Université Grenoble Alpes

ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

Rodolphe Richard & Emmanuel Ullmo

Équidistribution de sous-variétés faiblement spéciales et *o*-minimalité: André-Oort géométrique

Article à paraître, mis en ligne le 3 juillet 2024, 55 p.

Les *Annales de l'Institut Fourier* sont membres du Centre Mersenne pour l'édition scientifique ouverte
www.centre-mersenne.org e-ISSN : 1777-5310

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
Article à paraître
Mis en ligne le 3 juillet 2024.

ÉQUIDISTRIBUTION DE SOUS-VARIÉTÉS FAIBLEMENT SPÉCIALES ET o-MINIMALITÉ: ANDRÉ-OORT GÉOMÉTRIQUE

par Rodolphe RICHARD & Emmanuel ULLMO (*)

Avec un appendice par Jiaming CHEN, Rodolphe RICHARD & Emmanuel ULLMO

Résumé. — Une caractérisation des sous-variétés des variétés de Shimura qui contiennent un sous ensemble Zariski-dense de sous-variétés faiblement spéciales a été obtenue par le second auteur, il y a quelques années, en combinant des résultats d'o-minimalité et des résultats de transcendance fonctionnelle. Nous obtenons dans ce texte une nouvelle preuve de cet énoncé par des techniques de dynamique sur les espaces homogènes dans l'esprit de travaux antérieurs de Clozel et du second auteur. La preuve utilise de la théorie ergodique à la Ratner, à la Mozes-Shah complétée par un résultat récent de Daw-Gorodnik et du second auteur. On obtient au passage des énoncés de dynamique homogène généraux valables sur des quotients arithmétiques arbitraires qui sont d'un intérêt indépendant, s'appliquant par exemple à l'étude des variations de structures de Hodge.

Abstract. — A characterization of subvarieties of Shimura varieties which contain a Zariski-dense subset of weakly special subvarieties was obtained by the second author a few years ago by combining o-minimality and functional transcendence results. In this paper we obtain a new proof of this statement using dynamics techniques on homogeneous spaces in the spirit of earlier work by Clozel and the second author. The proof uses ergodic theory à la Ratner and a recent result by Daw-Gorodnik and the second author. In the process, general homogeneous dynamics statements valid on arbitrary arithmetic quotients are obtained which are of independent interest, applicable for example to the study of variations of Hodge structures.

Mots-clés : Variétés de Shimura, Variations de structures de Hodge, André-Oort, o-minimalité, Théorèmes de Ratner.
Classification Mathématique (2020) : 14G35, 14D07, 14M17, 37A17, 03C64.
(*) Rodolphe Richard was supported by the Leverhulme grant RPG-2019-180.

1. Introduction

1.1. Partie géométrique de la conjecture d'André-Oort

1.1.1. Sous-variétés faiblement spéciales.

Introduisons la notion de sous-variétés faiblement spéciale d'une variété arithmétique.(1)

Soit X un espace hermitien symétrique. Soient $\mathbf{G}$ un groupe algébrique réductif sur $\mathbb{Q}$ et K_∞ un sous-groupe compact maximal de $\mathbf{G}(\mathbb{R})$, tels que $X = \mathbf{G}(\mathbb{R})/K_\infty$. Soit $\Gamma \subset \mathbf{G}(\mathbb{Q})$ un réseau arithmétique sans torsion de $\mathbf{G}$ et $S = \Gamma\backslash X$. Alors S est un espace localement symétrique hermitien qui est muni canoniquement d'une structure de variété algébrique quasi-projective par les résultats de Baily-Borel, dite *variété arithmétique*.

Définition 1.1. — *Les sous-variétés* faiblement spéciales *de S sont les sous-variétés algébriques irréductibles de S qui sont totalement géodésiques dans S.*

D'après les travaux de Moonen [29] toute sous-variété faiblement spéciale de S peut s'écrire sous la forme

$$Z = [H, x] := \Gamma\backslash\Gamma \cdot \mathbf{H}(\mathbb{R})^+ \cdot x \subseteq S \tag{1.1}$$

pour un $\mathbb{Q}$-sous-groupe algébrique réductif $\mathbf{H}$ de $\mathbf{G}$ et un point $x \in X$, tels que $X_H := \mathbf{H}(\mathbb{R})^+ \cdot x$ est un sous-espace hermitien symétrique de X. Alors $\Gamma_H = \Gamma \cap \mathbf{H}(\mathbb{Q})^+$ est un réseau arithmétique de $\mathbf{H}$ et au morphisme fini $\Gamma_H \setminus X_H \to Z$ près, Z est une variété arithmétique.

1.1.2. Sous-variétés produits faiblement spéciaux

Dans (1.1), si $\mathbf{H}^{\mathrm{ad}} = \mathbf{H}_1^{\mathrm{ad}} \times \mathbf{H}_2^{\mathrm{ad}}$ est une factorisation en produit de deux groupes semi-simples pour des sous-groupes réductifs $\mathbf{H}_1$ et $\mathbf{H}_2$ de $\mathbf{H}$, alors $X_{H_1} := \mathbf{H}_1(\mathbb{R})^+ \cdot x$ et $X_{H_2} := \mathbf{H}_2(\mathbb{R})^+ \cdot x$ sont hermitiens symétriques. De plus $[H_1, x] := \Gamma\backslash\Gamma \cdot \mathbf{H}_1(\mathbb{R})^+ \cdot x$ et $[H_2, x] := \Gamma\backslash\Gamma \cdot \mathbf{H}_2(\mathbb{R})^+ \cdot x$ sont des sous-variétés faiblement spéciales de S. Il y a une factorisation $X_H \simeq X_{H_1} \times X_{H_2}$ et $\Gamma_{H_1} \times \Gamma_{H_2}$ est d'indice fini dans Γ_H et le morphisme

$$\psi : S_1 \times S_2 := \Gamma_{H_1}\backslash X_{H_1} \times \Gamma_{H_2}\backslash X_{H_2} \longrightarrow \Gamma_H \setminus X_H \to Z \hookrightarrow S.$$

est le composé de deux morphismes finis suivis d'une injection.

(1) Les résultats en vue seront insensibles au passage à un réseau commensurable, ni au fait que Γ est de congruence ou non. On pourra choisir $\mathbf{G}$ semisimple adjoint si on veut, et S n'a pas besoin d'être une variété de Shimura *stricto sensu*.

Définition 1.2. — *On dit qu'une sous-variété algébrique irréductible de S est* un produit faiblement spécial *si elle se met sous la forme,*

$$V = \psi(S_1 \times V_2),$$

pour une sous-variété algébrique irréductible V_2 de S_2 avec $\dim(S_1)$, $\dim(S_2)$ *et* $\dim(V_2)$ *non nulles.*

1.1.3. André-Oort géométrique

Si V est faiblement spéciale de dimension non nulle, ou si V est un produit faiblement spécial, l'ensemble de sous-variétés faiblement spéciales de dimension positive de S contenues dans V est Zariski dense dans V.

Un résultat du second auteur de ce texte [38] qui utilise le théorème d'Ax-Lindemann hyperbolique prouvé dans [26] montre que cela caractérise les sous-variétés irréductibles de S qui contiennent un sous-ensemble Zariski-dense de sous-variétés faiblement spéciales de dimension positive. C'est la partie géométrique de la conjecture d'André-Oort :

Théorème 1.3. — *Une sous-variété algébrique irréductible V de S qui contient un sous-ensemble Zariski-dense de sous-variétés faiblement spéciales, toutes de dimension non nulle, est une sous variété faiblement spéciale ou un produit faiblement spécial.*

1.1.4. Approche

Nous donnons dans ce texte, une méthode alternative pour obtenir ce résultat. Notre approche combine des idées de dynamique homogène avec des arguments d'o-minimalité qui sont nouveaux dans ce contexte. Nous obtenons dans l'appendice de ce papier rédigé en commun avec Jiaming Chen une extension de ce résultat dans le contexte général des $\mathbb{Z}$-variations de structures de Hodge.

Cette méthode s'inscrit dans la continuation de travaux initiés par Clozel et le second auteur de ce texte [12, 37]. La technologie sur lesquels s'appuie cette approche nous vient de la première moitié des années 1990 : les théorèmes de Ratner sur la conjecture de Raghunathan affirmant la rigidité des flots unipotents [35], un article de Mozes-Shah [31] qui précise la limite d'une suite convergente donnée de mesures homogènes, en application des théorèmes de Ratner et les résultats de Dani-Margulis [14] qui permettent de contrôler les phénomènes de perte de masse dans ces questions. En dynamique homogène, nous requérons en outre un résultat récent de [16] prolongeant [31], détaillé en section 5.7.5.

1.2. Dynamique homogène et Stratégie

Notre approche dynamique nous ammène au théorème 1.3 par un théorème 1.6 que l'on peut considérer comme son alter ego dynamique.

Les sous-variétés faiblement spéciales de S sont munies canoniquement d'une mesure de probabilité grâce à leur interprétation en terme d'espaces localement symétriques hermitiens. On considère plus généralement dans ce texte des *sous-ensembles homogènes* de S. Ce sont les ensembles analytiques fermés de S de la forme

$$Z = \Gamma \backslash \Gamma \mathbf{H}(\mathbb{R})^{+} \cdot x \longmapsto S \tag{1.2}$$

pour un sous-groupe algébrique $\mathbf{H}$ de $\mathbf{G}$ sans caractère rationnel de sorte que Γ_H est un réseau de $\mathbf{H}$.

On munit Z d'une mesure de probabilité μ_Z, l'image directe de la mesure de probabilité invariante sur $\Gamma_H \setminus H$ par

$$(\Gamma \cap H) \setminus H \to \Gamma \setminus \Gamma H \to \Gamma \setminus \Gamma \cdot H \cdot x \subseteq \Gamma \setminus X$$

Une telle mesure, dans S, sera dite *homogène* dans la suite. Si le choix du couple $[H, x]$ dans l'écriture $Z = [H, x]$ n'est pas unique, la mesure μ_Z ne dépend que de Z.

Ce texte suit la démarche de Clozel et du second auteur qui consiste à étudier des suites arbitraires de sous-variétés faiblement spéciales de dimension non nulle via les suites de mesures de probabilités associées.

Il sera utile de disposer des définitions suivantes concernant des suites de sous-variétés algébriques de S et des suites de sous-variétés faiblement spéciales.

Définition 1.4. — *Soit V une sous-variété algébrique irréductible de S. Une suite $(Z_n)_{n\geqslant 0}$ de sous-variétés irréductibles Z_n de V est dite*

- Zariski dense *si aucune sous variété* fermée et propre *de V ne la contient ;*
- Hodge générique *si aucune sous variété* spéciale *propre de S ne la contient ;*
- générique *si toute sous-suite infinie est Zariski dense (le point générique de Z_n converge vers le point générique dans le schéma V) ;*
- stricte *si toute sous-suite infinie est Hodge générique.*

Définition 1.5. — *Une suite de sous-variété faiblement spéciales Z_n est dite*

- convergente en mesure *(dans un espace $\overline{S}$) si la suite des mesures canoniques $\mu_n = \mu_{Z_n}$ admet une limite dans l'espace des mesures de* *probabilités dans l'espace topologique $\overline{S}$ contenant S : par exemple la compactification de Borel-Serre, de Satake maximale, ou de Bailly-Borel de S.*

- tendue (en mesure) *si les conditions du théorème de Prokhorov s'appliquent à cette suite des mesures canoniques. Un critère équivalent est donné par la théorie de Dani-Margulis : il existe un compact de S qui rencontre chacune des Z_n.*

La difficulté centrale que la méthode de ce texte permet de surmonter se rencontre déjà dans le cas où la suite $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est tendue. Pour traiter le cas non tendu nous utilisons les résultats récents de C. Daw, A. Gorodnik et le second auteur de ce texte [15, 16], qui décrivent le comportement des suites de mesures homogènes sur les compactifications maximales de Satake des espaces localement symétriques.

Dans l'approche initiée par Clozel et le second auteur, on étudiait une suite de sous-variétés spéciales $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de S. En faisant des hypothèses supplémentaires, Z_n *fortement spéciale* dans [12], et plus généralement *non facteur* dans [37], on concluait en premier que $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ était tendue, et ensuite que toute limite faible μ_∞ de la suite de mesures $(\mu_{Z_n})_{n\in\mathbb{N}}$ était la mesure associée à une sous-variété spéciale Z_∞ (et même respectivement fortement spéciale ou non facteur). La conclusion topologique que l'on obtenait, dans l'esprit du théorème 1.3, reposait sur le fait que si la suite des μ_{Z_n} convergeait vers μ_{Z_∞}, alors on pouvait montrer l'inclusion $Z_n \subset Z_\infty$ pour tout n assez grand.

Quand on travaille, comme dans ce texte, avec une suite arbitraire $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$, de sous-variétés faiblement spéciales de S, on est confronté à trois difficultés principales.

- Si μ_∞ est une limite faible de la suite $(\mu_{Z_n})_{n\in\mathbb{N}}$, alors en général μ_∞ n'est pas une mesure associée à une sous-variété faiblement spéciale Z_∞.
- Si $(\mu_{Z_n})_{n\in\mathbb{N}}$ converge faiblement vers μ_∞, alors en général le support de μ_∞ ne contient pas les Z_n pour n assez grand.
- Dans le cas non tendu, la suite $(\mu_{Z_n})_{n\in\mathbb{N}}$ peut converger faiblement vers la mesure nulle.

Pour simplifier l'exposition, nous décrivons la méthode dans le cas tendu.

Nous contournons la première difficulté à l'aide de raisonnements classiques en dynamique homogène combinés avec un « *baby case* » du théorème d'Ax-Lindemann hyperbolique (proposition 5.13). Nous partons de la description (1.1),

$$Z_n = \Gamma\backslash\Gamma \cdot \mathbf{H}_n(\mathbb{R})^+ \cdot x_n$$

pour un $\mathbb{Q}$-sous-groupe réductif $\mathbf{H}_n$ de $\mathbf{G}$ et un point x_n, que l'on peut choisir dans un ensemble fondamental $\mathcal{F} \subset X$ convenable fixé. Quand la suite $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est tendue, la théorie de Ratner permet de montrer qu'en passant éventuellement à une sous-suite, μ_n converge étroitement vers une mesure *homogène* μ_∞ et la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $x_\infty \in \mathcal{F}$. De plus

$$Z'_\infty := \mathrm{Supp}(\mu_\infty) = \Gamma_{H_\infty}\backslash\mathbf{H}_\infty(\mathbb{R})^+ \cdot x_\infty$$

pour un sous-groupe algébrique $\mathbf{H}_\infty$ de $\mathbf{G}$ tel que $\mathbf{H}_n \subset \mathbf{H}_\infty$ pour tout n assez grand. Le « *baby case* » du théorème d'Ax-Lindemann hyperbolique nous assure que la clôture de Zariski Z_∞ de Z'_∞ est une sous-variété faiblement spéciale de S. En particulier si une sous-variété algébrique V de S contient les Z_n, alors elle contient Z_∞.

L'apport principal de se travail est le résultat suivant qui permet de surmonter la deuxième difficulté. L'essence de cet énoncé réside en la confrontation de l'inégalité de dimensions

$$\dim(Z'_\infty) \geqslant \limsup(\dim(Z_n))_{\mathbb{N}},$$

évidente dans l'univers de la dynamique homogène à la Ratner, mise en regard de l'inégalité en sens inverse

$$\dim(Z'_\infty \cap V) \leqslant \limsup(\dim(Z'_n) \cap V)_{\mathbb{N}},$$

naturelle dans le monde des famille définissables dans une théorie *o*-minimale, où la géométrie varie de façon modérée.

Théorème 1.6. — *Soit V une sous-variété algébrique irréductible de S qui contient une suite $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de sous-variétés faiblement spéciales.*

En passant éventuellement à une sous-suite extraite, il existe des écritures

$$Z_n = \Gamma\backslash\Gamma\mathbf{H}_n(\mathbb{R})^+ \cdot x_n$$

pour des sous-groupes semi-simples $\mathbf{H}_n$ de $\mathbf{G}$ de telle sorte qu'il existe un sous-groupe algébrique $\mathbf{H}_\infty$ sans caractère rationnel tel que pour tout n, $\mathbf{H}_n \subset \mathbf{H}_\infty$ et tel que V contient les sous-espaces homogènes

$$Z'_n := \Gamma\backslash\Gamma \cdot \mathbf{H}_\infty(\mathbb{R})^+ \cdot x_n.$$

L'observation capitale est que le sous-ensemble homogène Z'_n contient la sous-variété faiblement spéciale Z_n. Le groupe $\mathbf{H}_\infty$ étant généralement strictement plus grand que les $\mathbf{H}_n$, l'inclusion de Z_n dans Z'_n peut être stricte.

On peut encore utiliser le « *baby case* » du théorème d'Ax-Lindemann hyperbolique.

COROLLAIRE 1.7. — *La sous-variété algébrique V contient les sous-variétés faiblement spéciales $\widetilde{Z}_n = \overline{Z'_n}^{\mathrm{Zar}}$.*

Le théorème 1.3 se démontre en partant d'une suite de Z_n qui sont maximales parmi les sous-variétés faiblement spéciales contenues dans V. On obtient alors que $\widetilde{Z}_n = Z_n$ ce qui force $\mathbf{H}_n = \mathbf{H}_\infty$ pour tout n. La conclusion recherchée s'obtient avec la description des produits faiblement spéciaux décrit dans la section 1.1.2 en posant $\mathbf{H}_1 = \mathbf{H}_\infty$ et $\mathbf{H}_2 = Z_{\mathbf{G}}(\mathbf{H}_1)$.

1.3. Quotients arithmétiques généraux

Le cœur technique de ce travail est suffisamment souple pour s'appliquer à des espaces localement homogènes plus généraux que les variétés arithmétiques et en particulier aux domaines de périodes associés aux $\mathbb{Z}$-variations de structures de Hodge.

On fixe encore un groupe semi-simple $\mathbf{G}$, un réseau arithmétique sans torsion $\Gamma \subset \mathbf{G}(\mathbb{Q})$ et un sous-groupe compact M de $G = \mathbf{G}(\mathbb{R})^+$. Notons que nous ne faisons pas d'hypothèses sur M, on peut prendre $M = \{1\}$ ou $M = K_\infty$. Il n'y a plus non plus d'hypothèses hermitiennes sur l'espace symétrique de G, on peut par exemple penser à $\mathbf{G} = \mathbf{SL}_n$. Alors le *quotient arithmétique*

$$S = S_{\Gamma,G,M} := \Gamma \backslash G/M$$

a une structure de variété analytique réelle.

Il est possible, pour chaque choix de compact maximal K_∞ contenant M, de munir naturellement $S_{\Gamma,G,M}$ d'une structure d'espace semi-algébrique(2) réel sur S, comme observé par [2, Th. 1.1]. Pour toute structure o-minimale, telle $\mathbb{R}^{\mathrm{an}}$ et $\mathbb{R}^{\mathrm{an,exp}}$, nous aurons une notion de sous-variétés différentielle définissable dans cette structure.

Pour travailler dans le cadre de la dynamique homogène à la Ratner, on définit classiquement la classe $\mathcal{H}$ de $\mathbb{Q}$-sous-groupes algébriques de $\mathbf{G}$. Un sous-groupe algébrique $\mathbf{H} \leqslant \mathbf{G}$ défini sur $\mathbb{Q}$ est dit de type $\mathcal{H}$ si son radical $\mathbf{R}_H$ est unipotent et si $\mathbf{H}/\mathbf{R}_H$ est un produit presque direct de sous-groupes presque $\mathbb{Q}$-simples dont les points réels ne sont pas compacts.

Une *sous-ensemble homogène de S* désigne un sous-ensemble de la forme

$$Z = \Gamma \backslash \Gamma \cdot H \cdot g \cdot M \subseteq S$$

(2) Elle est uniquement déterminée par : si $\mathcal{F}$ est un ensemble (resp. domaine) fondamental de l'action de Γ sur G union finie de domaines de Siegel rationnels (et relatifs à K_∞) semi-algébriques dans G, alors la surjection (resp. bijection) $\mathcal{F}/M \to S$ est semi-algébrique. Cela dépend fortement du choix de K_∞.

pour un groupe $\mathbf{H}$ de type $\mathcal{H}$ et $g \in G$, avec $\Gamma_H = \Gamma \cap H$. Alors ces sous-ensembles homogènes sont à la fois sous-ensembles analytiques et, d'après le théorème 1.1 de [2], sont semi-algébriques.

Nous obtenons dans ce cadre le résultat suivant :

Théorème 1.8. — *Soit V une sous-variété analytique définissable de S dans une structure o-minimale.*

Soit $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de sous-ensembles homogènes de S contenus dans V. En passant éventuellement à une sous-suite infinie extraite, il existe des écritures

$$Z_n = \Gamma\backslash\Gamma\mathbf{H}_n(\mathbb{R})^+ \cdot g_n \cdot M \tag{1.3}$$

pour des sous-groupes $\mathbf{H}_n$ de type $\mathcal{H}$ de $\mathbf{G}$ et un sous-groupe algébrique $\mathbf{H}_\infty$ de type $\mathcal{H}$ telles que pour tout n, $\mathbf{H}_n \subset \mathbf{H}_\infty$ et telles que V contient les sous-espaces homogènes

$$Z'_n := \Gamma\backslash\Gamma\mathbf{H}_\infty(\mathbb{R})^+ \cdot g_n \cdot M. \tag{1.4}$$

On verra que cet énoncé se ramène aisément du cas $M = \{1\}$.

Ceci dit une sous-classe de ces variétés $S_{G,K,M}$ jouent un rôle important comme domaines de périodes associés aux variétés algébriques complexes qui portent une $\mathbb{Z}$-variation de structures de Hodge. Notons que dans ces cas la structure d'espace $\mathbb{R}^{\mathrm{alg}}$-définissable sur S ainsi que ses extensions en des structures $\mathbb{R}^{\mathrm{an,exp}}$ sont alors uniquement définies car il n'y a qu'un unique choix de compact K_∞ de G contenant M. Les conséquences de ce texte dans ce cadre permettent de complêter les travaux de Jiaming Chen [11]. L'analogue du théorème 1.3 est obtenu dans l'appendice de ce texte écrit en collaboration avec Jiaming Chen.

1.4. Organisation du texte

La section 2 donne des rappels de base de la théorie *o*-minimale. On souligne la notion de *familles définissables* et on introduit les structures de variétés définissables dans une théorie *o*-minimale.

La section 3 consiste en l'énonciation d'une propriété, trouvée dans [18], du comportement de la dimension d'une suite de compacts définissables dans un compact fixe de $\mathbb{R}^n$, au passage à la limite de Hausdorff, *lorsque ces compacts sont définissables « en famille »*. Alors « la dimension ne peut que chuter à la limite ».

La section 4 introduit les notions de théorie de la mesure qui nous serons utiles dans la suite. On y montre le résultat clef théorème 4.3, technique mais taillé à nos besoin ultérieurs. C'est une élaboration directe depuis la section précédente, incorporant des suites étroitement convergentes de mesures dont le support est comparé à des suites de compacts définissables en famille, et dont les valeurs sur des parties définissables ont de bonnes propriétés dimensionnelles.

La section 5 récapitule les outils de dynamique homogène sur les quotients arithmétiques généraux : théorie de Ratner, travaux de Mozes-Shah, de Daw-Gorodnik-Ullmo, ainsi que sur les espaces localement symétriques hermitiens : mesures canoniques des sous-variétés faiblement spéciales et des sous-ensembles homogènes, « *baby case* » du théorème d'Ax-Lindemann hyperbolique, définissabilité des applications d'uniformisation. En outre nous prouvons en section 5.2, faute de référence, un énoncé de finitude en théorie de la réduction, pour en déduire que certaines familles de sous-ensembles de G sont des *familles* définissables.

C'est à partir de la section 6 que débute notre mariage des idées issues de la dynamique homogène et des propriétés des familles définissables dans une théorie o-minimale. En instanciant l'énoncé technique de 4 nous obtenons, d'abord dans le cadre des quotients arithmétiques généraux, le théorème 1.8. Le théorème 1.6 s'obtient par ricochet, en nous restreignant au cadre des espaces localement symétrique hermitien, et en utilisant la définissabilité de l'uniformisation. Nous terminons par la section 7 avec la preuve du théorème 1.3, en rédigeant l'argument esquissée à la fin de la section 1.2.

Enfin, l'appendice écrit en collaboration avec Jiaming Chen étend le théorème 1.3 dans les domaines de périodes associés aux $\mathbb{Z}$-variations de structures de Hodge polarisés sur des variétés complexes quasi-projectives.

Remerciements

Les auteurs remercient Gregorio Baldi pour des discussions lors de la préparation de ce travail. Nous remercions aussi le rapporteur pour sa lecture attentive et minutieuse qui a permis d'améliorer sensiblement la qualité de la présentation du texte.

2. Préliminaires

2.1. o-minimalité

La nouveauté de cet article est l'introduction d'un argument de nature o-minimale dans les questions d'équidistribution de mesures homogènes.

Nous rappelons ici quelques définitions de base de la théorie utiles à la compréhension du texte. Plusieurs références classiques sur le sujet peuvent aider le lecteur notamment [17, 18].

Une *structure o-minimale* est la donnée pour chaque entier n, d'une classe $\mathcal{S}_n$ de sous-ensembles de $\mathbb{R}^n$, dit *définissables*, qui partagent beaucoup de propriétés avec les ensembles semi-algébriques, à savoir ceux définis par inéquations polynomiales : tel le disque unité obtenu par $x^2 + z^2 \leqslant 1$. Queques propriétés fondamentales sont :

- les sous-ensembles semi-algébriques sont définissables dans toute structure *o*-minimale ;
- la plupart des opérations courantes (union finie, complémentaire, produit cartésien fini...) conservent la définissabilité ;
- l'image d'un ensemble définissable par projection sur certaines coordonnées est définissable ;
- les composantes connexes d'un ensemble définissable sont en nombre fini.

On définit alors une *application définissable* comme une application $f : A \to B$ entre deux ensembles définissables dont le graphe, dans $A \times B$ est définissable.

On combine flexibilité : toute partie décrite par une formule logique du premier ordre détermine un objet définissable ; et rigidité : la condition de finitude limite la complexité des ensembles considérés. La notion d'ensemble définissable dans une structure *o*-minimale est suffisamment riche pour que beaucoup de notions de géométrie algébrique réelle s'appliquent : trois exemples de structures *o*-minimales qui nous importent sont

- celle, notée $\mathbb{R}^{\mathrm{alg}}$, des sous-ensembles semi-algébriques ;
- celle, notée $\mathbb{R}^{\mathrm{an}}$, engendrée par les graphes de restrictions à $[0;1]^n \subseteq \mathbb{R}^n$ de fonctions sur $\mathbb{R}^n$ qui sont analytiques réelles sur un voisinage de $[0,1]^n$.
- celle, notée $\mathbb{R}^{\mathrm{an,exp}}$, engendrée par la précédente et le graphe de la fonction exponentielle.

Définition 2.1. — *Soit $B \subset \mathbb{R}^r$ un ensemble définissable. Une famille $(A_b)_{b\in B}$ d'ensembles définissables $A_b \subset \mathbb{R}^s$ indexée par B est une* famille définissable *si l'ensemble*

$$\widetilde{A} := \bigcup_{b\in B} (\{b\} \times A_b) \subset \mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^s$$

est définissable.

Une suite $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *de sous-ensembles définissables de* $\mathbb{R}^s$ *est dite* extraite de la famille définissable $(A_b)_{b\in B}$ *si pour tout* $n \in \mathbb{N}$ *il existe* $b_n \in B$ *tel que* $B_n = A_{b_n}$.

2.2. Dimension

La notion de *dimension*

$$\dim(A) \in \{-\infty; 0; \dots; n\}$$

d'un ensemble définissable $A \subseteq \mathbb{R}^n$ ([13, 17, 18]) sera cruciale dans la suite. La dimension des ensembles définissables dans une structure o-minimale vérifie la plupart des propriétés attendues. On suit la convention $\dim(\emptyset) = -\infty$ (indépendamment de n). Pour $A \subseteq B \subseteq \mathbb{R}^n$ définissables, nous avons notamment, voir [13, Prop. 3.17, Th. 3.22],

$$\dim(A) \leqslant \dim(B) \quad \dim(\partial(A)) \leqslant \dim(A) - 1 \text{ où } \partial(A) := \overline{A} \smallsetminus A. \tag{2.1}$$

Faute de référence, nous terminons cette section par deux énoncés, qui découlent de (2.1). Le premier permettra de traduire en propriétés topologiques des arguments sur les dimensions.

Lemme 2.2. — *Soit* $A \subseteq B$ *deux ensembles définissables non vides de même dimension. Alors* A *contient un ouvert non vide de* B.

Démonstration. — Prouvons la contraposée. Soit ainsi $A \subseteq B$ d'intérieur vide dans B. Autrement vu, $U = B \smallsetminus A$ est dense dans B. Donc $A \subseteq \overline{U} \smallsetminus U = \partial U$ (adhérence et bord pris dans B ou dans $\mathbb{R}^n$ tel que $B \subseteq \mathbb{R}^n$ peu importe). Enfin, utilisant (2.1),

$$\dim A \leqslant \dim \partial U \leqslant \dim(U) - 1 \leqslant \dim(B) - 1.$$

Comme B est non vide, $\dim(B)$ est finie et $\dim(B) - 1 < \dim(B)$. Finalement $\dim(A) \neq \dim(B)$. □

Du résultat suivant, seule la toute dernière conclusion nous importe.

Lemme 2.3. — *Soit* $n \in \mathbb{N}$ *et soit* $A \subseteq \mathbb{R}^n$ *une partie définissable. Alors*

$$A = \overline{A} \smallsetminus \left(\overline{\partial(A)} \smallsetminus \left(\overline{\partial(\partial(A))} \smallsetminus \left(\dots \left(\overline{\partial^{\dim(A)} A} \smallsetminus \emptyset\right) \dots\right)\right)\right),$$

soit, en termes de fonctions caractéristiques,

$$\chi_A = \chi_{\overline{A}} - \chi_{\overline{\partial A}} + \chi_{\overline{\partial\partial A}} - \dots = \sum_{c=0}^{\dim(A)} (-1)^c \cdot \chi_{\overline{\partial^c A}}.$$

En particulier A est dans la sous-algèbre d'ensembles engendrée par les parties définissables fermées $B \subseteq \mathbb{R}^n$ de dimension $\dim(B) \leqslant \dim(A)$.

A fortiori A est dans la tribu de Borel de $\mathbb{R}^n$.

Nous ne ferons qu'esquisser une démonstration.

On a noté par récurrence $\partial^c A = \partial(\partial^{c-1} A)$ et $\partial^0 A = A$. Par passage à la clôture, on a la chaine d'inclusions.

$$\overline{A} \supseteq \overline{\partial(A)} \supseteq \overline{\partial^2 A} \supseteq \ldots.$$

Le raisonnement s'opère par récurrence sur $\dim(A) \in \{-\infty\} \cup \mathbb{N}$. On a $A = \overline{A} \smallsetminus B$ avec $B = \partial A$ satisfaisant $\dim(B) \leqslant \dim(A) - 1$. On répète l'opération en choisissant $A = B$. Pour $B = \partial^{\dim(A)+1} A$, on trouvera $\dim(B) \leqslant \dim(A) - (\dim(A) + 1) < 0$, donc $\dim(B) = -\infty$ et $B = \emptyset$.

2.3. Structure de variété définissable dans une théorie *o*-minimale

Soit V une variété différentiable de dimension n. Soit $\mathcal{S} = (\mathcal{S}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une structure *o*-minimale. On dit que V est définissable dans $\mathcal{S}$, si il existe un atlas fini de cartes de V tel que les applications de transitions soient définies dans $\mathcal{S}$. On dispose alors d'un recouvrement ouvert $(U_i)_{i \in I}$ de V, pour un ensemble fini d'indices I, et pour tout $i \in I$ d'applications de transitions

$$\phi_i : U_i \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

telles que $\phi_i(U_i)$ est définissable dans $\mathcal{S}$ et telles que les applications de changement de coordonnées

$$\phi_{i,j} := \phi_i \phi_j^{-1} : \phi_j(U_i \cap U_j) \longrightarrow \phi_i(U_i \cap U_j)$$

soient définissables dans $\mathcal{S}$. Le théorème 1.1 de [2] montre que tout quotient arithmétique

$$S_{\Gamma,G,M} = \Gamma \backslash G/M$$

admet une structure de variété $\mathbb{R}^{\mathrm{alg}}$-définissable. On dispose donc d'un atlas fini de $S_{\Gamma,G,M}$ tel que les applications de changement de coordonnées sont semi-algébriques. On dispose alors pour toute structure *o*-minimale $\mathcal{S}$ d'une structure de variété $\mathcal{S}$-définissable sur $S_{\Gamma,G,M}$ étendant la structure $\mathbb{R}^{\mathrm{alg}}$. Explicitement un sous-ensemble V de $S_{\Gamma,G,M}$ est définissable dans $\mathcal{S}$ si pour tout $i \in I$, $\phi_i(U_i \cap V)$ est définissable dans $\mathcal{S}$ et si pour tout $(i,j) \in I^2$, la restriction de $\phi_{i,j}$ à $\phi_j(U_i \cap U_j \cap V)$ est définissable dans $\mathcal{S}$.

Par ailleurs, Bakker, Klingler et Tsimerman ([2, app. A]) montrent que toute variété analytique réel compact à coin est munie naturellement d'une structure de variété $\mathbb{R}^{\mathrm{an}}$-définissable. La compactification de Borel-Serre $S^{BS}_{\Gamma,G,M}$ de $S_{\Gamma,G,M}$ fournit ainsi une structure de variété $\mathbb{R}^{\mathrm{an}}$-définissable sur $S^{BS}_{\Gamma,G,M}$ et par restriction une structure de variété $\mathbb{R}^{\mathrm{an}}$-définissable sur $S_{\Gamma,G,M}$. Le théorème 1.1 de [2] assure alors que cette structure coïncide avec la structure $\mathbb{R}^{\mathrm{an}}$ qui étend la structure de $\mathbb{R}^{\mathrm{alg}}$- variété sur $S_{\Gamma,G,M}$. Notons encore une fois que ces structures dépendent fortement du choix d'un ensemble de Siegel de G. Différents choix de compacts maximaux de G donnent lieu à des ensembles de Siegel différents qui à leur tour définissent des structures $\mathbb{R}^{\mathrm{alg}}$ et $\mathbb{R}^{\mathrm{an}}$ différentes sur S. Les méthodes de ce texte sont insensibles à ces questions.

2.4. Mesures de Haar et dimension

Le résultat simple suivant nous servira dans la suite.

PROPOSITION 2.4. — *Soit G un groupe algébrique défini sur $\mathbb{R}$ réel, supposé affine, et*

$$G(\mathbb{R}) \subseteq \mathbb{R}^n$$

un plongement (algébrique réel) affine fermé. Soit ν une mesure de Haar sur $G(\mathbb{R})$ et notons $d = \dim(\mathbf{G})$ sa dimension de variété algébrique.

Alors pour toute partie $A \subseteq \mathbb{R}^n$ définissable dans une structure o-minimale, la partie $A \cap G$ est borélienne. En outre et $\nu(A \cap \mathbf{G}(\mathbb{R})) = 0$ dès que sa dimension comme partie définissable vérifie $\dim(A) < d$.

Nota bene. — La notion de dimension utilisée n'importe guère. La dimension de la variété algébrique G (de Krull, ou au dessus de sur $\mathbb{R}$) est aussi celle de $G(\mathbb{R})$ comme groupe de Lie, et de $G(\mathbb{R}) \subseteq \mathbb{R}^n$ comme partie définissable. La preuve, laissée au lecteur repose sur le fait que localement la mesure de Haar est à densité par rapport à la mesure de Lebesgue et de propriétés simples des ensembles définissables dans une théorie o-minimale.

3. Familles définissables et convergence de Hausdorff

Soit K une partie compacte de $\mathbb{R}^n$. Soit $\mathcal{K}(K)$ l'ensemble des sous-ensembles fermés non vides (donc compacts) de K. Alors $\mathcal{K}(K)$ est muni de la distance de Hausdorff qui à deux fermés F_1 et F_2 non vides de K associe

$$\delta_H(F_1, F_2) = \max\left\{\sup_{y\in F_2} d(y, F_1), \sup_{x\in F_1} d(x, F_2)\right\}.$$

L'ensemble $\mathcal{K}(K)$ muni de la distance de Hausdorff δ_H est séquentiellement compact. Ceci donne un sens à la notion de limite de Hausdorff d'une suite de fermés non vides de K.

Nous reprenons une convention de [27] qui nous permettra de se passer d'hypothèse de fermeture sur les familles définissables considérées dans nos énoncés. Cette convention étend la convergence au sens de Hausdorff, pour toute suite $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$ de parties non vides de K, en posant

$$\lim_{i\in\mathbb{N}} A_i = L \qquad \text{si et seulement si} \qquad \lim_{i\in\mathbb{N}} \overline{A_i} = L \text{ dans } \mathcal{K}(K).$$

3.1. Énoncé de semi-continuité

Le point de départ de notre approche est l'énoncé suivant, dont nous avons, finalement, trouvé une référence, dans [18, Th. 3.1 (1), (2)]. L'article [27] donne une approche du point central menant à cet énoncé. Nous recommandons fortement son introduction : pour son explication du résultat, pour les références données, pour la discussion sur l'origine contemporaine du résultat. Mentionnons également [41, §1, Prop. 1], un argument de réduction dimensionnelle via le lemme du chemin, qui nous a permis, dans une version antérieure, de prouver aisément l'inégalité de dimensions (3.1).

Proposition 3.1. — *Soit $n \geqslant 0$ un entier et soit K une partie compacte de $\mathbb{R}^n$. Soit $(A(b))_{b\in B}$ une famille définissable de sous-ensembles de $\mathbb{R}^n$ tous contenus dans K. Nous étudions, pour une suite $(b_i)_{i\in\mathbb{N}}$ dans B, la suite extraite $(A(b_i))_{i\in\mathbb{N}}$. Supposons que nous avons une limite au sens de Hausdorff $L = \lim_{i\in\mathbb{N}} A(b_i)$.*

(1) *Alors L est une partie compacte de $\mathbb{R}^n$ contenue dans K (c'est immédiat) et est définissable dans $\mathbb{R}^n$ (c'est bien connu),*
(2) *et en outre (c'est notre sujet, et moins connu) la dimension ne peut que chuter à la limite, au sens où on a l'inégalité de semi-continuité inférieure*

$$\dim(L) \leqslant \liminf_{i\geqslant 0} \dim A(b_i). \tag{3.1}$$

4. Mesures et o-minimalité dans un contexte genéral

Le théorème 4.3 est le résultat principal de cette section, et le pivot de ce travail. Si sa formulation est technique, c'est taillé à nos besoin ultérieurs :

sa raison d'être est son invocation pour étudier des mesures homogènes rencontrées dans la théorie de Ratner.

Nous donnons auparavant quelques clarifications de rigueur sur les notions de mesures et de convergence de mesures et un énoncé qui compare limite de Hausdorff de la suite des supports d'une suite de mesures convergente avec le support de la mesure limite.

4.1. Conventions sur la théorie de la mesure

Nous travaillons avec des mesures sur des espaces topologiques. Comme elles nous ne serviront que pour étudier leur support, nous incarnerons les mesures comme fonctions d'ensemble, définies sur la tribu borélienne, dénombrablement additives, à valeurs dans $\mathbb{R}_{\geqslant 0} \cup \{+\infty\}$: Toutes les mesures seront supposées positives (réelles). En outre toutes les mesures rencontrées seront aussi supposées localement finies.

Soit donnée μ une mesure sur un espace topologique K, comme fonction d'ensemble.

(1) Nous dirons qu'une partie $N \subseteq K$ est *négligeable (relativement à μ)* si elle est contenue dans une partie de la tribu borélienne qui est de mesure nulle.
(2) Nous dirons que μ est *concentrée* dans une partie $Z \subseteq K$ si la partie complémentaire $K \smallsetminus Z$ est négligeable.
(3) On appelle *Support* de la mesure μ la partie

$$\begin{aligned}\operatorname{Supp}(\mu) := K \smallsetminus \bigcup \left\{ U \subseteq K \,\middle|\, U = \mathring{U}, \mu(U) = 0 \right\} \\ = \bigcap \left\{ Z \subseteq K \,\middle|\, Z = \overline{Z}, \mu(K \smallsetminus Z) = 0 \right\}.\end{aligned}$$

Dans cette équation $\mathring{U}$ désigne l'intérieure de U.

4.2. Remarques

- Si μ est *finie*, entendre $\mu(K) < \infty$, alors μ est concentrée sur Z si et seulement si $\mu(Z) = \mu(K)$.
- Si Z est fermée, alors que μ est concentrée sur Z cela implique $\operatorname{Supp}(\mu) \subseteq Z$.
- Si μ est intérieurement régulière alors μ est concentrée sur son support. (Ce n'est pas le cas de la mesure [3, §7.1.3] de Dieudonné.)

Dans le reste de cette section les mesures seront (de masse) finie. Dans les section suivantes on étudiera plus précisément des mesures de probabilité, mais aussi des mesures infinies associées.

4.3. Cadre restreint

Pour l'énoncé principal de cette section, nous pourrons nous contenter de mesures finies *concentrées* sur une même partie compacte K de $\mathbb{R}^n$.

4.3.1. Convergence

Comme K est compact, la convergence *étroite*, *vague* et *faible* reviennent au même : elles utilisent les mêmes fonctions tests, prises dans l'algèbre $C(K)$ des fonctions continues $K \to \mathbb{R}$. On peut réaliser chaque fonction $f \in C(K)$ comme restriction d'une fonction continue à support compact sur $\mathbb{R}^n$ (extension de Tietze, version de Brouwer et Lebesgue [20]).

Nous noterons, utilisant l'intégrale de Lebesgue

$$\lim_{i\in\mathbb{N}} \mu_i = \mu_\infty, \text{ ou } \mu_i \rightharpoonup \mu_\infty, \text{ ou } \forall\, f \in C(K), \int f\mu_i \to \int f\mu_\infty$$

pour

$$\forall\, f \in C(K), \quad \lim_{i\in\mathbb{N}} \int f\mu_i = \int f\mu_\infty.$$

4.3.2. Point de vue fonctionnel

Comme K est métrisable, toutes les mesures de Borel sont régulières, et correspondent univoquement à leur fonctionnelle d'intégration, d'après la version idoine du théorème de représentation de Riesz : [4, 1.3.3] ou [36, 2.14, cf. 2.15], cf. [22, p 179].

4.3.3. Théorème de Prokhorov

Il nous arrivera d'utiliser l'énoncé suivant, qui est une des formes du théorème de Prokhorov donne. Il se déduit des formes plus complètes [3, §8.6, Th. 8.6.2, cf. Def. 8.6.1] ou [4, Th. 4.3.2, Def. 1.4.10], en utilisant $\mathcal{K}_\varepsilon = K$ dans les définitions, et $\mathcal{M} = \{\mu_i | i \in \mathbb{N}\}$ dans les théorèmes.

À noter que cet auteur nomme « *weak convergence* » [3, Def. 8.1.1] [4, Def. 2.2.1] ce que d'autres appellent « convergence étroite ». Comme notre espace ambiant K est compact, aucune confusion n'est à craindre.

THÉORÈME 4.1. — *Soit K un espace compact métrisable. Toute une suite $(\nu_i)_{i\in\mathbb{N}}$ de mesures (positives) finies ν_i dans K, uniformément bornées, au sens où*

$$\limsup_{i\in\mathbb{N}} \nu_i(K) < \infty, \quad \textit{(soit encore } \sup_{i\in\mathbb{N}} \nu_i(K) < \infty\textit{)} \tag{4.1}$$

contient une sous-suite infinie convergente.

4.4. Supports de mesures et limites de Hausdorff

Soit K un espace compact métrisable. Soit $M(K)$ l'espace des mesures de Borel positives finies. L'énoncé suivant, utile dans la suite, est sans doute bien connu, mais faute de référence nous en donnons une preuve que le lecteur pourra omettre dans une première lecture.

LEMME 4.2. — *Soit $(\mu_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une suite faiblement convergente de mesures appartenant à $M(K)$, Soit $(Z_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une suite convergente, au sens de Hausdorff, de parties de K, telle que pour tout indice $i \in I$ la mesure μ_i est concentrée sur Z_i. Si μ_∞ est une limite de $(\mu_i)_{i\in\mathbb{N}}$ dans $M(K)$, alors la partie fermée limite*

$$Z_\infty = \lim_{i\in\mathbb{N}} Z_i \in \mathcal{K}(K)$$

vérifie

$$\mathrm{Supp}(\mu_\infty) \subseteq Z_\infty.$$

Si $\mu_\infty = \mu_\infty^r$ est la limite de $(\mu_i)_{i\in\mathbb{N}}$ qui est régulière, alors μ_∞ est concentrée dans Z_∞.

Démonstration. — Par notre convention sur la convergence au sens de Hausdorff, on peut supposer que les Z_i sont fermés. Donc

$$\mathrm{Supp}(\mu_i) \subseteq Z_i.$$

Soit x arbitraire dans $K \smallsetminus Z_\infty$. Nous allons montrer $x \notin \mathrm{Supp}(\mu_\infty)$.

Pour tout $z \in Z_\infty$ il existe $x \in U_z$ et $z \in V_z$ deux ouverts disjoints. Par compacité de Z_∞ on extrait $z_1, \ldots, z_n$ tels que $V = V_{z_1} \cup \cdots \cup V_{z_n}$ est un voisinage de Z_∞, qui est alors disjoint du voisinage $U = U_{z_1} \cap \cdots \cap U_{z_n}$ de x.

Par le lemme d'Urysohn, il existe une fonction continue $f \geqslant 0$, nulle sur $\overline{V}$ et valant 1 sur $\{x\}$.

Les parties compactes de K contenues dans V forment un voisinage de $Z_\infty \in \mathcal{K}(K)$. Pour tout j assez grand,

$$\mathrm{Supp}(\mu_j) \subseteq Z_j \subseteq V.$$

Pour tout $\varepsilon > 0$, le compact $W_\varepsilon = \{x \in K \mid f(x) \geqslant \varepsilon\}$ est disjoint de $\overline{V}$, a fortiori de Z_j, et tout autant de $\mathrm{Supp}(\mu_j)$. Tout point w de W_ε a un voisinage $W_{w,j}$ de mesure nulle pour μ_j. À indice j fixé, par Borel-Lebesgue, on extrait un sous-recouvrement fini $W_{w_1,j}, \ldots, W_{w_m,j}$ de W_ε. Il suit

$$\mu_j(W_\varepsilon) \leqslant \mu_j(W_{z_1,j}) + \cdots + \mu(W_{z_m,j}) = 0 + \cdots + 0 = 0.$$

Il s'ensuit $0 \leqslant \int f\mu_j = \int_{W_\varepsilon} f\mu_j + \int_{K \smallsetminus W_\varepsilon} \mu_j \leqslant 0 + \varepsilon \cdot \mu_j(K)$ et, ε étant arbitraire,

$$\int f\mu_j = 0.$$

Par convergence faible il suit $\int f\mu_\infty = 0$. Soit W le voisinage ouvert $\{x \in K | f(x) > 1/2\}$ de x. Par construction de l'intégrale de Lebesgue nous avons

$$0 = \int f\mu_\infty \geqslant \frac{1}{2} \cdot \mu_\infty(W), \qquad \text{et donc } \mu_\infty(W) = 0.$$

Comme x a un voisinage W négligeable, nous avons par définition $x \notin \mathrm{Supp}(\mu_\infty)$, ce qui est était recherché.

Nous avons montré

$$\mathrm{Supp}(\mu_\infty) \subset Z_\infty$$

pour toute limite faible, régulière ou non. Supposons maintenant que μ_∞ est la limite régulière. Il s'ensuit que μ_∞ est concentrée dans son support, donc dans Z_∞. □

4.5. Énoncé

L'énoncé technique suivant contient du superflu (on peut abstraire l'une ou l'autre des familles considérées) pour mieux servir les besoins de la preuve du théorème 6.1

Théorème 4.3. — *Soit $n > 0$ un entier, soit $K \subseteq \mathbb{R}^n$ une partie compacte, et soit $(\nu_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une suite convergente*

$$\lim_{i\in\mathbb{N}} \nu_i = \nu_\infty,$$

de mesures finies, de limite ν_∞ finie, toutes concentrées dans K.

Soit aussi d tel que toute partie définissable de $\mathbb{R}^n$ de dimension strictement inférieur à d est négligeable pour ν_∞ : pour toute partie $A \subseteq \mathbb{R}^n$ définissable

$$\dim(A) < d \implies \nu_\infty(A \cap K) = 0. \tag{4.2}$$

Considérons deux familles définissables $(A(b))_{b\in B}$ et $(A'(b'))_{b'\in B'}$, dont les membres sont tous dans $\mathbb{R}^n$, et deux suites $(b_i)_{i\in\mathbb{N}}$ dans B et $(b'_i)_{i\in\mathbb{N}}$ dans B'.

On suppose que

- *la première famille enveloppe les supports au sens où*

$$\forall\, i\in\mathbb{N},\ \operatorname{Supp}(\nu_i)\subseteq A(b_i) \tag{4.3}$$

- *la deuxième est asymptotiquement de mesure non nulle au sens où*

$$\liminf_{i\in\mathbb{N}} \nu_i(A'(b'_i))>0. \tag{4.4}$$

On a alors la minoration

$$\liminf_{i\geqslant 0} \dim(A(b_i)\cap A'(b'_i))\geqslant d.$$

Ajoutant comme hypothèse l'égalité inverse, le lemme 2.2 implique le résultat suivant.

Corollaire 4.4. — *Si de plus*

$$d\geqslant \limsup_{i\geqslant 0} \dim(A(b_i)), \tag{4.5}$$

alors $d=\lim_{i\geqslant 0}\dim(A(b_i))$. Pour i assez grand, l'ensemble $A'(b'_i)$ contient un ouvert non vide de $A(b_i)$.

La preuve va être de se ramener à la section précédente et à l'inégalité (3.1). Il s'agit sinon de manipuler convergence et support de mesures avec la rigueur necessaire.

Démonstration. — Nous pouvons supposer $A'(b'_i)\subseteq A(b_i)$, quitte à remplacer $A'(b'_i)$ par

$$C(b_i,b'_i)=A(b_i)\cap A'(b'_i)$$

extrait de la famille définissable $C(b,b')_{(b,b')\in B\times B'}$. On substitue alors (b_i,b'_i) à b'_i.

Nous préparons l'usage de la proposition 3.1, en nous ramenant à des familles uniformément. La partie compacte K est contenue dans une partie compacte K' définissable de $\mathbb{R}^n$, par exemple une boule centrée à l'origine de rayon suffisamment grand. On peut remplacer $(A(b))_{b\in B}$ par $(A(b)\cap K')_{b\in B}$ et $(A(b'))_{b'\in B}$ par $(A(b')\cap K')_{b'\in B}$, sans porter atteinte aux hypothèses.

Raisonnons par l'absurde, en supposant que l'on peut passer à une sous-suite infinie pour laquelle

$$\forall\, i,\ \dim A'(b'_i)<d. \tag{4.6}$$

Par la compacité séquentielle rappelée au début de la section 3, quitte à extraire, la suite $(A'(b'_i))_{i\in\mathbb{N}}$ converge au sens de Hausdorff, vers une limite que nous baptisons $L := \lim A'(b'_i)$, et qui est une partie compacte de K. D'après la proposition 3.1, appliquée au compact K', cette partie L est définissable dans $\mathbb{R}^n$. Elle a donc une dimension. L'inégalité (3.1) et l'hypothèse (4.6), donnent

$$\dim L \leqslant \liminf_{i\in\mathbb{N}} \dim(A'(b'_i)) < d.$$

Par hypothèse sur d et ν_∞, nous avons

$$\nu_\infty(L) = 0. \tag{4.7}$$

Travaillons maintenant avec la suite $(\nu'_i)_{i\in\mathbb{N}}$ formée des restrictions

$$\nu'_i := \nu_i \mid_{A'(b'_i)} .$$

Leurs masses admettent une borne par excès commune

$$\limsup_{i\in\mathbb{N}} \nu'_i(K) = \limsup_{i\in\mathbb{N}} \nu_i(K \cap A'(b'_i)) \leqslant \limsup_{i\in\mathbb{N}} \nu_i(K) = \nu_\infty(K) < +\infty,$$

Par le théorème 4.1 de Prokhorov, quitte à extraire, la suite $(\nu'_i)_{i\in\mathbb{N}}$ a une limite ν'_∞ qui satisfait la domination

$$\nu'_\infty := \lim_{i\in\mathbb{N}} \nu'_i \leqslant \lim_{i\in\mathbb{N}} \nu_i = \nu_\infty. \tag{4.8}$$

L'hypothèse (4.4), implique la minoration

$$\liminf_{i\in\mathbb{N}} \nu'_i(K) = \liminf_{i\in\mathbb{N}} \nu_i(A'(b'_i)) > 0.$$

En utilisant la fonction test $1 \in C(K)$, on obtient

$$\nu'_\infty(K) = \int_K 1 \ \nu'_\infty = \lim_{i\in\mathbb{N}} \int_K 1 \ \nu'_i > 0.$$

D'après le lemme 4.2, la mesure ν'_∞ est concentrée sur $L \subseteq K$. Remémorant (4.7) et (4.8), voici la contradiction

$$\begin{aligned} \nu'_\infty(L) = \nu'_\infty(K) = \lim_{i\in\mathbb{N}} \nu'_i(K) = \lim_{i\in\mathbb{N}} \nu_i \mid_{A'(b'_i)} (K) \\ = \lim_{i\in\mathbb{N}} \nu_i(A'(b'_i)) > 0 = \nu_\infty(L) \geqslant \nu'_\infty(L). \end{aligned} \tag{4.9}$$ □

5. Dynamique homogène

Nous voulons appliquer notre énoncé précédent dans une certaine situation ayant trait aux variétés de Shimura, pour laquelle nous pouvons utiliser les théorèmes de Ratner, et surtout leurs conséquences précisées par Mozes et Shah. Cela va requérir de mettre en œuvre une couche additionnelle de notions.

Références. — Nous recommandons chaudement ces quelques précieuses références, de grande qualité, sur le sujet des réseaux arithmétiques [5, 34, 28, 33]. Les théorèmes de Ratner (voir [30] pour une présentation) nous serviront par l'entremise de [31], et seulement dans le cas de réseaux qui sont arithmétiques.

5.1. Quotients arithmétiques

Soit $\mathbf{G}$ un groupe algébrique semi-simple $\mathbf{G}$ sur $\mathbb{Q}$. Soit $\Gamma \subset \mathbf{G}(\mathbb{Q})$ un réseau arithmétique. On fixe une représentation fidèle $\rho : \mathbf{G} \to \mathrm{GL}(W)$, dans un espace vectoriel W sur $\mathbb{Q}$ de dimension finie N. On en déduit une inclusion

$$G \subset \mathrm{GL}(W \otimes \mathbb{R}) \simeq \mathrm{GL}_N(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}^{N^2}.$$

Cela donne un sens aux notions d'ensembles bornés et d'ensembles définissables de G. Ces notions sont en fait indépendants du choix d'une représentation fidèle.

5.2. Définissabilité de certaines familles de doubles classes

Nous démontrons dans cette partie que certaines familles de doubles classes sont définissables. Cela résulte de techniques classiques dans la théorie de la réduction pour l'action d'un réseau arithmétique Γ d'un groupe de Lie G. Faute de référence nous donnons des preuves des énoncés suivants qui jouerons un rôle important dans la suite.

Proposition 5.1. — *Soit $\Gamma \subseteq \mathbf{G}(\mathbb{Q})$ un réseau d'un groupe de Lie algébrique réel $\mathbf{G}(\mathbb{R})$ défini sur $\mathbb{Q}$. Soit H la composante neutre d'un sous-groupe de Lie algébrique $\mathbf{H}(\mathbb{R})$ défini sur $\mathbb{Q}$ sans caractère algébrique rationnel.*

Pour toutes parties bornées U et V de G, il existe un ensemble fini F de Γ tel que

$$\forall\, g \in V,\ (\Gamma H g) \cap U = (F H g) \cap U.$$

Démonstration. — Ajournant le choix de la partie finie $F \subseteq \Gamma$, on raisonne par double inclusion, l'une étant triviale. Il faut in fine démontrer

$$(\Gamma H g) \cap U \subseteq (F H g)$$

indépendamment de g décrivant V. Abstrayons g en substituant UV^{-1} à U : en effet

$$(\Gamma Hg)\cap U \subseteq (FHg) \Leftrightarrow (\Gamma H)\cap Ug^{-1} \subseteq (FH) \Leftarrow (\Gamma H)\cap UV^{-1} \subseteq (FH).$$

Tout revient à montrer la finitude de $(\Gamma H)\cap U \pmod{H}$ c'est-à-dire de

$$(\Gamma H/H)\cap(UH/H).$$

Alors il suffira de choisir pour F un ensemble fini d'éléments de Γ dont l'image dans $\Gamma H/H$ recouvre $(\Gamma H/H)\cap(UH/H)$.

Par un théorème classique de Chevalley précisé dans [6, Th. 5.1], il existe une représentation fidèle de $\mathbf{G}$ dans un $\mathbb{Q}$-espace vectoriel de dimension finie W et un vecteur $w \in W$ tel que le stabilisateur de w dans G est H.

Donc $G/H \simeq G\cdot w$ est plongé continûment (et même polynomialement et homéomorphiquement [7, 5.1 (Arens)] [6, Lem. 6.2]) dans $W\otimes\mathbb{R}$. Comme Γ est un réseau arithmétique, il stabilise un réseau (linéaire) Λ de $W\otimes\mathbb{R}$ contenu dans W. On peut donc remplacer w par un multiple entier non nul de sorte que w appartienne à Λ. Donc l'orbite $\Gamma H/H \simeq \Gamma\cdot w$ est contenue dans un réseau Λ, qui est un fermé discret.

Par ailleurs $U\cdot w$ est borné dans W (car contenu dans le compact $\overline{U}\cdot w$ image de $\overline{U}$).

En fin de compte l'intersection

$$(\Gamma H/H)\cap(UH/H)$$

est bornée dans W et discrète, donc bel et bien finie. □

Corollaire 5.2. — *Supposons U et V définissables et bornés. La famille*

$$((\Gamma H)\cap gU)_{g\in V}$$

est alors définissable.

Démonstration. — Dans

$$((FH)\cap gU)_{g\in V}$$

l'ensemble H est algébrique réel, de même que tout translaté $f\cdot H$, et donc de l'union finie $F\cdot H$ de tels translatés. La famille $(FH\cap gU)_{g\in G}$ est définissable, car donnée par la propriété

$$g^{-1}\cdot x\in U \text{ et } x\in FH.$$

La restriction de la famille à $V\subseteq G$ est donc définissable. □

Mettons en exergue le cas $V=\{g\}$.

Corollaire 5.3. — *Alors, pour tout semi-algébrique borné U de G et g dans G*

$$(\Gamma H g) \cap U$$

est définissable.

5.3. Rappels de dynamique homogène

5.3.1. Haut et Bas

Baptisons l'application quotient $\theta : G \to \Gamma \backslash G$, visualisée verticalement :

$$\begin{array}{c} G \\ \downarrow \\ \Gamma \backslash G \end{array} \tag{5.1}$$

Nous allons traiter de mesures à deux étages : « en haut » dans G ; et « en bas » dans $\Gamma \backslash G$. Notre but sera d'étudier des objets géométriques en bas par des mesures canoniquement associées. Les énoncés précédents vont s'appliquer aux mesures en haut.

5.3.2. Mesures de probabilité en bas (Théorie de Ratner)

Définition 5.4. — *Un sous-groupe algébrique $\mathbf{H} \leqslant \mathbf{G}$ défini sur $\mathbb{Q}$ est dit de type $\mathcal{H}$ si son radical $\mathbf{R}_H$ est unipotent et si $\mathbf{H}/\mathbf{R}_H$ est un produit presque direct de sous-groupes presque $\mathbb{Q}$-simples dont les points réels ne sont pas compacts. Le sous-groupe arithmétique $\Gamma \cap H \subset \mathbf{H}(\mathbb{Q}) \cap H \subset H$ est alors un réseau. Il y a donc une mesure de probabilité sur $(\Gamma \cap H) \backslash H$ invariante à droite par H. On note $\mu_{\mathbf{H}}$ la mesure sur $\Gamma \backslash G$ donnée par l'image directe de cette probabilité invariante par l'application d'identification puis le plongement fermé (*[34, Th. 1.13]*)*

$$(\Gamma \cap H) \backslash H \simeq \Gamma \backslash \Gamma \cdot H \hookrightarrow \Gamma \backslash G.$$

Définition 5.5. — *Une mesure (de probabilité)* de type Ratner *μ sur $\Gamma \backslash G$ est une mesure de la forme*

$$\mu = \mu_{\mathbf{H}} \cdot g$$

translatée par g de la mesure $\mu_{\mathbf{H}}$, avec $\mathbf{H} \leqslant \mathbf{G}$ un sous-groupe algébrique de type $\mathcal{H}$ et g dans G.

Choix d'« écriture». — Si une mesure μ de type Ratner peut s'écrire de la forme

$$\mu = \mu_{\mathbf{H}} \cdot g$$

avec un couple $(\mathbf{H}, g)$, ce couple n'est pas uniquement déterminé par μ.

Définition 5.6. — *Pour μ une mesure de probabilité de type Ratner sur $\Gamma \backslash G$, nous appellerons* écriture *de μ un couple $(\mathbf{H}, g) \in \mathcal{H} \times G$ tel que $\mu = \mu_{\mathbf{H}} \cdot g$.*

Le groupe algébrique $\mathbf{H}$ n'est déterminé qu'à conjugaison près par les éléments de Γ ; et $\mathbf{H}$ étant choisi, g n'est déterminé qu'à translation à gauche par H.

En revanche μ et g étant connus, on retrouve H comme composante neutre du stabilisateur de $\mu \cdot g^{-1} = \mu_{\mathbf{H}}$ pour l'action de G par translation, et puis $\mathbf{H}$ comme adhérence de Zariski de H dans $\mathbf{G}$ (sur $\mathbb{Q}$).(3)

5.3.3. Mesures localement finies en haut

Il y a une correspondance bijective entre

- les mesures en haut ν localement finies et invariantes par translation à gauche par des élements de Γ,
- et les mesures ν localement finies en bas.

Cette correspondance dépend d'une normalisation, le choix d'une mesure de Haar (positive) ν_Γ sur Γ, et nous choisissons la mesure de comptage

$$\nu_\Gamma(B) = \#B \in \{0; 1; \ldots; +\infty\} \text{ pour } B \subseteq \Gamma,$$

mais peu nous importe en définitive. Nous noterons cette correspondance à la manière de la référence [9], au moyen des opérations de quotient et relèvement

$$\nu \longmapsto \mu = \nu_\Gamma \backslash \nu \qquad \mu \longmapsto \nu = \mu^\sharp. \tag{5.2}$$

La notion générale de *mesure quotient* est développée dans [9, INT VII §2 No. 2 Def. 1 VII.31], dans la généralité idiosyncratique, dans l'approche de la théorie de la mesure qui leur est propre. Un cas plus particulier qui nous correspond est [9, INT VII §3 Th. 4 VII.52]. Un traitement plus classique de notre cas se trouve dans [34, Ch. I].

- La mesure μ n'est pas l'image directe $\theta_\star\nu$, laquelle n'est pas localement finie, sauf à être nulle, et alors ν aussi.

(3) L'adhérence de Zariski sur $\mathbb{R}$ sera en fait définie sur $\mathbb{Q}$.

- Sauf cas très particuliers, Γ est infini. Alors la mesure ν ne sera pas finie, même si μ est finie, sauf à être nulle, et alors μ aussi.
- Les mesures ν et μ se correspondent si et seulement si elles sont localement égales, une fois comparées au moyen d'un homéomorphisme local provenant de θ. Cela signifie que si μ et ν se correspondent et si θ est injective sur un ouvert $U \subseteq G$ alors
$$\nu(\theta(U)) = \mu(U)$$
et réciproquement que si l'identité vaut pour tout tel ouvert U, alors μ et ν se correspondent.

5.4. Résultats de Mozes-Shah (basés sur ceux de Ratner)

Mettons en place une terminologie pour exposer les informations que nous tirons de [31] concernant le comportement typique des suites de mesures de type Ratner dans $\Gamma \setminus G$.

Définition 5.7. — *Nous dirons qu'une suite de mesures de type Ratner* $(\mu_i)_{i\geqslant 0}$ *est* de la forme Mozes-Shah (dans G) *s'il existe des écritures (cf. définition 5.6)*
$$\mu_i = \mu_{\mathbf{H}_i} \cdot g_i$$
où

(M.-S. 1) *la suite* $(g_i)_{i\geqslant 0}$ *est convergente, de limite notée* g_∞ *;*

(M.-S. 2) *parmi les sous-groupes algébriques de* G *(sur* $\mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{Q}$ *peu importe) contenant une infinité des* $\mathbf{H}_i$*, il en existe un unique minimal, que nous noterons* $\mathbf{H}_\infty = \limsup_{i\geqslant 0} \mathbf{H}_i$.

Nous dirons alors que $(\mathbf{H}_i, g_i)_{i\geqslant 0}$ *est* une écriture de type Mozes-Shah *(dans* G*) de la suite* $(\mu_i)_{i\geqslant 0}$.

Nous avons choisi de décomposer les résultats de Mozes-Shah en trois énoncés, pas indépendants dans leur ensemble. Ce premier, très utile pour deviner les mesures limites d'une suite étudiée, est ramené par ces auteurs aux théorèmes de Ratner.

Théorème 5.8. — *Une suite* $(\mu_i)_{i\in\mathbb{N}}$ *de la forme Mozes-Shah a une limite (étroite)* $\mu_\infty = \lim_{i\in\mathbb{N}} \mu_i$ *et, pour une écriture de type Mozes-Shah, sa limite admet l'écriture*
$$\mu_\infty = \mu_{\mathbf{H}_\infty} \cdot g_\infty,$$
avec $\mathbf{H}_\infty$ *et* g_∞ *tels que dans la définition.*

Un point central pour nous est que

$$\dim(\mathbf{H}_\infty) \geqslant \limsup \dim(\mathbf{H}_i) \text{ soit } \dim(H_\infty) \geqslant \limsup \dim(H_i) \tag{5.3}$$

en utilisant la dimension comme variété algébrique puis comme groupe de Lie (i.e. comme variété différentielle).

Les énoncés suivants indiquent que les situations de la forme Mozes-Shah, loin d'être particulières, capturent toutes les situations de convergence.

Théorème 5.9.

(i) *Toute suite* tendue *de mesures de type Ratner contient une sous-suite infinie de la forme Mozes-Shah.*
(ii) *Toute suite* étroitement convergente *de mesures de type Ratner est de la forme Mozes-Shah.*

Théorème 5.10. — *Une suite de mesures de probabilités de type Ratner $(\mu_i)_{i\geqslant 0}$ est tendue si et seulement si il existe une suite d'écritures*

$$\mu_i = \mu_{\mathbf{H}_i} \cdot g_i$$

où la suite $(g_i)_{i\geqslant 0}$ est bornée *dans G : il existe une partie compacte C de G contenant chacun des g_i.*

5.5. Dynamique Homogène sur les espaces hermitien symétriques

Les énoncés de la partie précédente s'appliquent directement aux sous-variétés homogènes et aux sous-variétés faiblement spéciales des espaces symétriques hermitiens. On fixe $\mathbf{G}$ comme dans la partie précédente. On suppose de plus que $\mathbf{G}$ est semi-simple de type adjoint et que l'espace symétrique X de G est hermitien. Dans cette situation $S = \Gamma\backslash X$ est un espace localement symétrique hermitien. On fixe un point x_0 de X et on dispose d'un morphisme

$$\begin{aligned} \beta = \beta_{x_0} : \Gamma\backslash G &\longrightarrow S = \Gamma\backslash X \\ \Gamma g &\longmapsto \Gamma g.x_0 \end{aligned}$$

Définition 5.11.

- *Une mesure de type Ratner sur S est l'image direct $\nu = \beta_*\mu$ d'une mesure de type Ratner sur $\Gamma\backslash G$.*
- *Le support d'une mesure de type Ratner est un sous-espace homogène de S.*

- *On observe que les mesures de probabilités associées aux sous-variétés faiblement spéciales sont de type Ratner.*
- *Une suite de mesures de type Ratner sur S est dite de Mozes-Shah, si elle est de la forme $(\nu_n)_{n\in\mathbb{N}} = (\beta_*(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}})$ pour une suite $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de type Mozes-Shah de $\Gamma\backslash G$.*

Avec ces définitions, les énoncés des théorèmes 5.8, 5.9 et 5.10 valent pour S. Nous retiendrons pour les applications que nous avons en vue le résultat suivant.

THÉORÈME 5.12. — *Soit $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de sous-variétés faiblement spéciales de S. On suppose que la suite de mesures associée $(\nu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est tendue. Il existe alors une sous-suite infinie de type Mozes-Shah qui converge vers une mesure de type Ratner ν_∞. En passant à cette sous-suite, on peut écrire*

$$\nu_n = \beta_*(\mu_{\mathbf{H}_i} \cdot g_n) \longrightarrow \nu_\infty = \beta_*(\mu_{\mathbf{H}_\infty \cdot g_\infty})$$

pour un sous-groupe algébrique $\mathbf{H}_\infty$ de type $\mathcal{H}$ tel que pour tout n assez grand $\mathbf{H}_n \subset \mathbf{H}_\infty$ et $g_\infty = \lim_{n\to\infty} g_n$.

5.6. Le « *baby case* » du théorème d'Ax-Lindemann hyperbolique

Le résultat suivant est une conséquence simple du théorème d'Ax-Lindemann hyperbolique (ALH) démontré dans [26] en utilisant le lemme 4.1 de [32]. Une preuve rapide qui n'utilise pas toute la force de ALH est donnée dans la proposition 2.6 de [40].

PROPOSITION 5.13 ([26]). — *Soit $\mathbf{H}$ un sous-groupe algébrique de $\mathbf{G}$ de type $\mathcal{H}$. Soit x un point de X et soit*

$$[H \cdot x] := \{\Gamma \cdot h \cdot x \in \Gamma \setminus X \mid h \in H\} \subseteq S$$

l'image dans S de l'orbite de H dans X passant par x.

Alors une composante irréductible de l'adhérence de Zariski de $[H \cdot x]$ dans S est une sous-variété faiblement spéciale.

5.7. Dynamique homogène en présence de perte de masse

5.7.1. Introduction

Pour les suites $(\mu_i)_{i\geqslant 0}$ de mesures de type Ratner dans $\Gamma \setminus G$, un théorème de Dani-Margulis implique l'alternative suivante :

- ou bien la suite $(\mu_i)_{i\in\mathbb{N}}$ contient une sous-suite tendue, donc une sous-suite étroitement convergente (donc une suite de type Mozes-Shah)
- ou bien la suite $(\mu_i)_{i\in\mathbb{N}}$ converge faiblement vers 0.

Le théorème de Dani-Margulis va un peu plus loin et implique par exemple que, dans le second cas les groupes $\mathbf{H}_n$ de type $\mathcal{H}$ peuvent être choisi tels qu'une infinité d'entre eux sont contenus dans un même sous-groupe parabolique propre défini sur $\mathbb{Q}$.

Les travaux de [15, 16] étudient plus précisément ce phénomène en complétant les travaux de Mozes-Shah. Si les derniers utilisent quasi-exclusivement les théorèmes de Ratner, les premiers utilisent aussi des propriétés fines de la théorie de la réduction associée aux groupes arithmétiques.

5.7.2. Sous-groupes paraboliques et chambres de Weyl associés

Nous commençons par introduire quelques notations relatives à un sous-groupe parabolique. Une référence standard, complète et détaillée est [8, III.1] dont nous rappelons les quelques constructions qui nous serviront.

On suppose donnés un sous-groupe parabolique $\mathbf{P} \leqslant \mathbf{G}$ défini sur $\mathbb{Q}$, et un sous-groupe compact maximal $K_\infty \leqslant \mathbf{G}(\mathbb{R})$ dont l'involution de Cartan globale est notée $\Theta : G \to G$.

Le sous-groupe $L_P = P \cap \Theta(P)$ est un sous-groupe réductif (défini sur $\mathbb{R}$) maximal de P, aussi dit *sous-groupe de Levi*. Si $\mathbf{N}_P$ désigne le plus grand sous-groupe algébrique unipotent normal de $\mathbf{P}$ (défini sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{Q}$, cela revient au même), aussi dit *radical unipotent*, alors on a la *décomposition de Lévi* (définie sur $\mathbb{R}$)

$$P = N_P \cdot L_P,$$

et $N_P \cap L_P = \{e\}$.

Le quotient $\mathbf{Q} = \mathbf{P}/\mathbf{N}_P$ est un groupe algébrique défini sur $\mathbb{Q}$. C'est le plus grand quotient réductif de $\mathbf{P}$, parfois dit *(groupe de) Levi quotient*. Le centre de $\mathbf{Q}$ contient un plus grand sous-tore $\mathbf{S}_Q \leqslant \mathbf{Q}$ défini et déployé sur $\mathbb{Q}$. Comme on a un isomorphisme, algébrique sur $\mathbb{R}$

$$L_{P,\mathbb{R}} \to Q_\mathbb{R}$$

$\mathbf{S}_Q$ se relève en un tore $A_P \leqslant L$ défini sur $\mathbb{R}$, et déployé sur $\mathbb{R}$ (pas forcément maximal) et on a une décomposition presque directe

$$L_P = M_P A_P.$$

De plus le groupe $H_P = N_P M_P$ provient d'un $\mathbb{Q}$-sous-groupe algébrique $\mathbf{H}_P$ de $\mathbf{G}$. Dans cette situation $\Gamma_P = \Gamma \cap \mathbf{H}_P$ est un réseau de $\mathbf{H}_P$.

On dispose alors des décompositions de Langlands associées

$$P = N_P M_P A_P \quad G = PK_\infty = N_P M_P A_P K_\infty \quad X = N_P X_P A_P \tag{5.4}$$

où $X_P = M_P/(K_\infty \cap M_P)$. On écrira $g = n_g m_g a_g k_g$ (ou simplement $g = nmak$ si cela ne prête pas à confusion) la décomposition de Langlands d'un élément $g \in G$ relativement à $\mathbf{P}$ et à K_∞.

On note

$$A^+ \leqslant A_{P,\mathbb{R}}(\mathbb{R})$$

la composante neutre de $A_{P,\mathbb{R}}(\mathbb{R})$ au sens des groupes de Lie. La donnée du sous-groupe parabolique P contenant A_P permet de définir une chambre de Weyl positive comme suit. La représentation adjointe *à droite* de P sur $\mathfrak{g}$

$$X \cdot p = p^{-1} X p.$$

stabilise la sous-algèbre de Lie $\mathfrak{n}$ associée à N_P. L'action de A_P est simultanément diagonalisable sur $\mathbb{R}$ et les espaces propres simultanés sont de la forme $\mathfrak{n}_\alpha$ associés à des caractères algébriques réels

$$\alpha : A_P \to GL(1)_\mathbb{R}$$

par

$$\mathfrak{n}_\alpha = \{X \in \mathfrak{n} \mid \forall\, a \in A(\mathbb{R}), a \cdot X = \alpha(a) \cdot X\}.$$

Nous noterons

$$\Phi(A_P, P)$$

l'ensemble des caractères de A_P tels que $\mathfrak{n}_\alpha \neq \{0\}$. Nous considérerons la chambre positive

$$A^+_{\geqslant 0} = \{a \in A^+ \mid \forall\, \alpha \in \Phi(A, P), \alpha(a) \geqslant 1\}$$

et pour $t \in \mathbb{R}^+$ tel que $t \geqslant 1$, on note

$$A^+_{\geqslant t} = \{a \in A^+ \mid \forall\, \alpha \in \Phi(A, P), \alpha(a) \geqslant t\}.$$

5.7.3. Ensembles de Siegel

Soit $\mathbf{P} \leqslant \mathbf{G}$ un sous-parabolique défini sur $\mathbb{Q}$ et $K_\infty \leqslant G$ un sous-groupe compact maximal, nous définissons une classe de sous-ensembles de G. On écrit suivant la décomposition de Langlands (5.4)

$$P = N_P M_P A_P = H_P A_P.$$

Soit V un ouvert borné semi-algébrique de $H_P = N_P M_P$ et $t \geqslant 1$.

L'ensemble

$$\Sigma(\mathbf{P}, V, t, K_\infty) := V A^+_{\geqslant t} K_\infty$$

est appelé ensemble de Siegel dans G relativement à $\mathbf{P}$. Si M est un sous-groupe compact de K_∞ et $\alpha_M : G \longrightarrow G/M$ est l'application quotient alors

$$\Sigma_M(\mathbf{P}, V, t, K_\infty) := \alpha_M(\Sigma(\mathbf{P}, V, t, K_\infty))$$

est appelé ensemble de Siegel dans G/M relativement à $\mathbf{P}$. Notons que la condition de semi-algébricité sur V que nous imposons n'est pas usuellement requise dans la littérature, mais nous ne considérons que des ensembles de Siegel avec cette condition sur V dans la suite.

La théorie de la réduction est résumée dans la proposition suivante [8, Prop. III.2.19, p. 284].

Proposition 5.14. — *Soit K_∞ un compact maximal fixé de G. Soit $(\mathbf{P}_1, \ldots, \mathbf{P}_r)$ un ensemble de représentants des Γ-classes de conjugaison de $\mathbb{Q}$-sous groupes paraboliques de $\mathbf{G}$.*

(i) *Il existe des ensembles de Siegel $\Sigma(\mathbf{P}_i, V_i, t_i, K_\infty) := V_i A^+_{i,\geqslant t} K_\infty$ de G associés aux $\mathbf{P}_i$ dont la réunion des images dans $S_{\Gamma,G,M} = \Gamma\backslash G/M$ recouvrent $S_{\Gamma,G,M}$.*

(ii) *Soient $\mathbf{Q}_1$ et $\mathbf{Q}_2$ deux $\mathbb{Q}$-paraboliques de $\mathbf{G}$ et $\Sigma(\mathbf{Q}_i, V_i, t_i, K_\infty)$ des ensembles de Siegel associés. Alors l'ensemble*

$$\{\gamma \in \Gamma \mid \gamma\Sigma(\mathbf{Q}_1, V_1, t_1, K_\infty) \cap \Sigma(\mathbf{Q}_2, V_2, t_2, K_\infty) \neq \emptyset\}$$

est fini. Si de plus $\mathbf{Q}_2$ n'est pas Γ-conjugué à $\mathbf{Q}_1$ et V_1 et V_2 sont fixés,

$$\gamma\Sigma(\mathbf{Q}_1, V_1, t_1, K_\infty) \cap \Sigma(\mathbf{Q}_2, V_2, t_2, K_\infty) = \emptyset$$

pour t_1 et t_2 suffisamment grand.

(iii) *Soit $\mathbf{P}$ un $\mathbb{Q}$-parabolique de $\mathbf{G}$ et $\Sigma(\mathbf{P}, V, t)$ un ensemble de Siegel de $\mathbf{G}$ associé à $\mathbf{P}$. Alors pour t suffisamment grand*

$$\gamma\Sigma(\mathbf{P}, V, t, K_\infty) \cap \Sigma(\mathbf{P}, V, t) = \emptyset$$

pour tout $\gamma \notin \Gamma - \Gamma_P$, où l'on a noté $\Gamma_P = \Gamma \cap P$.

5.7.4. Propriétés de définassibilité des applications d'uniformisation des quotients arithmétiques.

Nous aurons besoin dans la suite d'énoncés assurant que la restriction de l'application d'uniformisation d'un quotient arithmétique à un domaine de Siegel est définissable dans une théorie o-minimal convenable. Le cas de l'espace des modules $\mathcal{A}_g$ des variétés abéliennes principalement polarisées de dimension g est traité par Peterzil et Starchenko [32]. Le cas général d'une variété de Shimura, ou d'espace localement symétrique hermitien arithmétique est traité dans [26]. Le cas des quotients arithmétiques arbitraires est traité par Bakker, Klingler et Tsimerman [2]. On résumé cet ensemble de résultats dans l'énoncé suivant.

Soit $\mathbf{G}$ un groupe semi-simple connexe sur $\mathbb{Q}$, $\Gamma \subset \mathbf{G}(\mathbb{Q})^+$ un réseau sans torsion et $M \subset G$ un sous-groupe compact. On rappelle que le quotient arithmétique $S_{\Gamma,G,M} = \Gamma\backslash G/M$ est muni d'une structure de variété $\mathbb{R}^{\mathrm{alg}}$-définissable. Si G est de type hermitien, $M = K_\infty$, alors $X = G/K_\infty$ est un espace hermitien symétrique et par Baily-Borel $S_{\Gamma,G,M}$ a une unique structure de variété algébrique quasi-projective. Les deux structures de variétés $\mathbb{R}^{\mathrm{alg}}$-définissables ainsi obtenues sont différentes mais d'après [2] les extension de ses deux structures dans $\mathbb{R}^{\mathrm{an,exp}}$ coïncident. On note comme précédemment $\alpha_M : G \longrightarrow G/M$ l'application quotient. Quand $M = K_\infty$ correspond à un point x_0 de $X = G/K_\infty$ on utilise aussi la notation $\alpha_{K_\infty} = \alpha_{x_0}$.

Proposition 5.15.

(i) *Soit* $\pi : G/M \longrightarrow S_{\Gamma,G,M} = \Gamma\backslash G/M$, *soit*

$$\Sigma_M = \Sigma_M(\mathbf{P}, V, t, K_\infty) = \alpha_M(\Sigma(\mathbf{P}, V, t, K_\infty))$$

un ensemble de Siegel de G/M *associé à un sous-groupe parabolique* $\mathbf{P}$ *et à* K_∞ *contenant* M*. Alors l'application*

$$\pi_{|\Sigma_M} : \Sigma_M \longrightarrow S_{\Gamma,G,M}$$

est définissable dans $\mathbb{R}^{\mathrm{alg}}$*. Elle est donc définissable dans toute théorie o-minimale étendant la structure de variété* $\mathbb{R}^{\mathrm{alg}}$*-définissable sur* $\Sigma_M \longrightarrow S_{\Gamma,G,M}$*. En particulier*

$$\pi \circ \alpha_{M|\Sigma(\mathbf{P},V,t,K_\infty)} : \Sigma(\mathbf{P}, V, t, K_\infty) \longrightarrow S_{\Gamma,G,M}$$

est définissable dans $\mathbb{R}^{\mathrm{an,exp}}$

(ii) *Si* S_{Γ,G,K_∞} *est localement symétrique hermitien alors l'application*

$$\pi_{|\Sigma_{K_\infty}} : \Sigma_{K_\infty} \longrightarrow S_{\Gamma,G,K_\infty}$$

est définissable dans $\mathbb{R}^{\mathrm{an,exp}}$*. De même*

$$\pi \circ \alpha_{x_o|\Sigma(\mathbf{P},V,t,K_\infty)} : \Sigma(\mathbf{P}, V, t, K_\infty) \longrightarrow S_{\Gamma,G,K_\infty}$$

est définissable dans $\mathbb{R}^{\mathrm{an,exp}}$.

Remarque 5.16. — Quand $M = K_\infty$, $X = G/K_\infty$ est un espace symétrique (hermitien ou non), la structure de variété $\mathbb{R}^{\mathrm{alg}}$-définissable sur $S = \Gamma\backslash X$ ne dépend pas du choix de K_∞. Soit $\mathbf{P}$ un $\mathbb{Q}$-parabolique. Soient

K_∞ et K'_∞ deux compacts maximaux de G. On note x_0 et x'_0 les points de X correspondant à K_∞ et à K'_∞. Pour $x \in X$, on note

$$\alpha_x : G \longrightarrow X \text{ l'application } g \longmapsto g.x.$$

Comme $G = PK_\infty$, il existe $p \in P$ tel que $x'_0 = p.x_0$ et $\alpha_{p.x_0} = \alpha_{x_0}\psi_p$ où ψ_p désigne l'application de translation à droite par p sur G. Dans cette situation

$$\psi_p : \Sigma(\mathbf{P}, Vp^{-1}, t, K'_\infty)) \longrightarrow \Sigma(\mathbf{P}, V, t, K_\infty)$$

est un isomorphisme semi-algébrique qui induit l'isomorphisme de $\mathbb{R}^{\mathrm{alg}}$-structure définissable sur

$$\alpha_{x_0}(\Sigma(\mathbf{P}, V, t, K_\infty)) = \alpha_{p.x_0}(\Sigma(\mathbf{P}, Vp^{-1}, t, K'_\infty)) \subset S = \Gamma\backslash X.$$

On construit l'isomorphisme de $\mathbb{R}^{\mathrm{alg}}$-structures définissables sur S en recouvrant S par des Siegel convenables relativement à un système $(\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2, \ldots, \mathbf{P}_r)$ de représentants des $\mathbb{Q}$-paraboliques de $\mathbf{G}$ modulo la conjugaison par Γ comme dans la proposition 5.14.

Quand M n'est pas maximal, les $\mathbb{R}^{\mathrm{alg}}$-structures définissables sur $S_{\Gamma,G,M}$ associées à deux compacts maximaux distincts peuvent différer de manière essentielle. On peut voir que déjà pour $\mathbf{G} = \mathbf{SL}_2$ il n'est pas en général possible de construire des isomorphismes de $\mathbb{R}^{\mathrm{an,exp}}$-structures entre les extensions $\mathbb{R}^{\mathrm{an,exp}}$ des $\mathbb{R}^{\mathrm{alg}}$-structures définissables sur $\mathbf{SL}(2,\mathbb{Z})\backslash\mathbf{SL}(2,\mathbb{R})$ associées à des compacts maximaux de G distincts. Les résultats que nous avons en vue sont valables pour tout les choix de $\mathbb{R}^{\mathrm{alg}}$-structures définissables sur $S_{\Gamma,G,M}$ et les choix en questions ne jouerons aucuns rôles dans la suite de ce texte.

5.7.5. Suite de mesures de type DGU

Définition 5.17. — *Nous dirons qu'une suite de mesures de type Ratner $(\mu_i)_{i\in\mathbb{N}}$ est* de la forme DGU (dans G, muni de K_∞, relativement à $\mathbf{P}$) *s'il existe des écritures dans la décomposition de Langlands* (5.4)

$$\mu_i = \mu_{\mathbf{H}_i} \cdot g_i \qquad g_i = n_i \cdot m_i \cdot a_i \cdot k_i \qquad h_i = n_i m_i \in H_P \tag{5.5}$$

où

[DGU 1] *la suite $(\widehat{\mu_i})_{i\in\mathbb{N}} := (\mu_{\mathbf{H}_i} \cdot h_i)_{i\geqslant 0}$ est de la forme Mozes-Shah dans $\Gamma_P\backslash H_P \subset \Gamma\backslash G$, soit*

(M.-S. 1) *la suite $(h_i)_{i\in\mathbb{N}}$ est convergente, de limite notée h_∞ ;*

(M.-S. 2) *parmi les sous-groupes algébriques de $\mathbf{G}$ contenant une infinité des $\mathbf{H}_i$, il en existe un unique minimal, que nous noterons $\mathbf{H}_\infty = \limsup_{i\in\mathbb{N}} \mathbf{H}_i$.*

– *On a de plus* $\mathbf{H}_i \subset \mathbf{H}_P$ *pour tout* $i \geqslant 0$.

[DGU 2] *la suite* $(a_i)_{i\in\mathbb{N}}$ *vérifie*

$$\forall\, \alpha \in \Phi(P, A_P), \lim_{i\to\infty} \alpha(a_i) = \infty$$

Nous dirons alors que $(\mathbf{H}_i, h_i, k_i)_{i\in\mathbb{N}}$ *est* une écriture de type DGU *(dans* G*, muni de* K_∞*, relativement à* P*) de la suite* $(\mu_i)_{i\in\mathbb{N}}$.

Un des points centraux du travail [16] est son théorème 5.3 qui généralise le théorème 5.9.

Théorème 5.18. — *Soit* $(\mu_i)_{i\in\mathbb{N}}$ *une suite de type Ratner dans* $\Gamma \setminus G$. *Il existe un sous-groupe parabolique* $\mathbf{P}$ *tel que pour tout sous-groupe compact maximal* $K_\infty \subset \mathbf{G}(\mathbb{R})$*, il existe une sous-suite extraite infinie de la forme DGU (dans* G*, muni de* K_∞*, relativement à* $\mathbf{P}$*).*

Nous aurons besoin de la conséquence simple suivante de ces énoncés.

Lemme 5.19. — *Soit* $\epsilon > 0$. *Soit* $\theta : G \longrightarrow \Gamma\backslash G$ *et soit* $(\mu_i)_{i\in\mathbb{N}}$ *une suite de type Ratner dans* $\Gamma\backslash G$ *avec une écriture de type DGU comme dans la définition 5.17, dans* G *muni de* K_∞ *relativement à* $\mathbf{P}$. *Il existe un ensemble de Siegel* $\Sigma(\mathbf{P}, V_P, t, K_\infty) = V_P A^+_{\geqslant t} K_\infty$ *dans* G *relativement à* $\mathbf{P}$ *tel que pour tout* i *assez grand*

$$\widehat{\mu}_i(\theta(V_P)) = \mu_i(\theta(V_P a_i)) \geqslant 1 - \epsilon.$$

Comme la suite $(\widehat{\mu_i})_{i\geqslant 0} := (\mu_{\mathbf{H}_i} \cdot h_i)_{i\geqslant 0}$ est de la forme Mozes-Shah dans $\Gamma_P\backslash H_P$, on sait que $\widehat{\mu_i}$ converge faiblement vers $\widehat{\mu}_\infty = \widehat{\mu}_{H_\infty} \cdot h_\infty$ dans $\Gamma_P\backslash H_P$. On peut alors trouver un compact C de $\Gamma_P\backslash H_P$ tel que $\widehat{\mu}_\infty(C) \geqslant 1 - \frac{\epsilon}{2}$. Pour tout i assez grand on a $|\widehat{\mu}_i(C) - \widehat{\mu}_\infty(C)| \leqslant \frac{\epsilon}{2}$. On peut alors choisir un compact semi-algébrique V_P de H_P tel que $C \subset \theta(V_P)$ qui aura les propriétés voulues. On remarquera aussi que pour i assez grand $a_i \in A^+_{\geqslant t}$ d'après la condition [DGU2].

6. Mesures homogènes et o-minimalité dans les espaces localement homogènes

Voici l'énoncé charnière de notre méthode : il condense ce qui nous servira dans la preuve du théorème principal dans le cas tendu. Il combine nos énoncés à propos de la dimension de familles définissables, avec les propriétés sur les mesures de type Ratner.

Une variante à un paramètre de cet énoncé est donnée à la section 6.1. Elle nous sera utile pour la démonstration du théorème principal quand on ne se place plus à priori dans le cas tendu.

Théorème 6.1. — *Soit* $(\mu_i)_{i\in\mathbb{N}}$ *une suite de mesures de type Ratner, de la forme Mozes-Shah, dans une écriture de type Mozes-Shah,*

$$\mu_i = \mu_{\mathbf{H}_i} \cdot g_i \longrightarrow \mu_\infty = \mu_{\mathbf{H}_\infty} \cdot g_\infty.$$

Soit aussi $\widehat{V} \subseteq \Gamma \backslash G$ *une partie mesurable et* $U \subseteq G$ *une partie définissable bornée. Nous faisons deux hypothèses.*

- Hypothèse en bas :

$$\liminf_{i\in\mathbb{N}} \mu_i(\widehat{V} \cap \theta(U)) > 0 \tag{6.1}$$

- Hypothèse en haut : *La partie* $\theta^{-1}(\widehat{V}) \cap U$ *est définissable.*

Alors, en haut, sauf pour au plus un nombre fini d'indices $i \in \mathbb{N}$*, l'ensemble* $\theta^{-1}(\widehat{V}) \cap U$ *contient un ouvert non vide de* $\Gamma \cdot H_\infty \cdot g_i$*.*

Pour ces mêmes indices, en bas, l'ensemble $\widehat{V} \cap \theta(U)$ *contient un ouvert non vide de* $\Gamma \backslash \Gamma \cdot H_\infty \cdot g_i$*.*

Le point frappant à réaliser dans cet énoncé est que l'on suppose a priori que $\widehat{V}$ contient une partie de l'ensemble $\Gamma \backslash \Gamma \cdot H_i \cdot g_i = \mathrm{Supp}(\mu_i)$, mesurée par μ_i mais que l'on déduit a posteriori que $\widehat{V}$ contient une partie ouverte de l'ensemble plus grand $\Gamma \backslash \Gamma \cdot H_\infty \cdot g_i$. Il est pourtant des cas où H_∞ soit strictement plus grand que les H_i.

Le passage de la première conclusion à la seconde n'est pas surprenant et s'obtient de la manière suivante.

Démonstration. — Soit $Z = \Gamma \backslash \Gamma \cdot H_\infty \cdot g_i$, pour un indice $i \in \mathbb{N}$ assez grand. D'après la conclusion de l'énoncé principal pour un tel i, il existe un ouvert non vide W de $\theta^{-1}(Z) = \Gamma \cdot H_\infty \cdot g_i$ contenu dans $U \cap \theta^{-1}(\widehat{V})$. Comme θ est un homéomorphisme local, c'est une application ouverte et la restriction de θ à$\theta^{-1}(Z) \to Z$ est ouverte. On en déduit que $\theta(W)$ est un ouvert non vide de Z qui est contenu dans $\theta(U) \cap \widehat{V}$. □

Démonstration. — Nous démontrons maintenant la première phrase de conclusion.

Instanciation. — Nous spécifions une instance du théorème 4.3.

Comme dans la section 5.1, nous posons $n = N^2$ et nous réalisons G comme sous-ensemble de $\mathbb{R}^{N^2} = \mathbb{R}^n$. On définit

$$K = \overline{U} \subseteq G \subseteq \mathbb{R}^n.$$

Alors K est une partie compacte car U est borné et K est définissable comme clôture d'un ensemble définissable.

Soit aussi une partie définissable bornée W de G qui contient $\{g_i \mid i \in \mathbb{N}\}$.

Comme K et W sont définissables et bornés, nous pouvons appliquer le corollaire 5.2, selon lequel la famille

$$(A(g))_{g\in W} = (K \cap (\Gamma H_\infty g))_{g\in W} \tag{6.2}$$

est une famille définissable.

Soit $B' = \{b'\}$ un ensemble ayant un unique élément. Nous utilisons la famille constante

$$A'(b')_{b'\in B'} = \left(\theta^{-1}(\widehat{V}) \cap U\right)_{b'\in B'} \tag{6.3}$$

qui est une famille définissable par l'hypothèse en haut. Nous choisissons alors la suite constante

$$(b'_i)_{i\geqslant 0} = (b')_{i\geqslant 0}.$$

Soit ${\mu_i}^\sharp$ la mesure localement finie sur G associé à la mesure μ_i en bas, par le procédé détaillé dans la section 5.3.3. On définit alors $\nu_i := {\mu_i}^\sharp\,|_K$, qui est une mesure finie sur K.

Lemme 6.2. — *Quitte à extraire une sous-suite infinie, on peut supposer que la suite $(\nu_i)_{i\in\mathbb{N}}$ converge faiblement vers une mesure ν_∞. De plus*

$$\nu_\infty \leqslant {\mu_\infty}^\sharp\,|_K\;. \tag{6.4}$$

Démonstration.

$$\limsup_{i\in\mathbb{N}} \nu_i(K) = \limsup_{i\in\mathbb{N}} \mu_i^\sharp\,|_K\,(K) \leqslant {\mu_\infty}^\sharp(K). \tag{6.5}$$

Le membre de droite est fini car K est borné et ${\mu_\infty}^\sharp$ localement finie. Cela établi l'hypothèse (4.1) du théorème 4.1 de Prokhorov qui assure la conclusion du lemme. □

Nous avons en main tous les objets qui jouent un rôle dans l'énoncé du théorème 4.3. On pose

- $(A(b))_{b\in B} = (A(g))_{g\in W}$,
- $(b_i)_{i\in\mathbb{N}} = (g_i)_{i\in\mathbb{N}}$,
- $(\nu_i)_{i\in\mathbb{N}} = ({\mu_i}^\sharp\,|_K)_{i\in\mathbb{N}}$,
- $d = \dim(H_\infty)$,
- $\nu_\infty = \lim(\nu_i)$.

La conclusion recherchée n'est autre que la conclusion du corollaire 4.4 ; il ne nous reste donc plus qu'à vérifier les hypothèses : (4.2), (4.3), (4.4), (4.5).

Vérifications. — Nous avons

$$\begin{aligned}\operatorname{Supp}\nu_i = \operatorname{Supp}{\mu_i}^\sharp\,|_K \subseteq K \cap \operatorname{Supp}({\mu_i}^\sharp)&\\ = K\cap\Gamma\cdot H_i\cdot g_i \subseteq K\cap\Gamma\cdot H_\infty\cdot g_i = A(g_i)&\end{aligned}$$

où la dernière inclusion vaut sauf pour peut-être un nombre fini d'indices i, d'après les propriétés des suites de mesures de types Mozes-Shah données dans la section 5.4. Cela assure la validité de (4.3).

D'après la proposition 2.4 tout ensemble définissable $A \subseteq \mathbb{R}^n$ tel que

$$\dim(A) < \dim(H_\infty) = d$$

est négligeable pour $\mu_\infty^\sharp$. Alors $A \cap K$ sera a fortiori négligeable pour ${\mu_\infty}^\sharp\mid_K$ et, vu la domination (6.4), pour ν_∞. On a établi l'hypothèse (4.2).

L'hypothèse (6.1) en bas, n'est qu'une manière d'écrire en bas l'hypothèse (4.4). Nous ne démontrons que l'implication utilisée. Nous passons de l'une à l'autre des inégalités par

$$\begin{aligned}(6.6)\quad \nu_i(A'(b_i')) = \int_K f\mid_K\ {\mu_i}^\sharp\mid_K = \int_G f\ {\mu_i}^\sharp = \int_{\Gamma\setminus G} f^\flat \mu_i \\ \geqslant \int_{\Gamma\setminus G} h\mu_i = \mu_i(\widehat{V}\cap\theta(U))\end{aligned}$$

où l'on a choisi

$$f := \chi_{\theta^{-1}(\widehat{V})\cap U} : K \to \mathbb{R}_{\geqslant 0},\ h := \chi_{\widehat{V}\cap\theta(U)} : \Gamma\backslash G \to \mathbb{R}_{\geqslant 0}$$

et

$$f^\flat(\Gamma\cdot g) := \#\left(U\cap\theta^{-1}(\widehat{V})\cap\theta^{-1}(\{\Gamma\cdot g\})\right) \geqslant \chi_{\widehat{V}\cap\theta(U)}(\Gamma\cdot g).$$

On déduit alors (4.4) de l'inégalité en bas (6.1) car on a

$$(6.7)\qquad \liminf \nu_i(A'(b_i')) \geqslant \liminf \mu_i(\widehat{V}\cap\theta(U)) > 0.$$

Pour l'inégalité (4.5), nous estimons tout d'abord

$$\dim A(b_i) \leqslant \dim(\Gamma\cdot H_\infty\cdot g_i) = \dim(H_\infty)$$

où la première dimension est la notion définissable et les autres celle de variété différentielle. Alors (4.5) découle de (5.3).

Nous avons bien vérifié les hypothèses voulues. La conclusion du corollaire 4.4 vaut donc pour notre sous-suite. Ceci termine la preuve du théorème 6.1. □

6.1. Variante à paramètres

La proposition 6.1 se généralise en la variante à paramètres ci-dessous, dont elle est le cas particulier $A = \{e\}$. Cette généralisation nous servira dans l'étude des suites de mesures de type Ratner quand de la masse se perd à l'infini.

THÉORÈME 6.3. — *Soit $(\widehat{\mu}_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une suite de mesures de la forme Mozes-Shah, dans une écriture de type Mozes-Shah,*

$$\widehat{\mu}_i = \mu_{\mathbf{H}_i} \cdot h_i \longrightarrow \widehat{\mu}_\infty = \mu_{\mathbf{H}_\infty} \cdot h_\infty,$$

ainsi qu'une suite $(a_i)_{i\in\mathbb{N}}$ choisie dans une partie définissable A de G, et posons enfin

$$(\mu_i)_{i\in\mathbb{N}} = (\widehat{\mu}_i \cdot a_i)_{i\in\mathbb{N}}.$$

Soit encore $\widehat{V} \subseteq \Gamma \backslash G$ une partie mesurable et $U \subseteq G$ une partie définissable bornée de G.

Nous faisons ces deux hypothèses.

- Hypothèse en bas : *Nous avons*

$$\liminf_{i\in\mathbb{N}} \mu_i(\widehat{V} \cap \theta(U \cdot a_i)) > 0, \tag{6.8}$$

- Hypothèse en haut : *La partie $\theta^{-1}(\widehat{V}) \cap (U \cdot A)$ est définissable.*

Alors, en haut, sauf pour au plus un nombre fini d'indices $i \in \mathbb{N}$, l'ensemble $\theta^{-1}(\widehat{V}) \cap (U \cdot a_i)$ contient un ouvert non vide de $\Gamma \cdot H_\infty \cdot h_i \cdot a_i$.

Pour ces mêmes indices, en bas, l'ensemble $\widehat{V} \cap \theta(U \cdot a_i)$ contient un ouvert non vide de

$$\Gamma \backslash \Gamma \cdot H_\infty \cdot h_i \cdot a_i.$$

Démonstration. — La démonstration est essentiellement la même que celle du théorème 6.1, et nous n'indiquerons que les modifications à apporter pour prendre en compte le paramètre $a_i \in A$.

Changement de famille. — La famille (6.3) sera remplacée par

$$A'(b')_{b'\in B'} = \left((\theta^{-1}(\widehat{V}) \cap (U \cdot a)) \cdot a^{-1}\right)_{a\in A}, \text{ pour } B' = A, \tag{6.9}$$

et nous choisissons la suite

$$(b'_i)_{i\in\mathbb{N}} = (a_i)_{i\in\mathbb{N}}.$$

Vérifions la définissabilité de cette famille. On rappelle que l'ensemble $E = \theta^{-1}(\widehat{V}) \cap (U \cdot A)$ est définissable. Pour $a \in A$, on a $U \cdot a = (U \cdot A) \cap (U \cdot a)$ de sorte que

$$\theta^{-1}(\widehat{V}) \cap (U \cdot a) = \theta^{-1}(\widehat{V}) \cap (U \cdot A) \cap (U \cdot a) = E \cap (U \cdot a)$$

on peut donc récrire notre famille sous la forme

$$A'(b')_{b'\in B'} = \left((E \cap (U \cdot a)) \cdot a^{-1}\right)_{a\in A} = \left((E \cdot a^{-1}) \cap U\right)_{a\in A}$$

qui est manifestement définissable.

Vérification d'hypothèse. — L'autre changement est la vérification de l'inégalité en bas (6.7). On pose

$$\nu_i = \widehat{\mu}_i{}^{\sharp}_{|K}.$$

Comme

$$\nu_i(A'(b'_i)) \geqslant \mu_i(\widehat{V} \cap \theta(U \cdot a_i)),$$

on obtient

$$\liminf \nu_i(A'(b'_i)) \geqslant \liminf \mu_i(\widehat{V} \cap \theta(U \cdot a_i)) > 0. \tag{6.10}$$

Les même calcul qu'en 6.6, en remplaçant $\widehat{V}$ par $\widehat{V}' = \widehat{V} \cdot a^{-1}$, et en modifiant f et h en conséquence donne

$$\begin{aligned} \nu_i(A'(b'_i)) &= \int_K f\,|_K\ \widehat{\mu}_i^{\sharp}\,|_K = \int_G f\ \widehat{\mu}_i^{\sharp} \\ &\geqslant \int_{\Gamma \setminus G} h\widehat{\mu}_i = \widehat{\mu}_i((\widehat{V}a_i^{-1}) \cap \theta(U)) = \mu_i(\widehat{V} \cap (Ua_i)). \end{aligned} \tag{6.11}$$

Enfin il ne faut pas oublier de vérifier que l'usage de la proposition 4.3, et son corollaire 4.4, invoqués avec la nouvelle famille (6.9), donne la conclusion cherchée, ce qui est le cas.

Plus précisément on déduira que l'ensemble $A'(b'_i) = \theta^{-1}(\widehat{V}) \cap (U \cdot a_i)a_i^{-1}$ contient un ouvert non vide de $A(b_i) = \Gamma \cdot H_\infty \cdot h_i$. Il suffire de translater à droite par a_i pour obtenir la conclusion cherchée. Enfin le passage de la première conclusion à la seconde se fait sans changement. □

6.2. Preuve du théorème 1.8

Nous pouvons maintenant donner la preuve du théorème 1.8. Nous commençons par le lemme suivant qui nous permet de supposer que $M = \{1\}$.

Lemme 6.4. — *Soit $M \subset G$ un compact. Le théorème 1.8 pour $S_{\Gamma,G,M} = \Gamma \backslash G/M$ est une conséquence du théorème 1.8 pour $S = \Gamma \backslash G$.*

Démonstration. — Soit V une sous-variété analytique fermée de $S_{\Gamma,G,M}$ définissable dans $\mathbb{R}^{\mathrm{an,exp}}$. Soit

$$\alpha_M : S = \Gamma \backslash G \longrightarrow S_{\Gamma,G,M} \quad \text{l'application } \Gamma g \longmapsto \Gamma g M.$$

Comme α_M est propre et définissable dans $\mathbb{R}^{\mathrm{alg}}$ pour les structures de variétés $\mathbb{R}^{\mathrm{alg}}$-définissables sur $S_{\Gamma,G,M}$ et S introduites par Bakker-Klingler-Tsimerman (cf. section 2.3), $\widehat{V} = \alpha_M^{-1}(V)$ est analytique fermée et définissable dans $\mathbb{R}^{\mathrm{an,exp}}$.

Soit

$$Z_i = \Gamma_{H_i}\backslash H_i(\mathbb{R})^+ g_i \cdot M$$

une suite de sous-variétés homogènes de V. Alors

$$\widehat{Z}_i = \Gamma_{H_i}\backslash H_i(\mathbb{R})^+ g_i$$

est une suite de sous-variétés homogènes de $\widehat{V} \subset S$. D'après le théorème 1.8 pour $\widehat{V}$ dans S, en passant éventuellement à une sous-suite, on peut supposer l'existence d'un sous-groupe algébrique $\mathbf{H}_\infty$ tel que $\mathbf{H}_i \subset \mathbf{H}_\infty$ et tel que

$$\widehat{Z}'_i := \Gamma_{H_\infty}\backslash H_i(\mathbb{R})^+ g_i \subset \widehat{V}.$$

On en déduit l'existence de la suite de sous-variétés homogènes

$$Z'_i := \Gamma_{H_\infty}\backslash H_i(\mathbb{R})^+ g_i \cdot M \subset V$$

prévue par le théorème 1.8 pour V dans $S_{\Gamma,G,M}$. □

On suppose donc que $M = \{1\}$ et on se donne une suite de sous-variétés homogènes

$$(Z_i)_{i\in\mathbb{N}} = (\Gamma_{H_i}\backslash H_i(\mathbb{R})^+ g_i)_{i\in\mathbb{N}}$$

de $\widehat{V} \subset S = \Gamma\backslash G$. Soit $(\mu_i)_{i\in\mathbb{N}} = (\mu_{\mathbf{H}_i} \cdot g_i)_{i\in\mathbb{N}}$ la suite de mesure de type Ratner associée. D'après la discussion de la section 5.7.5 on peut suppose, en passant au besoin à une sous-suite, qu'il existe un parabolique $\mathbf{P}$ et une écriture de type DGU pour $\mathbf{P}$ de la suite $(\mu_i)_{i\in\mathbb{N}}$. On a alors

$$g_i = n_i m_i a_i k_i \in G = NMAK$$

avec $h_i = n_i m_i \in H_P = NM$ et $H_i \subset H_P$ pour tout i.

Lemme 6.5. — *Il existe une partie définissable bornée U de G telle que*

$$\liminf_{i\in\mathbb{N}} \mu_i(\widehat{V} \cap \theta(U \cdot a_i)) > 0, \tag{6.12}$$

et telle que $\theta^{-1}(\widehat{V}) \cap (U \cdot A^+_{\geqslant t})$ est définissable dans $\mathbb{R}^{\mathrm{an},\exp}$.

Démonstration. — Notons que par hypothèse le support de μ_i est contenu dans $\widehat{V}$ de sorte que

$$\mu_i(\widehat{V} \cap \theta(U \cdot a_i)) = \mu_i(\theta(U \cdot a_i))$$

D'après le lemme 5.19, on peut choisir $U = V_P \subset H_P$ définissable borné vérifiant la première équation et tel que $\Sigma(\mathbf{P}, V_P, t) = V_P A^+_{\geqslant t} K_\infty$ soit un ensemble de Siegel de $\mathbf{G}$ relativement à $\mathbf{P}$. Les propriétés de définissabilité rappelées à la proposition 5.15 assurent alors que

$$\theta^{-1}(\widehat{V}) \cap (U \cdot A^+_{\geqslant t}) \cdot K_\infty$$

et par suite $\theta^{-1}(\widehat{V}) \cap (U \cdot A^+_{\geqslant t})$ est définissable dans $\mathbb{R}^{\mathrm{an},\exp}$. □

D'après le théorème 6.3, $\widehat{V}$ contient un ouvert non vide de $\Gamma\backslash\Gamma H_\infty g_i$ pour tout i. Par un argument de prolongement analytique

$$\Gamma\backslash\Gamma H_\infty g_i \subset \widehat{V}.$$

Ceci termine la preuve du théorème 1.8.

7. Application aux variété arithmétiques : partie géométrique d'André-Oort

On reprend les notations des parties précédentes. On fixe en particulier un $\mathbb{Q}$-groupe $\mathbf{G}$ semi-simple de type adjoint. On fixe un sous-groupe compact maximal K_∞ de G. On suppose que l'espace symétrique $X := G/K_\infty$ est hermitien. On fixe un point x_0 de X dont le stabilisateur dans G est K_∞. On fixe un réseau arithmétique $\Gamma \subset \mathbf{G}(\mathbb{Q})$ et on note

$$\alpha = \alpha_{x_o} : G \longrightarrow X \quad \text{ et } \quad \beta = \beta_{x_o} : \Gamma\backslash G \longrightarrow \Gamma\backslash X$$

les applications données respectivement par $g \mapsto g.x_0 = \alpha(g)$ et $\Gamma g \mapsto \Gamma g.x_0 = \beta(\Gamma g)$

On a alors le diagramme commutatif suivant.

$$\begin{tikzcd} & G \arrow[dl, "\alpha_{x_0}"'] \arrow[dr, "\theta"] & \\ X \arrow[dr, "\pi"'] & & \Gamma\backslash G \arrow[dl, "\beta_{x_0}"] \\ & S = \Gamma\backslash X & \end{tikzcd}$$

On donne dans cette section une preuve du théorème 1.3.

Théorème 7.1. — *Une sous-variété algébrique irréductible V de S qui contient un sous-ensemble Zariski-dense de sous-variétés faiblement spéciales de dimension positive est une sous variété faiblement spéciale ou se décompose en un produit faiblement spécial.*

La preuve passe par celle du théorème 1.6.

Soit V une sous-variété irréductible de S qui admet un sous-ensemble Zariski dense de sous-variétés faiblement spéciales de dimension positive. On peut supposer que V est Hodge générique. Soit en effet S' la plus petite sous-variété spéciale de S qui contient V. Il existe alors un $\mathbb{Q}$-sous-groupe semi-simple $\mathbf{G}'$ de $\mathbf{G}$ et un point x_1 de X tels que $S' = \Gamma'\backslash X'$ avec

$X' := G'.x_1$ hermitien symétrique et $\Gamma' := \Gamma \cap \mathbf{G}'(\mathbb{Q}) \subset \mathbf{G}'(\mathbb{Q})$ un réseau arithmétique. Dans cette situation V est Hodge générique dans S' et la conclusion du théorème pour V dans S' est identique à celle de V dans S. On suppose donc dans la suite que V est Hodge générique dans S.

On peut alors construire une suite $(Z_i)_{i\in\mathbb{N}}$ de sous-variétés faiblement spéciales de V de dimension positive telle que

- Pour tout $i \in \mathbb{N}$, Z_i est maximal parmi les sous-variétés faiblement spéciales de V.
- La suite $(Z_i)_{i\in\mathbb{N}}$ est *générique* dans V : pour toute sous-variété stricte W de V, l'ensemble
$$\{i \in \mathbb{N}, Z_i \subset W\}$$
est de cardinal fini. On utilise ici l'hypothèse que V est irréductible.
- La suite $(Z_i)_{i\in\mathbb{N}}$ est *stricte* dans S : Pour toute sous-variété spéciale S' stricte de S,
$$\{i \in \mathbb{N}, Z_i \subset S'\}$$
est de cardinal fini. C'est une conséquence de la propriété précédente car comme V est Hodge générique, pour toute variété spéciale S' stricte de S, $V \cap S'$ est un fermé de Zariski stricte de V donc
$$\{i \in \mathbb{N}, Z_i \subset S'\} = \{i \in \mathbb{N}, Z_i \subset V \cap S'\}$$
est bien de cardinal fini.
- Il existe un sous-groupe parabolique $\mathbf{P}$ de $\mathbf{G}$ et une suite de mesure $(\mu_i)_{i\in\mathbb{N}}$ de type Ratner sur $\Gamma\backslash G$ de la forme DGU dans G, muni de $K_\infty = K_{x_0}$ et de $\mathbf{P}$ avec les écritures
$$\mu_i = \mu_{\mathbf{H}_i} \cdot g_i \qquad g_i = n_i \cdot m_i \cdot a_i \cdot k_i \qquad h_i = n_i m_i \in H_P$$
où
  - [DGU 1] la suite $(\widehat{\mu_i})_{i\in\mathbb{N}} := (\mu_{\mathbf{H}_i} \cdot h_i)_{i\in\mathbb{N}}$ est de la forme Mozes-Shah ;
  - (M.-S. 1) la suite $(h_i)_{i\in\mathbb{N}}$ est convergente, de limite notée h_∞ ;
  - (M.-S. 2) parmi les sous-groupes algébriques de $\mathbf{G}$ contenant une infinité des $\mathbf{H}_i$, il en existe un unique minimal, que nous noterons $\mathbf{H}_\infty = \limsup_{i\to\infty} \mathbf{H}_i$. On a de plus $\mathbf{H}_i \subset \mathbf{H}_P$ pour tout $i \geqslant 0$.
  - [DGU 2] la suite $(a_i)_{i\in\mathbb{N}}$ vérifie
$$\forall\, \alpha \in \Phi(P, A_P), \lim_{i\to\infty} \alpha(a_i) = \infty$$
- On a $Z_i = \Gamma\backslash\Gamma H_i g_i.x_0$. La mesure canonique sur Z_i est $\nu_i = (\beta_{x_0})_\star\, \mu_i$ et on pose $\widehat{\nu_i} = (\beta_{x_0})_\star\, \widehat{\mu_i}$
- On pose $\widehat{V} = \beta_{x_0}^{-1}(V) \subset \Gamma\backslash G$.

- Comme dans la preuve du théorème 1.8 donnée dans la section précédente, il existe une partie définissable bornée U de G telle que

$$\liminf_{i\in\mathbb{N}} \mu_i(\widehat{V}\cap\theta(U\cdot a_i)) > 0, \tag{7.1}$$

  et telle que $\theta^{-1}(\widehat{V})\cap(U\cdot A^+_{\geqslant t})$ est définissable dans $\mathbb{R}^{\mathrm{an},\exp}$.

D'après le théorème 6.3, $\widehat{V}$ contient un ouvert non vide de $\Gamma\backslash\Gamma H_\infty g_i$ pour presque tout i. De plus $\mathbf{H}_i\subset\mathbf{H}_\infty$ pour presque tout i. On en déduit que V contient un ouvert non vide de $\Gamma\backslash\Gamma H_\infty g_i.x_0$ pour presque tout i. Par un argument de prolongement analytique on obtient les inclusions

$$Z_i\subset\Gamma\backslash\Gamma H_\infty g_i.x_0\subset V. \tag{7.2}$$

Par le « *baby case* » du théorème d'Ax-Lindemann hyperbolique (proposition 5.13) la clôture de Zariski Z_i' de $\Gamma\backslash\Gamma H_\infty g_i.x_0$ est faiblement spéciale et on a en fait

$$Z_i\subset\Gamma\backslash\Gamma H_\infty g_i.x_0\subset Z_i'\subset V. \tag{7.3}$$

Par notre hypothèse de maximalité, on obtient que

$$Z_i=\Gamma\backslash\Gamma H_\infty g_i.x_0=Z_i' \tag{7.4}$$

d'où $\mathbf{H}_i=\mathbf{H}_\infty$ pour tout i assez grand et

$$Z_i=\Gamma\backslash\Gamma H_\infty g_i.x_0=\Gamma\backslash\Gamma H_\infty x_i \tag{7.5}$$

avec $x_i:=g_i.x_0$.

On est alors ramené à l'étude de l'ensemble $\mathcal{E}(\mathbf{H}_\infty)$ des sous-variétés faiblement spéciales de S de la forme $\Gamma\backslash\Gamma H_\infty x$ pour un $x\in X$. Cette étude est faite dans la section 3 de [38] dont la proposition 3.5 est résumée dans la proposition suivante.

Proposition 7.2. — *Soit* $\mathbf{H}$ *un* $\mathbb{Q}$*-sous-groupe semi-simple de* $\mathbf{G}$ *tel que* $\mathcal{E}(\mathbf{H})$ *soit non vide. On suppose que* $\mathbf{H}\neq\mathbf{G}^{\mathrm{der}}$.

(i) *Si* $\mathbf{H}$ *n'est pas un sous-groupe normal de* $\mathbf{G}$ *alors* $\mathcal{E}(\mathbf{H})$ *est contenue dans une union finie de sous-variétés spéciales strictes de* S.

(ii) *Si* $\mathbf{H}$ *est un sous-groupe normal de* $\mathbf{G}$*, il existe une décomposition de* X *sous la forme* $X=X_1\times X_2$ *en un produit de deux espaces symétriques hermitiens telle que* $\mathcal{E}(\mathbf{H})$ *est l'ensemble des*

$$\pi(X_1\times\{x_2\})$$

avec $x_2\in X_2$.

Si $\mathbf{H}_\infty$ n'est pas normal dans $\mathbf{G}$, la première partie de la proposition montre que les Z_i sont contenus dans une union finie de sous-variétés spéciales strictes de V. Cela contredit notre hypothèse que la suite $(Z_i)_{i\in\mathbb{N}}$ est stricte. On en déduit alors que $\mathbf{H}_\infty$ est normal dans $\mathbf{G}$. et que

$$Z_i = \pi(X_1 \times \{x_i\})$$

pour un $x_i \in X_2$. Comme les Z_i sont Zariski denses dans V, on en déduit que V est faiblement spéciale (si $\mathbf{H}_\infty = \mathbf{G}$) ou se décompose en un produit faiblement spécial. Ceci termine la preuve du théorème 1.3

Appendice : Équidistribution des sous-variétés faiblement spéciales horizontales dans les domaines de périodes

Nous présentons dans cette annexe une généralisation du théorème 1.3 dans le contexte des $\mathbb{Z}$-variations de structures de Hodge polarisables ($\mathbb{Z}$-VHS).

A.1. Sous-variétés faiblement spéciales des domaines de périodes

Dans cette sous-section, nous rappelons les définitions pertinentes de la théorie de Hodge et des sous-variétés spéciales et faiblement spéciales pour une $\mathbb{Z}$-variation de structures de Hodge polarisables. Nous faisons référence à [24], [25, §4], ou à [11, §3] pour plus de détails.

Soit $\mathbb{V}$ un $\mathbb{Z}$-VHS sur une variété quasi-projective complexe irréductible lisse S. Soit $\boldsymbol{G}$ son groupe de Mumford-Tate générique. On fixe un point Hodge générique $o \in S$. La structure de Hodge sur la fibre $V := \mathbb{V}_{\mathbb{Q},o}$ induit un morphisme de $\mathbb{R}$-groupes algébriques $x_o \colon \mathbb{S} \to \boldsymbol{G}_{\mathbb{R}}$. Soit $\mathcal{D}$ la $\boldsymbol{G}(\mathbb{R})$-classe de conjugaison de x_o et soit $\mathcal{D}^+$ la composante connexe de $\mathcal{D}$ contenant x_o. Le couple $(\boldsymbol{G}, \mathcal{D}^+)$ (voir [11, Déf. 3.1]), est la *donnée de Hodge connexe générique* associée à $(S, \mathbb{V})$.

Soit Γ un réseau arithmétique net de $\boldsymbol{G}(\mathbb{Q})_+$, où $\boldsymbol{G}(\mathbb{Q})_+$ est le stabilisateur dans $\boldsymbol{G}(\mathbb{Q})$ de $\mathcal{D}^+$. Après passage à une recouvrement étale finie de S, on peut supposer que Γ contient le groupe de monodromie de S pour $\mathbb{V}$, à savoir l'image de $\pi_1(S, o)$ dans $GL(V_{\mathbb{Z}})$. Le quotient arithmétique

$$\Gamma\backslash\mathcal{D}^+ = \Gamma\backslash\boldsymbol{G}(\mathbb{R})_+/M_o =: S_{\Gamma,\boldsymbol{G},M_o},$$

est la variété de Hodge connexe associée au triplet $(S, \mathbb{V}, \Gamma)$. Ici, $\boldsymbol{G}(\mathbb{R})_+$ est le stabilisateur dans $\boldsymbol{G}(\mathbb{R})$ de $\mathcal{D}^+$, M_o est l'intersection du sous-groupe d'isotropie de x_o dans $\boldsymbol{G}(\mathbb{R})$ avec $\boldsymbol{G}(\mathbb{R})_+$ et son image dans $\boldsymbol{G}^{\mathrm{ad}}(\mathbb{R})^+$ est compacte. La variété de Hodge connexe $\Gamma\backslash\mathcal{D}^+$ est une variété analytique complexe mais n'a en général pas de structure algébrique sous-jacente. La $\mathbb{Z}$-VHS $\mathbb{V}$ peut alors être décrite par son application de période

$$\psi\colon S \to \Gamma\backslash\mathcal{D}^+,$$

qui est holomorphe, horizontal et nous avons le diagramme commutatif suivant

$$\begin{tikzcd} \widetilde{S} \arrow[r, "\tilde{\psi}"] \arrow[d, "p"'] & \mathcal{D}^+ \arrow[d, "\pi"] \\ S \arrow[r, "\psi"'] & \Gamma\backslash\mathcal{D}^+ \end{tikzcd}$$

où p est le recouvrement topologique universel de S, $\widetilde{\psi}$ le relèvement de ψ et π la projection naturelle.

Dans [24], Klingler a introduit les notions de sous-variétés spéciales et faiblement spéciales pour un $\mathbb{Z}$-VHS qui généralisent les notions correspondantes de la théorie des variétés de Shimura. Nous commençons par rappeler ces définitions.

Définition A.1 ([24]).

(1) *une sous-variété* spéciale *de* $\Gamma\backslash\mathcal{D}^+$ *est l'image d'une variété de Hodge connexe* Y *par un morphisme de Hodge* $Y \to \Gamma\backslash\mathcal{D}^+$.

(2) *Une* sous-variété faiblement spéciale *de* $\Gamma\backslash\mathcal{D}^+$ *est une sous-variété spéciale ou l'image* $\varphi(Y_1 \times \{t_2\})$ *pour un morphisme de Hodge* $\varphi\colon Y_1 \times Y_2 \to \Gamma\backslash\mathcal{D}^+$ *avec* $t_2 \in Y_2$.

Remarque A.2. — Un résultat fondamental de Cattani, Deligne et Kaplan [10] dit que si W est une sous-variété spéciale de $\Gamma\backslash\mathcal{D}^+$, alors chaque composante analytique irréductible de $\psi^{-1}(W)$ est une sous-variété algébrique de S. Récemment, Bakker, Klingler et Tsimerman [2] ont donné une preuve alternative de cet énoncé en établissant des propriétés de définissabilité de l'application de période dans une structure o-minimale et en appliquant un lemme de Chow convenable dans ce contexte. Cette méthode permet également de montrer que si W est une sous-variété faiblement spéciale de $\Gamma\backslash\mathcal{D}^+$, alors $\psi^{-1}(W)$ est une sous-variété algébrique de S (voir [25, Prop. 4.8]).

Comme la définissabilité de l'application de période sera utilisée de manière cruciale dans la preuve de nos résultats, nous rassemblons ici le théorème 1.1 de [2] dans la généralité que nous voulons pour la commodité :

Théorème A.3 (Bakker, Klingler and Tsimerman [2, Th. 1.1]).

(1) *Il existe une structure de variété $\mathbb{R}^{\mathrm{alg}}$-définissable sur la variété de Hodge connexe $\Gamma\backslash\mathcal{D}^+$.*
(2) *Si on muni S (resp. $\Gamma\backslash\mathcal{D}^+$) de la structure de variété $\mathbb{R}^{\mathrm{an,exp}}$-définissable étendant la structure de variété $\mathbb{R}^{\mathrm{alg}}$-définissable sur S (resp $\Gamma\backslash\mathcal{D}^+$) provenant de sa structure de variété algébrique complexe (resp. provenant de la structure de variété $\mathbb{R}^{\mathrm{alg}}$-définissable sur $\Gamma\backslash\mathcal{D}^+$ donnée par la partie (1)), l'application de période $\psi\colon S \to \Gamma\backslash\mathcal{D}^+$ est $\mathbb{R}^{\mathrm{an,exp}}$-définissable.*
(3) *Pour tout $q \in \boldsymbol{G}(\mathbb{Q})_+$, la correspondance de Hecke :*

$$T_q\colon \Gamma\backslash\mathcal{D}^+ \xleftarrow{\pi_1} q^{-1}\Gamma q \cap \Gamma\backslash\mathcal{D}^+ \xrightarrow{q\cdot} \Gamma \cap q\Gamma q^{-1}\backslash\mathcal{D}^+ \xrightarrow{\pi_2} \Gamma\backslash\mathcal{D}^+,$$

est $\mathbb{R}^{\mathrm{alg}}$-définissable par rapport à la structure définissable sur $\Gamma\backslash\mathcal{D}^+$ donnée par la partie (1). *Ici, π_1 et π_2 sont les projections étales finies naturelles et l'application $q\cdot$ est la multiplication à gauche par q.*

Définition A.4. — *Une sous-variété* spéciale *(resp.* faiblement spéciale*) de S pour $\mathbb{V}$ est une composante irréductible de $\psi^{-1}(W)$ pour une sous-variété spéciale (resp. faiblement spéciale) W de $\Gamma\backslash\mathcal{D}^+$.*

Définition A.5 ([25, Def. 1.3]). — *Une sous-variété irréductible fermée $Z \subseteq S$ pour $\mathbb{V}$ est dite* de dimension de période positive pour $\mathbb{V}$ *si son groupe de monodromie algébrique pour $\mathbb{V}$ est non trivial ; ou de manière équivalente si l'application de période ψ ne contracte pas Z en un point de $\Gamma\backslash\mathcal{D}^+$.*

Définition A.6. — *Une sous-variété faiblement spéciale W de $\Gamma\backslash\mathcal{D}^+$ est dite* horizontale *si W est contenue dans $\overline{\psi(S)}$ (la fermeture topologique de $\psi(S)$ dans $\Gamma\backslash\mathcal{D}^+$).*

Une sous-variété faiblement spéciale Z de S est dite horizontale *pour $\mathbb{V}$ si Z est une composante irréductible de $\psi^{-1}(W)$ pour une sous-variété faiblement spéciale horizontale W de $\Gamma\backslash\mathcal{D}^+$.*

Nous désignons par $\mathrm{WS}^h(S,\mathbb{V})_+$ l'union des sous-variétés faiblement spéciales de S, horizontales pour $\mathbb{V}$, strictes de dimension de période positive.

A.2. Enoncé du résultat principal.

Le résultat principal que nous avons en vue est

Théorème A.7. — *Soit $\mathbb{V}$ une $\mathbb{Z}$-VHS sur une variété quasi-projective complexe irréductible lisse S. Si $\mathrm{WS}^h(S,\mathbb{V})_+ \subseteq S$ est Zariski-dense dans S, alors (en passant au besoin à un revêtement fini étale de S) l'application de période*

$$\psi\colon S \to \Gamma\backslash\mathcal{D}^+$$

se factorise en

$$S \xrightarrow{(\psi_1,\psi_2)} \Gamma_1\backslash\mathcal{D}_1^+ \times \Gamma_2\backslash\mathcal{D}_2^+ \xrightarrow{\varphi} \Gamma\backslash\mathcal{D}^+,$$

où $\Gamma_1\backslash\mathcal{D}_1^+$ est une variété de Hodge connexe de type Shimura, φ est un morphisme de Hodge fini, ψ_1 est un morphisme algébrique dominant et $\psi(S)$ est dense dans

$$\varphi(\Gamma_1\backslash\mathcal{D}_1^+ \times \psi_2(S)).$$

Une sous-variété W de $\Gamma\backslash\mathcal{D}^+$ est dite homogène si elle est de la forme

$$W = \Gamma\backslash\Gamma\boldsymbol{H}(\mathbb{R})^+gM/M$$

pour un sous-groupe $\boldsymbol{H}$ de $\boldsymbol{G}$ et un élément $g \in G$. Un tel W est un fermé analytique de $\Gamma\backslash\mathcal{D}^+$. Une variété homogène est dite horizontale si de plus $W \subset \overline{\psi(S)}$. Les ingrédients principaux de la preuve du théorème A.7 sont le théorème 1.8 et le « *baby case* » du théorème d'Ax-Lindemann pour les $\mathbb{Z}$-VHS suivant.

Théorème A.8 (Baby-Ax-Lindemann pour les $\mathbb{Z}$-VHS). — *Soit $\boldsymbol{H}$ un sous-groupe de $\boldsymbol{G}$ de type $\mathcal{H}$. Soit $W = \Gamma\backslash\Gamma\boldsymbol{H}(\mathbb{R})^+gM/M \subset \overline{\psi(S)}$ une sous-variété homogène horizontale (fermée) de $\Gamma\backslash\mathcal{D}^+$. Soit Z une composante irréductible de la clôture de Zariski de $\psi^{-1}(W)$. Alors Z est une sous-variété faiblement spéciale horizontale de S pour $\mathbb{V}$.*

On peut noter que cet énoncé n'est pas une conséquence directe du théorème d'Ax-Lindemann dans ce contexte à cause des hypothèses et conclusions d'horizontalité.

A.3. Description des sous-variétés faiblement spéciales de S pour $\mathbb{V}$

Les sous-variétés faiblement spéciales de S pour $\mathbb{V}$ peuvent être décrites en utilisant les groupes de monodromie algébrique.

Définition A.9. — *Soit Z une sous-variété algébrique irréductible fermée de S et soit $\nu\colon \widehat{Z} \to Z$ sa normalisation. Le* groupe de monodromie algébrique *$\boldsymbol{H}_Z$ de Z pour $\mathbb{V}$ est défini comme étant la composante neutre* *de la fermeture de Zariski dans* $\mathrm{GL}(V)$ *de la monodromie du système local* $\nu^*\mathbb{V}$ *sur* $\widehat{Z}$.

Soit Z une sous-variété algébrique irréductible fermée de S. Nous avons alors un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} \widehat{Z} \arrow[r, "\psi_Z"] \arrow[d, "\nu"] & \Gamma_Z\backslash\mathcal{D}_Z^+ \arrow[d, "\iota_Z"] \\ Z \arrow[r, "\psi|_Z"'] & \Gamma\backslash\mathcal{D}^+ \end{tikzcd}$$

où $(\boldsymbol{G}_Z, \mathcal{D}_Z^+)$ est la donnée de Hodge connexe générique de la restriction de $\mathbb{V}$ au lieu lisse de Z et $\Gamma_Z = \Gamma \cap \boldsymbol{G}_Z(\mathbb{Q})_+$. Par le théorème de monodromie d'André-Deligne [1], $\boldsymbol{H}_Z$ est un sous-groupe normal de $\boldsymbol{G}_Z^{\mathrm{der}}$. Puisque $\boldsymbol{G}_Z$ est réductif, il existe un sous-groupe normal $\boldsymbol{G}'_Z$ de $\boldsymbol{G}_Z$ et un produit presque direct

$$\boldsymbol{G}_Z = \boldsymbol{H}_Z\boldsymbol{G}'_Z,$$

qui induit une décomposition de la donnée de Hodge connexe adjointe $(\boldsymbol{G}_Z^{\mathrm{ad}}, \mathcal{D}_Z^+)$

$$(\boldsymbol{G}_Z^{\mathrm{ad}}, \mathcal{D}_Z^+) = (\boldsymbol{H}_Z^{\mathrm{ad}}, \mathcal{D}_{\boldsymbol{H}_Z}^+) \times (\boldsymbol{G'}_Z^{\mathrm{ad}}, \mathcal{D}_{\boldsymbol{G}'_Z}^+).$$

On en déduit un morphisme de Hodge fini

$$\alpha_Z \colon \Gamma_{\boldsymbol{H}_Z}\backslash\mathcal{D}_{\boldsymbol{H}_Z}^+ \times \Gamma_{\boldsymbol{G}'_Z}\backslash\mathcal{D}_{\boldsymbol{G}'_Z}^+ \to \Gamma_Z\backslash\mathcal{D}_Z^+,$$

et l'application de période ψ_Z se factorise en

$$\widehat{Z} \xrightarrow{(\psi_Z^{nt}, \psi_Z^t)} \Gamma_{\boldsymbol{H}_Z}\backslash\mathcal{D}_{\boldsymbol{H}_Z}^+ \times \Gamma_{\boldsymbol{G}'_Z}\backslash\mathcal{D}_{\boldsymbol{G}'_Z}^+ \xrightarrow{\alpha_Z} \Gamma_Z\backslash\mathcal{D}_Z^+.$$

Le lemme 4.2 de [25] assure que de la projection $\psi_Z^t \colon \widehat{Z} \to \Gamma_{\boldsymbol{G}'_Z}\backslash\mathcal{D}_{\boldsymbol{G}'_Z}^+$ est constante. Donc si Z est une sous-variété faiblement spéciale de $(S, \mathbb{V})$, alors Z est une composante irréductible de

$$\psi^{-1}(\iota_Z \circ \alpha_Z(\Gamma_{\boldsymbol{H}_Z}\backslash\mathcal{D}_{\boldsymbol{H}_Z}^+ \times \psi_t(\widehat{Z}))) = \psi^{-1}(\pi(\mathcal{D}_{\boldsymbol{H}_Z}^+ \times \{x''_Z\})),$$

où $x''_Z \in \mathcal{D}_{\boldsymbol{G}'_Z}^+$ est un relèvement arbitraire à $\mathcal{D}_{\boldsymbol{G}'_Z}^+$ du point $y''_Z := \psi_Z^t(\widehat{Z})$.

On en déduit la description suivante des sous-variétés faiblement spéciales de S pour $\mathbb{V}$:

Soit $Z \subseteq S$ une sous-variété algébrique irréductible fermée de S. Alors Z est faiblement spéciale pour $\mathbb{V}$ si et seulement si Z est maximale parmi toutes les sous-variétés algébriques irréductibles fermées de S ayant le même groupe de monodromie algébrique que Z.

Soient $x'_Z \in \mathcal{D}^+_{\boldsymbol{H}_Z}$ et $x_Z := (x'_Z, x''_Z)$. Alors

$$\mathcal{D}^+_{\boldsymbol{H}_Z} \times \mathcal{D}^+_{\boldsymbol{G}'_Z} = \boldsymbol{G}_Z(\mathbb{R})^+ \cdot x_Z = \boldsymbol{H}_Z(\mathbb{R})^+ \cdot x'_Z \times \boldsymbol{G}_{Z\prime}(\mathbb{R})^+ \cdot x''_Z,$$
$$\mathcal{D}^+_{\boldsymbol{H}_Z} \times \{x''_Z\} = \boldsymbol{H}_Z(\mathbb{R})^+ \cdot x_Z = \boldsymbol{H}_Z(\mathbb{R})^+ \cdot x'_Z \times \{x''_Z\}.$$

Donc

$$\pi(\mathcal{D}^+_{\boldsymbol{H}_Z} \times \{x''_Z\}) = \pi(\boldsymbol{H}_Z(\mathbb{R})^+ \cdot x_Z) = \Gamma\backslash\Gamma\boldsymbol{H}_Z(\mathbb{R})^+ g_Z M/M$$

pour un g_Z dans $\boldsymbol{G}(\mathbb{R})^+$.

La description ci-dessus est canonique modulo Γ-conjuguaison : si on fixe un domaine fondamental $\mathcal{F}$ pour les actions de Γ sur $\mathcal{D}^+$ et que l'on exige que $x_Z \in \mathcal{F}$, alors on obtient une description canonique des sous-variétés faiblement spéciales.

Remarque A.10. — Soit Z une sous-variété horizontale faiblement spéciale de $(S, \mathbb{V})$. Alors $\mathcal{D}^+_{\boldsymbol{H}_Z}$ est un domaine symétrique hermitien et $\pi(\boldsymbol{H}_Z(\mathbb{R})^+ \cdot x_Z)$ est une sous-variété homogène (voir section 1.3) de $\Gamma\backslash\mathcal{D}^+$ contenue dans l'image de période. En effet la condition d'horizontalité implique que l'algèbre de Lie de $\boldsymbol{H}_Z$ est de type de Hodge $\{(-1,1),(0,0),(1,-1)\}$ et cette propriété est nécessaire et suffisante d'après Deligne pour que $\mathcal{D}^+_{\boldsymbol{H}_Z}$ soit hermitien symétrique.

Remarque A.11. — En spécialisant la discussion ci-dessus à $Z = S$, on peut ignorer la partie de monodromie triviale du groupe générique de Mumford-Tate $\boldsymbol{G}$. On supposera donc dans la suite que le groupe de monodromie de S pour $\mathbb{V}$ est Zariski dense dans $\boldsymbol{G}$.

A.4. Les preuves

Pour les preuves des théorèmes A.7 et A.8, nous pouvons et nous allons supposer que l'application de période ψ pour $\mathbb{V}$ est propre. En effet, soit $\overline{S}$ une compactification projective lisse de S avec $\overline{S}\backslash S$ un diviseur à croisements normaux. Soit S' l'union de S et des points de $\overline{S}\backslash S$ autour desquels les monodromies locales sont d'ordre fini. Par un résultat de Griffiths ([23, Th. 9.5 et 9.6]), l'application de période ψ s'étend holomorphiquement en une application propre $\psi' \colon S' \to \Gamma\backslash\mathcal{D}^+$ et l'image $\psi'(S')$ contient $\psi(S)$ comme complémentaire d'une sous-variété analytique. Les conclusions des théorèmes A.7 et A.8 pour ψ se déduisent alors de celles pour ψ'.

Soit Z une sous-variété faiblement spéciale de S pour $\mathbb{V}$. On note μ_Z sur $\Gamma\backslash\mathcal{D}^+$ sa mesure de probabilité de Borel canonique associée. Le support de μ_Z est

$$\operatorname{supp}(\mu_Z) = \pi(\boldsymbol{H}_Z(\mathbb{R})^+ \cdot x_Z)$$

et μ_Z est l'image sous la projection (induite par x_Z)

$$\Gamma\backslash G \to \Gamma\backslash\mathcal{D}^+$$

de la mesure homogène $\mu_{\boldsymbol{H}_Z} \cdot g_Z$ sur $\Gamma\backslash G$ qui est de type Ratner (voir définition 5.5).

Admettons provisoirement le théorème A.8 et prouvons le théorème A.7.

Preuve du théorème A.7. — Par l'hypothèse on dispose d'une suite $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de sous-variétés faiblement spéciales, horizontales, à dimension de période positive pour $(S,\mathbb{V})$ telle que

(1) pour tout $n \in \mathbb{N}$, Z_n est maximal parmi les sous-variétés faiblement spéciales horizontales à dimensions de période positives pour $(S,\mathbb{V})$;
(2) la suite $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est générique ;
(3) soit $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite correspondante de sous-variétés faiblement spéciales horizontales de $\Gamma\backslash\mathcal{D}^+$. On peut écrire

$$W_n = \Gamma\backslash\Gamma\boldsymbol{H}_n(\mathbb{R})^+ g_n M/M \subseteq \psi(S),$$

où $\boldsymbol{H}_n$ est le groupe de monodromie algébrique de Z_n (qui est de type $\mathcal{H}$).

Par le théorème A.3 (2), $\psi(S)$ est une sous-variété analytique $\mathbb{R}$an, exp-définissable de $\Gamma\backslash\mathcal{D}^+$. Le théorème 1.8 assure alors qu'il existe un sous-groupe $\boldsymbol{H}_\infty$ de $\boldsymbol{G}$, de type $\mathcal{H}$, tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\boldsymbol{H}_n \subseteq \boldsymbol{H}_\infty$ et tel que $\psi(S)$ contient les sous-variétés homogènes

$$W_n' = \Gamma\backslash\Gamma\boldsymbol{H}_\infty(\mathbb{R})^+ g_n M/M \subseteq \psi(S).$$

Soit Z_n' une composante irréductible de $\overline{\psi^{-1}(W_n')}^{\mathrm{Zar}}$ contenant Z_n. Par le baby case du théorème d'Ax-Lindemann pour les $\mathbb{Z}$-VHS (théorème A.8), Z_n' est une sous-variété faiblement spéciale horizontale de $(S,\mathbb{V})$ et $\overline{\psi^{-1}(W_n')}^{\mathrm{Zar}}$ est une union finie de sous-variétés faiblement spéciales horizontales. Donc W_n' est contenu dans une union finie de sous-variétés horizontales faiblement spéciales de $\Gamma\backslash\mathcal{D}^+$. Ainsi

$$\boldsymbol{H}_\infty \subseteq \boldsymbol{H}_{Z_n'}.$$

Mais par la maximalité de Z_n, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$Z_n = Z_n'$$

et donc

$$\boldsymbol{H}_n = \boldsymbol{H}_\infty.$$

Par conséquent

$$W_n = \Gamma\backslash\Gamma\boldsymbol{H}_n(\mathbb{R})^+ g_n M/M = \Gamma\backslash\Gamma\boldsymbol{H}_\infty(\mathbb{R})^+ g_n M/M.$$

Lemme A.12. — *$\boldsymbol{H}_\infty$ est un sous-groupe normal de $\boldsymbol{G}$.*

Démonstration. — Soit $\mathcal{E}(\boldsymbol{H}_\infty)$ l'ensemble des sous-variétés faiblement spéciales de $(S,\mathbb{V})$ qui sont des composantes irréductibles de $\psi^{-1}(\pi(\boldsymbol{H}_\infty(\mathbb{R})^+\cdot x)$ pour un point $x\in\mathcal{F}$. Comme $\boldsymbol{H}_\infty$ est de type Ratner et $\pi(\boldsymbol{H}_\infty(\mathbb{R})^+\cdot x)$ est faiblement spécial, $\boldsymbol{H}_\infty$ est un $\mathbb{Q}$-sous-groupe algébrique semi-simple de $\boldsymbol{G}$. Supposons que $\boldsymbol{H}_\infty$ n'est pas normal dans $\boldsymbol{G}$. Soit $\widehat{\boldsymbol{H}}_\infty := \boldsymbol{H}_\infty\cdot \mathbf{Z}_{\boldsymbol{G}}(\boldsymbol{H}_\infty)^\circ$.

Soit $x\in\mathcal{F}$ tel que $\psi^{-1}(\pi(\boldsymbol{H}_\infty(\mathbb{R})^+\cdot x)$ soit une union finie de composantes irréductibles dans $\mathcal{E}(\boldsymbol{H}_\infty)$. Soit Z_x une composante irréductible de $\psi^{-1}(\pi(\boldsymbol{H}_\infty(\mathbb{R})^+\cdot x)$ et soit $\boldsymbol{G}_x$ le groupe de Mumford-Tate générique de $\mathbb{V}|_{Z_x^\circ}$, la restriction de $\mathbb{V}$ au lieu lisse de Z_x. Alors $(\boldsymbol{G}_x,\mathcal{D}_x := \boldsymbol{G}_x\cdot x)$ est une sous-donnée de Hodge de $(\boldsymbol{G},\mathcal{D})$ et $\boldsymbol{H}_\infty$ est un sous-groupe normal de $\boldsymbol{G}_x$.

Donc $\widehat{\boldsymbol{H}}_\infty$ est un sous-groupe de $\boldsymbol{G}$ contenant $\boldsymbol{G}_x$. Comme $\mathbf{Z}_{\boldsymbol{G}}(\boldsymbol{G}_x)^\circ(\mathbb{R})/\mathbf{Z}^\circ(\boldsymbol{G})(\mathbb{R})$ est compact, on en déduit que $\mathbf{Z}_{\boldsymbol{G}}(\widehat{\boldsymbol{H}}_\infty)(\mathbb{R})^\circ/\,\mathbf{Z}(\boldsymbol{G})^\circ(\mathbb{R})$ est compact, donc par le lemme 5.1 de [21], $\widehat{\boldsymbol{H}}_\infty$ est réductif. Notez qu'il n'existe qu'un nombre fini de classes de conjugaison de $h\colon \mathbb{S}_\mathbb{C}\to\widehat{\boldsymbol{H}}_{\infty,\mathbb{C}}$. Soit $x\colon\mathbb{S}\to\widehat{\boldsymbol{H}}_{\infty,\mathbb{R}}$ (sur $\mathbb{R}$). Alors le nombre de formes réelles de x est la cardinalité de

$$\ker(H^1(\mathbb{R},L_x)\to H^1(\mathbb{R},\widehat{\boldsymbol{H}}_\infty(\mathbb{C}))),$$

qui est finie. Ici, L_x est le stabilisateur de x dans $\widehat{\boldsymbol{H}}_\infty(\mathbb{C})$. Il n'existe donc qu'un nombre fini choix de $\mathcal{D}_{\widehat{\boldsymbol{H}}_\infty}$ tels que $(\widehat{\boldsymbol{H}}_\infty,\mathcal{D}_{\widehat{\boldsymbol{H}}_\infty})$ soit un sous-donnée de Hodge de $(\boldsymbol{G},\mathcal{D})$. Il existe donc une sous-variété fermée stricte (une union finie de sous-variétés spéciales strictes de $(S,\mathbb{V})$) contenant tous les membres de $\mathcal{E}(\boldsymbol{H}_\infty)$, ce qui contredit la généricité de la suite $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$. $\square$

On peut maintenant terminer la preuve du théorème A.7.

Comme $\boldsymbol{H}_\infty$ est un sous-groupe normal de $\boldsymbol{G}$, on a une décomposition de la donnée de Hodge connexe adjointe

$$(\boldsymbol{G}^{\mathrm{ad}},\mathcal{D}^+) = (\boldsymbol{H}_\infty^{\mathrm{ad}},\mathcal{D}^+_{\boldsymbol{H}_\infty})\times(\boldsymbol{G}'^{\,\mathrm{ad}},\mathcal{D}'^+),$$

et en passant au besoin à un revêtement étale fini de S, une factorisation de l'application de période ψ

$$S\xrightarrow{(\psi_1,\psi_2)}\Gamma_{\boldsymbol{H}_\infty}\backslash\mathcal{D}^+_{\boldsymbol{H}_\infty}\times\Gamma'\backslash\mathcal{D}'^+\xrightarrow{\ \varphi\ }\Gamma\backslash\mathcal{D}^+.$$

On a alors

$$W_n=\varphi(\Gamma_{\boldsymbol{H}_\infty}\backslash\mathcal{D}^+_{\boldsymbol{H}_\infty}\times\{x'_n\})=\pi(\boldsymbol{H}_\infty(\mathbb{R})^+\cdot z_n)\subseteq\psi(S)$$

pour un certain $z_n=(x_n,x'_n)\in\mathcal{F}$. La variété de Hodge connexe $\Gamma_{\boldsymbol{H}_\infty}\backslash\mathcal{D}^+_{\boldsymbol{H}_\infty}$ est donc de type Shimura et ψ_1 est algébrique dominante.

Soit V' le sous-ensemble de $\Gamma'\backslash\mathcal{D}'^+$ formé des points x' tels que $\varphi(\Gamma_{\boldsymbol{H}_\infty}\backslash\mathcal{D}^+_{\boldsymbol{H}_\infty}\times\{x'\})$ est contenu dans $\psi(S)$. Comme la suite $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est générique, $\psi_2^{-1}(V')$ est Zariski dense dans S. On en déduit que

$$\psi(S)=\varphi(\Gamma_{\boldsymbol{H}_\infty}\backslash\mathcal{D}^+_{\boldsymbol{H}_\infty}\times\psi_2(S)). \qquad \square$$

Preuve du théorème A.8. — Nous conservons les notations de la section A.3. Nous devons montrer que Z est une composante irréductible de $\psi^{-1}(\pi(\mathcal{D}^+_{\boldsymbol{H}_Z}\times\{x''_Z\})$. En remplaçant S par une composante irréductible de $\psi^{-1}(\pi(\mathcal{D}^+_{\boldsymbol{H}_Z}\times\{x''_Z\})$ contenant Z, nous devons alors montrer que $Z=S$. L'application de période ψ admet la factorisation

$$S\xrightarrow{(\psi_Z^{nt},\psi_Z^t)}\Gamma_{\boldsymbol{H}_Z}\backslash\mathcal{D}^+_{\boldsymbol{H}_Z}\times\Gamma_{\boldsymbol{G}'_Z}\backslash\mathcal{D}^+_{\boldsymbol{G}'_Z}\xrightarrow{\alpha_Z}\Gamma\backslash\mathcal{D}^+.$$

La projection $\psi_Z^t\colon S\to\Gamma_{\boldsymbol{G}'_Z}\backslash\mathcal{D}^+_{\boldsymbol{G}'_Z}$ est constante. On en déduit que

$$\psi^{-1}(\pi(\mathcal{D}^+_{\boldsymbol{H}_Z}\times\{x''_Z\})=(\psi_Z^{nt})^{-1}(\Gamma_{\boldsymbol{H}_Z}\backslash\mathcal{D}^+_{\boldsymbol{H}_Z})$$

On peut ainsi remplacer ψ par ψ_Z^{nt} et supposer que le groupe de monodromie de Z est dense dans $\boldsymbol{G}$.

Soit U une composante analytique irréductible de $\psi(\overline{\psi^{-1}(W)}^{\mathrm{Zar}})$ contenant W. Par le théorème A.3 (2), U est un ensemble $\mathbb{R}^{an,\exp}$ définissable.

Soient $q\in\boldsymbol{H}(\mathbb{Q})^+$ et T_q la correspondance de Hecke induite sur $\Gamma\backslash\mathcal{D}^+$. Par le théorème A.3 (3), la correspondance de Hecke T_q est $\mathbb{R}^{\mathrm{alg}}$-définissable. Donc $T_q(U)$ est $\mathbb{R}^{\mathrm{an},\exp}$ définissable et analytique complexe, et

$$\psi^{-1}(T_q(U))$$

est $\mathbb{R}^{\mathrm{an},\exp}$-définissable et analytique complexe. Le théorème de Chow définissable nous assure alors que

$$\psi^{-1}(T_q(U))$$

est une sous-variété algébrique de S. Comme $W\subseteq T_q(W)$, $\psi^{-1}(W)\subseteq\psi^{-1}(T_q(U))$ et

$$\overline{\psi^{-1}(W)}^{\mathrm{Zar}}\subseteq\psi^{-1}(T_q(U)).$$

Par conséquent, $U\subseteq T_q(U)\cap\psi(S)$. Le théorème A.8 découlera alors du lemme suivant. $\square$

LEMME A.13. — *Il existe une constante $C(U)$, appelée* constante de Nori *de U ayant la propriété suivante. Soit $p>C(U)$ un nombre premier. Soit $q\in\boldsymbol{H}(\mathbb{Q})^+$. Pour tout nombre premier ℓ, on note q_ℓ l'image de q dans $\boldsymbol{H}(\mathbb{Q}_\ell)$. On suppose que pour tout $\ell\neq p$, $q_\ell\in\Gamma\cap\boldsymbol{G}(\mathbb{Z}_\ell)$ et que les projections de q_p sur chaque facteur $\mathbb{Q}$-simple de $\boldsymbol{G}^{\mathrm{ad}}$ ne sont pas contenues dans des sous-groupes compacts. Alors $T_q(U)$ est irréductible et les* *orbites de Hecke de $T_q + T_{q^{-1}}$ sont denses dans $\Gamma\backslash\mathcal{D}^+$ pour la topologie Archimédienne.*

Remarque A.14. — Dans le cas de variété de Shimura, l'existence de la constante de Nori, l'irréductibilité et la densité des orbites de Hecke ont été prouvées par Edixhoven et Yafaev ([19, Th. 5.1 et 6.1]). L'existence de q a été détaillée dans ([39, Lem. 6.1]). Les arguments sont essentiellement de nature topologique et peuvent être facilement adaptés à notre cas. Seule l'existence de la constante de Nori nécessite de petites modifications, que nous indiquons ici et renvoyons à [19] et [39] pour les détails.

Esquisse de la preuve du lemme A.13. — Considérons la correspondance de Hecke

$$T_q\colon \Gamma\backslash\mathcal{D}^+ \xleftarrow{\pi_{q,1}} q^{-1}\Gamma q\cap\Gamma\backslash\mathcal{D}^+ \xrightarrow{\pi_{q,2}} \Gamma\backslash\mathcal{D}^+,$$

où $\pi_{q,1}$ est la projection étale naturelle finie. Soit $U_q := \pi_{q,1}^{-1}(U)$. Alors pour montrer que $T_q(U)$ est irréductible, il suffit de montrer que U_q est irréductible. Puisque U_q est analytique, il suffit de montrer que le lieu lisse U_q° est connexe. Si on se limite aux lieux lisses, l'application $U_q^\circ \to U^\circ$ est une application de recouvrement. Ce recouvrement correspond au $\pi_1(U^\circ)$-ensemble

$$q^{-1}\Gamma q\cap\Gamma\backslash\Gamma$$

et U_q° est connexe si et seulement si $\pi_1(U^\circ)$ agit sur $q^{-1}\Gamma q\cap\Gamma\backslash\Gamma$ transitivement.

Notez que nous avons des homomorphismes

$$\pi_1(Z)\to\pi_1(U)\to\Gamma\subset\boldsymbol{G}(\mathbb{Z})\subset\mathrm{GL}(V_{\mathbb{Z}}).$$

Puisque Γ est un sous-groupe arithmétique de $\boldsymbol{G}(\mathbb{Q})$, il est Zariski dense dans $\boldsymbol{G}$. Donc $\pi_1(U^\circ)$ et Γ ont la même fermeture de Zariski dans le $\mathbb{Z}$-schéma en groupes $\mathrm{GL}(V_{\mathbb{Z}})$ (ici nous avons utilisé la réduction dans la preuve du théorème A.8 que le groupe de monodromie de Z pour $\mathbb{V}$ est Zariski-dense dans $\boldsymbol{G}$). Le reste de la preuve est la même que dans [19, Th. 5.1 et 6.1]. La preuve de l'existence de q peut être reproduite mot pour mot de [39, Lem. 6.1]. □

BIBLIOGRAPHIE

[1] Y. André, « Mumford–Tate groups of mixed Hodge structures and the theorem of the fixed part », *Compos. Math.* **82** (1992), n° 1, p. 1-24.

[2] B. Bakker, B. Klingler & J. Tsimerman, « Tame topology of arithmetic quotients and algebraicity of the Hodge loci », *J. Am. Math. Soc.* **33** (2020), n° 4, p. 917-939.

[3] V. I. Bogachev, *Measure theory. Vol. I, II*, Springer, 2007, xviii+500 et xiv+575 pages.

[4] ———, *Weak convergence of measures*, Mathematical Surveys and Monographs, vol. 234, American Mathematical Society, 2018, xii+286 pages.

[5] A. Borel, *Introduction aux groupes arithmétiques*, Actualités Scientifiques et Industrielles, vol. 1341, Hermann, 1969, 125 pages.

[6] ———, *Linear Algebraic Groups*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 126, Springer, 1991.

[7] A. Borel & Harish-Chandra, « Arithmetic subgroups of algebraic groups », *Ann. Math.* **75** (1962), p. 485-535.

[8] A. Borel & L. Ji, *Compactifications of symmetric and locally symmetric spaces*, Mathematics : Theory & Applications, Birkhäuser, 2006, xvi+479 pages.

[9] N. Bourbaki, *Elements of Mathematics. Integration. II. Chapters 7–9*, Springer, 2004, translated from the 1963 and 1969 French originals by Sterling K. Berberian, viii+326 pages.

[10] E. Cattani, P. Deligne & A. Kaplan, « On the locus of Hodge classes », *J. Am. Math. Soc.* **8** (1995), n° 2, p. 483-506.

[11] J. Chen, « On the geometric André–Oort conjecture for variations of Hodge structures », *J. Reine Angew. Math.* **776** (2021), p. 295-317.

[12] L. Clozel & E. Ullmo, « Équidistribution de sous-variétés spéciales », *Ann. Math.* **161** (2005), n° 3, p. 1571-1588.

[13] M. Coste, « An introduction to o-minimal geometry », accessible en ligne à `https://perso.univ-rennes1.fr/michel.coste/polyens/OMIN.pdf`, 1999.

[14] S. G. Dani & G. A. Margulis, « Asymptotic behaviour of trajectories of unipotent flows on homogeneous spaces », *Proc. Indian Acad. Sci., Math. Sci.* **101** (1991), n° 1, p. 1-17.

[15] C. Daw, A. Gorodnik & E. Ullmo, « Convergence of measures on compactifications of locally symmetric spaces », *Math Zeitchrift* **297** (2021), n° 3-4, p. 1293-1328.

[16] ———, « The space of homogeneous probability measures on $\overline{\Gamma\backslash X}^S_max$ is compact », *Math. Ann.* (2022).

[17] L. van den Dries, *Tame topology and o-minimal structures*, London Mathematical Society Lecture Note Series, vol. 248, Cambridge University Press, 1998, x+180 pages.

[18] ———, « Limit sets in o-minimal structures », in *O-minimal Structures : Lisbon 2003 ; Proceedings of a Summer School by the European Research and Training Network RAAG*, 2005.

[19] B. Edixhoven & A. Yafaev, « Subvarieties of Shimura varieties », *Ann. Math.* **157** (2003), n° 2, p. 621-645.

[20] Encyclopedia of Mathematics, « Urysohn–Brouwer lemma », `https://www.encyclopediaofmath.org/index.phptitle=Urysohn-Brouwer_lemma&oldid=23095`.

[21] A. Eskin, S. Mozes & N. Shah, « Non-divergence of translates of certain algebraic measures », *Geom. Funct. Anal.* **7** (1997), n° 1, p. 48-80.

[22] J. D. Gray, « The shaping of the Riesz representation theorem : a chapter in the history of analysis », *Arch. Hist. Exact Sci.* **31** (1984), n° 2, p. 127-187.

[23] P. A. Griffiths, « Periods of integrals on algebraic manifolds. III. Some global differential-geometric properties of the period mapping », *Publ. Math., Inst. Hautes Étud. Sci.* **38** (1970), p. 125-180.

[24] B. Klingler, « Hodge locus and atypical intersections : conjectures », à paraitre dans *Motives and complex multiplication*.

[25] B. Klingler & A. Otwinowska, « On the closure of the Hodge locus of positive period dimension », *Invent. Math.* **225** (2021), n° 3, p. 857-883.

[26] B. Klingler, E. Ullmo & A. Yafaev, « The hyperbolic Ax–Lindemann–Weierstrass conjecture », *Publ. Math., Inst. Hautes Étud. Sci.* **123** (2016), p. 333-360.

[27] J.-M. Lion & P. Speissegger, « A geometric proof of the definability of Hausdorff limits », *Sel. Math., New Ser.* **10** (2004), n° 3, p. 377-390.

[28] G. A. Margulis, *Discrete subgroups of semisimple Lie groups*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. 3. Folge, vol. 17, Springer, 1991, x+388 pages.

[29] B. Moonen, « Linearity properties of Shimura varieties. I », *J. Algebr. Geom.* **7** (1998), n° 3, p. 539-567.

[30] D. W. Morris, *Ratner's theorems on unipotent flows*, Chicago Lectures in Mathematics, University of Chicago Press, 2005, xii+203 pages.

[31] S. Mozes & N. Shah, « On the space of ergodic invariant measures of unipotent flows », *Ergodic Theory Dyn. Syst.* **15** (1995), n° 1, p. 149-159.

[32] J. Pila & J. Tsimerman, « The Andre–Oort conjecture for the moduli space of Abelian surfaces », *Compos. Math.* **149** (2013), n° 2, p. 204-216.

[33] V. Platonov & A. Rapinchuk, *Algebraic groups and number theory*, Pure and Applied Mathematics, vol. 139, Academic Press Inc., 1994, translated from the 1991 Russian original by Rachel Rowen, xii+614 pages.

[34] M. S. Raghunathan, *Discrete subgroups of Lie groups*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, vol. 68, Springer, 1972, ix+227 pages.

[35] M. Ratner, « On Raghunathan's measure conjecture », *Ann. Math.* **134** (1991), n° 3, p. 545-607.

[36] W. Rudin, *Real and complex analysis*, McGraw-Hill, 1966, xi+412 pages.

[37] E. Ullmo, « Equidistribution de sous-variétés spéciales. II », *J. Reine Angew. Math.* **606** (2007), p. 193-216.

[38] ———, « Applications du théorème d'Ax–Lindemann hyperbolique », *Compos. Math.* **150** (2014), n° 2, p. 175-190.

[39] E. Ullmo & A. Yafaev, « Hyperbolic Ax–Lindemann theorem in the cocompact case », *Duke Math. J.* **163** (2014), n° 2, p. 43-463.

[40] ———, « Algebraic Flows on Shimura Varieties », *Manuscr. Math.* **155** (2018), n° 3-4, p. 355-367.

[41] T. Zell, « Topology of definable Hausdorff limits », *Discrete Comput. Geom.* **33** (2005), n° 3, p. 423-443.

Manuscrit reçu le 23 août 2021,
révisé le 4 juin 2022,
accepté le 23 septembre 2022.

Rodolphe RICHARD
Department of mathematics
University College London
Gower Street, London (United Kingdom)
rodolphe.richard@normalesup.org

Emmanuel ULLMO
IHES, Université Paris Saclay, Laboratoire
Alexandre Grothendieck CNRS (France)
ullmo@ihes.fr

Jiaming CHEN
Institut Elie Cartan, Université de Lorraine
Site de Nancy, B.P. 70239
54506 Vandoeuvre-les-Nancy Cedex (France)
jiaming.chen@univ-lorraine.fr