Université Grenoble Alpes

ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

Jean-François Jaulent

Annulateurs circulaires des groupes de classes logarithmiques

Article à paraître, mis en ligne le 3 juillet 2024, 17 p.

Les *Annales de l'Institut Fourier* sont membres du Centre Mersenne pour l'édition scientifique ouverte
www.centre-mersenne.org e-ISSN : 1777-5310

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
Article à paraître
Mis en ligne le 3 juillet 2024.

ANNULATEURS CIRCULAIRES DES GROUPES DE CLASSES LOGARITHMIQUES

par Jean-François JAULENT

Résumé. — Étant donnés un corps abélien réel F de groupe G_F et un nombre premier impair ℓ, nous définissons le sous-groupe circulaire $\tilde{\mathcal{E}}_F^\circ$ du pro-ℓ-groupe des unités logarithmiques $\tilde{\mathcal{E}}_F$ et nous montrons que pour tout morphisme galoisien ρ de $\tilde{\mathcal{E}}_F$ dans $\mathbb{Z}_\ell[G_F]$, l'image $\rho(\tilde{\mathcal{E}}_F^\circ)$ annule le ℓ-groupe des classes logarithmiques $\tilde{\mathcal{C}\ell}$. Nous en déduisons une preuve de l'analogue logarithmique de la conjecture de Solomon.

Abstract. — Given a real abelian field F with group G_F and an odd prime number ℓ, we define the circular subgroup $\tilde{\mathcal{E}}_F^\circ$ of the pro-ℓ-group of logarithmic units $\tilde{\mathcal{E}}_F$ and we show that for any Galois morphism $\rho : \tilde{\mathcal{E}}_F \to \mathbb{Z}_\ell[G_F]$, the ideal $\rho(\tilde{\mathcal{E}}_F^\circ)$ annihilates the ℓ-group of logarithmic classes $\tilde{\mathcal{C}\ell}$. We deduce from this a proof of the logarithmic version of Solomon conjecture.

1. Introduction

Les ℓ-groupes de classes logarithmiques $\widetilde{\mathcal{C}\ell}_F$ introduits dans [11] sont des invariants arithmétiques canoniques attachés à un corps de nombres F pour chaque nombre premier ℓ. Leur calcul effectif est aujourd'hui implanté dans le système de calcul formel `pari/gp` (*cf.* [2]).

Ces groupes, qui sont finis sous la conjecture de Gross–Kuz'min, donc inconditionnellement pour F abélien, s'apparentent aux groupes de classes de diviseurs des corps de fonctions (ils s'obtiennent comme quotient du groupe des diviseurs de degré nul par son sous-groupe principal), sont liés aux noyaux sauvages de la K-théorie et interviennent naturellement en théorie d'Iwasawa. Par exemple, la conjecture de Greenberg sur la trivialité des invariants structurels attachés aux ℓ-groupes de classes dans la $\mathbb{Z}_\ell$-extension

Mots-clés : Annulateurs circulaires, classes logarithmiques.
Classification Mathématique (2020) : 11R23.

cyclotomique F_∞/F revient à postuler que le ℓ-groupe $\widetilde{\mathcal{C}\ell}_F$ des classes logarithmiques de F capitule dans F_∞ pour F totalement réel (*cf.* [12, 13]).

L'ambition première de ce travail est de transposer aux groupes de classes logarithmiques des corps abéliens réels les théorèmes d'annulation obtenus par Thaine, Rubin, All *et al.* (*cf.* [1, 3, 5, 8, 9, 17, 19, 20, 21]) pour les groupes de classes habituels. Procédant à la manière de Sinnott, nous introduisons pour cela un sous-groupe circulaire convenable $\widetilde{\mathcal{E}}_F^\circ$ du pro-ℓ-groupe des unités logarithmiques $\widetilde{\mathcal{E}}_F$. C'est l'objet de la section 2.

Ce point acquis, la section 3 suit l'approche de Rubin [19] et de All [1] pour établir (théorème 3.4) :

Théorème A. — *Étant donné un corps abélien réel F de groupe de Galois G_F et ℓ un premier impair, pour tout morphisme galoisien ρ de $\widetilde{\mathcal{E}}_F$ dans $\mathbb{Z}_\ell[G_F]$, l'image $\rho(\widetilde{\mathcal{E}}_F^\circ)$ du sous-groupe des unités logarithmiques circulaires annule le ℓ-groupe des classes logarithmiques $\widetilde{\mathcal{C}\ell}_F$.*

Nous en déduisons une version logarithmique d'un résultat conjecturé par Solomon (théorème 3.7) :

Théorème B. — *Soient F un corps abélien réel, G_F son groupe de Galois, ℓ un nombre premier impair, $\mathfrak{l}$ une place de F au-dessus de ℓ et $\mathbb{Z}_\mathfrak{l}$ l'anneau des entiers du complété $\mathfrak{l}$-adique $F_\mathfrak{l}$; puis ϑ le $\mathbb{Z}_\ell[G_F]$-morphisme du pro-ℓ-groupe $\widetilde{\mathcal{E}}_F$ des unités logarithmiques de F dans $F_\mathfrak{l}[G_F]$ défini par :*

$$\vartheta(\varepsilon) = \sum_{\sigma\in G_F} \mathrm{Log}_\mathfrak{l}(\varepsilon^\sigma)\sigma^{-1}.$$

Alors, pour tout élément $\mathfrak{a}$ de l'algèbre $F_\mathfrak{l}[G_F]$ tel qu'on ait $\mathfrak{a}\vartheta(\widetilde{\mathcal{E}}_F) \subset \mathbb{Z}_\mathfrak{l}[G_F]$, l'image $\mathfrak{a}\vartheta(\widetilde{\mathcal{E}}_F^\circ)$ du pro-ℓ-groupe des unités logarithmiques circulaires annule $\mathbb{Z}_\mathfrak{l} \bigotimes_{\mathbb{Z}_\ell} \widetilde{\mathcal{C}\ell}_F$.

Rappelons enfin qu'en présence des racines ℓ-ièmes de l'unité les éléments de Stickelberger et leurs reflets permettent également de construire des annulateurs galoisiens pour les ℓ-groupes de classes logarithmiques (*cf.* [14]), à la manière de Gras et Oriat (*cf.* [6, 15, 18]).

2. Éléments circulaires et unités logarithmiques

2.1. Rappel sur les classes et unités logarithmiques

Soient ℓ un nombre premier donné et F un corps de nombres. À chaque place finie $\mathfrak{p}$ de F, il est attaché dans [11] une application à valeurs dans $\mathbb{Z}_\ell$, définie sur le groupe multiplicatif $F_\mathfrak{p}^\times$ du complété de F en $\mathfrak{p}$ par :

$$\widetilde{\nu}_\mathfrak{p}(x_\mathfrak{p}) = \nu_\mathfrak{p}(x_\mathfrak{p}), \text{ pour } \mathfrak{p}\nmid\ell;$$

et

$$\widetilde{\nu}_{\mathfrak{p}}(x_{\mathfrak{p}}) = -\frac{1}{\deg \mathfrak{p}} \operatorname{Log}_\ell(N_{F_{\mathfrak{p}}/\mathbb{Q}_p}(x_{\mathfrak{p}})), \text{ pour } \mathfrak{p} \mid \ell;$$

où Log_ℓ désigne le logarithme d'Iwasawa et $\deg \mathfrak{p}$ est un facteur de normalisation, dont l'expression exacte est sans importance ici, destiné à assurer que l'image de $F_{\mathfrak{p}}^\times$ soit dense dans $\mathbb{Z}_\ell$. Cette application induit un morphisme surjectif du *compactifié ℓ-adique* du groupe multiplicatif $F_{\mathfrak{p}}^\times$

$$\mathcal{R}_{F_{\mathfrak{p}}} = \varprojlim F_{\mathfrak{p}}^\times / F_{\mathfrak{p}}^{\times \ell^n}$$

dont le noyau, dit *sous-groupe des unités logarithmiques* de $\mathcal{R}_{F_{\mathfrak{p}}}$,

$$\widetilde{\mathcal{U}}_{F_{\mathfrak{p}}} = \{x_{\mathfrak{p}} \in \mathcal{R}_{F_{\mathfrak{p}}} \mid \widetilde{\nu}_{\mathfrak{p}}(x_{\mathfrak{p}}) = 0\}$$

s'identifie par la Théorie ℓ-adique locale du corps de classes (*cf.* [10]) au sous groupe normique de $\mathcal{R}_{F_{\mathfrak{p}}}$ associé à la $\mathbb{Z}_\ell$-extension cyclotomique $F_{\mathfrak{p}}^c$ de $F_{\mathfrak{p}}$. C'est donc l'analogue du groupe

$$\mathcal{U}_{F_{\mathfrak{p}}} = \{x_{\mathfrak{p}} \in \mathcal{R}_{F_{\mathfrak{p}}} \mid \nu_{\mathfrak{p}}(x_{\mathfrak{p}}) = 0\}$$

des unités de $\mathcal{R}_{F_{\mathfrak{p}}}$, qui correspond, lui, à la $\mathbb{Z}_\ell$-extension non-ramifiée de $F_{\mathfrak{p}}$.

Soit maintenant $\mathcal{J}_F$ le *ℓ-adifié du groupe des idèles de F*, i.e. le produit $\mathcal{J}_F = \prod_{\mathfrak{p}}^{\mathrm{res}} \mathcal{R}_{F_{\mathfrak{p}}}$ des compactifés $\mathcal{R}_{F_{\mathfrak{p}}}$ des groupes multiplicatifs des complétés $F_{\mathfrak{p}}$, restreint aux familles $(x_{\mathfrak{p}})_{\mathfrak{p}}$ dont presque tous les éléments tombent dans le sous-groupe unité $\mathcal{U}_F = \prod_{\mathfrak{p}} \mathcal{U}_{F_{\mathfrak{p}}}$. La Théorie ℓ-adique globale du corps de classes (*cf.* [10]) assure l'existence d'un isomorphisme de groupes topologiques compacts entre le ℓ-groupe des classes d'idèles $\mathcal{C}_F$ défini comme quotient

$$\mathcal{C}_F = \mathcal{J}_F / \mathcal{R}_F$$

de $\mathcal{J}_F$ par son sous-groupe principal $\mathcal{R}_F = \mathbb{Z}_\ell \bigotimes_{\mathbb{Z}} F^\times$ et le groupe de Galois $G_F = \mathrm{Gal}(F^{\mathrm{ab}}/F)$ de la pro-ℓ-extension abélienne maximale de F. Dans la correspondance ainsi établie (*cf.* [10, 11]) :

(i) Le groupe de normes associé à la $\mathbb{Z}_\ell$-extension cyclotomique F^c de F est le sous-groupe des idèles de degré nul :

$$\widetilde{\mathcal{J}}_F = \{\mathfrak{x} = (x_{\mathfrak{p}})_{\mathfrak{p}} \in \mathcal{J}_F \mid \deg(\mathfrak{x}) = \sum_{\mathfrak{p}} \widetilde{\nu}_{\mathfrak{p}}(x_{\mathfrak{p}}) \deg \mathfrak{p} = 0\}.$$

(ii) Le groupe de normes associé à la plus grande sous-extension F^{lc} de F^{ab} qui est localement cyclotomique (i.e. complètement décomposée sur F^c en chacune de ses places) est le produit $\widetilde{\mathcal{U}}_F \mathcal{R}_F$ du sous-groupe $\widetilde{\mathcal{U}}_F = \prod_{\mathfrak{p}} \widetilde{\mathcal{U}}_{F_{\mathfrak{p}}}$ des unités logarithmiques locales et de $\mathcal{R}_F$.

(iii) En particulier, le groupe de Galois $\mathrm{Gal}(F^{lc}/F^{c})$ s'identifie au quotient $\widetilde{\mathcal{C}\ell}_F = \widetilde{\mathcal{J}}_F/\widetilde{\mathcal{U}}_F\mathcal{R}_F$, lequel peut être regardé comme quotient du groupe $\widetilde{\mathcal{D}\ell}_F = \widetilde{\mathcal{J}}_F/\widetilde{\mathcal{U}}_F$ des diviseurs logarithmiques de degré nul par son sous-groupe principal $\mathcal{P}\ell_F = \mathcal{R}_F\widetilde{\mathcal{U}}_F/\widetilde{\mathcal{U}}_F$, le numérateur $\widetilde{\mathcal{D}\ell}_F$ s'identifiant au sous-groupe $\widetilde{\bigoplus_{\mathfrak{p}}} \mathbb{Z}_\ell\, \mathfrak{p}$ des diviseurs de degré nul de la somme formelle $\bigoplus_{\mathfrak{p}} \mathbb{Z}_\ell\, \mathfrak{p}$.

(iv) Et le noyau $\widetilde{\mathcal{E}}_F = \mathcal{R}_F \cap \widetilde{\mathcal{U}}_F$ du morphisme $\widetilde{\mathrm{div}} :\ x \mapsto \sum_{\mathfrak{p}} \widetilde{\nu}_{\mathfrak{p}}(x)\, \mathfrak{p}$ de $\mathcal{R}_F$ dans $\widetilde{\mathcal{D}\ell}_F$ est le sous-groupe des normes cyclotomiques (locales comme globales) de $\mathcal{R}_F$.

Définition. — *Nous disons que $\widetilde{\mathcal{C}\ell}_F = \widetilde{\mathcal{J}}_F/\widetilde{\mathcal{U}}_F\mathcal{R}_F \simeq \widetilde{\mathcal{D}\ell}_F/\mathcal{P}\ell_F$ est le ℓ-groupe des classes logarithmiques (de degré nul) du corps F et que $\widetilde{\mathcal{E}}_F$ est le pro-ℓ-groupe des unités logarithmiques globales.*

Le quotient $\widetilde{\mathcal{C}\ell}^{*}_F = \mathcal{J}_F/\widetilde{\mathcal{U}}_F\mathcal{R}_F$, qui s'identifie non canoniquement à la somme directe de $\widetilde{\mathcal{C}\ell}_F$ et de $\mathbb{Z}_\ell$, est, par convention, le pro-ℓ-groupe des classes logarithmiques de degré arbitraire.

Comme expliqué dans [11], la *conjecture de Gross–Kuz'min* (pour le corps F et le premier ℓ) revient à postuler la finitude du (pro)-ℓ-groupe $\widetilde{\mathcal{C}\ell}_F$ ou, de façon équivalente, que le $\mathbb{Z}_\ell$-rang du pro-ℓ-groupe des unités logarithmiques $\widetilde{\mathcal{E}}_k$ est le somme $r_F + c_F$ des nombres de places réelles et complexes de F. Elle est toujours vérifiée dès lors que F est abélien.

Enfin, du point de vue de la théorie d'Iwasawa, le groupe $\widetilde{\mathcal{C}\ell}_F$ s'interprète comme le quotient des genres ${}^{\Gamma}\mathcal{T}_F$, relativement au groupe procyclique $\Gamma = \mathrm{Gal}(F_\infty/F)$, du *module de Kuz'min–Tate*

$$\mathcal{T}_F = \varprojlim \mathcal{C}\ell'_{F_n}$$

limite projective des ℓ-groupes de ℓ-classes d'idéaux attachés aux étages finis K_n de la tour K_∞/K.

2.2. Éléments cyclotomiques logarithmiques

Notons ℓ un nombre premier arbitraire et $(\zeta_n)_{n>1}$ un système cohérent de racines primitives de l'unité, en ce sens qu'on ait $\zeta_m^{m/n} = \zeta_n$ pour $n|m$, par exemple en posant $\zeta_n = \exp 2\mathrm{i}\pi/n$.

Proposition 2.1. — *Soit F un corps abélien de conducteur $f > 1$ et de groupe $G_F = \mathrm{Gal}(F/\mathbb{Q})$.*

- *Pour $\ell \mid f$, l'élément $\eta_F = N_{\mathbb{Q}[\zeta_f]/F}(1-\zeta_f)$ est une unité logarithmique : $\eta_F \in \widetilde{\mathcal{E}}_F$.*

- *Pour $\ell \nmid f$, l'intersection du $\mathbb{Z}_\ell[G_F]$ module multiplicatif engendré par η_F avec le pro-ℓ-groupe $\widetilde{\mathcal{E}}_F$ des unités logarithmiques de F contient le $\mathbb{Z}_\ell[G_F]$-module engendré par l'élément*

$$\widetilde{\eta}_F = \eta_F^{1-(\frac{F}{\ell})^{-1}}.$$

En d'autres termes, on a : $\eta_F^{\mathbb{Z}_\ell[G_F]} \subset \widetilde{\mathcal{E}}_F$ dans le premier cas ; $\widetilde{\eta}_F^{\mathbb{Z}_\ell[G_F]} \subset \widetilde{\mathcal{E}}_F$ dans le second.

Démonstration. — Il est bien connu (*cf. e.g.* [6, section 4.2]) que les η_F satisfont les identités normiques :

$$N_{F/K}(\eta_F) = \eta_K^{\prod_p (1-(\frac{K}{p})^{-1})} \tag{2.1}$$

où, pour toute sous-extension K de F, le produit fait intervenir les symboles d'Artin attachés aux premiers p qui se ramifient dans $F/\mathbb{Q}$ mais non dans $K/\mathbb{Q}$.

Rappelons en outre que les η_F sont des p-unités qui ne sont pas unités lorsque f est p-primaire pour un premier p ; des unités sinon. Cela étant, distinguons les cas :

- Pour $\ell \mid f$, le cas $f = p^r$ avec $p \neq \ell$ étant exclu, η_F est toujours une ℓ-unité et il vient donc :

$$\widetilde{v}_{\mathfrak{p}}(\eta_F) = v_{\mathfrak{p}}(\eta_F) = 0, \text{ pour chaque } \mathfrak{p} \nmid \ell,$$

puisqu'aux places étrangères à ℓ les valuations logarithmique $\widetilde{v}_{\mathfrak{p}}$ et ordinaire $v_{\mathfrak{p}}$ coïncident.

Aux places au-dessus de ℓ, il vient, en revanche :

$$\widetilde{v}_{\mathfrak{l}}(\eta_F) = \frac{1}{\deg \mathfrak{l}} \operatorname{Log}_\ell(N_{F_{\mathfrak{l}}/\mathbb{Q}_\ell}(\eta_F)).$$

Introduisons donc le sous-corps de décomposition $F_\circ$ de ℓ dans $F/\mathbb{Q}$. Par hypothèse le premier ℓ se ramifie alors dans F mais non dans $F_\circ$ et l'on a en outre $\left(\frac{F_\circ}{\ell}\right) = 1$, de sorte que la formule normique plus haut nous donne immédiatement :

$$\widetilde{v}_{\mathfrak{l}}(\eta_F) = \frac{1}{\deg \mathfrak{l}} \operatorname{Log}_\ell(N_{F/F_\circ}(\eta_F)) = \frac{1}{\deg \mathfrak{l}} \operatorname{Log}_\ell 1 = 0,$$

sauf dans le cas ℓ-primaire $f = \ell^r$, où l'on a directement :

$$\widetilde{v}_{\mathfrak{l}}(\eta_F) = \frac{1}{\deg \mathfrak{l}} \operatorname{Log}_\ell(N_{F/\mathbb{Q}}(\eta_F)) = \frac{1}{\deg \mathfrak{l}} \operatorname{Log}_\ell \ell = 0,$$

En fin de compte, il vient bien $\widetilde{v}_{\mathfrak{l}}(\eta_F) = 0$ pour $\mathfrak{l} \mid \ell$; et η_F est une unité logarithmique.

- Pour $\ell \nmid f$, l'élément η_F est toujours une unité (et donc une unité logarithmique aux places en dehors de ℓ), sauf dans le cas primaire $f = p^r$ où c'est une p-unité qui n'est pas une unité. Dans cette dernière situation, si $\mathfrak{p}$ est alors l'unique place de F au-dessus de p, l'égalité $\widetilde{v}_{\mathfrak{p}}(\eta_F^\alpha) = v_{\mathfrak{p}}(\eta_F^\alpha)$, pour tout α dans $\mathbb{Z}_\ell[G_F]$ donne l'équivalence :

$$\widetilde{v}_{\mathfrak{p}}(\eta_F^\alpha) = 0 \iff \alpha \in \mathbb{Z}_\ell^{\mathrm{aug}}[G_F], \text{idéal d'augmentation de l'algèbre } \mathbb{Z}_\ell[G_F].$$

Reste dans tous les cas à évaluer les valuations logarithmiques aux places $\mathfrak{l}$ au-dessus de ℓ. La formule $\widetilde{v}_{\mathfrak{l}}(\eta_F^\alpha) = \frac{1}{\deg \mathfrak{l}} \operatorname{Log}_\ell(N_{F_{\mathfrak{l}}/\mathbb{Q}_\ell}(\eta_F^\alpha))$ donne l'équivalence :

$$\widetilde{v}_{\mathfrak{l}}(\eta_F^\alpha) = 0 \iff N_{F/F_\circ}(\eta_F^\alpha) \in \ell^{\mathbb{Z}_\ell} \iff N_{F/F_\circ}(\eta_F^\alpha) = 1,$$

où $F_\circ$ désigne, comme précédemment, le sous-corps de décomposition de ℓ. Et cette dernière condition est évidemment remplie lorsque α est contenu dans l'idéal d'augmentation du sous-groupe de décomposition D_ℓ de ℓ ; autrement dit lorsque c'est un multiple de $1 - (\frac{F}{\ell})^{-1}$. $\square$

SCOLIE 2.2. — *Sous les mêmes hypothèses, les éléments η_F pour $\ell \mid f$ (et $\widetilde{\eta}_F$ pour $\ell \nmid f$) sont en fait des normes universelles dans la $\mathbb{Z}_\ell$-tour cyclotomique F_∞ de F,* i.e. *des éléments de l'intersection $\mathcal{N}_F = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} N_{F_n/F}(\widetilde{\mathcal{E}}_{F_n})$ des groupes de normes logarithmiques attachés aux étages finis de F_∞.*

Démonstration. — C'est une conséquence immédiate des identités normiques citées plus haut. On a, en effet : $N_{F_n/F}(\eta_{F_n}) = \eta_F$, dans le premier cas ; $N_{F_n/F}(\eta_{F_n}) = \widetilde{\eta}_F$, dans le second. $\square$

2.3. Unités logarithmiques circulaires

Supposons maintenant ℓ impair et prenons encore F abélien réel de conducteur $f = f_K$ et de groupe de Galois $G_F = \mathrm{Gal}(F/\mathbb{Q})$. Notons enfin $F_\infty = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n$ sa $\mathbb{Z}_\ell$-extension cyclotomique.

Le ℓ-adifié $\mathcal{R}_F^\circ$ du groupe des éléments circulaires (à *la Sinnott*) de F est le $\mathbb{Z}_\ell[G_F]$-module engendré dans $\mathcal{R}_F = \mathbb{Z}_\ell \otimes F^\times$ par les images des éléments $\eta_K = N_{\mathbb{Q}[\zeta_{f_K}]/K}(1 - \zeta_{f_K})$, pour $K \subset F$.

Il pourrait donc paraître naturel de définir le pro-ℓ-groupe des unités logarithmiques circulaires du corps abélien réel F comme l'intersection $\widetilde{\mathcal{E}}_F \cap \mathcal{R}_F^\circ$ de $\mathcal{R}_F^\circ$ avec le pro-ℓ-groupe $\widetilde{\mathcal{E}}_F$ des unités logarithmiques. Malheureusement les éléments ainsi obtenus ne satisfont pas clairement la propriété spéciale de Rubin qui joue un rôle essentiel dans la preuve du théorème 3.4 (*cf.* lemme 3.5 infra). C'est pourquoi il est préférable de procéder comme suit :

DÉFINITION 2.3. — *Soient ℓ un nombre premier impair, F un corps abélien réel, $f = f_F$ son conducteur, $G_F = \mathrm{Gal}(F/\mathbb{Q})$ son groupe de Galois et $F_\infty = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n$ sa $\mathbb{Z}_\ell$-extension cyclotomique.*

Pour $K \subset F$ de conducteur f_K, notons $\eta_K = N_{\mathbb{Q}[\zeta_{f_K}]/K}(1-\zeta_{f_K})$ et $\widetilde{\eta}_K = \eta_K^{1-(\frac{K}{\ell})^{-1}}$.

Le pro-ℓ-groupe des unités logarithmiques circulaires (à la Sinnott) de F est le $\mathbb{Z}_\ell[G_F]$-module $\widetilde{\mathcal{E}}^\circ_F$ engendré conjointement par les images des η_K pour $\ell \mid f_K$ et des $\widetilde{\eta}_K$ pour $\ell \nmid f_K$.

Remarque. — Les identités $N_{F_n/F}(\eta_{K_n}) = \eta_K$ pour $\ell \mid f_K$, d'une part et $N_{F_n/F}(\eta_{K_n}) = \widetilde{\eta}_K$ pour $\ell \nmid f_K$ d'autre part montrent que les unités logarithmiques circulaires sont des normes universelles ; *i.e.* que l'on a :

$$\widetilde{\mathcal{E}}^\circ_K \subset \mathcal{N}_F = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} N_{F_n/F}(\widetilde{\mathcal{E}}_{F_n}).$$

THÉORÈME 2.4. — *Soient F un corps abélien réel et F° le sous-corps de décomposition de ℓ. Notons G_F le groupe de Galois $\mathrm{Gal}(F/\mathbb{Q})$ et D_F le sous-groupe $\mathrm{Gal}(F/F^\circ)$.*

(i) *Lorsque F possède plus d'une place au-dessus de ℓ,* i.e. *pour $F^\circ \neq \mathbb{Q}$, le caractère $\widetilde{\chi}^\circ_F$ du $\mathbb{Z}_\ell[G_F]$-module des unités logarithmiques circulaires $\widetilde{\mathcal{E}}^\circ_F$ est alors l'induit à G_F du caractère d'augmentation du sous-groupe de décomposition D_F :*

$$\widetilde{\chi}^\circ_F = \mathrm{Ind}_{D_F}^{G_F}\ \chi^{\mathrm{aug}}_{D_F}.$$

(ii) *Le même résultat $\widetilde{\chi}^\circ_F = \chi^{\mathrm{aug}}_{G_F}$ vaut encore avec $D_F = G_F$ lorsque le corps F admet une unique place au-dessus de ℓ, sauf si F contient un sous-corps K de conducteur ℓ-primaire, auquel cas $\widetilde{\chi}^\circ_F = \chi^{\mathrm{reg}}_{G_F}$ est le caractère régulier.*

La preuve de ce résultat repose sur le Lemme suivant :

LEMME 2.5. — *Pour tout corps abélien réel $F \neq \mathbb{Q}$ dans lequel le nombre premier impair ℓ se décompose complètement, le pro-ℓ-groupe des unités logarithmiques circulaires est trivial : $\widetilde{\mathcal{E}}^\circ_F = 1$.*

Démonstration. — En l'absence de ramification en ℓ dans $F/\mathbb{Q}$, les η_K pour $K \subset F$ sont des unités aux places au-dessus de ℓ. On a donc : $\widetilde{\mathcal{E}}^\circ_F \subset \mathcal{E}_F \cap \widetilde{\mathcal{E}}_F$. Puis, sous l'hypothèse de complète décomposition : $\mathcal{E}_F \cap \widetilde{\mathcal{E}}_F = \mu_F = 1$ (*cf.* [7, p. 218, l. 11–13], ou [13, proposition 6]). □

Démonstration du théorème 2.4. — Regardons d'abord (i). Le lemme donne l'inclusion $N_{F/F^\circ}(\widetilde{\mathcal{E}}^\circ_F) \subset \widetilde{\mathcal{E}}^\circ_{F^\circ} = \mu_{F^\circ} = 1$. De $\widetilde{\mathcal{E}}^\circ_F \subset \widetilde{\mathcal{E}}_F$, qui est ici un $\mathbb{Z}_\ell[G_F]$-module de caractère $\chi^{\mathrm{reg}}_{G_F}$ régulier,on tire donc : $\widetilde{\chi}^\circ_F \leqslant \mathrm{Ind}^{G_F}_{D_F}\ \chi^{\mathrm{aug}}_{D_F}$.

Or, par construction le groupe $\widetilde{\mathcal{E}}^\circ_F$ contient l'image $\mathcal{E}^{\circ\,I_{D_F}}_F$ des unités circulaires $\mathcal{E}^\circ_F$ par l'idéal d'augmentation $I_{D_F} = \sum_{\sigma\in D_F}\mathbb{Z}_\ell[G_F](\sigma-1)$. Comme $\mathcal{E}^\circ_F$, qui est d'indice fini dans $\mathcal{E}_F$, est un $\mathbb{Z}_\ell[G_F]$-module de caractère $\chi^{\mathrm{aug}}_{G_F}$, on conclut : $\widetilde{\chi}^\circ_F \geqslant \mathrm{Ind}^{G_F}_{D_F}\ \chi^{\mathrm{aug}}_{D_F}$. D'où le résultat.

Examinons maintenant (ii), qui correspond à $F^\circ = \mathbb{Q}$. Les formules normiques pour les unités logarithmiques circulaires donnent $N_{K/\mathbb{Q}}(\eta_K) = 1$ dans le ℓ-adifié $\mathcal{R}_\mathbb{Q}$, pour $K \subset F$ sauf si f_K est ℓ-primaire, auquel cas il vient $N_{K/\mathbb{Q}}(\eta_K) = \ell$.

Lorsque ce cas est exclu, on a donc $\widetilde{\chi}^\circ_F \leqslant \chi^{\mathrm{aug}}_{G_F}$ et on conclut comme précédemment à l'égalité.

En revanche, si F contient un sous-corps K de conducteur ℓ-primaire, $\widetilde{\mathcal{E}}^\circ_F$ contient l'image de ℓ et $\widetilde{\chi}^\circ_F$ contient le caractère unité. Comme on a $\widetilde{\chi}^\circ_F \geqslant \chi^{\mathrm{aug}}_{G_F}$, il vient alors $\widetilde{\chi}^\circ_F = \chi^{\mathrm{reg}}_{G_F}$. □

3. Annulateurs circulaires des groupes de classes logarithmiques

3.1. Application du théorème de Čebotarev

Prenons toujours ℓ impair et considérons un corps abélien réel F de conducteur $f = f_F > 1$. Écrivons $G_F = \mathrm{Gal}(F/\mathbb{Q})$ son groupe de Galois. Notons $\widetilde{\mathcal{C}\ell}_F$ le ℓ-groupe des classes logarithmiques (de degré nul) attaché à F et $\widetilde{\mathcal{C}\ell}^{\,*}_F$ le groupe des classes logarithmiques sans condition de degré.

Prenons m assez grand pour avoir $\ell^m\widetilde{\mathcal{C}\ell}_F = 0$, de sorte que $\widetilde{\mathcal{C}\ell}_F$ puisse être regardé canoniquement comme un sous-groupe du quotient d'exposant ℓ^m du pro-ℓ-groupe des classes logarithmiques de degré arbitraire : $\widetilde{\mathcal{C}\ell}_F \subset {}^{\ell^m}\widetilde{\mathcal{C}\ell}^{\,*}_F = \widetilde{\mathcal{C}\ell}^{\,*}_F/\ell^m\widetilde{\mathcal{C}\ell}^{\,*}_F$.

Désignons par $\widetilde{F}$ la plus grande extension abélienne de F qui est d'exposant ℓ^m et localement cyclotomique, de sorte que nous avons par la Théorie du corps de classes : $\mathrm{Gal}(\widetilde{F}/F) \simeq {}^{\ell^m}\widetilde{\mathcal{C}\ell}^{\,*}_F$. Et notons $F_{m_0} = \widetilde{F}\cap F_\infty$ le sous-corps de $\widetilde{F}$ fixé par $\widetilde{\mathcal{C}\ell}_F$.

Donnons-nous enfin un morphisme galoisien $\bar\rho$ du pro-ℓ-groupe $\widetilde{\mathcal{E}}_F$ des unités logarithmiques de F vers l'algèbre $\mathbb{Z}/\ell^m\mathbb{Z}[G_F]$; et considérons les extensions emboîtées :

$$F_\zeta = F[\zeta_{\ell^m}] \subset F_\rho = F_\zeta\left[\sqrt[\ell^m]{\mathrm{Ker}\,\bar\rho}\,\right] \subset F_\varepsilon = F_\zeta\left[\sqrt[\ell^m]{\widetilde{\mathcal{E}}_F}\right],$$

Observons pour cela que tout élément $\mathfrak{x}$ du tensorisé $\mathcal{R}_F = \mathbb{Z}_\ell \bigotimes_{\mathbb{Z}} F^\times$ peut être représenté par un élément x de $F^\times$ modulo une puissance ℓ^m-ième de $\mathcal{R}_F$, disons $\mathfrak{x} = x\mathfrak{y}^{\ell^m}$, et que cet élément x est unique modulo $F^{\times\,\ell^m}$; ce qui permet de définir sans ambiguïté $F_\zeta[\sqrt[\ell^m]{\mathfrak{x}}]$ comme étant $F_\zeta[\sqrt[\ell^m]{x}]$.

Observons en outre que les trois extensions F_ζ, F_ρ et F_ε sont linéairement disjointes de $\widetilde{F}$ sur F_{m_0}, de sorte que leurs composés $\widetilde{F}_\zeta$, $\widetilde{F}_\rho$ et $\widetilde{F}_\varepsilon$ avec $\widetilde{F}$ donnent lieu au schéma galoisien :

$$\begin{tikzcd}
\widetilde{F} \arrow[r, dash] \arrow[d, dash, "\widetilde{\mathcal{C}\ell}_F"'] & \widetilde{F}_\zeta \arrow[r, dash] \arrow[d, dash] & \widetilde{F}_\rho \arrow[r, dash] \arrow[d, dash] & \widetilde{F}_\varepsilon \arrow[d, dash] \\
F_{m_0} \arrow[r, dash] \arrow[d, dash] & F_\zeta \arrow[r, dash] \arrow[ddl, dash, "G_{F_\zeta}=\mathrm{Gal}(F_\zeta/\mathbb{Q})"] & F_\rho \arrow[r, dash] & F_\varepsilon \\
F \arrow[d, dash, "G_F"'] & & & \\
\mathbb{Q} & & &
\end{tikzcd}$$

Par construction, le radical kummérien de F_ε/F_ρ est : $\mathrm{Rad}(F_\varepsilon/F_\rho) = \widetilde{\mathcal{E}}_F/\operatorname{Ker}\bar{\rho} \simeq \operatorname{Im}\bar{\rho}$. C'est un sous-module de $\mathbb{Z}/\ell^m\mathbb{Z}[G_F]$; et le groupe de Galois $\mathrm{Gal}(F_\varepsilon/F_\rho) \simeq \mathrm{Hom}_{G_{F_\zeta}}(\mathrm{Rad}(F_\varepsilon/F_\rho), \mu_{\ell^m})$, qui s'identifie donc à un quotient de $\mathbb{Z}/\ell^m\mathbb{Z}[G_F]$, est, de ce fait, $\mathbb{Z}_\ell[G_{F_\zeta}]$-monogène.

Soient alors $\sigma_{F_\varepsilon} \in \mathrm{Gal}(F_\varepsilon/F_\rho)$ un $\mathbb{Z}_\ell[G_{F_\zeta}]$-générateur de $\mathrm{Gal}(\widetilde{F}_\varepsilon/\widetilde{F}_\rho)$ et $\sigma_{\widetilde{F}} \in \mathrm{Gal}(\widetilde{F}/F_{m_0})$ provenant d'une classe donnée arbitraire $[\mathfrak{c}]$ de $\widetilde{\mathcal{C}\ell}_F$ regardée dans ${}^{\ell^m}\widetilde{\mathcal{C}\ell}_F^*$.

Définissons σ dans $\mathrm{Gal}(\widetilde{F}_\varepsilon/F_\rho)$ en imposant $\sigma_{|F_\varepsilon} = \sigma_{F_\varepsilon}$ et $\sigma_{|\widetilde{F}} = \sigma_{\widetilde{F}}$. Cela étant :

Proposition 3.1. — *Il existe une infinité de nombres premiers impairs $p \neq \ell$, complètement décomposés dans $F_\rho/\mathbb{Q}$, tels que l'image de l'une des places de $\widetilde{F}_\varepsilon$ au-dessus de p par l'opérateur de Frobenius coïncide avec σ. Sont alors satisfaites en particulier les propriétés suivantes :*

1. *p est complètement décomposé dans $F[\zeta_{\ell^m}]$ et vérifie la congruence : $p \equiv 1 \pmod{\ell^m}$.*
2. *La classe $[\mathfrak{p}]$ de l'un des premiers $\mathfrak{p}$ de F au-dessus de p dans ${}^{\ell^m}\widetilde{\mathcal{C}\ell}_F^*$ coïncide avec $[\mathfrak{c}]$.*
3. *Les Frobenius dans F_ε des $\mathfrak{p}$ au-dessus de p engendrent $\mathrm{Gal}(F_\varepsilon/F_\rho)$.*

Démonstration. — L'existence est une conséquence immédiate du théorème de densité de Čebotarev. De plus,

(1) la congruence résulte de la condition de complète décomposition dans F_ρ, donc dans $\mathbb{Q}[\zeta_{\ell^m}]$;
(2) provient du fait que $\sigma_{\widetilde{F}}$ est induit par l'image canonique $[\mathfrak{c}]\,\mathcal{C}\ell_F^{*\,\ell^m}$ de $[\mathfrak{c}]$ dans ${}^{\ell^m}\widetilde{\mathcal{C}\ell}_F^{\,*}$;
(3) enfin, résulte du fait que les conjugués de $\sigma_{|F_\varepsilon}$ par G_{F_ζ} engendrent $\mathrm{Gal}(F_\varepsilon/F_\rho)$. □

3.2. Lemmes d'annulation logarithmiques

Conservons les mêmes notations, supposons fixé le premier $\mathfrak{p}$ de F au-dessus de $p \equiv 1 \pmod{\ell^m}$ donné par la proposition 3.1 et considérons la restriction à $\widetilde{\mathcal{E}}_F$ du morphisme de semi-localisation s_p induit par le plongement de F dans le produit de ses complétés $F_{\mathfrak{p}^\sigma}$ aux places au-dessus de p.

Par construction, pour chacune des places $\mathfrak{p}^\sigma$ de F au-dessus de p, le complété $F_{\mathfrak{p}^\sigma}$ s'identifie à $\mathbb{Q}_p$ et le ℓ-sous-groupe de Sylow $\mu_{\mathfrak{p}^\sigma}$ du groupe $F_{\mathfrak{p}^\sigma}^\times$ est d'ordre ℓ^{m_p} avec $m_p = v_\ell(p-1) \geqslant m$.

En particulier le quotient ${}^{\ell^m}\mu_{F_p} = \mu_{F_q}/\mu_{F_p}^{\ell^m}$ est un $\mathbb{Z}/\ell^m\mathbb{Z}[G_F]$-module libre de dimension 1.

Lemme 3.2. — *Sous les hypothèses de la proposition, le morphisme galoisien* $\bar\rho\ :\ \widetilde{\mathcal{E}}_F \to \mathbb{Z}/\ell^m\mathbb{Z}[G_F]$ *s'écrit* $\bar\rho = \bar\rho_p \circ \bar s_p$, *où* $\bar s_p\ :\ \widetilde{\mathcal{E}}_F \to {}^{\ell^m}\mu_{F_p}$ *est induite par l'application de semi-localisation* s_p *à valeurs dans* $\prod_\sigma \widetilde{\mathcal{U}}_{F_{\mathfrak{p}^\sigma}} = \prod_\sigma \mu_{\mathfrak{p}^\sigma}$ *et* $\bar\rho_p$ *est un morphisme galoisien de* ${}^{\ell^m}\mu_{F_p}$ *vers* $\mathbb{Z}/\ell^m\mathbb{Z}[G_F]$.

Démonstration. — Le noyau de s_p dans $\widetilde{\mathcal{E}}_F$ est formé des unités logarithmiques qui sont localement puissances ℓ^m-ièmes aux places au-dessus de p, *i.e.* des $\varepsilon \in \widetilde{\mathcal{E}}_F$ pour lesquelles les extensions $F[\sqrt[\ell^m]{\varepsilon}]/F$ sont complètement décomposées aux places $\mathfrak{p}^\sigma$ (ou, ce qui revient au même, pour lesquelles l'extension $F_\zeta[\sqrt[\ell^m]{\varepsilon}]/F_\zeta$ est complètement décomposée aux places au-dessus de p). Du fait du choix de σ_{F_ε}, cela revient à exiger que les conjugués de α_{F_ε} agissent trivialement sur $F_\zeta[\sqrt[\ell^m]{\varepsilon}]$; autrement dit, que ε soit une puissance ℓ^m-ième dans F_ρ, *i.e.* le produit d'un élément de $\mathrm{Ker}\,\bar\rho$ et d'une puissance ℓ^m-ième dans F_ζ et finalement dans F, puisque, ℓ étant impair, les éléments de F qui sont des puissances ℓ^m-ièmes dans F_ζ sont *déjà* des puissances ℓ^m-ièmes dans F (*cf. e.g.* [19, lemme 5.7]). En fin de compte, il suit : $\mathrm{Ker}\,\bar s_p = \mathrm{Ker}\,\bar\rho$, ce qui assure, par $\mathbb{Z}/\ell^m\mathbb{Z}[G_F]$-injectivité de ${}^{\ell^m}\mu_{F_p}$, l'existence du morphisme factorisant $\bar\rho_q$. □

Soit maintenant ζ_p une racine primitive p-ième de l'unité. L'extension $F[\zeta_p]/F$ possède une unique sous-extension F' de degré ℓ^m, laquelle est cyclique, totalement ramifiée au-dessus de p et non-ramifiée en dehors. En particulier, si $\mathfrak{p}' = \mathfrak{p}_{F'}$ désigne l'unique place de F' au-dessus de $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_F$ et $F'_\mathfrak{p}$ son complété en la place $\mathfrak{p}'$, on a d'une part $\mathfrak{p}_F = \mathfrak{p}_{F'}^{\ell^m}$; et, d'autre part, l'égalité entre ℓ-groupes de racines locales de l'unité : $\mu_{F'_\mathfrak{p}} = \mu_{F_\mathfrak{p}}$.

Le lemme qui suit peut être regardé comme l'analogue logarithmique de [19, théorème 5.1].

Lemme 3.3. — *Soient $\widetilde{\mathcal{E}}_{F'/F} = \{\eta_{F'} \in \widetilde{\mathcal{E}}_{F'} \mid N_{F'/F}(\eta_{F'}) = 1\}$ le groupe des unités logarithmiques relatives de l'extension F'/F et s_p l'homomorphisme de semi-localisation à valeurs dans la somme directe :*

$$\mu_{F'_p} = \mu_{F_p} = \bigoplus_{\mathfrak{p}|p} \mu_{F_\mathfrak{p}} \simeq \mu_{\mathbb{Q}_p} \otimes \mathbb{Z}_\ell[G_F] \simeq (\mathbb{Z}/\ell^{m_p}\mathbb{Z})[G_F].$$

Tout $\alpha \in \mathbb{Z}_\ell[G_F]$ qui annule le quotient $\mu_{F_p}/s_p(\widetilde{\mathcal{E}}_{F'/F})\mu_{F_p}^{\ell^m}$ annule la classe de $\mathfrak{p}$ dans ${}^{\ell^m}\widetilde{\mathcal{C}\ell}_F^*$.

Démonstration. — Écrivons $F'_{\mathfrak{p}'} = F_\mathfrak{p}[\sqrt[\ell^m]{\pi_\mathfrak{p}}]$ pour une uniformisante $\pi_\mathfrak{p} \in F_\mathfrak{p}$; et $x_{F'} \in \mathcal{R}_{F'}$ un relèvement de $(\sqrt[\ell^m]{\pi_\mathfrak{p}}, 1, \dots, 1) \in \prod_{\mathfrak{p}_{F'}|p} \mathcal{R}_{F'_{\mathfrak{p}_{F'}}}$; notons enfin δ un générateur de $\Delta = \mathrm{Gal}(F'/F) \simeq \mathrm{Gal}(F'_{\mathfrak{p}'}/F_\mathfrak{p})$.

Par construction, nous avons $s_p(x_{F'})^{\delta-1} = s_p(x_{F'}^{\delta-1})) = (\zeta_\mathfrak{p}, 1, \dots, 1)$ pour une racine ℓ^m-ième de l'unité $\zeta_\mathfrak{p} \in F_\mathfrak{p}$; et, par hypothèse, $s_p(x_F^\alpha)^{\delta-1} = s_p(x_F^{\delta-1}))^\alpha = s_p(\eta_{F'})$, pour un $\eta_{F'} \in \widetilde{\mathcal{E}}_{F'/F}$. Le théorème 90 de Hilbert nous permet alors d'écrire $\eta_{F'} = y_{F'}^{\delta-1}$ pour un $y_{F'} \in \mathcal{R}_{F'}$, qui engendre donc un diviseur logarithmique ambige. Il suit (en notations additives) :

$$\widetilde{\mathrm{div}}\, y_{F'} = \sum_{\sigma\in G_F} \alpha'_\sigma \mathfrak{p}_{F'}^\sigma \ + \ \mathfrak{a}'_F;$$

puis :

$$\widetilde{\mathrm{div}}\, N_{F'/F}(y_{F'}) = \sum_{\sigma\in G_F} \alpha'_\sigma \mathfrak{p}_F^\sigma \ + \ \ell^m \mathfrak{a}'_F$$

de sorte que l'élément $\alpha' = \sum \alpha'_\sigma \sigma \in \mathbb{Z}_\ell[G_F]$ annule bien la classe de $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_F$ dans $\widetilde{\mathcal{C}\ell}_F^*/\ell^m\widetilde{\mathcal{C}\ell}_F^*$.

Reste à vérifier que α' et α sont dans la même classe modulo $\ell^m\mathbb{Z}_\ell[G_F]$. Pour cela, observons que l'identité $s_p(x_{F'}^\alpha/y_{F'})^{(\delta-1)} = 1$ donne $s_p(x_{F'}^\alpha) = s_p(y_{F'}z_F)$, pour un z_F convenable de $\mathcal{R}_F$. Écrivant alors $\alpha = \sum \alpha_\sigma \sigma$ et prenant les diviseurs logarithmiques respectifs des deux membres de l'identité, nous restreignant enfin aux seules composantes au-dessus de p, nous obtenons ainsi :

$$\sum_{\sigma\in G_F} \alpha_\sigma \mathfrak{p}_{F'}^\sigma = \sum_{\sigma\in G_F} \alpha'_\sigma \mathfrak{p}_{F'}^\sigma + \mathfrak{a}_F$$

pour un diviseur logarithmique $\mathfrak{a}_F$ de F, donc finalement, comme attendu :

$$\sum_{\sigma\in G_F} \alpha_\sigma \sigma \equiv \sum_{\sigma\in G_F} \alpha'_\sigma \sigma \pmod{\ell^m \mathbb{Z}_\ell[G_F]},$$

puisque les diviseurs logarithmiques au-dessus de p sont totalement ramifiés dans F'/F. □

3.3. Annulation des classes logarithmiques réelles

Nous pouvons maintenant énoncer le théorème principal sur les annulateurs circulaires.

Théorème 3.4. — *Étant donné un corps abélien réel F de groupe de Galois G_F et ℓ un premier impair, pour tout morphisme galoisien ρ de $\widetilde{\mathcal{E}}_F$ dans $\mathbb{Z}_\ell[G_F]$, l'image $\rho(\widetilde{\mathcal{E}}_F^\circ)$ du sous-groupe des unités logarithmiques circulaires spéciales annule le ℓ-groupe des classes logarithmiques $\widetilde{\mathcal{C}\ell}_F$.*

Démonstration. — Choisissons m assez grand pour que ℓ^m annule le ℓ-groupe $\widetilde{\mathcal{C}\ell}_F$ des classes logarithmiques ; prenons un élément α dans $\rho(\widetilde{\mathcal{E}}_F^\circ)$; et partons d'une classe $[\mathfrak{c}]$ de $\widetilde{\mathcal{C}\ell}_F$ regardée dans ${}^{\ell^m}\widetilde{\mathcal{C}\ell}_F^*$.

Notons $\bar\rho$ la réduction de ρ modulo ℓ^m, à valeurs dans $\mathbb{Z}/\ell^m\mathbb{Z}[G_F]$, et faisons choix d'un premier impair $p \neq \ell$ satisfaisant les conditions de la proposition 3.1. Par construction $p \equiv 1 \pmod{\ell^m}$ est complètement décomposé dans F et l'on a $[\mathfrak{c}] = [\mathfrak{p}]$ dans ${}^{\ell^m}\widetilde{\mathcal{C}\ell}_F^*$ pour l'un des premiers $\mathfrak{p}$ de F au-dessus de p.

Tout revient donc à montrer que l'on a : $\overline{\alpha}[\mathfrak{p}] = 0$ dans ${}^{\ell^m}\widetilde{\mathcal{C}\ell}_F^*$, où $\overline{\alpha} \in \operatorname{Im}\bar\rho$ est la réduction de α modulo ℓ^m. Or, par le Lemme 3.2, $\bar\rho$ se factorise via l'application de semi-localisation $\bar s_p$. Et :

Lemme 3.5. — *Pour toute unité logarithmique circulaire $\eta \in \widetilde{\mathcal{E}}_F^\circ$, il existe une unité logarithmique circulaire relative $\eta' \in \widetilde{\mathcal{E}}_{F'/F}$ telle qu'on ait : $s_p(\eta) = s_p(\eta')$.*

Ainsi $\bar{\alpha}$, qui est l'image par $\bar{\rho}$ d'une unité logarithmique circulaire η, provient d'une unité logarithmique circulaire relative $\eta' \in \widetilde{\mathcal{E}}_{F'/F}$; et il résulte alors du Lemme 3.3 qu'il annule la classe de $\mathfrak{p}$ dans ${}^{\ell^m}\widetilde{\mathcal{C}\ell}^*_F$. D'où le résultat annoncé. □

Démonstration du Lemme. — Il s'agit de vérifier que les unités logarithmiques circulaires sont *mutatis mutandis* ce que Rubin appelle des unités spéciales dans [19]. Reprenons pour cela dans le cadre logarithmique les calculs de All (*cf.* [1, section 3]) : prenons $K \subset F$, notons $f = f_K$ son conducteur et partons d'une unité logarithmique circulaire $\varepsilon = \eta_K$ (pour $\ell \mid f$) ou $\varepsilon = \tilde{\eta}_K$ (pour $\ell \nmid f$) ; notons $\mathbb{Q}'$ l'unique sous-corps de degré ℓ^m de $\mathbb{Q}[\zeta_p]$ et $K' = K\mathbb{Q}'$; identifions $G_F = \mathrm{Gal}(F/\mathbb{Q})$ à $G'_F = \mathrm{Gal}(F[\zeta_p]/\mathbb{Q}[\zeta_p])$; et raisonnons modulo $\mathfrak{m}' = \prod_{\mathfrak{p}'|p} \mathfrak{p}'$.

De $\zeta_p \equiv 1$, nous tirons :

$$\eta_{\mathbb{Q}[\zeta_f]} = 1 - \zeta_f \equiv 1 - \zeta_f\zeta_p = (1 - \zeta_{pf})^\rho = \eta^\rho_{\mathbb{Q}[\zeta_{pf}]}$$

pour un ρ de G'_F ; puis :

$$\eta_K = N_{\mathbb{Q}[\zeta_f]/K}(1 - \zeta_f) \equiv N_{\mathbb{Q}[\zeta_{pf}]/K'}(1 - \zeta_{pf})^\rho = \eta^\rho_{K'};$$

et, par conséquent : $\tilde{\eta}_K \equiv \tilde{\eta}^\rho_{K'}$.

Posant alors $\varepsilon' = \eta^\rho_{K'}$ (pour $\ell \mid f$) ou $\varepsilon' = \tilde{\eta}^\rho_{K'}$ (pour $\ell \nmid f$), nous obtenons bien $\varepsilon \equiv \varepsilon'$, *i.e.* $s_p(\varepsilon) = s_p(\varepsilon')$, puisque ε est une unité aux places au-dessus de p, et $N_{F'/F}(\varepsilon') = N_{K'/K}(\varepsilon') = 1$, puisque p est ramifié dans K' mais complètement décomposé dans K.

En résumé le résultat annoncé, qui est donc vérifié par les générateurs $\varepsilon = \eta_K$ (pour $\ell \mid f$) et $\varepsilon = \tilde{\eta}_K$, (pour $\ell \nmid f$) du $\mathbb{Z}_\ell$-module $\widetilde{\mathcal{E}}^\circ_F$ l'est aussi en fin de compte par tous les éléments $\eta \in \widetilde{\mathcal{E}}^\circ_F$. □

Le résultat obtenu ci-dessus pour les classes logarithmiques peut naturellement être mis en parallèle avec celui de Rubin [19] sur les classes d'idéaux tel que présenté par All (*cf.* [1, section 3]). Désignons pour cela par $\mathcal{C}\ell^0_F$ le sous-groupe du ℓ-groupe des classes d'idéaux $\mathcal{C}\ell_F$ engendré par les idéaux de degré nul, de sorte que l'on a $\mathcal{C}\ell^0_F \simeq \mathrm{Gal}(F_\infty F^{\mathrm{nr}}/F_\infty)$, où F^{nr} désigne le ℓ-corps de classes de Hilbert de F. Il vient alors :

Corollaire 3.6. — *Soient ℓ un premier impair, F abélien réel de groupe G_F et ρ un morphisme galoisien du ℓ-adifié $\mathcal{E}'_F = \mathbb{Z}_\ell \bigotimes_\mathbb{Z} E'_F$ du groupe des ℓ-unités de F dans l'algèbre $\mathbb{Z}_\ell[G_F]$. Alors :*

(i) *L'image $\rho(\mathcal{E}^\circ_F)$ du pro-ℓ-groupe construit sur les unités circulaires annule $\mathcal{C}\ell^0_F$.*

(ii) *L'image $\rho(\widetilde{\mathcal{E}}^\circ_F)$ du pro-ℓ-groupe des unités logarithmiques circulaires annule $\widetilde{\mathcal{C}\ell}_F$.*

L'assertion (i) n'est autre qu'une réécriture ℓ-adique du résultat initial de Rubin ; l'assertion (ii) provient directement du théorème 3.4. Les classes logarithmiques sont conventionnellement de degré nul (sauf mention explicite du contraire), mais non les classes au sens ordinaire ; de ce fait l'introduction du sous-groupe $\mathcal{C}\ell_F^0$ renforce le parallélisme des résultats.

Remarque. — Lorsque le corps F possède plusieurs places au-dessus de ℓ, *i.e.* lorsque le sous-corps de décomposition F° de ℓ n'est pas le corps des rationnels $\mathbb{Q}$, le théorème 2.4 affirme en particulier que $\widetilde{\mathcal{E}}_F^\circ$ est contenu dans le noyau de la norme N_{F/F°. Le théorème 3.4 ne donne donc de ce fait aucune information directe sur le groupe $\widetilde{\mathcal{C}\ell}_{F^\circ}$.

Annexe : lien avec la conjecture de Solomon

Supposons toujours F abélien réel et ℓ impair, mais fixons maintenant l'une $\mathfrak{l}$ des places au-dessus de ℓ. Solomon a conjecturé dans [20] que si ℓ ne se ramifie pas dans F l'élément

$$\vartheta_F^{\mathrm{Sol}} = \frac{1}{\ell} \sum_{\sigma \in G_F} \mathrm{Log}_{\mathfrak{l}}(\eta_F^\sigma)\sigma^{-1}$$

annule le tensorisé $\mathbb{Z}_{\mathfrak{l}} \bigotimes_{\mathbb{Z}_\ell} \mathcal{C}\ell_F$ du ℓ-groupe des classes d'idéaux de F.

Conséquence du théorème principal de Mazur–Wiles [16] dans le cas semi-simple $\ell \nmid [F:\mathbb{Q}]$, ce résultat a été prouvé par Belliard et Nguyen Quang Do dans [4] pour ℓ décomposé, et sans restriction par All (*cf.* [1, théorème 1.1]) sous une forme plus générale qu'on peut réécrire comme suit :

Théorème (All). — *Soient F un corps abélien réel, G_F son groupe de Galois, ℓ un nombre premier impair, $\mathfrak{l}$ une place de F au-dessus de ℓ et $\mathbb{Z}_{\mathfrak{l}}$ l'anneau des entiers du complété $\mathfrak{l}$-adique $F_{\mathfrak{l}}$; puis ϑ le $\mathbb{Z}_\ell[G_F]$-morphisme du ℓ-adifié $\mathcal{E}_F = \mathbb{Z}_\ell \bigotimes_{\mathbb{Z}} E_F$ du groupe des unités dans $F_{\mathfrak{l}}[G_F]$ défini par :*

$$\vartheta(\varepsilon) = \sum_{\sigma \in G_F} \mathrm{Log}_{\mathfrak{l}}(\varepsilon^\sigma)\sigma^{-1}.$$

Alors, pour tout $\mathfrak{a}$ de $F_{\mathfrak{l}}[G_F]$ tel qu'on ait $\mathfrak{a}\vartheta(\mathcal{E}_F) \subset \mathbb{Z}_{\mathfrak{l}}[G_F]$, l'image $\mathfrak{a}\vartheta(\mathcal{E}_F^\circ)$du pro-$\ell$-groupe des unités circulaires annule le tensorisé $\mathbb{Z}_{\mathfrak{l}} \bigotimes_{\mathbb{Z}_\ell} \mathcal{C}\ell_F^0$ du ℓ-groupe des classes d'idéaux de degré nul.

Remarque. — Dans l'isomorphisme $\mathcal{C}\ell_F \simeq \mathrm{Gal}(F^{\mathrm{nr}}/F)$, où F^{nr} désigne la ℓ-extension abélienne non ramifiée de F (*i.e.* son ℓ-corps de classes de Hilbert), le sous-groupe $\mathcal{C}\ell_F^0$ des classes de degré nul correspond à $\mathrm{Gal}(F^{\mathrm{nr}}/(F^{\mathrm{nr}} \cap F_\infty))$, où F_∞ est la $\mathbb{Z}_\ell$-extension cyclotomique de F.

En parfaite analogie avec ce résultat, nous pouvons énoncer en termes logarithmiques :

Théorème 3.7. — *Soient F un corps abélien réel, G_F son groupe de Galois, ℓ un nombre premier impair, $\mathfrak{l}$ une place de F au-dessus de ℓ et $\mathbb{Z}_{\mathfrak{l}}$ l'anneau des entiers du complété $\mathfrak{l}$-adique $F_{\mathfrak{l}}$; puis ϑ le $\mathbb{Z}_\ell[G_F]$-morphisme du pro-ℓ-groupe $\widetilde{\mathcal{E}}_F$ des unités logarithmiques de F dans $F_{\mathfrak{l}}[G_F]$ défini par :*

$$\vartheta(\varepsilon) = \sum_{\sigma\in G_F} \mathrm{Log}_{\mathfrak{l}}(\varepsilon^\sigma)\sigma^{-1}.$$

Alors, pour tout élément $\mathfrak{a}$ de l'algèbre $F_{\mathfrak{l}}[G_F]$ tel qu'on ait $\mathfrak{a}\vartheta(\widetilde{\mathcal{E}}_F) \subset \mathbb{Z}_{\mathfrak{l}}[G_F]$, l'image $\mathfrak{a}\vartheta(\widetilde{\mathcal{E}}^\circ_F)$du pro-$\ell$-groupe des unités logarithmiques circulaires annule $\mathbb{Z}_{\mathfrak{l}} \bigotimes_{\mathbb{Z}_\ell} \widetilde{\mathcal{C}\ell}_F$.

Démonstration. — Elle est strictement identique à celle donnée dans [1, section 3]. Rappelons-en brièvement l'argumentation : donnons-nous une $\mathbb{Z}_\ell$-base $(\mathfrak{v}_1, \dots, \mathfrak{v}_d)$ de $\mathbb{Z}_{\mathfrak{l}}$ et notons $(\mathfrak{v}_1^*, \dots, \mathfrak{v}_d^*)$ la base duale de la codifférente. Partons d'un élément $\mathfrak{a} = \sum a_\sigma \sigma^{-1}$ de $F_{\mathfrak{l}}[G_F]$ et posons $L_{\mathfrak{a}}(\varepsilon) = \sum_{\sigma\in G_F} a_{\sigma^{-1}} \mathrm{Log}_{\mathfrak{l}}(\varepsilon^\sigma)$. Nous obtenons $\mathfrak{a}\vartheta(\varepsilon) = \sum L_{\mathfrak{a}}(\varepsilon^\sigma)\sigma^{-1}$, avec $L_{\mathfrak{a}}(\varepsilon^\sigma) \in \mathbb{Z}_{\mathfrak{l}}$ par hypothèse.

Écrivons maintenant $L_{\mathfrak{a}}(\varepsilon^\sigma) = \sum_{i=1}^d \mathrm{Tr}(\mathfrak{v}_i^* L_{\mathfrak{a}}(\varepsilon^\sigma))\mathfrak{v}_i$ la décomposition de $L_{\mathfrak{a}}(\varepsilon^\sigma)$ dans $\mathbb{Z}_{\mathfrak{l}}$. Nous avons : $\mathfrak{a}\vartheta(\varepsilon) = \sum_{\sigma\in G_F}(\sum_{i=1}^d \mathrm{Tr}(\mathfrak{v}_i^* L_{\mathfrak{a}}(\varepsilon^\sigma))\mathfrak{v}_i)\sigma^{-1} = \sum_{i=1}^d(\sum_{\sigma\in G_F} \mathrm{Tr}(\mathfrak{v}_i^* L_{\mathfrak{a}}(\varepsilon^\sigma))\sigma^{-1})\mathfrak{v}_i$, *i.e.*

$$\mathfrak{a}\vartheta(\varepsilon) = \sum_{i=1}^d \vartheta_{\mathfrak{v}_i^*}(\varepsilon)v_i \quad \text{avec} \quad \vartheta_{\mathfrak{v}_i^*}(\varepsilon) = \sum_{\sigma\in G_F} \mathrm{Tr}(\mathfrak{v}_i^* L_{\mathfrak{a}}(\varepsilon^\sigma))\sigma^{-1};$$

et $\vartheta_{\mathfrak{v}_i^*} \;:\; \varepsilon \mapsto \sum_{\sigma\in G_F} \mathrm{Tr}(\mathfrak{v}_i^* L_{\mathfrak{a}}(\varepsilon^\sigma))\sigma^{-1}$ est un $\mathbb{Z}_\ell[G_F]$-morphisme de $\widetilde{\mathcal{E}}_F$ dans $\mathbb{Z}_\ell[G_F]$.

En fin de compte, pour $\mathfrak{x}$ dans $\mathbb{Z}_{\mathfrak{l}}$ et $[\mathfrak{c}]$ dans $\widetilde{\mathcal{C}\ell}_F$, il vient :

$$\mathfrak{a}\vartheta(\varepsilon)\cdot(\mathfrak{x}\otimes[\mathfrak{c}]) = \sum_{i=1}^d \mathfrak{x}\mathfrak{v}_i \otimes \vartheta_{\mathfrak{v}_i^*}(\varepsilon)[\mathfrak{c}].$$

Or, on a $\vartheta_{\mathfrak{v}_i^*}(\varepsilon)[\mathfrak{c}] = 0$, si ε est une unité logarithmique circulaire, en vertu du théorème 3.4 ; d'où le résultat annoncé. □

Remarque. — Prenant $\varepsilon = \eta_F$ et $\mathfrak{a} = \frac{1}{\ell}$, on obtient l'élément de Solomon $\frac{1}{\ell} \sum_{\sigma\in G_F} \mathrm{Log}_{\mathfrak{l}}(\eta_F^\sigma)\sigma^{-1}$, lequel annule donc $\mathbb{Z}_{\mathfrak{l}} \bigotimes_{\mathbb{Z}_\ell} \mathcal{C}\ell_F^0$, comme établi dans [1], puisque η_F est bien une unité circulaire.

Si la place ℓ se ramifie dans F, η_F est aussi une unité logarithmique circulaire. L'élément de Solomon annule alors le groupe logarithmique

$\mathbb{Z}_\ell \bigotimes_{\mathbb{Z}_\ell} \widetilde{\mathcal{C}\ell}_F$. C'est en particulier le cas, dès que F contient le sous-corps réel $\mathbb{Q}[\zeta_\ell + \bar{\zeta}_\ell]$ du corps cyclotomique $\mathbb{Q}[\zeta_\ell]$.

Commentaire additionnel. — Dans la présente note, le groupe des unités logarithmiques circulaires $\widetilde{\mathcal{E}}^\circ_F$ est défini à partir des générateurs η_K (pour $\ell \mid f$) et $\widetilde{\eta}_K$ (pour $\ell \nmid f$) pour $K \subset F$ (définition 2.3) et non directement comme intersection du groupe des unités logarithmiques $\widetilde{\mathcal{E}}_F$ avec le $\mathbb{Z}_\ell$-module $\mathcal{R}^\circ_K$ construit sur les éléments circulaires à la Sinnott. Outre la propriété spéciale de Rubin, il existe une autre raison à cela : comme expliqué dans [13], la conjecture de Greenberg sur la nullité de l'invariant *lambda* des corps totalement réels revient à postuler que l'ordre $|\widetilde{\mathcal{C}\ell}_F|$ du groupe des classes logarithmiques d'un tel corps coïncide avec l'indice $(\widetilde{\mathcal{E}}_F : \mathcal{N}_F)$ dans $\widetilde{\mathcal{E}}_F$ du sous-groupe $\mathcal{N}_F$ des normes universelles de Greither, qui mesure la capitulation logarithmique dans la tour F_∞/F.

Il parait de ce fait judicieux, dans la perspective du résultat d'annulation attendu (théorème 3.4), de faire en sorte que les unités logarithmiques circulaires soient des normes universelles, ce qu'assurent précisément les propriétés normiques des générateurs η_K et $\widetilde{\eta}_K$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] T. All, « On p-adic annihilators of real ideal classes », *J. Number Theory* **133** (2013), n° 7, p. 2324-2338.

[2] K. Belabas & J.-F. Jaulent, « The logarithmic class group package in PARI/GP », in *Algèbre et théorie des nombres, 2016*, Publ. Math. Besançon Algèbre Théorie Nr., vol. 2016, Presses Univ. Franche-Comté, 2017, p. 5-18.

[3] J.-R. Belliard & A. Martin, « Annihilation of real classes », `https://jrbelliard.perso.math.cnrs.fr/BM1.pdf`, 2014.

[4] J.-R. Belliard & T. Nguyen Quang Do, « Formules de classes pour les corps abéliens réels », *Ann. Inst. Fourier* **51** (2001), n° 4, p. 903-937.

[5] ———, « On modified circular units and annihilation of real classes », *Nagoya Math. J.* **177** (2005), p. 77-115.

[6] G. Gras, « Annihilation of $tor_{\mathbb{Z}_p}(\mathcal{G}^a_{K,S}b)$ for real abelian extensions $K/\mathbb{Q}$ », *Commun. Adv. Math. Sci.* **1** (2018), p. 5-34.

[7] C. Greither, « Sur les normes universelles dans les $\mathbf{Z}_p$-extensions », *J. Théor. Nombres Bordeaux* **6** (1994), n° 2, p. 205-220.

[8] C. Greither & R. Kučera, « Annihilators for the class group of a cyclic field of prime power degree », *Acta Arith.* **112** (2004), n° 2, p. 177-198.

[9] ———, « Washington units, semispecial units, and annihilation of class groups », *Manuscr. Math.* **166** (2021), n° 1-2, p. 277-286.

[10] J.-F. Jaulent, « Théorie ℓ-adique globale du corps de classes », *J. Théor. Nombres Bordeaux* **10** (1998), n° 2, p. 355-397.

[11] ———, « Classes logarithmiques signées des corps de nombres », *J. Théor. Nombres Bordeaux* **12** (2000), n° 2, p. 455-474, Colloque International de Théorie des Nombres (Talence, 1999).

[12] ———, « Note sur la conjecture de Greenberg », *J. Ramanujan Math. Soc.* **34** (2019), n° 1, p. 59-80.

[13] ———, « Normes universelles et conjecture de Greenberg », *Acta Arith.* **194** (2020), n° 1, p. 99-109.

[14] ———, « Annulateurs de Stickelberger des groupes de classes logarithmiques », *Acta Arith.* **201** (2021), n° 3, p. 241-253.

[15] R. Kučera, « The circular units and the Stickelberger ideal of a cyclotomic field revisited », *Acta Arith.* **174** (2016), n° 3, p. 217-238.

[16] B. Mazur & A. Wiles, « Class fields of abelian extensions of $\mathbb{Q}$ », *Invent. Math.* **76** (1984), n° 2, p. 179-330.

[17] T. Nguyen Quang Do & V. Nicolas, « Nombres de Weil, sommes de Gauss et annulateurs galoisiens », *Am. J. Math.* **133** (2011), n° 6, p. 1533-1571.

[18] B. Oriat, « Annulation de groupes de classes réelles », *Nagoya Math. J.* **81** (1981), p. 45-56.

[19] K. Rubin, « Global units and ideal class groups », *Invent. Math.* **89** (1987), n° 3, p. 511-526.

[20] D. Solomon, « On a construction of p-units in abelian fields », *Invent. Math.* **109** (1992), n° 2, p. 329-350.

[21] F. Thaine, « On the ideal class groups of real abelian number fields », *Ann. Math.* **128** (1988), n° 1, p. 1-18.

Manuscrit reçu le 3 août 2022,
révisé le 14 décembre 2022,
accepté le 16 mai 2023.

Jean-François JAULENT
Institut de Mathématiques de Bordeaux
Université de Bordeaux & CNRS
351 cours de la Libération
33405 Talence Cedex (France)
jean-francois.jaulent@math.u-bordeaux.fr