. Math. Pures Appl.* **33** (1988), n° 5, p. 393-400.
- [4] J. DECAUP, W. MAHBOUB & M. SPIVAKOVSKY, « Abstract key polynomials and comparison theorems with the key polynomials of MacLane-Vaquié », *Ill. J. Math.* **62** (2018), n° 1-4, p. 253-270.

- [5] F. J. HERRERA GOVANTES, W. MAHBOUB, M. Á. OLALLA ACOSTA & M. SPIVAKOVSKY, « Key polynomials for simple extensions of valued fields », *J. Singul.* **25** (2022), p. 197-267.
- [6] F. J. HERRERA GOVANTES, M. Á. OLALLA ACOSTA & M. SPIVAKOVSKY, « Valuations in algebraic field extensions », *J. Algebra* **312** (2007), n° 2, p. 1033-1074.
- [7] I. KAPLANSKY, « Maximal fields with valuations », *Duke Math. J.* **9** (1942), p. 303-321.
- [8] F.-V. KUHLMANN, « Value groups, residue fields, and bad places of rational function fields », *Trans. Am. Math. Soc.* **356** (2004), n° 11, p. 4559-4600.
- [9] D. T. LÊ, « La monodromie n'a pas de points fixes », *J. Fac. Sci., Univ. Tokyo, Sect. I A* **22** (1975), p. 409-427.
- [10] ———, « The geometry of the monodromy theorem », in *C. P. Ramanujam – A tribute* (K. G. Ramanathan, éd.), Tata Institute of Fundamental Research Studies in Mathematics, vol. 8, Springer, 1978, p. 157-173.
- [11] S. MACLANE, « A construction for absolute values in polynomial rings », *Trans. Am. Math. Soc.* **40** (1936), p. 363-395.
- [12] ———, « A construction for prime ideals as absolute values of an algebraic field », *Duke Math. J.* **2** (1936), p. 492-510.
- [13] M. NAGATA, « A theorem on valuation rings and its applications », *Nagoya Math. J.* **29** (1967), p. 85-91.
- [14] J. NOVACOSKI, « Key polynomials and minimal pairs », *J. Algebra* **523** (2019), p. 1-14.
- [15] J. OHM, « The ruled residue theorem for simple transcendental extensions of valued fields », *Proc. Am. Math. Soc.* **89** (1983), p. 16-18.
- [16] A. OSTROWSKI, « Untersuchungen zur arithmetischen Theorie der Körper », *Math. Z.* **39** (1935), n° 1, p. 269-404.
- [17] M. VAQUIÉ, « Famille admise associée à une valuation de $K[x]$ », in *Singularités Franco-Japonaises, Séminaires et Congrès*, vol. 10, Société Mathématique de France, 2005, p. 391-428.
- [18] ———, « Algèbre graduée associée à une valuation de $K[x]$ », in *Singularities in geometry and topology 2004. Proceedings of the 3rd Franco-Japanese colloquium on singularities, Hokkaido, Japan, September 13–18, 2004*, Adv. Stud. Pure Math., vol. 46, Mathematical Society of Japan, 2007, p. 259-271.
- [19] ———, « Extension d'une valuation », *Trans. Am. Math. Soc.* **359** (2007), n° 7, p. 3439-3481.
- [20] ———, « Famille admissible de valuations et défaut d'une extension », *J. Algebra* **311** (2007), n° 2, p. 859-876.
- [21] ———, « Extensions de valuation et polygone de Newton », *Ann. Inst. Fourier* **58** (2008), n° 7, p. 2503-2541.
- [22] ———, « Famille admise associée à une valuation de $K(X)$ », *Bull. Lond. Math. Soc.* **52** (2020), n° 5, p. 977-992.

Manuscrit reçu le 19 mars 2021,
révisé le 21 juin 2023,
accepté le 2 octobre 2023.

Michel VAQUIÉ
Institut de Mathématiques de Toulouse
UMR 5219 CNRS
Université de Toulouse 118 route de Narbonne
31062 Toulouse Cedex 9 (France)
michel.vaquie@math.univ-toulouse.fr