

ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

ALAIN PIRIOU

Problèmes aux limites généraux pour des opérateurs différentiels paraboliques dans un domaine borné

Annales de l'institut Fourier, tome 21, n° 1 (1971), p. 59-78

http://www.numdam.org/item?id=AIF_1971__21_1_59_0

© Annales de l'institut Fourier, 1971, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'institut Fourier » (<http://annalif.ujf-grenoble.fr/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

PROBLÈMES AUX LIMITES GÉNÉRAUX POUR DES OPÉRATEURS DIFFÉRENTIELS PARABOLIQUES DANS UN DOMAINE BORNE

par Alain PIRIOU

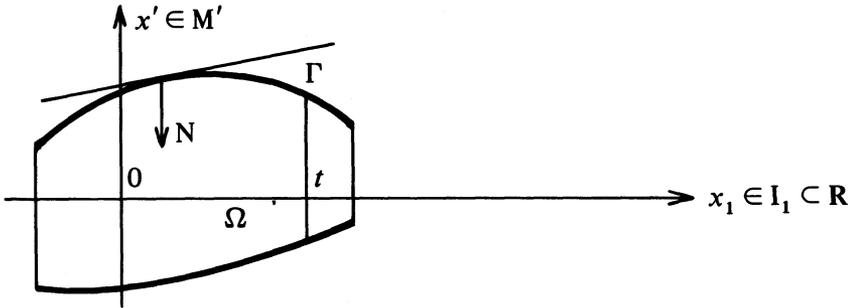
Dans cet article, on utilise l'algèbre des opérateurs pseudo-différentiels de Volterra, étudiée dans [14], pour discuter des problèmes aux limites relatifs à un opérateur différentiel parabolique dans un domaine borné cylindrique ou non cylindrique, et on détaille certains des résultats annoncés dans [13].

Plus précisément, soient M' une variété C^∞ de dimension $n - 1$, t un réel > 0 , I_1 un intervalle ouvert de \mathbf{R} contenant $[0, t]$; posons $M = I_1 \times M' = \{x = (x_1, x') \mid x_1 \in I_1, x' \in M'\}$ et considérons un ouvert Ω de M ayant, dans M , un bord Γ (C^∞ , de dimension $n - 1$) nulle part tangent à une sous-variété $x_1 = \text{constante}$; supposons que pour $t', t'' \in I_1$, l'ensemble des $x \in \Omega$ tels que $t' \leq x_1 \leq t''$ est relativement compact dans M . Soient E, F deux fibrés de même dimension sur M et un opérateur différentiel P , opérant des sections de E dans celles de F , parabolique au sens de Petrovski relativement à un poids donné a_1 sur la variable de temps x_1 (voir I, 2). Soient G_1, \dots, G_J des fibrés sur Γ et des opérateurs pseudo-différentiels $B_{j,k}$ ($1 \leq j \leq J, 0 \leq k \leq m - 1, m = \text{degré de } P$) opérant des sections de E/Γ dans celles de G_j ; on suppose que les $B_{j,k}$ sont de Volterra (voir [14] et I, 1), c'est-à-dire, essentiellement, que leur noyau-distribution est nul dans $\{(x, y) \in \Gamma \times \Gamma \mid x_1 < y_1\}$; posons $G = \bigoplus_{j=1}^J G_j$ et $B = (B_{j,k})$. Nous considérons le problème aux limites :

$$(*) \quad \begin{cases} Pu = f & \text{dans } \Omega_t = \{x \in \Omega \mid x_1 < t\} \\ B\gamma u = g & \text{dans } \Gamma_t = \{x \in \Gamma \mid x_1 < t\} \end{cases}$$

où f (resp : g) est une section-distribution donnée de F/Ω_t (resp : G/Γ_t) nulle pour $x_1 < 0$, et où l'inconnue u est une section-distribution

de E/Ω_t , nulle pour $x_1 < 0$; on a posé $B\gamma u = \left(\sum_k B_{j,k} \gamma_k u \right)_{j=1, \dots, J}$ et désigné par $i^* \gamma_k u$ la restriction à Γ_t de la $k^{\text{ième}}$ dérivée de u selon un champ N donné transverse à Γ et sans composante sur l'axe x_1 (voir (4), (5) et I,2).



Pour discuter (*), nous adaptons les méthodes utilisées dans [3], [4] pour les problèmes elliptiques et nous appliquons les résultats de [14] (complétés dans I,1) : l'étude des valeurs au bord d'un potentiel de multi-couche sur Γ (voir II,1) permet de construire, à partir de P et Ω , deux pseudo-projecteurs Q_1, Q_2 , opérant des sections de E^m/Γ dans elles-mêmes (voir (17)). Le résultat principal de cet article s'énonce alors ainsi : si BQ_1 est parabolique à droite (pour $0 \leq x_1 \leq t$), le problème (*) admet au moins une solution ; si $\begin{pmatrix} I - Q_2 \\ B \end{pmatrix}$ est parabolique à gauche (pour $0 \leq x_1 \leq t$), le problème (*) admet au plus une solution ; dans les deux cas, nous donnons une formule précise reliant u à f, g (voir (20)). L'hypothèse de parabolicité à droite pour BQ_1 et l'hypothèse de parabolicité à gauche pour $\begin{pmatrix} I - Q_2 \\ B \end{pmatrix}$ se traduisent par des conditions sur les symboles principaux de P, B (voir (18) et [14], (28)). Dans le cas particulier où $\dim G = (m/2) \dim E$, ces deux hypothèses sont équivalentes et sont satisfaites si et seulement si la condition algébrique habituelle de Shapiro-Lopatinski est vérifiée (voir (21)).

Nous examinons enfin le cas particulier où les données f, g sont dans des espaces de Sobolev anisotropes (voir III,1) : en établissant (voir (31)) des propriétés de continuité dans ces espaces pour les

opérateurs intervenant dans la discussion générale (20), nous montrons que l'opérateur $u \longrightarrow (Pu, B\gamma u)$ admet, selon l'hypothèse de parabolicité, un inverse à droite ou un inverse à gauche, linéaires continus dans les espaces de Sobolev naturellement associés aux ordres des opérateurs P, B (voir (32)).

Signalons que des opérateurs de Volterra ont été considérés -- d'un point de vue hilbertien -- dans [15], où on applique la méthode de factorisation de Wiener-Hopf à l'étude de problèmes du type (*) dans les espaces de Sobolev lorsque $\dim E = 1, \dim G = m/2$ et de problèmes analogues avec P pseudo-différentiel de Volterra. D'autre part, on trouve dans [11], pour le cas où Ω est cylindrique la construction d'un projecteur (sur les valeurs au bord latérales des solutions de l'équation $Pu = 0$) ; les opérateurs Q_1, Q_2 que nous utilisons pour la discussion de (*) sont alors égaux, modulo des opérateurs régularisants, à ce projecteur ; les points (13), (29), (30) du présent article, consacrés à l'existence des valeurs au bord latérales pour certaines solutions de $Pu = f$, généralisent les résultats correspondants de [11].

1. Préliminaires.

1. Opérateurs de Volterra.

Dans ce paragraphe, nous complétons les résultats de [14]. Un point y de \mathbb{R}^n est noté $y = (y_1, y') = (y'', y_n)$, où $y_1, y_n \in \mathbb{R}$ et $y' = (y_2, \dots, y_n), y'' = (y_1, \dots, y_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1}$; les autres notations sont celles des points (1), (2), (3) de [14]. Etant donné un entier pair a_1 , un réel m , un ouvert Ω de \mathbb{R}^n et deux entiers positifs d_1, d_2 , rappelons qu'on désigne par $L^{m,a}(\Omega, \mathbb{C}^{d_1}, \mathbb{C}^{d_2})$ la classe des opérateurs pseudo-différentiels $P : \mathcal{D}(\Omega, \mathbb{C}^{d_1}) \longrightarrow \mathcal{E}(\Omega, \mathbb{C}^{d_2})$ dont le symbole $p(y, i\eta_1, \eta')$ admet pour $|\eta| \longrightarrow \infty$ un développement asymptotique $p \sim \sum_{j \in \mathbb{N}} p_j$, où $p_j(y, i\eta_1, \eta') \in C^\infty(\Omega \times (\mathbb{R}^n \setminus \{0\}), \mathcal{L}(\mathbb{C}^{d_1}, \mathbb{C}^{d_2}))$ est quasi-homogène de degré $m - j$ relativement au système de poids $a = (a_1, 1, \dots, 1)$ sur η (c'est-à-dire :

$$p_j(y, i\lambda^{a_1} \eta_1, \lambda \eta') = \lambda^{m-j} p_j(y, i\eta_1, \eta') \quad \text{pour } \lambda > 0).$$

Nous commençons par établir l'invariance de $L^{m,a}(\Omega, C^{d_1}, C^{d_2})$ par des difféomorphismes plus généraux que ceux de [7], [11], [14].

(1) PROPOSITION. — Soient $\Omega, \tilde{\Omega}$ deux ouverts de \mathbb{R}^n et $\theta : \Omega \longrightarrow \tilde{\Omega}$ un difféomorphisme de la forme :

$$\theta(y_1, y') = (y_1, \theta'(y_1, y')).$$

Si $P \in L^{m,a}(\Omega, C^{d_1}, C^{d_2})$, alors le transporté \tilde{P} de P par θ est dans $L^{m,a}(\tilde{\Omega}, C^{d_1}, C^{d_2})$.

Démonstration. — La proposition étant évidente lorsque P est régularisant, il suffit de considérer un opérateur de la forme

$$(Qu)(x) = \iint e^{i\langle x-y, \eta \rangle} q(x, y, \eta) u(y) dy d\eta \quad (u \in \mathcal{O}(\Omega), x \in \Omega)$$

où $q(x, y, \eta) = (2\pi)^{-n} \varphi(x, y) p(x, i\eta_1, \eta')$, avec $\varphi \in C^\infty(\Omega \times \Omega)$ telle que : $\varphi = 1$ au voisinage de la diagonale de $\Omega \times \Omega$; $\varphi = 0$ en dehors d'un fermé de $\Omega \times \Omega$ contenu dans un voisinage arbitrairement petit de cette diagonale ; les deux projections $\text{Supp } \varphi \longrightarrow \Omega$ sont propres. L'intégrale double précédente est une intégrale oscillante, au sens de [6]. Pour $u \in \mathcal{O}(\tilde{\Omega})$ et $x \in \tilde{\Omega}$, il vient :

$$\begin{aligned} (\tilde{Q}u)(x) &= \iint e^{i\langle \theta^{-1}x - y, \eta \rangle} q(\theta^{-1}x, y, \eta) (u \circ \theta)(y) dy d\eta = \\ &= \iint e^{i\langle \theta^{-1}x - \theta^{-1}y, \eta \rangle} q(\theta^{-1}x, \theta^{-1}y, \eta) |\text{Jac } \theta^{-1}| u(y) dy d\eta. \end{aligned}$$

Mais $\theta^{-1}x - \theta^{-1}y = H(x, y) \cdot (x - y)$, où $H(x, y)$ est une matrice $n \times n$ de classe C^∞ par rapport à (x, y) , de terme général égal, au voisinage de la diagonale de $\tilde{\Omega} \times \tilde{\Omega}$, à :

$$H_{i,j}(x, y) = \int_0^1 \frac{\partial \theta_i^{-1}}{\partial y_j} (y + \zeta(x - y)) d\zeta.$$

On a $H(x, x) = D\theta^{-1}(x)$, différentielle de θ^{-1} en x ; $H(x, y)$ est donc inversible au voisinage de la diagonale de $\tilde{\Omega} \times \tilde{\Omega}$ et sa première ligne est alors $(1, 0, \dots, 0)$; le changement de variable ${}^tH(x, y)\eta = \eta^*$ montre que :

$$\begin{aligned} (\tilde{Q}u)(x) &= \iint e^{i\langle x-y, \eta \rangle} q(\theta^{-1}x, \theta^{-1}y, {}^tH^{-1}(x, y)\eta) |\text{Jac } \theta^{-1}| \\ &\quad |\text{Det } H^{-1}(x, y)| u(y) dy d\eta. \end{aligned}$$

Remarquons que ${}^tH^{-1}(x, y) \eta = (\eta_1 + B(x, y) \eta', C(x, y) \eta')$, où $C(x, y)$ est une matrice inversible, et montrons que :

$$(2) \quad q(\theta^{-1} x, \theta^{-1} y, {}^tH^{-1}(x, y) \eta) \\ \sim \sum_{k \geq 0} \frac{1}{k!} \left(\frac{\partial^k}{\partial \eta_1^k} q \right) (\theta^{-1} x, \theta^{-1} y ; \eta_1, C(x, y) \eta') . \\ (B(x, y) \eta')^k .$$

Pour cela, posons $\theta^{-1} x = X$, $\theta^{-1} y = Y$ et (pour K entier positif)

$$R_K(x, y, \eta) = q(X, Y, {}^tH^{-1}(x, y) \eta) - \sum_{k < K} \frac{1}{k!} \left(\frac{\partial^k}{\partial \eta_1^k} q \right) \\ (X, Y ; \eta_1, C(x, y) \eta') . (B(x, y) \eta')^k .$$

La formule de Taylor permet d'écrire :

$$|R_K(x, y, \eta)| \leq A \sup_{0 \leq \xi \leq 1} (1 + |\eta_1 + \xi B(x, y) \eta'|^{1/a_1} + \\ + C(x, y) \eta'|)^{m-Ka_1} |\eta'|^K$$

lorsque (x, y) décrit un compact de $\tilde{\Omega} \times \tilde{\Omega}$; remarquons qu'il existe alors des constantes positives C_1, C_2 telles que :

$$C_1 |\eta'| \leq |C(x, y) \eta'| \leq C_2 |\eta'|$$

$$|B(x, y) \eta'| \leq C_2 |\eta'| .$$

Si K est choisi assez grand pour que $m - Ka_1 \leq 0$, on obtient pour $|\eta'| \leq \frac{1}{2C_2} |\eta_1|$:

$$|R_K(x, y, \eta)| \leq C'(1 + |\eta_1|^{1/a_1} + |\eta'|)^{m-Ka_1} |\eta'|^K \\ \leq C'(1 + |\eta_1|^{1/a_1} + |\eta'|)^{m-(a_1-1)K}$$

et pour $|\eta'| > \frac{1}{2C_2} |\eta_1|$:

$$|R_K(x, y, \eta)| \leq A(1 + |C(x, y) \eta'|)^{m-Ka_1} |\eta'|^K \\ \leq C''(1 + |\eta_1| + |\eta'|)^{m-Ka_1} |\eta'|^K \\ \leq C''(1 + |\eta|)^{m-(a_1-1)K} .$$

Puisque $m - (a_1 - 1)K \longrightarrow -\infty$ si $K \longrightarrow +\infty$, (2) résulte du théorème 2.9 de [2].

On en déduit, comme dans [6] que le symbole \tilde{p} de \tilde{p} est donné

$$(3) \quad \tilde{p}(\theta x, i\eta')$$

$$\sim \sum_{a,j,k} \frac{1}{\alpha! k!} \left(\frac{\partial^k}{\partial \eta_1^k} \frac{\partial^\alpha}{\partial \eta^\alpha} p_j \right) (x; i\eta_1, {}^t D' \theta'(x) \eta').$$

$$({}^t D_1 \theta'(x) \eta')^k \Pi_\alpha(x, \eta')$$

où $D_1 \theta'$, $D' \theta'$ sont respectivement les différentielles de θ' par rapport à y_1 , y' et où :

$$\Pi_\alpha(x, \eta') = (D_y^\alpha e^{i \langle \theta'(y) - \theta'(x) - D\theta'(x) \cdot (y-x), \eta' \rangle})_{y=x}$$

est un polynôme en η' de degré $\leq \frac{1}{2} |\alpha|$, on voit que le terme général du second membre de (3) se décompose en termes quasi-homogènes en η , de degré $\leq m - j - \langle a, \alpha \rangle + \frac{1}{2} |\alpha| - (a_1 - 1) k$, quantité qui $\longrightarrow -\infty$ quand $|\alpha| + j + k \longrightarrow +\infty$; il en résulte que $\tilde{P} \in L^{m,a}(\tilde{\Omega}, C^{d_1}, C^{d_2})$.

Nous pouvons maintenant décrire les variétés et les opérateurs que nous utiliserons.

Soient I_1 un intervalle ouvert de \mathbf{R} contenant 0 et M' une variété C^∞ de dimension $n - 1$; les points génériques de $I_1, M', I_1 \times M' = M$ sont désignés respectivement par x_1, x' et $(x_1, x') = x$.

Soit Ω un ouvert de M , ayant dans M un bord $\Gamma = \partial\Omega$ tel que, pour tout $x \in \Gamma$, l'espace tangent en x à Γ soit distinct de l'espace tangent en x' à M' . Soit N un champ C^∞ défini dans M au voisinage de Γ , transverse à Γ , dirigé vers l'intérieur de Ω et tel que $N(x)$ appartienne à l'espace tangent en x' à M' .

Au voisinage de tout point de Γ , nous pouvons alors construire des cartes locales (pour M) $\theta : U \subset M \longrightarrow V \subset \mathbf{R}^n$ de la forme :

$$(4) \quad \theta(x_1, x') = (x_1, \theta'(x_1, x'))$$

et telles que

$$(5) \quad \theta(U \cap \Omega) = \{y \in V \mid y_n > 0\}; \quad \theta(U \cap \Gamma) = \{y \in V \mid y_n = 0\};$$

$$\theta \text{ transporte } N \text{ en } \frac{\partial}{\partial y_n}$$

Soient E, F deux fibrés sur M ; d'après (1), la définition suivante est équivalente à la définition (4) de [14] :

(6) DEFINITION. — $L^{m,a}(M, E, F)$ est la classe des opérateurs $P: \mathcal{O}(M, E) \longrightarrow \varepsilon(M, F)$ tels que, pour toute carte locale θ de M de la forme (4), le transporté de P/U par θ soit dans

$$L^{m,a}(V, \dim E, \dim F).$$

En utilisant dans Γ des cartes qui sont les restrictions de cartes θ de M vérifiant (4), (5), on définit de même $L^{m,a}(\Gamma, G, H)$ lorsque G, H sont deux fibrés sur Γ .

Rappelons que $V^m(M, E, F)$ est la sous-classe des opérateurs de $L^{m,a}(M, G, F)$ dont le noyau est nul dans

$$\{(x, y) \in M \times M \mid x_1 < y_1\};$$

on définit de même $V^m(\Gamma, G, H)$.

Nous supposons désormais que, pour tous $t', t'' \in I_1$, l'ensemble des $x \in \Omega$ tels que $t' \leq x_1 \leq t''$ est relativement compact dans M. Désignons par $\mathcal{O}'_+(\Gamma, E)$ le sous-espace des $u \in \mathcal{O}'(\Gamma, E)$ telles que $u = 0$ pour $x_1 < 0$.

(7) PROPOSITION. — (Voir les points (26), (28), (30) de [14]). Soit $P = (P_{j,k})$ une matrice d'opérateurs $P_{j,k} \in V^{sk-tj}(\Gamma, E_k, F_j)$. Si P est parabolique à droite (resp : à gauche), il existe une matrice $T = (T_{k,j})$ d'opérateurs $T_{k,j} \in V^{tj-sk}(\Gamma, F_j, E_k)$ telle que

$$PTu = u \text{ (resp : } TPu = u)$$

pour toute $u \in \prod_j \mathcal{O}'_+(\Gamma, F_j)$ (resp : $u \in \prod_k \mathcal{O}'_+(\Gamma, E_k)$).

Pour établir (7), il suffit de reprendre la démonstration de (30) dans [14], en utilisant un découpage assez fin sur la variable x_1 pour établir la convergence de $\sum_{\nu \geq 1} N_\nu$.

(8) DEFINITION. — On dit qu'une distribution $u \in \mathcal{O}'(\Omega, E)$ admet des valeurs au bord transverses jusqu'à l'ordre k ($k \in \mathbb{N}$) si, localement, au moyen des restrictions à Ω de cartes θ de M vérifiant (4), (5), u s'identifie à une fonction C^k de y_n ($y_n \geq 0$) à valeurs dans $\mathcal{O}'(\mathbb{R}^{n-1}_+, C^{\dim E})$; pour $l = 0, 1, \dots, k$, on définit alors

$$\gamma_l u \in \mathcal{O}'(\Gamma, E)$$

en posant (localement au moyen de θ/Γ) : $\gamma_l u = D_n^k u|_{y_n=0}$.

2. Formulation des problèmes aux limites.

Nous reprenons les notations $I_1, a_1, M', M, \Omega, \Gamma$ du paragraphe précédent. Désormais, E, F sont deux fibrés sur M de même dimension et $P : \mathcal{O}(M, E) \longrightarrow \mathcal{O}(M, F)$ est un opérateur différentiel à coefficients C^∞ , parabolique au sens de Petrovski quand on munit la variable x_1 du poids parabolique a_1 ; m désigne le degré de P . C'est dire que, localement, P s'identifie à une matrice $(P_{j,k})$ d'opérateurs différentiels scalaires $P_{j,k} = P_{j,k} \left(y, \frac{\partial}{\partial y_1}, D_{y'} \right)$ tels que :

1) $P_{j,k}$ est de degré m relativement au poids a_1 sur x_1 , c.à.d.

$$P_{j,k}(y, \eta) = \sum_{a_1 \alpha_1 + |\alpha'| \leq m} p_{j,k,\alpha}(y) \eta^\alpha \quad (\text{avec } p_{j,k,\alpha} \in C^\infty).$$

2) Si on pose :

$$p_{j,k}^{(0)}(y, \eta) = \sum_{a_1 \alpha_1 + |\alpha'| = m} p_{j,k,\alpha} \eta^\alpha,$$

alors $\det(p_{j,k}^{(0)}(y, \xi_1 + i\eta_1, \eta')) \neq 0$ pour $\xi_1 \geq 0, \eta \in \mathbb{R}^n, (\xi_1, \eta) \neq 0$.

Il est donc équivalent de dire que P est un opérateur de $V^m(M, E, F)$ différentiel et parabolique au sens de la définition (26) de [14]. (Rappelons que pour un opérateur différentiel parabolique au sens de Petrovski, le poids parabolique est nécessairement un entier pair et le degré un multiple du poids parabolique).

Soit J entier ≥ 1 ; on donne, pour $j = 1, 2, \dots, J$ des réels m_j et des fibrés G_j sur Γ ; soient, pour $j = 1, 2, \dots, J$ et $k = 0, 1, \dots, m-1$ des opérateurs de Volterra $B_{j,k} \in V^{m_j-k}(\Gamma, E, G_j)$; posons $G = \bigoplus_{j=1}^J G_j$ et $B = (B_{j,k})$; désignons par μ le plus petit entier ≥ 0 tel que $B_{j,k} = 0$ pour $1 \leq j \leq J, \mu < k$.

Si $u \in \mathcal{O}'(\Omega, E)$ admet des valeurs au bord transverses jusqu'à l'ordre $m-1$, posons $\gamma u = (\gamma_0 u, \gamma_1 u, \dots, \gamma_{m-1} u)$; si $u \in \mathcal{O}'_+(\Omega, E)$ admet des valeurs au bord transverses jusqu'à l'ordre μ , définissons

$$B\gamma u \in \mathcal{O}'_+(\Gamma, G) \text{ par } (B\gamma u)_j = \sum_{k=0}^{\mu} B_{j,k}(\gamma_k u) \quad (1 \leq j \leq J).$$

Fixons un réel t tel que $t \in I_1$, $0 < t$. Lorsque A est un sous-ensemble quelconque de M , posons $A_t = \{x \in A \mid x_1 < t\}$. Nous considérons le problème aux limites :

$$(9) \quad \left\{ \begin{array}{l} Pu = f \quad \text{dans} \quad \Omega_t \\ B\gamma u = g \quad \text{dans} \quad \Gamma_t \end{array} \right.$$

où $f \in \mathcal{O}'_+(\Omega_t, F)$, $g \in \mathcal{O}'_+(\Gamma_t, G)$ sont données et où l'inconnue u est dans $\mathcal{O}'_+(\Omega_t, E)$. (On rappelle que l'indice $+$ signifie que les distributions considérées sont nulles pour $x_1 < 0$).

2. Discussion des problèmes aux limites.

1. Valeurs au bord transverses d'un potentiel de multi-couche.

Lorsque $j \in \mathbb{N}$ et $\nu \in \mathcal{O}'(\Gamma)$, nous désignerons par $\nu \otimes \delta^{(j)}$ la distribution sur M , portée par Γ , dont la transportée par toute carte θ de M vérifiant (4), (5) est $w \otimes D_n^j \delta_{y_n}$, où w est la transportée de ν par θ/Γ et $\delta_{y_n} \in \mathcal{O}'(\mathbb{R}_{y_n})$ la mesure de Dirac en 0.

(11) PROPOSITION. — Soient Φ, Ψ deux fibrés sur M , r un réel et un opérateur pseudo-différentiel anisotrope $Q \in L^{r,a}(M, \Phi, \Psi)$ de type compact (ce que nous traduirons en écrivant $Q \in L_c^{r,a}(M, \Phi, \Psi)$). On suppose que chaque composante quasi-homogène $q_l(y, in_1, \eta')$ du symbole de Q est une fraction rationnelle de η . Si $\nu \in \mathcal{O}'(\Gamma, \Phi)$, alors $(Q(\nu \otimes \delta^{(j)}))/\Omega$ admet des valeurs au bord transverse de tout ordre ; de plus,

$$\gamma_k[(Q(\nu \otimes \delta^{(j)}))/\Omega] = Q_{k,j} \nu$$

où $Q_{k,j} \in L_c^{r+k+j+1,a}(\Gamma, \Phi, \Psi)$ est indépendant de ν . Si de plus $Q \in V^r(M, \Phi, \Psi)$, alors $Q_{k,j} \in V^{r+k+j+1}(\Gamma, \Phi, \Psi)$.

La preuve de (11) est analogue à celles des propositions correspondantes de [3] et [8]. Elle montre en particulier que le symbole principal de $Q_{k,j}$ est donné, lorsqu'on utilise dans Γ des cartes qui sont les restrictions de cartes θ de M vérifiant (4), (5), par :

$$(12) \quad q_{k,j}^{(0)}(y'', in_1, \tilde{\eta}) = \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma} q_0(y'', 0; in_1, \tilde{\eta}, \eta_n) \eta_n^{k+j} d\eta_n,$$

où $\tilde{\eta} = (\eta_2, \dots, \eta_{n-1})$, q_0 est le symbole principal de Q et γ un cercle du demi-plan $\text{Im } \eta_n > 0$ entourant les pôles η_n de $q_0(y'', 0; i\eta_1, \tilde{\eta}, \eta_n)$ situés dans ce demi-plan.

Donnons maintenant deux propriétés relatives à l'opérateur différentiel parabolique P introduit dans I,2.

(13) COROLLAIRE. — Soit $u \in \mathcal{O}'(\Omega, E)$ telle que :

i) $Pu = 0$ dans Ω ,

ii) Il existe $\tilde{u} \in \mathcal{O}'(M, E)$, avec $\tilde{u} = u$ dans Ω .

Alors u admet des valeurs au bord transverses de tout ordre.

Démonstration. — D'après le théorème de Hahn-Banach, nous pouvons choisir \tilde{u} telle que $\text{Supp } \tilde{u} \in \bar{\Omega}$; alors $\text{Supp } P\tilde{u} \subset \Gamma$, donc $P\tilde{u}$ est une multi-couche sur Γ , c'est-à-dire une somme localement finie de distributions de la forme $\nu \otimes \delta^{(j)}$, où $\nu \in \mathcal{O}'(\Gamma, F)$; si T est une paramétrix (de type compact) de P dans M , on a $\tilde{u} = T(P\tilde{u}) + R\tilde{u}$, avec R régularisant ; on conclut en appliquant (11) pour $Q = T$.

(14) Si $u \in \mathcal{O}'(\Omega, E)$ admet une valeur au bord transverse d'ordre 0, on appelle prolongement canonique de u par 0 la distribution $u^\circ \in \mathcal{O}'(M, E)$ définie localement par :

$$\langle u^\circ, \varphi \rangle = \int_0^{+\infty} \langle u(\cdot, y_n), \varphi(\cdot, y_n) \rangle dy_n \quad (\varphi \in \mathcal{O}(\mathbb{R}^n)).$$

Au voisinage d'un point de Γ , P se met, d'une façon unique, sous la forme $P = \sum_{j=0}^m P_j D_n^j$, où P_j est un opérateur différentiel tangentiel d'ordre anisotrope $m - j$ (pour simplifier les notations, nous avons identifié N et iD_n par l'intermédiaire de cartes θ vérifiant (4), (5)). Si $u \in \mathcal{O}'(\Omega, E)$ vérifie les hypothèses du corollaire précédent, on obtient la formule des sauts :

$$P(u^\circ) = \tilde{P}(\gamma u)$$

où, pour $\nu = (\nu_0, \nu_1, \dots, \nu_{m-1}) \in \mathcal{O}'(\Gamma, \oplus_m E)$, $\tilde{P}(\nu)$ désigne la multi-

$$\frac{1}{i} \sum_{j=0}^{m-1} \sum_{l=0}^{m-1-j} P_{j+l+1}(\nu_l \otimes \delta^{(l)}) \quad (\text{voir [8]}).$$

2. Discussion générale des problèmes aux limites paraboliques.

Considérons maintenant le problème (9), (10).

Soient (voir [14]) $T_1, T_2 \in V_c^{-m}(M, F, E)$ tels que :

(15) $PT_1 u = u$ dans Ω_t pour toute $u \in \mathcal{O}'_+(M_t, F)$.

(16) $T_2 Pu = u$ pour toute $u \in \mathcal{O}'_+(M_t, E)$ nulle en dehors de $\bar{\Omega}$.

Pour $i = 1, 2$, la proposition (11), appliquée à l'opérateur $T_i P_{j+l+1}$ montre que pour toute $v \in \mathcal{O}'(\Gamma, \oplus_m E)$, les distributions $(T_i \tilde{P}v)/\Omega$ ont des valeurs au bord transverses de tout ordre et que :

(17) $\gamma[(T_i \tilde{P}v)/\Omega] = Q_i v$, où $Q_i = (Q_{k,l}^{(i)})_{0 \leq k, l \leq m-1}$,
 $Q_{k,l}^{(i)} \in V_c^{k-l}(\Gamma, E, E)$

Remarquons que pour x_1 voisin de $[0, t]$, T_1 et T_2 ont même symbole qu'une paramétrix de P ; donc Q_1 et Q_2 ont même symbole pour x_1 voisin de $[0, t]$; (12) implique alors (pour un choix correspondant de carte) que le terme de degré $k - l$ du symbole de $Q_{k,l}^{(i)}$ est :

(18) $q_{k,l}^{(0)}(y'' ; \xi_1, \tilde{\eta}) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \sum_{j=0}^{m-1-l} p^{(0)-1}(y'', 0 ; \xi_1, \eta') \dots$
 $\dots p_{j+l+1}^{(0)}(y'', 0 ; \xi_1, \tilde{\eta}) \eta^{j+k} d\eta_n$

où $\xi_1 = \xi_1 + i\eta_1$ ($\xi_1 \geq 0$), $\tilde{\eta} = (\eta_2, \eta_3, \dots, \eta_{n-1})$, $p^{(0)}$ et $p_{j+l+1}^{(0)}$ sont les symboles principaux respectifs de P et P_{j+l+1} , γ est un cercle du demi-plan $Im \eta_n > 0$ entourant les zéros η_n de

$\det p^{(0)}(y'', 0 ; \xi_1, \tilde{\eta}, \eta_n)$

situés dans ce demi-plan.

On en déduit, comme dans [3], l'interprétation suivante du symbole principal $q^{(0)}$ de Q_1 et Q_2 (pour x_1 voisin de $[0, t]$) :

Désignons par $E_{y'', \xi_1, \tilde{\eta}}^+$ (resp : $E_{y'', \xi_1, \tilde{\eta}}^-$) le sous-espace de

$C^{m \dim E} \approx (E_{(y'', 0)})^m$

constitué par les données de Cauchy $U(0), \dots, D_n^{m-1} U(0)$ des solutions U de l'équation différentielle $p^{(0)}(y'', 0 ; \xi_1, \tilde{\eta}, D_n) U(y_n) = 0$ qui sont bornées pour $y_n \geq 0$ (resp : pour $y_n \leq 0$) ; alors

$$C^{m \dim E} = E_{y'', \xi_1, \tilde{\eta}}^+ \oplus E_{y'', \xi_1, \tilde{\eta}}^-$$

et $q^{(0)}(y'', \xi_1, \tilde{\eta})$ est la projection de $C^{m \dim E}$ sur $E_{y'', \xi_1, \tilde{\eta}}^+$ parallèlement à $E_{y'', \xi_1, \tilde{\eta}}^-$; notons que $\dim E_{y'', \xi_1, \tilde{\eta}}^+ = \frac{m}{2} \dim E$ (sauf dans certains cas, que nous excluons, lorsque $n = 2$). Pour discuter le problème (9), (10), nous faisons l'hypothèse :

(19) f admet un prolongement $\tilde{f} \in \mathcal{O}'_+(M_t, F)$ tel que $T_1 \tilde{f}$ ait des valeurs au bord transverses jusqu'à l'ordre μ .

(20) THEOREME.

i) On suppose la matrice BQ_1 parabolique à droite pour $0 \leq x_1 \leq t$; soit A_1 un inverse à droite de BQ_1 . Alors :

$$u = (T_1 \tilde{f} + T_1 \tilde{P} A_1 (g - B \gamma T_1 \tilde{f}))/\Omega_t \text{ vérifie (9), (10).}$$

ii) On suppose la matrice $(I - Q_2) \oplus B$ parabolique à gauche pour $0 \leq x_1 \leq t$; soit A_2 un inverse à gauche de $(I - Q_2) \oplus B$. Alors (9), (10) impliquent :

$$u = (T_1 \tilde{f} + T_2 \tilde{P} A_2 (0, g - B \gamma T_1 \tilde{f}))/\Omega_t.$$

Démonstration de i) :

Posons $\tilde{u} = T_1 \tilde{f} + T_1 \tilde{P} A_1 (g - B \gamma T_1 \tilde{f})$ et $u = \tilde{u}/\Omega_t$; on a $P \tilde{u} = \tilde{f}$ dans Ω_t d'après (15), donc (9) est vérifiée. D'autre part, $\gamma(T_1 \tilde{P} A_1 (g - B \gamma T_1 \tilde{f})) = Q_1 A_1 (g - B \gamma T_1 \tilde{f})$, donc

$$B \gamma u = B \gamma T_1 \tilde{f} + B Q_1 A_1 (g - B \gamma T_1 \tilde{f}) = g, \text{ d'où (10).}$$

Démonstration de ii) :

Si u vérifie (9), (10), posons $u_1 = u - (T_1 \tilde{f})/\Omega_t$; on a $P u_1 = 0$ dans Ω_t d'après (15), donc (voir (14)) $P(u_1^0) = \tilde{P}(\gamma u_1)$ et (16) implique $u_1^0 = T_2 \tilde{P}(\gamma u_1)$, d'où $\gamma u_1 = Q_2(\gamma u_1)$; il en résulte que

$$((I - Q_2) \oplus B)(\gamma u_1) = (0, g - B \gamma T_1 \tilde{f}),$$

soit $\gamma u_1 = A_2(0, g - B \gamma T_1 \tilde{f})$, donc $u_1^0 = T_2 \tilde{P} A_2(0, g - B \gamma T_1 \tilde{f})$ et finalement $u = (T_1 \tilde{f} + T_2 \tilde{P} A_2(0, g - B \gamma T_1 \tilde{f}))/\Omega_t$.

(21) *Remarque.* — Dans le cas particulier où $\dim G = (m/2) \dim E$, les hypothèses de (20), (i) et de (20), (ii) sont équivalentes ; de plus, elles sont vérifiées si et seulement si, en reprenant les notations de (18), la restriction $\tilde{b}^{(0)}(y'', \xi_1, \tilde{\eta})$ à $E_{y'', \xi_1, \tilde{\eta}}^+$ du symbole principal $b^{(0)}(y'', \xi_1, \tilde{\eta})$ de B est un isomorphisme pour $\xi_1 \geq 0, (\xi_1, \tilde{\eta}) \neq 0$ (lorsque $0 \leq x_1 \leq t$), c'est-à-dire si la condition habituelle de Shapiro-Lopatinski est satisfaite ; il est en effet évident que cette condition est vérifiée quand on fait l'hypothèse de (20), (i) ou l'hypothèse de (20), (ii) ; réciproquement, posons $a_1^{(0)} = i \circ \tilde{b}^{(0)-1}$, où i est l'injection canonique de $E_{y'', \xi_1, \tilde{\eta}}^+$ dans $C^{m \dim E}$; alors

$$a_1^{(0)} = (a_{k,j}^{(0)})_{0 \leq k \leq m-1, 1 \leq j \leq l}$$

avec $a_{k,j}^{(0)} \in \sigma_{k-m_j}$ (voir [14], définition (9)) ; les propriétés d'holomorphie et de dérivabilité de $a_{k,j}^{(0)}$ résultent du fait que $E_{y'', \xi_1, \tilde{\eta}}^+$ admet localement en $(y'', \xi_1, \tilde{\eta})$ une base constituée de $(m/2) \dim E$ vecteurs choisis parmi les vecteurs

$$v_{k,l,r}(y'', \xi_1, \tilde{\eta}) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} p^{(0)-1}(y'', 0 ; \xi_1, \eta') \sum_{j=0}^{m-1-l} p_{j+l+1}^{(0)}(y'', 0 ; \xi_1, \tilde{\eta}) \eta_n^{j+k} e^{iy_n \eta_n} \varepsilon_r d\eta_n$$

où $k, l = 0, \dots, m-1 ; r = 1, \dots, \dim E ; (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_d)$ est une base de $C^{\dim E}$. Par construction, on a $b^{(0)} q^{(0)} a_1^{(0)} = I$, donc BQ_1 est parabolique à droite ; pour montrer que $(I - Q_2) \oplus B$ est parabolique à gauche, posons $a_2^{(0)} = (I - a_1^{(0)} b^{(0)}, a_1^{(0)})$; alors :

$$a_2^{(0)} \begin{pmatrix} I - q^{(0)} \\ b^{(0)} \end{pmatrix} = (I - a_1^{(0)} b^{(0)}) (I - q^{(0)}) + a_1^{(0)} b^{(0)} = I$$

(22) *Remarque.* — On peut donner un résultat analogue à (20) pour les problèmes de transmission du type correspondant à ceux de [10].

3. Discussion dans les espaces de Sobolev.

1. *Espaces utilisés.*

(23) DEFINITIONS. — Soient $\sigma, \tau \in \mathbf{R}$.

i) $H_{\sigma, \tau}^+(\mathbf{R}^n)$ désigne l'espace des distributions $u \in \mathcal{D}'(\mathbf{R}^n)$ telles que $u = 0$ pour $x_1 < 0$, $\hat{u} = \mathcal{F}u$ est une fonction vérifiant

$$\int (1 + \eta_1^{2/a_1} + |\eta'|^2)^\sigma (1 + \eta_1^{2/a_1} + |\tilde{\eta}|^2)^\tau |\hat{u}(\eta)|^2 d\eta < +\infty$$

(on rappelle que $\tilde{\eta} = (\eta_2, \dots, \eta_{n-1})$, $\eta = (\eta_1, \tilde{\eta}, \eta_n) = (\eta_1, \eta')$). Cet espace est naturellement muni d'une structure hilbertienne ; la norme associée est notée $\|u\|_{\sigma, \tau}$.

ii) $H_{\sigma, \tau}^+(\mathbf{R}^n, t)$ est l'espace des distributions u définies dans $\{y \in \mathbf{R}^n \mid y_1 < t\}$, et admettant un prolongement $U \in H_{\sigma, \tau}^+(\mathbf{R}^n)$. On le munit de la norme définie par $\|u\|_{\sigma, \tau}^{(t)} = \text{Inf } \|U\|_{\sigma, \tau}$

iii) $H_{\sigma, \tau}^+(\mathbf{R}_+^n, t)$ est l'espace des distributions u définies dans $\{y \in \mathbf{R}^n \mid y_1 < t, y_n > 0\}$ et admettant un prolongement $U \in H_{\sigma, \tau}^+(\mathbf{R}^n)$. On le munit de la norme définie par $\|u\|_{\sigma, \tau}^{+, t} = \text{Inf } \|U_{\sigma, \tau}\|$.

Lorsque $\tau = 0$, nous remplacerons σ, τ par σ dans toutes les notations précédentes ; les espaces correspondants sont alors les espaces utilisés dans [1], [11].

(24) Remarquons que pour tout multi-indice $\alpha = (\alpha'', \alpha_n)$, il existe une constante C telle que $\|D^\alpha u\|_{\sigma - \alpha_\eta, \tau - \langle \alpha'', \alpha'' \rangle} \leq C \|u\|_{\sigma, \tau}$ pour toute $u \in H_{\sigma, \tau}(\mathbf{R}^n)$; d'autre part, si $\sigma \leq \sigma_1$ et $\sigma + \tau \leq \sigma_1 + \tau_1$, alors $H_{\sigma_1, \tau_1}(\mathbf{R}^n) \subset H_{\sigma, \tau}(\mathbf{R}^n)$, avec une injection continue. Ces propriétés restent évidemment valables pour les espaces-quotients

$$H_{\sigma, \tau}^+(\mathbf{R}^n, t) \quad \text{et} \quad H_{\sigma, \tau}^+(\mathbf{R}_+^n, t).$$

(25) Posons

$$\Lambda_{\sigma, \tau}(\xi_1, \tilde{\eta}, \xi_n) = (1 + \xi_1^{1/a_1} + |\tilde{\eta}| - \xi_n)^\sigma (1 + \xi_1^{1/a_1} + |\tilde{\eta}|)^\tau$$

lorsque $\xi_1 = \xi_1 + i\eta_1$ ($\xi_1 \geq 0$), $\xi_n = \xi_n + i\eta_n$ ($\xi_n \leq 0$), les arguments étant choisis tels que

$$|\arg \xi_1| \leq \pi/2, \quad |\arg(1 + \xi_1^{1/a_1} + |\tilde{\eta}| - \xi_n)| \leq \pi/2,$$

$$|\arg(1 + \xi_1^{1/a_1} + |\tilde{\eta}|)| \leq \pi/2.$$

$\Lambda_{\sigma,\tau}$ est holomorphe par rapport à ξ_1 lorsque $\xi_1 > 0$ et par rapport à ξ_n lorsque $\xi_n < 0$; si $J_{\sigma,\tau}$ est l'opérateur défini par

$$J_{\sigma,\tau} U = \mathfrak{F}^{-1} \Lambda_{\sigma,\tau}(i\eta_1, \tilde{\eta}, i\eta_n) \mathfrak{F}U,$$

on vérifie facilement que la norme dans $H_{\sigma,\tau}^+(\mathbb{R}^n, t)$ (resp : $H_{\sigma,\tau}^+(\mathbb{R}_+^n, t)$) est équivalente à

$$\int_{y_1 < t} |J_{\sigma,\tau} U|^2 dy \text{ (resp : } \int_{y_1 < t, y_n > 0} |J_{\sigma,\tau} U|^2 dy),$$

où $U \in H_{\sigma,\tau}^+(\mathbb{R}^n)$ est un prolongement (arbitraire) de u .

(26) LEMME. — Pour qu'une distribution u soit dans $H_{\sigma,\tau}^+(\mathbb{R}_+^n, t)$, il faut et il suffit que $u \in H_{\sigma-1,\tau+1}^+(\mathbb{R}_+^n, t)$ et $D_n u \in H_{\sigma-1,\tau}^+(\mathbb{R}_+^n, t)$. La norme $\|u\|_{\sigma,\tau}^{+,t}$ est alors équivalente à la norme

$$\|u\|_{\sigma-1,\tau+1}^{+,t} + \|D_n u\|_{\sigma-1,\tau}^{+,t}.$$

On a une propriété analogue dans $H_{\sigma,\tau}^+(\mathbb{R}^n, t)$.

Démonstration. — Supposons

$$u \in H_{\sigma-1,\tau+1}^+(\mathbb{R}_+^n, t), \quad D_n u \in H_{\sigma-1,\tau}^+(\mathbb{R}_+^n, t);$$

soient $U \in H_{\sigma-1,\tau+1}(\mathbb{R}^n)$, $V \in H_{\sigma-1,\tau}(\mathbb{R}^n)$ des prolongements respectifs de u , $D_n u$. Remarquons que :

$$J_{\sigma,\tau} = J_{\sigma-1,\tau+1} J_{1,-1} = J_{\sigma-1,\tau+1} (1 - i J_{0,-1} D_n),$$

d'où $J_{\sigma,\tau} U = J_{\sigma-1,\tau+1} U - i J_{\sigma-1,\tau} D_n U$; puisque $D_n U = V$ lorsque $y_1 < t, y_n > 0$, on obtient :

$$\int_{y_1 < t, y_n > 0} |J_{\sigma,\tau} U|^2 dy = \int_{y_1 < t, y_n > 0} |J_{\sigma-1,\tau+1} U - i J_{\sigma-1,\tau} V|^2 dy,$$

ce qui établit la partie non triviale de (26).

Grâce à (26), le lemme 2.1.1 de [3] se transpose :

(27) LEMME. — Soient des réels $\sigma, \tau, \sigma_j, \tau_j (j = 1, 2)$ tels que $\sigma \leq \sigma_1, \sigma + \tau \leq \sigma_j + \tau_j$. Soit K un compact de

$$\{y \in \mathbb{R}^n | 0 \leq y_1 \leq t, y_n \geq 0\}.$$

Si $\mathfrak{Q} = (\mathfrak{Q}_{r,s})$ est une matrice $R \times S$ d'opérateurs différentiels d'ordre

(anisotrope) m à coefficients C^∞ dans $\{y \in \mathbb{R}^n \mid y_n \geq 0\}$, telle que la matrice des coefficients de D_n^m soit de rang S dans K ; alors il existe une constante C telle que :

$$\|u\|_{\sigma, \tau}^{+, t} \leq C (\|\mathcal{P}u\|_{\sigma_1 - m, \tau_1}^{+, t} + \|u\|_{\sigma_2, \tau_2}^{+, t})$$

pour toute $u \in (H_{\sigma_2, \tau_2}^+(\mathbb{R}_+, t))^S$ ayant son support dans K .

Il est facile d'établir la proposition suivante :

(28) PROPOSITION. — Soit ω un ouvert de \mathbb{R}^n et $\mathcal{G} \in V_c^{r, a}(\omega)$; alors :

i) Pour tout compact K de ω et tous réels σ, τ , il existe une constante C telle que $\|\mathcal{G}u\|_{\sigma - r, \tau} \leq C \|u\|_{\sigma, \tau}$ lorsque $\text{Supp } u \subset K$.

ii) Pour tout compact K'' de $\{y \in \omega \mid y_n = 0\}$, pour tous réels σ, τ et pour tout entier $\nu \geq 0$ vérifiant $\sigma < -(\nu + 1/2)$, il existe une constante C telle que $\|\mathcal{G}(\nu \otimes \delta_{y_n}^{(\nu)})\|_{\sigma - r, \tau} \leq C \|\nu\|_{\sigma + \tau + 1/2}$ pour toute $\nu \in H_{\sigma + \tau + \nu + 1/2}^+(\mathbb{R}^{n-1})$ ayant son support dans K'' .

A l'aide des espaces $H_s^+(\mathbb{R}^n, t)$, $H_s^+(\mathbb{R}_+, t)$ et de partitions de l'unité localement finies, on définit naturellement les espaces

$$H_s^{+, K'}(M_t, E)$$

(constitué en particulier de distributions nulles pour $x' \notin K'$, K' étant un compact donné de M'), $H_s^+(\Omega_t, E)$, $H_s^+(\Gamma_t, E)$; les normes y sont respectivement notées $\|u\|_s^{M_t, K'}$, $\|u\|_s^{\Omega_t}$, $\|u\|_s^{\Gamma_t}$.

2. Discussion des problèmes aux limites paraboliques.

Bien que ce ne soit pas utile pour la démonstration du théorème (32) ci-dessous, nous commençons par établir une variante de (13) pour l'opérateur différentiel parabolique P de degré m .

(29) PROPOSITION. — Soient $s, \sigma \in \mathbb{R}$ et $k \in \mathbb{N}$ tels que

$$m + \sigma > k + \frac{1}{2}, \quad m + \sigma \geq s.$$

Si $u \in H_s^+(\Omega_t, E)$ vérifie $Pu \in H_\sigma^+(\Omega_t, F)$, alors u admet des valeurs au bord transverses jusqu'à l'ordre k , avec $\gamma_k u \in H_{s-k-1/2}^+(\Gamma_t, E)$; de plus, il existe une constante C (indépendante de u) telle que :

$$\|\gamma_k u\|_{s-k-1/2}^{\Gamma_t} \leq C(\|Pu\|_{\sigma}^{\Omega_t} + \|u\|_s^{\Omega_t})$$

Démonstration. — La question étant locale, il suffit de montrer que $\|\gamma_k u\|_{s-k-1/2}^{(\Gamma)} \leq C(\|Pu\|_{\sigma}^{+,t} + \|u\|_s^{+,t})$ si u garde son support dans un compact fixe K de $\{y \in \mathbb{R}^n \mid 0 \leq y_1 \leq t, y_n \geq 0\}$ et si P est parabolique dans K . Or la variante anisotrope de la formule (2.5.13) de (5) montre que

$$\|\gamma_k u\|_{s-k-1/2}^{(\Gamma)} \leq C' \|u\|_{\sigma+m, s-(\sigma+m)}^{+,t} \quad \text{puisque} \quad \sigma + m > k + \frac{1}{2}.$$

Mais, d'après (27), on a :

$$\|u\|_{\sigma+m, s-(\sigma+m)}^{+,t} \leq C'' (\|Pu\|_{\sigma, s-(\sigma+m)}^{+,t} + \|u\|_{s,0}^{+,t})$$

d'où l'inégalité cherchée puisque $s - (\sigma + m) \leq 0$.

(30) *Remarque.* — La démonstration précédente et (29) restent valables quand on suppose seulement que P est un opérateur différentiel d'ordre anisotrope m , à coefficients C^∞ et que Γ n'est pas caractéristique pour P lorsque $0 \leq x_1 \leq t$.

(31) PROPOSITION. — *Les opérateurs $T_i \tilde{P}$ (voir (14), (15), (16)) sont linéaires continus de $\prod_{k=0}^{m-1} H_{s-k-1/2}^+(\Gamma_t, E)$ dans $H_s^+(\Omega_t, E)$ pour tout $s \in \mathbb{R}$.*

Démonstration. — La question étant locale, il suffit de voir que $\|T_i \tilde{P} v\|_s^{+,t} \leq C \sum_{k=0}^{m-1} \|v_k\|_{s-k-1/2}^{(\Gamma)}$, où $v = (v_0, \dots, v_{m-1})$.

D'après (28), ii) et la définition de \tilde{P} , il vient, pour $\sigma \in \mathbb{R}$ choisi assez grand :

$$\|T_i \tilde{P} v\|_{s-\sigma, \sigma}^{+,t} \leq C \sum_{k=0}^{m-1} \|v_k\|_{s-k-1/2}^{(\Gamma)}.$$

Mais, d'après (27), on a :

$$\|T_i \tilde{P} v\|_{s,0}^{+,t} \leq C' (\|PT_i \tilde{P} v\|_{s-m,0}^{+,t} + \|T_i \tilde{P} v\|_{s-\sigma, \sigma}^{+,t})$$

d'où l'inégalité cherchée grâce à (28), ii), puisque $PT_i - I$ est de symbole nul quand x_1 est voisin de $[0, t]$.

Nous pouvons maintenant interpréter le théorème (20). L'hypothèse (19) est certainement vérifiée lorsque $f \in H_\sigma^+(\Omega_t, E)$ avec $\sigma + m - \mu > 1/2$. Posons $\mathcal{R}u = (Pu, B\gamma u)$.

(32) THEOREME. — Soient $s, \sigma \in \mathbf{R}$, avec

$$\sigma + m - \mu > \frac{1}{2}, \quad \sigma + m \geq s$$

i) On suppose la matrice BQ_1 parabolique à droite pour $0 \leq x_1 \leq t$. Alors il existe une application linéaire continue

$$\mathcal{C}_1 : H_\sigma^+(\Omega_t, F) \times \prod_{j=1}^J H_{s-m_j-1/2}^+(\Gamma_t, G_j) \longrightarrow H_s^+(\Omega_t, E)$$

telle que $\mathcal{R}\mathcal{C}_1 = I$.

ii) On suppose la matrice $(I - Q_2) \oplus B$ parabolique à gauche pour $0 \leq x_1 \leq t$.

Alors il existe une application linéaire continue

$$\mathcal{C}_2 : H_\sigma^+(\Omega_t, F) \times \prod_{j=1}^J H_{s-m_j-1/2}^+(\Gamma_t, G_j) \longrightarrow H_s^+(\Omega_t, E)$$

telle que $u = \mathcal{C}_2 \mathcal{R}u$ pour toute $u \in \mathcal{D}'_+(\Omega_t, E)$ vérifiant

$$\mathcal{R}u \in H_\sigma^+(\Omega_t, F) \times \prod_{j=1}^J H_{s-m_j-1/2}^+(\Gamma_t, G_j).$$

Démonstration de i). — Considérons un opérateur linéaire continu de prolongement $\pi : H_\sigma^+(\Omega_t, F) \longrightarrow H_\sigma^{+,K'}(M_t, F)$, où K' est un compact de M' ; soit u la distribution définie par la formule de (20), i) quand on prend $\tilde{f} = \pi f$. Alors

$$\|T_1 \tilde{f}\|_s^{\Omega_t} \leq \|T_1 \tilde{f}\|_{\sigma+m}^{\Omega_t} \leq C \|f\|_\sigma^{\Omega_t}.$$

On a d'autre part, d'après (31)

$$\begin{aligned} \|T_1 \tilde{P} A_1 (g - B\gamma T_1 \tilde{f})\|_s^{\Omega_t} &\leq C \sum_{k=0}^{m-1} \|(A_1 (g - B\gamma T_1 \tilde{f}))_k\|_{s-k-1/2}^{\Gamma_t} \\ &\leq C' \left(\sum_{j=1}^J \|g_j\|_{s-m_j-1/2}^{\Gamma_t} + \|f\|_\sigma^{\Omega_t} \right) \end{aligned}$$

La démonstration de ii) est analogue.

(33) *Remarque.* — Il est possible, à partir de (20) et (32), de discuter les problèmes aux limites mixtes du type :

$$\begin{aligned} Pu &= f & \text{dans} & \quad \Omega_t^\circ = \{x \in \Omega \mid 0 < x_1 < t\} \\ B(\gamma u) &= g & \text{dans} & \quad \Gamma_t^\circ = \{x \in \Gamma \mid 0 < x_1 < t\} \\ \sigma u &= \varphi & \text{dans} & \quad \Omega'_0 = \{x \in \Omega \mid x_1 = 0\} \end{aligned}$$

où
$$\sigma u = \left(\frac{\partial^k u}{\partial x_1^k} \Big|_{x_1 = 0} \right) \quad 0 \leq k \leq \frac{m}{a_1} - 1 .$$

Les discussions (20), (32) correspondent au cas $\varphi = 0$, dont on déduit le cas général (voir par exemple [1], [12]).

BIBLIOGRAPHIE

- [1] M.S. AGRANOVICH et M.I. VISIK, *Uspechi Matem. Nauk*, XIX, 3, 53-161. *Russian Math. Surveys*, 19, (1964), 53-157.
- [2] L. HÖRMANDER, *Proceedings of Symposia in pure Math.*, 10, AMS (1967) 138-183.
- [3] L. HÖRMANDER, *Ann. of Math.*, 83, (1966), 129-209.
- [4] L. HÖRMANDER, *Cours à Stanford University* (Juillet 1967).
- [5] L. HÖRMANDER, Springer-Verlag (1964).
- [6] L. HÖRMANDER, *Fourier Integral Operators* (à paraître).
- [7] C. HUNT et A. PIRIOU, *Comptes Rendus, Série A*, (1969), 214-217.
- [8] P. KREE, *Annali di Matematica*, LXXXIII, (1969), 113-132.
- [9] P. KREE, *Conf. del Sem. di Mat. dell'Univ. di Bari*, 114-115 (1968).
- [10] P. KREE, *Comptes Rendus, Série A*, (1969), 699-701.
- [11] J.E. LEWIS, *Journal of Math. Analysis and Application*, 26, (1969) 479-511.
- [12] J.L. LIONS et E. MAGENES, Dunod (Paris), (1968), tome 2.
- [13] A. PIRIOU, *Comptes Rendus, série A*, (1969), 692-695.

- [14] A. PIRIOU, *Annales de l'Institut Fourier*, 20, 1, (1970).
- [15] M.I. VISIK et G.I. ESKIN, *Mat. Sbornik*, 71 (113), (1966), 162-190.

Manuscrit reçu le 28 octobre 1969

Alain PIRIOU
Faculté des Sciences
Département Mathématiques
Parc Valrose, Avenue Valrose
06 – Nice