Ann. Inst. Fourier, Grenoble
21,1 (1971), 11-23

SOLUTION A CROISSANCE DU SECOND PROBLÈME DE COUSIN DANS $\mathbf{C}^n$

par Henri SKODA

Introduction

Dans une première partie, on utilise la cohomologie à croissance pour donner une solution générale à croissance de l'équation $id'd''V = \theta$ où θ désigne un courant de bidegré (1, 1), fermé et positif dans $\mathbf{C}^n$. On en déduit alors une solution générale à croissance du second problème de Cousin dans $\mathbf{C}^n$.

Enfin, dans une troisième partie, on démontre le théorème du quotient pour les fonctions méromorphes dans $\mathbf{C}^n$.

1. Solution à croissance de l'équation : $id'd''V = \theta$.

On choisit comme base des $2n$-formes sur $\mathbf{C}^n = \mathrm{R}^{2n}$ la forme :

$$dx_1 \wedge dy_1 \wedge dx_2 \wedge dy_2 \wedge \ldots \wedge dx_n \wedge dy_n$$

ce qui permet d'identifier les 0-courants aux $2n$-courants et aux distributions sur $\mathbf{C}^n$.

Soit θ un courant de bidegré (1, 1) donné dans $\mathbf{C}^n$:

$$\theta = i \sum_{j,k} \theta_{jk} \, dz_j \wedge d\bar{z}_k \qquad \theta_{jk} \in \mathcal{D}'(\mathbf{C}^n) \qquad \begin{array}{l} 1 \leqslant j \leqslant n \\ 1 \leqslant k \leqslant n \,. \end{array}$$

On suppose θ fermé : $d\theta = 0$ ou encore $d'\theta = 0$ et $d''\theta = 0$. On suppose θ *positif*, c'est-à-dire que quels que soient les nombres complexes λ_j la distribution :

$$\sum_{1 \leqslant j,k \leqslant n} \theta_{jk} \lambda_j \bar{\lambda}_k \qquad \text{est positive.}$$

On en déduit aussitôt que :

1) θ_{jj} est une mesure positive $\quad 1 \leqslant j \leqslant n$

2) $\theta_{jk} = \bar{\theta}_{kj} \qquad 1 \leqslant j,\ k \leqslant n$.

3) Pour toute fonction $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbf{C}^n) \quad \varphi \geqslant 0 \quad$ on a :

$$| < \theta_{jk}\ , \varphi > | \leqslant < \theta_{jj}, \varphi > + < \theta_{kk}, \varphi >$$

θ_{jk} est donc une mesure et si on pose : $\sigma = \sum_{j=1}^{n} \theta_{jj}$ on a :

$$| < \theta_{jk}, \varphi > | \leqslant < \sigma , \varphi > \cdot$$

Si V est une fonction plurisousharmonique, le courant $\theta = id'd''\mathrm{V}$ est de bidegré (1, 1) fermé et positif, inversement en vertu de théorèmes généraux d'existence (cf. Dolbeault [7] ou Aeppli [8]) tout courant de bidegré (1, 1) fermé et positif est de la forme $id'd''\mathrm{V}$ où V est plurisousharmonique.

On va caractériser la croissance du courant θ à l'aide des fonctions ($\varepsilon > 0$ est fixé) :

$$\sigma_\varepsilon(z) = \int_{|x-z|<\varepsilon} d\sigma(x) \ . \qquad \sigma(r) = \int_{|x|<r} d\sigma(x) \ .$$

On a alors le théorème :

THEOREME 1. — *Soit θ un courant positif, fermé, de bidegré* (1, 1) *donné dans* $\mathbf{C}^n$. *On suppose que :* $\sigma_\varepsilon(z) \leqslant \mathrm{C} \exp[\varphi(z)]$, *où* φ *désigne une fonction plurisousharmonique et* C *une constante. Alors pour tout* $\alpha > 0$, *il existe une fonction plurisousharmonique* V *solution de l'équation :* $id'd''\mathrm{V} = \theta$ *et vérifiant les majorations :*

$$\int_{\mathbf{C}^n} [\mathrm{V}^+(z)]^2 \, (1 + |z|^2)^{-n-3-\alpha} \exp[-\, 2\, \Psi(z)]\, dz < +\infty \qquad (1)$$

$$\mathrm{V}(z) \leqslant \mathrm{C}(\varepsilon, \alpha)\, (1 + |z|)^{n+3+\alpha} \exp[\chi(z)] \qquad (2)$$

avec

$$\mathrm{V}^+(z) = \mathrm{Sup}\, [\mathrm{V}(z), 0]$$

$$\Psi(z) = \operatorname{Log} \int_0^1 t \exp[\varphi(tz)]\, dt$$

$$\chi(z) = \frac{1}{2} \operatorname{Log} \int_{|x-z| \leqslant \varepsilon} \exp[2\Psi(x)]\, dx$$

$C(\varepsilon, \alpha)$ *désignant une constante dépendant de* ε *et de* α.

Remarque. – Les inégalités (1) et (2) sont encore vérifiées en prenant pour Ψ et χ les fonctions plus simples :

$$\Psi(z) = \operatorname*{Sup}_{0 \leqslant t \leqslant 1} \varphi(tz) \quad , \quad \chi(z) = \operatorname*{Sup}_{|x| \leqslant \varepsilon} \Psi(z+x)$$

COROLLAIRE 1. – *(Cas de la croissance radiale).*

On suppose que : $\sigma(r) \leqslant C \exp[\varphi(r)]$ *la fonction* $z \longrightarrow \varphi(|z|)$ *étant plurisousharmonique. Alors pour tout* $\varepsilon > 0$ *et tout* $\alpha > 0$, *il existe une solution* V *de l'équation :* $id'd''V = \theta$ *vérifiant :*

$$V(z) \leqslant C(\varepsilon, \alpha)\, (1+r)^{n+3+\alpha} \exp[\varphi(r+\varepsilon)] \quad avec \quad r = |z|\,.$$

On applique le théorème 1, en remarquant que :

$$\sigma_\varepsilon(z) \leqslant \sigma(r+\varepsilon) \leqslant C \exp[\varphi(r+\varepsilon)]$$

Démontrons maintenant le théorème 1 :

On procède par régularisation du courant θ. Soit ρ_ε une fonction positive de classe C^∞, ne dépendant que de $|z|$, à support dans la boule de centre 0 de rayon ε, d'intégrale égale à 1. Le courant $\theta * \rho_\varepsilon$ est alors positif et fermé. Soit W une fonction plurisousharmonique solution de l'équation $id'd''W = \theta * \rho_\varepsilon$ soit U une fonction plurisousharmonique telle que : $id'd''U = \theta$ soit V définie par :

$$V = U - U * \rho_\varepsilon + W$$

on a : $$id'd''V = \theta$$

et $$V \leqslant W$$

car U étant plurisousharmonique et ρ_ε ne dépendant que de $|z|$ on a :

$$U \leqslant U * \rho_\varepsilon$$

Il suffit donc de trouver W vérifiant : $id'd''W = \theta * \rho_\varepsilon$ et les majorations (1) et (2) du théorème.

Posons $\omega = \theta * \rho_\varepsilon \qquad \omega_{jk} = \theta_{jk} * \rho_\varepsilon$

utilisant la positivité de θ, on majore :

$$|\omega_{jk}(z)| = |< \theta_{jk} , \rho_\varepsilon(z - x) >| \leqslant < \sigma , \rho_\varepsilon(z - x) >$$

$$|\omega_{jk}(z)| \leqslant \| \rho_\varepsilon \|_\infty \, \sigma_\varepsilon(z) \leqslant C(\varepsilon) \exp[\varphi(z)] \ .$$

Comme $d\omega = 0$ il existe une forme ν de degré 1, telle que :

$$id\nu = \omega$$

ν se décompose sous la forme : $\nu = \nu_2 - \nu_1$

ν_1 étant de bidegré (1, 0) et ν_2 de bidegré (0, 1) d'où :

$$id'\nu_2 + id''\nu_2 - id'\nu_1 - id''\nu_1 = \omega$$

en comparant les bidegrés des différents termes à celui de ω on en déduit

$$\begin{cases} \omega = i(d'\nu_2 - d''\nu_1) \\ d''\nu_2 = 0 \quad \text{et} \quad d'\nu_1 = 0 \end{cases}$$

ν_1 et ν_2 sont donnés par la formule d'intégration de M.H. Cartan (cf. H. Cartan [6]) :

$$\nu_1 = \sum_{j=1}^{n} \left[\sum_{k=1}^{n} \bar{z}_k \int_0^1 t \, \omega_{jk}(tz) \, dt \right] dz_j$$

$$\nu_2 = \sum_{k=1}^{n} \left[\sum_{j=1}^{n} z_j \int_0^1 t \, \omega_{jk}(tz) \, dt \right] d\bar{z}_k$$

on a :

$$\left| \int_0^1 t \, \omega_{jk}(tz) \, dt \right| \leqslant C(\varepsilon) \int_0^1 t \exp[\varphi(tz)] \, dt = C(\varepsilon) \exp[\Psi(z)]$$

$$|\nu_j(z)|^2 \leqslant C(\varepsilon) |z|^2 \exp[2\Psi(z)]$$

$$\alpha > 0 \int_{\mathbf{C}^n} |\nu_j(z)|^2 (1 + |z|^2)^{-n-1-a} \exp[-2\Psi(z)] \, dz < +\infty \qquad j = 1, 2 .$$

on vérifie que $\Psi(z)$ est plurisousharmonique (cf. P. Lelong [4]). D'après Hörmander ([5] Th. 4.4.2 p. 93) il existe u_1 et u_2 tels que :

$$\nu_1 = d'u_1 \qquad \nu_2 = d''u_2$$

$$\int_{\mathbf{C}^n} |u_j(z)|^2 (1 + |z|^2)^{-n-3-\alpha} \exp[-2\Psi(z)]\, dz < +\infty \qquad j = 1, 2$$

On a alors : $\omega = id'd''u_2 - id''d'u_1 = id'd''(u_1 + u_2)$ comme : $\omega = \bar{\omega}$ il suffit de prendre $W = Re(u_1 + u_2)$ d'où résulte la majoration (1). La majoration (2) s'en déduit, en majorant $W(z)$ par la moyenne de W sur la boule de rayon ε de centre z :

$$W(z) \leqslant C(\varepsilon) \int_{|x| \leqslant \varepsilon} W(z + x)\, dx$$

on applique l'inégalité de Cauchy-Schwartz :

$$W(z) \leqslant C(\varepsilon) \left[\int_{|x| \leqslant \varepsilon} |W(z+x)|^2 (1 + |z+x|^2)^{-n-3-\alpha} \times \exp[-2\Psi(z+x)]\, dx \right]^{1/2} .$$

$$\left[\int_{|x| \leqslant \varepsilon} (1 + |z + x|^2)^{n+3+\alpha} \exp[2\Psi(z + x)]\, dx \right]^{1/2} ,$$

on majore en étendant la première intégrale à $\mathbf{C}^n$ tout entier, d'où :

$$W(z) \leqslant C(\varepsilon, \alpha)\, (1 + |z|)^{n+3+\alpha} \exp[\chi(z)] .$$

2. Solution à croissance du second problème de cousin dans $\mathbf{C}^n$.

Soit (U_k, F_k) $k \in K$ une donnée de Cousin dans $\mathbf{C}^n$, les U_k sont des ouverts recouvrant $\mathbf{C}^n$, $F_k \in \mathcal{H}(U_k)$ et pour tout k et l,

$$\frac{F_k}{F_l} \quad \text{et} \quad \frac{F_l}{F_k} \in \mathcal{H}(U_k \cap U_l) .$$

Les courants $id'd''$ Log $|F_k|$ définissent par recollement un courant θ positif et fermé, dans U_k on a :

$$\begin{cases} \theta = id'd'' \operatorname{Log} |F_k| \\ \sigma = \dfrac{1}{4} \Delta \operatorname{Log} |F_k| = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial z_j \partial \bar{z}_j} \operatorname{Log} |F_k| . \end{cases}$$

Le courant θ peut s'interpréter géométriquement comme courant d'intégration sur l'ensemble X des zéros des fonctions F_k (cf. P. Lelong [1], [2] et [4]), la mesure σ, associée à θ, s'interprète alors comme l'aire de X.

THEOREME 2. — *Soit* (U_k, F_k) $k \in K$ *une donnée de Cousin dans* $\mathbf{C}^n$, *on suppose que :* $\sigma_\varepsilon(z) \leqslant C \exp[\varphi(z)]$, *où* φ *est plurisousharmonique et* C *une constante. Alors, pour tout* $\alpha > 0$, *il existe une fonction entière* F *solution du second problème de Cousin telle que :*

$$\int_{\mathbf{C}^n} [\mathrm{Log}^+ |F(z)|]^2 (1 + |z|^2)^{-n-3-\alpha} \exp[-2\,\Psi(z)]\, dz < +\infty$$

$$\mathrm{Log}\, |F(z)| \leqslant C(\varepsilon, \alpha)\, (1 + |z|)^{n+3+\alpha} \exp[\chi[z)]$$

Ψ et χ *s'obtenant à partir de* φ *comme dans le théorème 1.*

COROLLAIRE 2. — *Si* $\sigma(r) \leqslant \exp[\varphi(r)]$, $\varphi(|z|)$ *étant plurisousharmonique, alors pour tout* $\varepsilon > 0$ *et tout* $\alpha > 0$, *il existe une fonction entière* F *solution du second problème de Cousin telle que :*

$$\mathrm{Log}\, |F(z)| \leqslant C(\varepsilon, \alpha)\, (1 + r)^{n+3+\alpha} \exp[\varphi(r + \varepsilon)]$$

Remarque 1. — Si φ est à croissance rapide de sorte que : $(1 + r)^{n+3+\alpha} \exp[\varphi(r + \varepsilon)] \leqslant C(\varepsilon') \exp[\varphi(r + \varepsilon')]$ pour $\varepsilon' > \varepsilon$ on a simplement le résultat : pour tout $\varepsilon > 0$, il existe F solution du problème telle que :

$$\mathrm{Log}\, |F(z)| \leqslant C(\varepsilon, \alpha) \exp[\varphi(r + \varepsilon)]\,.$$

Démonstration. — D'après le théorème 1, il suffit de démontrer que si V est solution de : $id'd''V = 0$ il existe une fonction entière F telle que : $\mathrm{Log}\, |F(z)| = V(z)$. Nous reproduisons ici un argument de P. Lelong (cf. [1]). Soit $a \notin X$, si $z \notin X$ on désigne par γ_z un chemin joignant a à z en évitant X. On pose :

$$F(z) = \exp\left[V(a) + 2 \int_{\gamma_z} d'V\right]$$

On montre d'abord que $F(z)$ ne dépend pas du chemin γ_z choisi. Pour cela il suffit de montrer que : $2 \int_\gamma d'V = 2\, i\pi N \quad N \in \mathbf{Z}$ si γ est un chemin fermé évitant X. Soit F_1 une solution du problème de Cousin, on a alors :

$$id'd'' \operatorname{Log} |F_1| = \theta$$

d'où :
$$d''d'(V - \operatorname{Log} |F_1|) = 0$$

$d'(V - \operatorname{Log} |F_1|)$ est une forme fermée de degré 1 dans $\mathbf{C}^n$, on a donc :

$$\int_\gamma d'(V - \operatorname{Log} |F_1|) = 0$$

$$2 \int_\gamma d'V = 2 \int_\gamma d' \operatorname{Log} |F_1|$$

si Log F_1 désigne une détermination locale du logarithme de F on a :

$$d \operatorname{Log} F_1 = 2\, d' \operatorname{Log} |F_1|$$

d'où :
$$2 \int_\gamma d'V = \int_\gamma d \operatorname{Log} F_1 = 2\, i\pi N\,.$$

On a :

$$\operatorname{Log} |F(z)| = V(a) + 2 \operatorname{Re} \int_{\gamma_z} d'V = V(a) + \int_{\gamma_z} d'V + \overline{d'V} =$$

$$= V(a) + \int_{\gamma_z} dV = V(z)\,.$$

D'après la définition de F, Log F est localement une primitive de la forme fermée d'V on a donc :

$$d \operatorname{Log} F = d'V$$
$$d'' \operatorname{Log} F = 0$$

Log F et par suite F sont donc des fonctions holomorphes en dehors de X, comme F est bornée au voisinage de X, F se prolonge en une fonction entière.

Remarque 2. – Si la distance de z à X est supérieure à 2ε, on a l'inégalité : $\operatorname{Log} |F(z)| \geqslant - C(\varepsilon, \alpha)\,(1 + |z|)^{n+3+a} \exp[\chi(z)]$ car on a alors : $V(z) = W(z)$ et W est pluriharmonique.

Remarque 3. – Dans le cas particulier de l'ordre fini

$$(\exp[\varphi(r)] = r^\rho)$$

on ne récupère pas le résultat classique (cf. Lelong [1], Stoll [12]).

Remarque 4. – Dans le cas $n = 1$, on a diverses théories qui ont chacune leurs avantages et leurs inconvénients (cf. Blumenthal [9], M. Denjoy [10], et L.A. Rubel et B.A. Taylor [11]).

3. Application : Théorème du quotient pour les fonctions méromorphes dans $\mathbf{C}^n$.

Si f est une fonction définie sur $\mathbf{C}^n$, on désignera par $m(r, f)$ la moyenne de f sur la sphère de centre 0 et de rayon r. Soit maintenant f une fonction méromorphe dans $\mathbf{C}^n$. On suppose pour simplifier que $f(0) = 1$, f peut alors s'écrire comme quotient de deux fonctions entières g et h :

$$f = \frac{g}{h} \quad \text{avec} \quad g(0) = h(0) = 1$$

les germes en chaque point g_z et h_z étant premiers entre eux dans l'anneau $\mathcal{O}_z$.

On caractérise alors la croissance de f par la moyenne sur la sphère de rayon r de la fonction $\mathrm{Log}(|g|^2 + |h|^2)^{1/2}$ soit :

$$\mathrm{T}(r, f) = m[r, \mathrm{Log}(|g|^2 + |h|^2)^{1/2}]$$

On vérifie aussitôt que $\mathrm{T}(r, f)$ est indépendant du choix particulier de g et de h, et qu'on a :

$$\mathrm{T}(r, f_1 f_2) \leqslant \mathrm{T}(r, f_1) + \mathrm{T}(r, f_2) \tag{1}$$

Si f est entière et si on pose : $\mathrm{M}(r) = \sup\limits_{|z|=r} |f(z)|$ on a :

$$\mathrm{T}(r, f) \leqslant \mathrm{Log}^+ \mathrm{M}(r) + \frac{1}{2} \mathrm{Log}\, 2 \tag{2}$$

LEMME 1. – *Si f est entière, si $f(0) = 1$ et si $\mathrm{R} > r$ on a :*

$$\mathrm{Log}\, \mathrm{M}(r) \leqslant 2 \left(\frac{\mathrm{R}}{\mathrm{R} - r}\right)^{2n} \mathrm{T}(\mathrm{R}, f)$$

Démonstration. – On utilise les propriétés de moyenne de la fonction plurisousharmonique $\mathrm{Log}\,|f|$. On a d'abord :

$$T(r, f) \geqslant m(r, \mathrm{Log}^+ |f|)$$

puis :

$$0 = \mathrm{Log}\,|f(0)| \leqslant m(r, \mathrm{Log}\,|f|) = m(r, \mathrm{Log}^+ |f|) - m(r, \mathrm{Log}^- |f|)$$

soit : $$m(r, \mathrm{Log}^+ |f|) \geqslant m(r, \mathrm{Log}^- |f|)$$

$$m(r, |\mathrm{Log}\,|f||) \leqslant 2\, m(r, \mathrm{Log}^+ |f|) \leqslant 2\, T(r, f) . \qquad (3)$$

Si $|z| = r$ on majore $\mathrm{Log}\,|f(z)|$ par la moyenne de $\mathrm{Log}\,|f|$ sur la boule de centre z et de rayon $R - r$:

$$\mathrm{Log}\,|f(z)| \leqslant \frac{1}{V(R-r)} \int_{|\zeta| \leqslant R-r} \mathrm{Log}\,|f(z+\zeta)|\, d\zeta$$

$V(R - r)$ désignant le volume de la boule de rayon $R - r$.

$$\mathrm{Log}\,|f(z)| \leqslant \frac{1}{V(R-r)} \int_{|\zeta| \leqslant R-r} |\mathrm{Log}\,|f(z+\zeta)||\, d\zeta$$

$$\leqslant \frac{1}{V(R-r)} \int_{|\zeta| \leqslant R} |\mathrm{Log}\,|f(\zeta)||\, d\zeta$$

Soit encore, compte tenu de (3) :

$$\mathrm{Log}\, M(r) \leqslant \frac{1}{V(R-r)} \int_0^R \rho^{2n-1}\, d\rho \int_S |\mathrm{Log}\,|f(\rho\zeta)||\, d\zeta$$

S désignant la sphère de rayon 1, et s_n l'aire de S :

$$\mathrm{Log}\, M(r) \leqslant \frac{s_n}{V(R-r)} \int_0^R \rho^{2n-1}\, m(\rho, |\mathrm{Log}\,|f||)\, d\rho$$

$$\leqslant \frac{2\, s_n}{V(R-r)} \int_0^R \rho^{2n-1}\, m(\rho, \mathrm{Log}^+ |f|)\, d\rho$$

comme $\mathrm{Log}^+ |f|$ est plurisousharmonique, $m(\rho, \mathrm{Log}^+ |f|)$ est fonction croissante de ρ, on a donc :

$$\mathrm{Log}\, M(r) \leqslant \frac{2\, m(R, \mathrm{Log}^+ |f|)}{V(R-r)}\, s_n \int_0^R \rho^{2n-1}\, d\rho$$

$$\text{Log } M(r) \leqslant \frac{2\,V(R)}{V(R-r)}\, m(R\,,\text{Log}^+ |f|) \leqslant 2\left(\frac{R}{R-r}\right)^{2n} T(R\,,f)$$

en faisant : $R = r + \varepsilon$ dans la formule du lemme 1, on obtient le lemme 2 :

LEMME 2. — *Si* f *est entière et si* $f(0) = 1$, *alors pour tout* $\varepsilon > 0$ *il existe une constante* $C(\varepsilon)$ *telle que :*

$$\text{Log } M(r) \leqslant C(\varepsilon)\,(1 + r)^{2n}\, T(r + \varepsilon\,, f)$$

Remarque. — On a aussi $\text{Log } M(r) \leqslant C(\varepsilon)\, T[(1+\varepsilon)\,r\,, f]$ formule plus intéressante lorsque f est à croissance lente, mais on s'intéresse ici surtout à la croissance rapide.

THEOREME 3. — *Soit* f *une fonction méromorphe dans* $\mathbf{C}^n$ *telle que* $T(r\,,f) \leqslant C \exp[\varphi(r)]$ $\varphi(|z|)$ *étant plurisousharmonique. Alors pour tout* $\varepsilon > 0$ *et tout* $\alpha > 0$, *il existe des fonctions entières* g *et* h *telles que :*

$$f = \frac{g}{h}$$

pour tout z *les germes* g_z et h_z *sont premiers entre eux dans* $\mathcal{O}_z$.

$$\text{Log } |g(z)| \leqslant C(\varepsilon\,,\alpha)\,(1 + r)^{5n+2+\alpha} \exp[\varphi(r + \varepsilon)]$$

$$\text{Log } |h(z)| \leqslant C(\varepsilon\,,\alpha)\,(1 + r)^{5n+2+\alpha} \exp[\varphi(r + \varepsilon)]$$

avec $r = |z|$.

Démonstration. — Soit $f = g/h$ une décomposition particulière de f, les germes g_z et h_z étant premiers entre eux pour tout $z \in \mathbf{C}^n$. On a :

$$T(r\,,f) = m[r\,, \text{Log}(|g|^2 + |h|^2)^{1/2}] \geqslant m(r\,, \text{Log } |h|)$$

Posons : $\sigma = \dfrac{1}{4}\,\Delta\,\text{Log } |h|$, le théorème de Gauss donne :

$$C_n\, \frac{\sigma(r)}{r^{2n-1}} = \frac{d}{dr}\, m(r\,, \text{Log } |h|)$$

C_n désignant une constante ne dépendant que de n.

$$C_n \int_0^r \frac{\sigma(t)}{t^{2n-1}}\, dt = m(r, \operatorname{Log}|h|) \leqslant T(r, f)$$

d'où :

$$T(r+\varepsilon, f) \geqslant C_n \int_0^{r+\varepsilon} \frac{\sigma(t)}{t^{2n-1}}\, dt \geqslant C_n \int_r^{r+\varepsilon} \frac{\sigma(t)}{t^{2n-1}}\, dt \geqslant$$

$$\geqslant C_n\, \sigma(r) \int_r^{r+\varepsilon} \frac{dt}{t^{2n-1}}$$

$$T(r+\varepsilon, f) \geqslant C_n\, \sigma(r)\, \frac{(r+\varepsilon)^{2n-2} - r^{2n-2}}{r^{2n-2}(r+\varepsilon)^{2n-2}}$$

ou encore :

$$\sigma(r) \leqslant C(\varepsilon)\,(1+r)^{2n-1}\, T(r+\varepsilon, f)$$

$$\sigma(r) \leqslant C(\varepsilon)\,(1+r)^{2n-1} \exp[\varphi(r+\varepsilon)]$$

D'après le théorème 2, il existe h_1 telle que :

$$\frac{h_1}{h} \quad \text{et} \quad \frac{h}{h_1} \quad \text{soient entières}$$

et : $\operatorname{Log}|h_1(z)| \leqslant C(\varepsilon, \alpha)\,(1+r)^{3n+2+\alpha} \exp[\varphi(r+2\varepsilon)]$

en augmentant un peu la constante $C(\varepsilon, \alpha)$ on a d'après (2) :

$$T(r, h_1) \leqslant C(\varepsilon, \alpha)\,(1+r)^{3n+2+\alpha} \exp[\varphi(r+2\varepsilon)]$$

Posons : $g_1 = h_1 f$ g_1 est entière et on a d'après (1) :

$$T(r, g_1) \leqslant T(r, h_1) + T(r, f) \leqslant C(\varepsilon, \alpha)\,(1+r)^{3n+2+\alpha} \exp[\varphi(r+2\varepsilon)]$$

D'après le lemme 2 on a donc :

$$\operatorname{Log}|g_1(z)| \leqslant C(\varepsilon, \alpha)\,(1+r)^{5n+2+\alpha} \exp[\varphi(r+3\varepsilon)]$$

Comme : $g_1 = \dfrac{h_1}{h} g$ $(g_1)_z$ et $(h_1)_z$ sont premiers entre eux.

Remarque. – Le théorème 3 est intéressant dans le cas de fonctions f à croissance rapide. Lorsque f est d'ordre fini, voir P. Lelong [1] et Stoll [12].

Lorsque f est à croissance lente, voir B.A. Taylor [13] et Kujala [14].

BIBLIOGRAPHIE

[1] P. Lelong, *J. Anal. Math.* Jerusalem, 12, 1964, 365-407.

[2] P. Lelong, *Bull. Soc. Math.* France, 85, 1957, 239-262.

[3] P. Lelong, Fonctions plurisousharmoniques et formes différentielles positives. Cours fait au C.I.M.E., Varenna, 1963.

[4] P. Lelong, Fonctions entières de type exponentiel. Séminaire d'Eté, Montréal, 1967.

[5] L. Hörmander, Complex Analysis in Several Variables, Van Nostrand, New Jersey, 1966.

[6] H. Cartan, Formes différentielles, Hermann, Paris, 1967.

[7] P. Dolbeault, Formes différentielles et cohomologie sur une variété analytique complexe I. *Ann. of Math.* 64, 1956, 83-130.

[8] A. Aeppli, On the cohomology structure of Stein manifolds, Proc. of the Conference on Complex Analysis, Minneapolis, 1964. Springer-Verlag, New York, 1965, 58-70.

[9] O. Blumenthal, Principes de la théorie des fonctions entières d'ordre infini, Gauthier-Villars, Paris, 1910.

[10] A. Denjoy, Articles et Mémoires, Gauthier-Villars, Paris, 1955, 7-136.

[11] L.A. Rubel et B.A. Taylor, *Bull. Soc. Math.* France 96, 1968, 53-96.

[12] W. Stoll, About entire and meromorphic functions of exponential type. *Proceedings of Symposia in Pure Mathematics,* Vol. XI. Providence, Rhode Island, 1968, 392-430.

[13] B.A. Taylor, The fields of quotients of some rings of entire functions. *Proc. Symp. in Pure Math.* Vol. XI. Providence, Rhode Island, 1968, 468-474.

[14] R.O. Kujala, Functions of finite λ-type in several complex variables. *Bull. Amer. Math. Soc.* Vol. 75, Tome 1, 1969, 104-107.

[15] H. Skoda, *C.R. Acad. Sci.* Paris Sér. A-B 270 (1970), A512-A515.

Manuscrit reçu le 29 juin 1970

Henri Skoda
Département de Mathématiques
Parc Valrose – 06 – Nice