



ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

Yang CAO

**Sous-groupe de Brauer invariant pour un groupe
algébrique connexe quelconque**

Tome 74, n° 2 (2024), p. 627-661.

<https://doi.org/10.5802/aif.3590>

Article mis à disposition par son auteur selon les termes de la licence
CREATIVE COMMONS ATTRIBUTION – PAS DE MODIFICATION 3.0 FRANCE



<http://creativecommons.org/licenses/by-nd/3.0/fr/>



Les *Annales de l'Institut Fourier* sont membres du
Centre Mersenne pour l'édition scientifique ouverte

www.centre-mersenne.org

e-ISSN : 1777-5310

SOUS-GROUPE DE BRAUER INVARIANT POUR UN GROUPE ALGÈBRE CONNEXE QUELCONQUE

par Yang CAO

RÉSUMÉ. — Dans cet article, pour une variété lisse X munie d'une action d'un groupe algébrique connexe G (non nécessairement linéaire), on introduit la notion de sous-groupe de Brauer invariant et la notion d'obstruction de Brauer–Manin étale invariante. Ensuite, on montre que cette obstruction équivaut à l'obstruction de Brauer–Manin étale. Ceci généralise la notion principale et le résultat clé de l'article précédent de l'auteur et ceci généralise aussi un résultat de B. Creutz.

ABSTRACT. — In this paper, for a smooth variety X equipped with an action of a connected algebraic group G (not necessary linear), we introduce the notion of invariant Brauer sub-group and the notion of invariant étale Brauer–Manin obstruction. Then we prove that this obstruction is equivalent to the étale Brauer–Manin obstruction. This extends the main notion and the key result of author's previous article and this also extends a result of B. Creutz.

1. Introduction

Soit k un corps de nombres. On note Ω_k l'ensemble des places du corps de nombres k et \mathbf{A}_k l'anneau des adèles de k . Pour chaque $v \in \Omega_k$, on note k_v le complété de k en v . Pour une k -variété X , on note $X(\mathbf{A}_k)$ l'ensemble des points adéliques de X (voir [10]).

Soit X une k -variété algébrique et $\text{Br}(X)$ son groupe de Brauer cohomologique. Pour B sous-ensemble de $\text{Br}(X)$, on définit

$$X(\mathbf{A}_k)^B = \left\{ (x_v)_{v \in \Omega_k} \in X(\mathbf{A}_k) : \sum_{v \in \Omega_k} \text{inv}_v(\xi(x_v)) = 0 \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}, \forall \xi \in B \right\}.$$

Comme l'a remarqué Manin, la théorie du corps de classes donne $X(k) \subseteq X(\mathbf{A}_k)^B$. Ceci définit une obstruction au principe de Hasse pour X , appelée *obstruction de Brauer–Manin*.

Mots-clés : Groupe algébrique, groupe de Brauer, principe de Hasse.
Classification Mathématique (2020) : 14G12.

Depuis 1970s, divers auteurs (Manin, Colliot-Thélène, Sansuc, Skorobogatov, Harari, Demarche, Poonen, Xu et l’auteur) ont décrit diverses obstructions au principe de Hasse et montré que l’ensemble de Brauer–Manin étale $X(\mathbf{A}_k)^{\text{ét,Br}}$ (voir (1.2)) est le plus fin (voir [4, 5, 13, 16, 26]). En particulier, l’auteur a montré l’équivalence entre l’obstruction de descente et l’obstruction de descente itérée ([4, Thm. 1.2], une question ouverte de Poonen). Deux étapes clés de la démonstration de [4, Thm. 1.2] sont de définir l’ensemble de Brauer–Manin étale invariant $X(\mathbf{A}_k)^{G\text{-ét,Br}_G}$ ([4, (1.2)]) et de montrer ([4, Thm. 1.4]) :

$$(1.1) \quad X(\mathbf{A}_k)^{G\text{-ét,Br}_G} = X(\mathbf{A}_k)^{\text{ét,Br}},$$

où G est un groupe linéaire connexe et X est une G -variété lisse.

Dans cette article, on généralise cette notion dans le cas où G est un groupe algébrique connexe quelconque (pas forcément linéaire) : on définit $X(\mathbf{A}_k)^{G\text{-ét,Br}_G}$ dans ce cas et le résultat principal de cet article (théorème 1.3) est une généralisation de (1.1). De plus, le théorème 1.3 généralise un résultat de B. Creutz [11, Thm. 2] sur les toiseurs des variétés abéliennes (voir le corollaire 1.4).

Donnons maintenant des énoncés précis.

DÉFINITION 1.1. — *Soient G un k -groupe algébrique connexe et (X, ρ) une G -variété lisse connexe.*

- (1) *Le sous-groupe cohomologique invariant de degré i de X est le sous-groupe :*

$$H_G^i(X, \mu_\infty) := \{b \in H^i(X, \mu_\infty) : (\rho^*(b) - p_2^*(b)) \in p_1^*H^i(G, \mu_\infty)\},$$

où $i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, $G \times X \xrightarrow{p_1} G$, $G \times X \xrightarrow{p_2} X$ sont les projections, et $G \times X \xrightarrow{\rho} X$ est l’action de G .

- (2) *Le sous-groupe de Brauer G -invariant de X est le sous-groupe*

$$\text{Br}_G(X) := \{a \in \text{Br}(X) : (\rho^*(a) - p_2^*(a)) \in p_1^*\text{Br}(G)\}$$

et le sous-groupe de Brauer G -invariant amélioré est le sous groupe

$$\text{Br}'_G(X) := \text{Im} (H_G^2(X, \mu_\infty) \subset H^2(X, \mu_\infty) \rightarrow \text{Br}(X)) \subset \text{Br}(X).$$

Ce sous-groupe vérifie des propriétés espérées. Par définition, $\text{Br}'_G(X) \subset \text{Br}_G(X)$. Dans le cas où $X = G$, on a $\text{Br}_{2/3}(G) = \text{Br}'_G(G)$ (proposition 3.6(2)) et dans le cas où X est géométriquement intègre, on a : $\text{Br}_{2/3}(X) \subset \text{Br}'_G(X)$ (proposition 3.6(1)), où $\text{Br}_{2/3}(X)$ est défini dans la définition 2.1. Si G est linéaire, on a $\text{Br}'_G(X) = \text{Br}_G(X)$ (corollaire 3.7), mais il existe une variété abélienne A telle que $\text{Br}'_A(A) \neq \text{Br}_A(A)$ (cf. [22, Thm. 1.2, 1.3]). Dans le cas général, $H_G^2(X, \mu_\infty)$ s’insère dans des suites

exactes et ceci implique des propriétés importantes de $\text{Br}'_G(X)$ (voir Sections 4, 5). Pour $\text{Br}_G(X)$, l'auteur conjecture qu'il n'existe pas de propriété comme les corollaires 4.7 et 5.5.

Dans cet article, tout torseur est un torseur à droite. Soient F un k -groupe algébrique et $f : Y \rightarrow X$ un F -torseur. Pour tout 1-cocycle $\sigma \in Z^1(k, F)$, on note F_σ , respectivement $f_\sigma : Y_\sigma \rightarrow X$ le tordu du k -groupe F , respectivement du torseur f , par le 1-cocycle σ . Alors f_σ est un F_σ -torseur. La classe d'isomorphisme du k -groupe F_σ , respectivement du torseur f_σ , ne dépend que de la classe de σ dans $H^1(k, F)$. Par abus de notation, étant donnée une classe $[\sigma] \in H^1(k, F)$, on note $F_\sigma = F_{[\sigma]}$ et $f_\sigma = f_{[\sigma]}$.

Pour une variété lisse X , Skorobogatov ([27]) et Poonen définissent ([23, §3.3]) l'ensemble suivant

$$(1.2) \quad X(\mathbf{A}_k)^{\text{ét, Br}} := \bigcap_{\substack{f: Y \xrightarrow{F} X \\ F \text{ fini}}} \bigcup_{\sigma \in H^1(k, F)} f_\sigma(Y_\sigma(\mathbf{A}_k)^{\text{Br}(Y_\sigma)}),$$

et on a une inclusion $X(k) \subset X(\mathbf{A}_k)^{\text{ét, Br}}$. Ceci définit une obstruction au principe de Hasse pour X , appelée *obstruction de Brauer–Manin étale*.

DÉFINITION 1.2. — Soient G un k -groupe algébrique connexe et X une G -variété lisse.

- (1) Le sous-groupe de Brauer G -invariant amélioré (resp. le sous-groupe de Brauer G -invariant) de X est le sous-groupe $\text{Br}'_G(X) \subset \text{Br}(X)$ (resp. $\text{Br}_G(X) \subset \text{Br}(X)$) des éléments α vérifiant $\alpha|_{X'} \in \text{Br}'_G(X')$ (resp. $\alpha|_{X'} \in \text{Br}_G(X')$) pour toute composante connexe X' de X .
- (2) Soit F un k -groupe fini. Un F -torseur $Y \xrightarrow{f} X$ est G -compatible s'il existe une action de G sur Y telle que f soit un G -morphisme.

D'après [4, Prop. 3.3], l'action de G sur Y vérifiant les conditions ci-dessus est unique et le F_σ -torseur f_σ est aussi G -compatible pour tout $\sigma \in H^1(k, F)$. On définit les variantes de $X(\mathbf{A}_k)^{\text{ét, Br}}$ suivantes :

$$(1.3) \quad X(\mathbf{A}_k)^{G\text{-ét, Br}_G} := \bigcap_{\substack{f: Y \xrightarrow{F} X \\ F \text{ fini}}} \bigcup_{\substack{G\text{-compatible,} \\ \sigma \in H^1(k, F)}} f_\sigma(Y_\sigma(\mathbf{A}_k)^{\text{Br}_G(Y_\sigma)}).$$

et

$$(1.4) \quad X(\mathbf{A}_k)^{G\text{-ét, Br}'_G} := \bigcap_{\substack{f: Y \xrightarrow{F} X \\ F \text{ fini}}} \bigcup_{\substack{G\text{-compatible,} \\ \sigma \in H^1(k, F)}} f_\sigma(Y_\sigma(\mathbf{A}_k)^{\text{Br}'_G(Y_\sigma)}).$$

Alors $X(k) \subset X(\mathbf{A}_k)^{\text{ét,Br}} \subset X(\mathbf{A}_k)^{G\text{-ét,Br}_G} \subset X(\mathbf{A}_k)^{G\text{-ét,Br}'_G}$. Ceci définit des obstructions au principe de Hasse pour X , appelée *obstruction de Brauer–Manin étale invariante*.

Le théorème suivant généralise [4, Thm. 1.4].

THÉORÈME 1.3. — *Soient G un groupe algébrique connexe et X une G -variété lisse. Alors*

$$X(\mathbf{A}_k)^{\text{ét,Br}} = X(\mathbf{A}_k)^{G\text{-ét,Br}_G} = X(\mathbf{A}_k)^{G\text{-ét,Br}'_G}.$$

Dans le cas où X est un G -espace homogène à stabilisateur géométrique connexe, le théorème 1.3 implique $X(\mathbf{A}_k)^{\text{Br}'_G(X)} = X(\mathbf{A}_k)^{\text{ét,Br}}$ (corollaire 7.3). Si $X = G/H$ avec $H \subset G$ un sous-groupe connexe, dans [1, Thm. 1.4], Borovoi et Demarche établissent l’approximation forte par rapport à $\text{Br}_1(X, G)$ hors des places archimédiens pour X (avec des conditions classiques), où $\text{Br}_1(X, G) := \ker(\text{Br}(X) \rightarrow \text{Br}(G_{\bar{k}}))$. En fait, d’après (4.5), on a $\text{Br}'_G(X) \subset \text{Br}_1(X, G)$, mais ces deux groupes ne sont pas égaux en général : par exemple, si $X = G$ et G est une variété abélienne vérifiant $H^1(k, \text{NS}(G_{\bar{k}})) \neq 0$, on a $\text{Br}'_G(G) = \text{Br}_{2/3}(G)$, $\text{Br}_1(X, G) = \text{Br}_1(G)$ et $\text{Br}_{2/3}(G) \neq \text{Br}_1(G)$, où $\text{NS}(G_{\bar{k}})$ est le groupe de Néron–Severi géométrique de G . Donc notre résultat affirme que $\text{Br}'_G(X)$ est suffisant pour établir l’approximation forte, qui renforce le résultat de Borovoi et Demarche.

Un cas spécial du corollaire 7.3 est (en utilisant la proposition 3.6(2)) :

COROLLAIRE 1.4. — *Soient G un groupe algébrique connexe et X un G -torseur. Alors*

$$X(\mathbf{A}_k)^{\text{Br}_{2/3}(X)} = X(\mathbf{A}_k)^{\text{ét,Br}}.$$

Si G est une variété abélienne, on a $\text{Br}_{2/3}(X) = \text{Br}_{1/2}(X)$ (Corollaire 2.3), où $\text{Br}_{1/2}(X)$ est défini dans [30, pp. 378]. Donc

$$X(\mathbf{A}_k)^{\text{Br}_{1/2}(X)} = X(\mathbf{A}_k)^{\text{Br}(X)} = X(\mathbf{A}_k)^{\text{ét,Br}},$$

ce qui généralise [11, Thm. 2], où Creutz montre que $X(\mathbf{A}_k)^{\text{Br}_{1/2}(X)} = X(\mathbf{A}_k)^{\text{Br}(X)}$.

Donnons maintenant la structure de l’article. À la section 2, on introduit la notion $\text{Br}_{2/3}$ tel que $\text{Br}_{1/2} \subset \text{Br}_{2/3} \subset \text{Br}_1$ et on établit le lien de $\text{Br}_{2/3}(X)$ avec l’existence des toseurs sous un k -groupe fini commutatif. Section 3, on établit des propriétés fondamentales du sous-groupe de Brauer G -invariant et son lien avec $\text{Br}_{2/3}$. À la Section 4, inspirée par la suite exacte de Sansuc, on établit la suite exacte correspondante pour un toseur sous un k -groupe non linéaire. Comme conséquence, on montre des suites exactes techniques à la section 5. Section 6, on établit la méthode de descente des points adéliques orthogonaux aux sous-groupes de Brauer

invariants pour un toseur sous un k -groupe de type multiplicatif. Ensuite, on montre le théorème 1.3 à la section 7.

Conventions et notations

Soit k un corps quelconque de caractéristique 0. On note \bar{k} une clôture algébrique et $\Gamma_k := \text{Gal}(\bar{k}/k)$.

Tous les groupes de cohomologie sont des groupes de cohomologie étale. Définissons le faisceau étale $\mu_\infty := \text{colim}_n \mu_n$.

Une k -variété X est un k -schéma séparé de type fini. Pour X une telle variété, on note $k[X]$ son anneau des fonctions globales, $k[X]^\times$ son groupe des fonctions inversibles, $\text{Pic}(X) := H^1_{\text{ét}}(X, \mathbb{G}_m)$ son groupe de Picard et $\text{Br}(X) := H^2_{\text{ét}}(X, \mathbb{G}_m)$ son groupe de Brauer. Notons

$$\text{Br}_1(X) := \text{Ker}[\text{Br}(X) \rightarrow \text{Br}(X_{\bar{k}})] \quad \text{et} \quad \text{Br}_a(X) := \text{Br}_1(X)/\text{Im Br}(k).$$

Le groupe $\text{Br}_1(X)$ est le sous-groupe ‘algébrique’ du groupe de Brauer de X . Si X est intègre, on note $k(X)$ son corps des fonctions rationnelles et $\pi_1(X, \bar{x})$ (ou $\pi_1(X)$) son groupe fondamental étale, où \bar{x} est un point géométrique de X . Soit $\pi_1(X_{\bar{k}})^{ab}$ le quotient maximal abélien de $\pi_1(X_{\bar{k}})$. Alors $\pi_1(X_{\bar{k}})^{ab}$ est un Γ_k -module.

Un k -groupe algébrique G est une k -variété qui est un k -schéma en groupes. On note e_G l’unité de G et G^* le groupe des caractères de $G_{\bar{k}}$. C’est un module galoisien de type fini.

Un k -groupe fini F est un k -groupe algébrique qui est fini sur k . Dans ce cas, F est déterminé par le Γ_k -groupe $F(\bar{k})$. Pour toute k -variété lisse X , on a un isomorphisme canonique ([15, §XI.5]) :

$$(1.5) \quad \begin{aligned} &H^1(\pi_1(X), F(\bar{k})) \xrightarrow{\sim} H^1(X, F) \\ &\text{et donc } H^1(X_{\bar{k}}, F) \cong \text{Hom}_{\text{cont}}(\pi_1(X_{\bar{k}}), F(\bar{k}))/\sim \end{aligned}$$

où l’action de $\pi_1(X)$ sur $F(\bar{k})$ est induite par celle de Γ_k et \sim est induite par la conjugaison.

Soit G un k -groupe algébrique. Une G -variété (X, ρ) (ou X) est une k -variété X munie d’une action à gauche $G \times_k X \xrightarrow{\rho} X$. Un k -morphisme de G -variétés est appelé G -morphisme s’il est compatible avec l’action de G .

2. Préliminaires sur $\text{Br}_{2/3}$

Dans toute cette section, k est un corps quelconque de caractéristique 0. Sauf mention explicite du contraire, une variété est une k -variété.

Soient X une variété lisse et $\pi : X \rightarrow \text{Spec } k$. Dans cette section, on suit l'idée de Stoll (la notion de $\text{Br}_{1/2}(X)$ pour X projective dans [30, pp. 378]) et on définit $\text{Br}_{2/3}(X)$ (définition 2.1) dans le cas plus général (on a $\text{Br}_{1/2} \subset \text{Br}_{2/3} \subset \text{Br}_1$). Ensuite, on établit le lien de $\text{Br}_{2/3}(X)$ avec l'existence des torseurs sous un k -groupe fini commutatif (proposition 2.2) et avec $H^2(X, \mu_\infty)$ (proposition 2.4).

On définit :

$$(2.1) \quad H_1^2(X, \mu_\infty) := \text{Ker}(H^2(X, \mu_\infty) \rightarrow H^2(X_{\bar{k}}, \mu_\infty)).$$

Par définition, $H_1^2(X, \mu_\infty)$ est fonctoriel en X .

En fait, on peut définir

$$(2.2) \quad \text{Br}_{2/3}(X) := \text{Im}(H_1^2(X, \mu_\infty) \subset H^2(X, \mu_\infty) \rightarrow \text{Br}(X)).$$

Mais, pour faire lien avec le type d'un torseur, on donne la définition 2.1 ci-dessous et montre que les deux définitions sont le mêmes dans la proposition 2.4.

Dans [17], Harari et Skorobogatov définissent

$$\begin{aligned} KD(X) &:= (\tau_{\leq 1} R\pi_* \mathbb{G}_m)[1] \in D^{[-1,0]}(k), \\ KD'(X) &:= \text{Cone}(\mathbb{G}_{m,k}[1] \rightarrow KD(X)) \end{aligned}$$

et établissent la suite exacte :

$$(2.3) \quad H^1(k, S) \rightarrow H^1(X, S) \xrightarrow{\chi} \text{Hom}_{D^+(k)}(S^*, KD'(X)) \xrightarrow{\partial} H^2(k, S)$$

pour tout k -schéma en groupe de type multiplicatif S . L'homomorphisme χ est appelé *le type*.

D'après [17, P. 5 Remark], on a

$$\text{Br}_1(X) \cong H^1(k, KD(X)) \quad \text{et} \quad \mathcal{H}^0(KD'(X)) \cong \mathcal{H}^0(KD(X)) \cong \text{Pic}(X_{\bar{k}}).$$

Soient $\text{Pic}(X_{\bar{k}})_{\text{tor}}$ (resp. $\text{Pic}(X_{\bar{k}})_{\text{free}}$) le sous-groupe torsion maximal (resp. le quotient libre maximal) de $\text{Pic}(X_{\bar{k}})$. Ainsi on a une suite exacte de modules galoisiens :

$$0 \rightarrow \text{Pic}(X_{\bar{k}})_{\text{tor}} \rightarrow \text{Pic}(X_{\bar{k}}) \rightarrow \text{Pic}(X_{\bar{k}})_{\text{free}} \rightarrow 0.$$

Ceci induit

$$(2.4) \quad \phi : KD(X) \rightarrow \text{Pic}(X_{\bar{k}})_{\text{free}}, \quad \phi' : KD'(X) \rightarrow \text{Pic}(X_{\bar{k}})_{\text{free}}$$

et $\phi_* : H^1(k, KD(X)) \rightarrow H^1(k, \text{Pic}(X_{\bar{k}})_{\text{free}})$.

DÉFINITION 2.1. — Le sous-groupe $\text{Br}_{2/3}(X) \subset \text{Br}(X)$ d'une variété lisse X est :

- (1) si X est connexe, le groupe $\text{Br}_{2/3}(X) := \text{Ker}(\phi_*) \subset \text{Br}_1(X)$;

(2) en général, le groupe $\text{Br}_{2/3}(X) \subset \text{Br}(X)$ des éléments α vérifiant $\alpha|_{X'} \in \text{Br}_{2/3}(X')$ pour toute composante connexe X' de X .

Par définition, $\text{Br}_{2/3}(X)$ est fonctoriel en X . En fait, il contrôle l'existence des toseurs sous un k -groupe fini commutatif (la proposition 2.2 suivante).

PROPOSITION 2.2. — Soient k un corps de nombres, S un k -groupe fini commutatif et X une k -variété lisse géométriquement intègre. Si $X(\mathbf{A}_k)^{\text{Br}_{2/3}(X)} \neq \emptyset$, alors χ dans (2.3) est surjectif.

Démonstration. — Pour tout $\lambda \in \text{Hom}_{D+(k)}(S^*, KD'(X))$, on a

$$\phi' \circ \lambda \in \text{Hom}_k(S^*, \text{Pic}(X_{\bar{k}})_{\text{free}}) = 0,$$

où ϕ' est défini dans (2.4). Donc, pour tout $a \in H^1(k, S^*)$, on a $\lambda_*(a) \in \text{Br}_{2/3}(X)/\text{Im Br}(k)$. D'après [17, Thm. 3.5], on a $\partial(\lambda) \in \text{III}^2(k, S)$ et $\langle \partial(\lambda), a \rangle_{PT} = 0$ pour tout $a \in \text{III}^1(k, S^*)$, où $\langle, \rangle_{PT}: \text{III}^2(k, S) \times \text{III}^1(k, S^*) \rightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ est l'accouplement de Poitou–Tate, qui est non dégénéré. Donc $\partial(\lambda) = 0$ et $\lambda \in \text{Im}(\chi)$. □

COROLLAIRE 2.3. — Soit X une variété projective lisse géométriquement intègre. Si le groupe de Néron–Severi $\text{NS}(X_{\bar{k}})$ est sans torsion (par exemple, si X est un toseur sous une variété abélienne), alors $\text{Br}_{2/3}(X) = \text{Br}_{1/2}(X)$, où $\text{Br}_{1/2}(X)$ est défini dans [30, pp. 378].

Démonstration. — Dans ce cas, $\text{Pic}^0(X_{\bar{k}})_{\text{tor}} = \text{Pic}(X_{\bar{k}})_{\text{tor}}$ et $\text{Pic}^0(X_{\bar{k}})_{\text{free}}$ est uniquement divisible. Donc $H^1(k, \text{Pic}^0(X_{\bar{k}})_{\text{free}}) = 0$ et

$$\begin{aligned} \text{Im}(H^1(k, \text{Pic}^0(X_{\bar{k}})) \rightarrow H^1(k, \text{Pic}(X_{\bar{k}}))) \\ = \text{Ker}(H^1(k, \text{Pic}(X_{\bar{k}})) \rightarrow H^1(k, \text{Pic}(X_{\bar{k}})_{\text{free}})), \end{aligned}$$

d'où le résultat. □

L'inclusion canonique $\mu_\infty \subset \mathbb{G}_m$ induit

$$\psi : \tau_{\leq 1} R\pi_* \mu_\infty \rightarrow \tau_{\leq 1} R\pi_* \mathbb{G}_m \in D^+(k)$$

et donc

$$\begin{aligned} \psi_{*,2} : H_1^2(X, \mu_\infty) \cong H^2(k, \tau_{\leq 1} R\pi_* \mu_\infty) \\ \rightarrow H^2(k, \tau_{\leq 1} R\pi_* \mathbb{G}_m) \cong \text{Br}_1(X) \subset \text{Br}(X). \end{aligned}$$

PROPOSITION 2.4. — Soit X une variété lisse géométriquement intègre. Alors $\text{Br}_{2/3}(X) = \text{Im}(\psi_{*,2})$ et on a une suite exacte :

$$\text{Pic}(X) \rightarrow (\text{Pic}(X_{\bar{k}})_{\text{free,ndiv}})^{\Gamma_k} \rightarrow H_1^2(X, \mu_\infty) \xrightarrow{\psi_{*,2}} \text{Br}_{2/3}(X) \rightarrow 0,$$

où $\text{Pic}(X_{\bar{k}})_{\text{free,div}} \subset \text{Pic}(X_{\bar{k}})_{\text{free}}$ est le sous-groupe divisible maximal et

$$\text{Pic}(X_{\bar{k}})_{\text{free,ndiv}} := \text{Pic}(X_{\bar{k}})_{\text{free}} / \text{Pic}(X_{\bar{k}})_{\text{free,div}}.$$

Démonstration. — Soit $D := \text{Cone}(\psi)$. Par définition, $\mathcal{H}^i(D) = 0$ pour $i \neq -1, 0, 1$. On a un diagramme commutatif de suites exactes (compatible pour tout n) :

$$\begin{array}{ccccccccc} \mu_n & \longrightarrow & \bar{k}[X]^\times & \xrightarrow{n\cdot} & \bar{k}[X]^\times & \longrightarrow & H^1(X_{\bar{k}}, \mu_n) & \longrightarrow & \text{Pic}(X_{\bar{k}}) \\ \downarrow & & \downarrow = & & \downarrow m\cdot & & \downarrow & & \downarrow = \\ \mu_{mn} & \longrightarrow & \bar{k}[X]^\times & \xrightarrow{mn\cdot} & \bar{k}[X]^\times & \longrightarrow & H^1(X_{\bar{k}}, \mu_{mn}) & \longrightarrow & \text{Pic}(X_{\bar{k}}) \\ \downarrow & & \downarrow = & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow = \\ \mu_\infty & \hookrightarrow & \bar{k}[X]^\times & \longrightarrow & \mathcal{H}^0(D) & \longrightarrow & H^1(X_{\bar{k}}, \mu_\infty) & \longrightarrow & \text{Pic}(X_{\bar{k}}) \twoheadrightarrow \mathcal{H}^1(D) \end{array}$$

Alors $\mathcal{H}^{-1}(D) = 0$, $\mathcal{H}^1(D) \cong \text{Pic}(X_{\bar{k}})_{\text{free}}$. Puisque le passage à la limite directe est exact, on a $\mathcal{H}^0(D) \cong \varinjlim_{n \in \mathbb{Z}_{>0}} I_n$ avec $I_n = \bar{k}[X]^\times$ pour tout n et $I_n \rightarrow I_{mn} : \bar{k}[X]^\times \rightarrow \bar{k}[X]^\times : x \mapsto x^m$. Donc $\mathcal{H}^0(D) \cong \bar{k}[X]^\times \otimes \mathbb{Q}$ et $H^i(k, \mathcal{H}^0(D)) = 0$ pour $i \geq 1$. Donc

$$H^1(k, D) \cong (\text{Pic}(X_{\bar{k}})_{\text{free}})^{\Gamma_k} \quad \text{et} \quad H^2(k, D) \cong H^1(k, \text{Pic}(X_{\bar{k}})_{\text{free}}).$$

En appliquant $H^i(k, -)$ à

$$\tau_{\leq 1} R\pi_* \mu_\infty \rightarrow \tau_{\leq 1} R\pi_* \mathbb{G}_m \rightarrow D \xrightarrow{+1},$$

nous obtenons $\text{Im}(\psi_{*,2}) = \text{Ker}(\phi_*)$ et la suite exacte :

$$\text{Pic}(X) \xrightarrow{\phi_1} (\text{Pic}(X_{\bar{k}})_{\text{free}})^{\Gamma_k} \rightarrow H_1^2(X, \mu_\infty) \xrightarrow{\psi_{*,2}} \text{Br}_{2/3}(X) \rightarrow 0.$$

Puisque $\text{Pic}(X_{\bar{k}})_{\text{free,div}}$ est uniquement divisible, le groupe $(\text{Pic}(X_{\bar{k}})_{\text{free,div}})^{\Gamma_k}$ est aussi uniquement divisible et on a une suite exacte :

$$0 \rightarrow (\text{Pic}(X_{\bar{k}})_{\text{free,div}})^{\Gamma_k} \rightarrow (\text{Pic}(X_{\bar{k}})_{\text{free}})^{\Gamma_k} \rightarrow (\text{Pic}(X_{\bar{k}})_{\text{free,ndiv}})^{\Gamma_k} \rightarrow 0.$$

Puisque $H_1^2(X, \mu_\infty)$ est un groupe de torsion, on a $(\text{Pic}(X_{\bar{k}})_{\text{free,div}})^{\Gamma_k} \subset \text{Im}(\phi_1)$, d'où le résultat. □

COROLLAIRE 2.5. — Soit X une variété lisse géométriquement intègre. Soit K/k une extension de corps telle que k soit algébriquement clos dans K . Alors

$$\text{Br}_{2/3}(X) / \text{Im Br}(k) \rightarrow \text{Br}_{2/3}(X_K) / \text{Im Br}(K)$$

est injectif.

Démonstration. — Puisque $H^2(k, \mu_\infty) \cong \text{Br}(k)$, la proposition 2.4 donne un diagramme de suites exactes :

$$\begin{CD} (\text{Pic}(X_{\bar{k}})_{\text{free,ndiv}})^{\Gamma_k} @>>> H_1^2(X, \mu_\infty) / \text{Im } H^2(k, \mu_\infty) @>>> \text{Br}_{2/3}(X) / \text{Im } \text{Br}(k) @>>> 0 \\ @V \phi_1 VV @V \phi_2 VV @V \phi_3 VV \\ (\text{Pic}(X_{\bar{K}})_{\text{free,ndiv}})^{\Gamma_K} @>>> H_1^2(X_K, \mu_\infty) / \text{Im } H^2(K, \mu_\infty) @>>> \text{Br}_{2/3}(X_K) / \text{Im } \text{Br}(K) @>>> 0. \end{CD}$$

La suite spectrale $E_2^{i,j} := H^i(k, H^j(X_{\bar{k}}, \mu_\infty)) \Rightarrow H^{i+j}(X, \mu_\infty)$ induit une suite exacte

$$H^2(k, \mu_\infty) \rightarrow H_1^2(X, \mu_\infty) \rightarrow H^1(k, H^1(X_{\bar{k}}, \mu_\infty)).$$

Puisque $H^1(X_{\bar{k}}, \mu_\infty) \cong H^1(X_{\bar{K}}, \mu_\infty)$ et l'homomorphisme $\text{Gal}(\bar{K}/K) \rightarrow \text{Gal}(\bar{k}/k)$ est surjectif, l'homomorphisme de inflation $H^1(k, H^1(X_{\bar{k}}, \mu_\infty)) \rightarrow H^1(K, H^1(X_{\bar{K}}, \mu_\infty))$ est injectif et donc ϕ_2 est injectif. Puisque $\text{Coker}(\text{Pic}(X_{\bar{k}}) \rightarrow \text{Pic}(X_{\bar{K}}))$ est uniquement divisible, on a $\text{Pic}(X_{\bar{k}})_{\text{free,ndiv}} \cong \text{Pic}(X_{\bar{K}})_{\text{free,ndiv}}$ et donc ϕ_1 est un isomorphisme. Ainsi ϕ_3 est injectif. \square

Soit G un groupe algébrique connexe. Notons $\pi : G \rightarrow \text{Spec } k$. On définit :

$$H_e^1(G, \mu_\infty) := \text{Ker}(H^1(G, \mu_\infty) \xrightarrow{e^*} H^1(k, \mu_\infty)),$$

$$H_{1,e}^2(G, \mu_\infty) := \text{Ker}(H_1^2(G, \mu_\infty) \xrightarrow{e^*} H^2(k, \mu_\infty))$$

et

$$\text{Br}_{2/3,e}(G) := \text{Ker}(\text{Br}_{2/3}(G) \xrightarrow{e^*} \text{Br}(k)).$$

Le point $e_G \in G(k)$ induit des isomorphismes : $\text{Br}_{2/3}(G) \cong \text{Br}(k) \oplus \text{Br}_{2/3,e}(G)$,

$$H^1(G, \mu_\infty) \cong H^1(k, \mu_\infty) \oplus H_e^1(G, \mu_\infty)$$

et

$$H_1^2(G, \mu_\infty) \cong H^2(k, \mu_\infty) \oplus H_{1,e}^2(G, \mu_\infty).$$

COROLLAIRE 2.6. — On a $H_e^1(G, \mu_\infty) \cong H^1(G_{\bar{k}}, \mu_\infty)^{\Gamma_k}$, $H_{1,e}^2(G, \mu_\infty) \cong H^1(k, H^1(G_{\bar{k}}, \mu_\infty))$ et une suite exacte :

$$\text{Pic}(G) \rightarrow (\text{Pic}(G_{\bar{k}})_{\text{free,ndiv}})^{\Gamma_k} \rightarrow H_{1,e}^2(G, \mu_\infty) \rightarrow \text{Br}_{2/3,e}(G) \rightarrow 0.$$

Démonstration. — Puisque $R^0\pi_*\mu_\infty \cong \mu_\infty$ et $R^1\pi_*\mu_\infty \cong H^1(G_{\bar{k}}, \mu_\infty)$, le point $e_G \in G(k)$ induit

$$\tau_{\leq 1} R\pi_*\mu_\infty \cong \mu_\infty \oplus (H^1(G_{\bar{k}}, \mu_\infty)[-1]).$$

La suite spectrale $E_2^{p,q} := H^p(k, R^q\pi_*\mu_\infty) \Rightarrow H^{p+q}(G, \mu_\infty)$ donne les isomorphismes dans l'énoncé. Puisque $H^2(k, \mu_\infty) \cong \text{Br}(k)$, la suite exacte découle de la proposition 2.4. \square

D'après la formule de Künneth (cf. [4, Prop. 2.6]), pour toute variété lisse géométriquement intègre X , l'inclusion $X \rightarrow G \times X : x \mapsto (e_G, x)$ induit

$$\tau_{\leq 1} R\pi_{G \times X, *}\mu_\infty \cong (\tau_{\leq 1} R\pi_{X, *}\mu_\infty) \oplus (H^1(G_{\bar{k}}, \mu_\infty)[-1]),$$

où $\pi_{G \times X} : G \times X \rightarrow \text{Spec } k$ et $\pi_X : X \rightarrow \text{Spec } k$. La suite spectrale

$$E_2^{p,q} := H^p(k, R^q\pi_{G \times X, *}\mu_\infty) \Rightarrow H^{p+q}(G \times X, \mu_\infty)$$

induit deux isomorphismes :

$$(2.5) \quad (p_1^*, p_2^*) : H_e^1(G, \mu_\infty) \oplus H^1(X, \mu_\infty) \cong H^1(G \times X, \mu_\infty)$$

et

$$(2.6) \quad (p_1^*, p_2^*) : H_{1,e}^2(G, \mu_\infty) \oplus H_1^2(X, \mu_\infty) \cong H_1^2(G \times X, \mu_\infty).$$

où $p_1 : G \times X \rightarrow G$, $p_2 : G \times X \rightarrow X$ sont deux projections.

S'il existe une action $\rho : G \times X \rightarrow X$, alors (2.5) induit un homomorphisme

$$(2.7) \quad \lambda_{H^1} : H^1(X, \mu_\infty) \rightarrow H_e^1(G, \mu_\infty)$$

tel que $p_1^* \circ \lambda_{H^1} = \rho^* - p_2^* : H^1(X, \mu_\infty) \rightarrow H^1(G \times X, \mu_\infty)$.

3. Propriétés du sous-groupe invariant

Dans toute cette section, k est un corps quelconque de caractéristique 0. Sauf mention explicite du contraire, une variété est une k -variété.

Soient G un groupe algébrique connexe et (X, ρ) une G -variété lisse géométriquement connexe. Soient $p_1 : G \times X \rightarrow G$, $p_2 : G \times X \rightarrow X$ deux projections. Dans cette section, on établit les propriétés fondamentales de $H_G^2(X, \mu_\infty)$ (proposition 3.5) et de $\text{Br}'_G(X)$ (proposition 3.6).

3.1. Groupe algébrique sur un corps algébriquement clos

Dans cette partie, pour tout groupe algébrique connexe G sur un corps algébriquement clos de caractéristique 0, en utilisant la cohomologie singulière de certain groupes de Lie (le théorème 3.1 ci-dessous), on montre que $H_G^2(G, \mu_\infty) = 0$ (le corollaire 3.4(1)).

Rappelons le théorème classique de Élie Cartan.

THÉORÈME 3.1 (Élie Cartan). — *Soit H un groupe de Lie connexe. Alors $\pi_2^{\text{top}}(H) = 0$ et les cohomologies singulières*

$$H_{\text{sing}}^i(H, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \cong H^i(\pi_1^{\text{top}}(H), \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \text{ pour } i = 1, 2.$$

Démonstration. — Pour $\pi_2^{\text{top}}(H)$, d'après [18, Thm. 6] (cf. [21, pp. 116, Rem. 2]), tout groupe de Lie connexe contient un sous-groupe de Lie compact comme une rétraction par déformation. Donc on peut supposer que H est compact et, dans ce cas, l'énoncé ci-dessus est exactement le [2, Prop. V.7.5].

Pour $H_{\text{sing}}^i(H, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$, soit $U \rightarrow H$ un revêtement universel. Alors $\pi_1^{\text{top}}(U) = \pi_2^{\text{top}}(U) = 0$. L'application de Hurewicz (cf. [29, Thm. A.5]) et le théorème des coefficients universels (cf. [29, Thm. A.15]) impliquent $H_{\text{sing}}^1(U, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) = H_{\text{sing}}^2(U, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) = 0$. Ensuite la suite spectrale de Leray–Serre (cf. [29, Thm. A.24]) implique l'énoncé. \square

Soit G un k -groupe algébrique connexe. Notons $p_1 : G \times X \rightarrow G$, $p_2 : G \times X \rightarrow X$ deux projections et $m : G \times G \rightarrow G$ la multiplication.

Dans le cas où $k = \mathbb{C}$, définissons :

$$H_{\text{sing},G}^2(G(\mathbb{C}), \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) := \{b \in H_{\text{sing}}^2(G(\mathbb{C}), \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) : (m^*(b) - p_2^*(b)) \in p_1^* H_{\text{sing}}^2(G(\mathbb{C}), \mathbb{Q}/\mathbb{Z})\}.$$

PROPOSITION 3.2. — Soit G un \mathbb{C} -groupe algébrique connexe. Alors

$$H_{\text{sing},G}^2(G(\mathbb{C}), \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) = 0.$$

Démonstration. — Soit $\pi := \pi_1^{\text{top}}(G)$. Pour tout \mathbb{Z} -module M , notons $M^D := \text{Hom}(M, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$. D'après le théorème 3.1 et le lemme 3.3 ci-dessous, on a l'inclusion naturelle

$$H_{\text{sing}}^2(G(\mathbb{C}), \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \cong H^2(\pi, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \subset (\pi \otimes_{\mathbb{Z}} \pi)^D,$$

et donc l'inclusion naturelle $H_{\text{sing}}^2((G \times G)(\mathbb{C}), \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \subset ((\pi \oplus \pi) \otimes_{\mathbb{Z}} (\pi \oplus \pi))^D$.

Notons $m_*, p_{1,*}, p_{2,*} : \pi_1^{\text{top}}(G \times G) \rightarrow \pi_1^{\text{top}}(G)$ les homomorphismes induits par m, p_1, p_2 . Puisque $m|_{e_G \times G} = \text{id}_G$ et $m|_{G \times e_G} = \text{id}_G$, on a $m_* : \pi \oplus \pi \rightarrow \pi : (a, b) \rightarrow a + b$ et

$$H_{\text{sing},G}^2(G(\mathbb{C}), \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) = \text{Ker}(m_* - p_{1,*} - p_{2,*} : H_{\text{sing}}^2(G(\mathbb{C}), \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \rightarrow H_{\text{sing}}^2((G \times G)(\mathbb{C}), \mathbb{Q}/\mathbb{Z})).$$

L'homomorphisme $m_* - p_{1,*} - p_{2,*} : (\pi \oplus \pi) \otimes_{\mathbb{Z}} (\pi \oplus \pi) \rightarrow \pi \otimes \pi$ envoie $(a, b) \otimes (c, d)$ sur

$$(a + b) \otimes (c + d) - a \otimes c - b \otimes d = a \otimes d + b \otimes c.$$

Donc l'application $m_* - p_{1,*} - p_{2,*}$ est surjective et

$$(m_* - p_{1,*} - p_{2,*})^D : (\pi \otimes_{\mathbb{Z}} \pi)^D \rightarrow ((\pi \oplus \pi) \otimes_{\mathbb{Z}} (\pi \oplus \pi))^D$$

est injective. Ainsi $m_* - p_{1,*} - p_{2,*}$ est injective et $H_{\text{sing},G}^2(G(\mathbb{C}), \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) = 0$. \square

LEMME 3.3.

(1) Soient π^1, π^2 deux groupes. Alors

$$H^2(\pi^1, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \oplus H^2(\pi^2, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \oplus [((\pi^1)^{ab} \otimes (\pi^2)^{ab})^D] \cong H^2(\pi^1 \times \pi^2, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}),$$

où $(-)^{ab}$ est le quotient abélien maximal.

(2) Soit π un groupe abélien de type fini. Alors $H^1(\pi, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \cong \pi^D$ et on a une inclusion naturelle $H^2(\pi, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \subset (\pi \otimes_{\mathbb{Z}} \pi)^D$.

Démonstration. — Pour tout \mathbb{Z} -module M , notons $M^D := \text{Hom}(M, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$.

Soit π un groupe. D’après [31, Thm. 6.1.11], on a $H_1(\pi, \mathbb{Z}) \cong \pi/[\pi, \pi] \cong (\pi)^{ab}$. D’après [31, Exer. 6.1.5], pour tout $i \geq 0$, on a $H^i(\pi, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \cong H_i(\pi, \mathbb{Z})^D$. Alors $H^1(\pi, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \cong (\pi^{ab})^D$.

D’après [31, Prop. 6.1.13], on a : $H_1(\pi^1, \mathbb{Z}) \oplus H_1(\pi^2, \mathbb{Z}) \cong H_1(\pi^1 \times \pi^2, \mathbb{Z})$ et

$$H_2(\pi^1, \mathbb{Z}) \oplus H_2(\pi^2, \mathbb{Z}) \oplus [H_1(\pi^1, \mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}} H_1(\pi^2, \mathbb{Z})] \cong H_2(\pi^1 \times \pi^2, \mathbb{Z}).$$

Donc $H^1(\pi^1, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \oplus H^1(\pi^2, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \cong H^1(\pi^1 \times \pi^2, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ et

$$\begin{aligned} H^2(\pi^1, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \oplus H^2(\pi^2, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \oplus [H_1(\pi^1, \mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}} H_1(\pi^2, \mathbb{Z})]^D \\ \cong H^2(\pi^1 \times \pi^2, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}), \end{aligned}$$

d’où l’on déduit (1).

Pour (2), on a $\pi \cong \bigoplus_{i=1}^r M_i$ avec $M_i \cong \mathbb{Z}/n_i$ pour certain $n_i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ (on a $M_i \cong \mathbb{Z}$ si $n_i = 0$). Ainsi $(\pi \otimes \pi)^D \cong \bigoplus_{1 \leq i \leq r, 1 \leq j \leq r} [(M_i \otimes M_j)^D]$. Puisque $H^2(\mathbb{Z}/n, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ ([31, Thm. 6.2.2 et Cor. 6.2.7]), d’après (1), on a

$$H^2(\pi, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \cong \bigoplus_{1 \leq i < j \leq r} [(M_i \otimes M_j)^D].$$

On a l’inclusion canonique

$$\bigoplus_{i < j} [(M_i \otimes M_j)^D] \subset \bigoplus_{i, j} [(M_i \otimes M_j)^D] : (m_{i,j})_{i < j} \mapsto (n_{i,j})_{i, j}$$

où $n_{i,j} = n_{j,i} = m_{i,j}$ pour $i < j$ et $n_{i,i} = 0$. Ceci donne (2). □

COROLLAIRE 3.4. — Soit k un corps algébriquement clos de caractéristique 0. Alors :

- (1) pour tout k -groupe algébrique connexe G , on a $H_G^2(G, \mu_\infty) = 0$;
- (2) pour toute suite exacte $1 \rightarrow G_1 \rightarrow G_2 \rightarrow T \rightarrow 1$ de k -groupes algébriques connexes avec T un tore, on a une suite exacte canonique :

$$0 \rightarrow H^1(T, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \rightarrow H^1(G_2, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \rightarrow H^1(G_1, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \rightarrow 0.$$

Démonstration. — Pour (1), par le passage à la limite (cf. [14, §1.10]), il existe un sous-corps $k_0 \subset k$ et un k_0 -groupe algébrique connexe G_0 tels que k_0 soit une extension de type fini sur \mathbb{Q} et $G_{0,k} \cong G$. Choisissons une immersion $\bar{k}_0 \subset \mathbb{C}$. D'après [20, Thm. III.3.12] et [20, Cor. VI.4.3], on a des isomorphismes naturels :

$$H^2(G, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \cong H^2(G_{0,\bar{k}_0}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \cong H^2(G_{0,\mathbb{C}}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \cong H^2_{\text{sing}}(G_{0,\mathbb{C}}(\mathbb{C}), \mathbb{Q}/\mathbb{Z}).$$

Puisque $\mu_\infty = \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$, on a $H^2_G(G, \mu_\infty) = H^2_{\text{sing}, G_{0,\mathbb{C}}}(G_{0,\mathbb{C}}(\mathbb{C}), \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$. Donc on peut supposer que $k = \mathbb{C}$ et il suffit de montrer que $H^2_{\text{sing}, G}(G(\mathbb{C}), \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) = 0$. Ainsi la proposition 3.2 implique (1).

Pour (2), par le même argument comme ci-dessus, on peut supposer que $k = \mathbb{C}$ et il suffit de montrer que

$$(3.1) \quad \begin{aligned} 0 &\rightarrow H^1_{\text{sing}}(T(\mathbb{C}), \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \rightarrow H^1_{\text{sing}}(G_2(\mathbb{C}), \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \\ &\rightarrow H^1_{\text{sing}}(G_1(\mathbb{C}), \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \rightarrow 0 \end{aligned}$$

est exacte. On a une suite exacte $0 \rightarrow \pi_1^{\text{top}}(G_1) \rightarrow \pi_1^{\text{top}}(G_2) \rightarrow \pi_1^{\text{top}}(T) \rightarrow 0$ de groupes abéliens, qui admet une section (non canonique), parce que $\pi_1^{\text{top}}(T) \cong \mathbb{Z}^n$. D'après le théorème 3.1, on a

$$H^1_{\text{sing}}(G(\mathbb{C}), \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) = H^1(\pi_1^{\text{top}}(G), \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) = \text{Hom}(\pi_1^{\text{top}}(G), \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$$

pour $G = G_1, G_2$ ou T , d'où on obtient (3.1) et (2). □

3.2. Le cas général

PROPOSITION 3.5. — Soient G un groupe algébrique connexe et (X, ρ) une G -variété lisse géométriquement connexe. Alors

- (1) on a $: H^2_1(X, \mu_\infty) \subset H^2_G(X, \mu_\infty)$;
- (2) si X est un G -torseur, on a $H^2_1(X, \mu_\infty) = H^2_G(X, \mu_\infty)$;
- (3) il existe un homomorphisme unique (l'homomorphisme de Sansuc)

$$\lambda : H^2_G(X, \mu_\infty) \rightarrow H^2_{1,e}(G, \mu_\infty)$$

tel que $\rho^* - p_2^* = p_1^* \circ \lambda$;

- (4) pour tout $x \in X(k)$, on a $\lambda = \rho_x^* - i_x^* : H^2_G(X, \mu_\infty) \rightarrow H^2_1(G, \mu_\infty)$,
où $i_x : G \rightarrow X : g \mapsto x$ et $\rho_x : G \rightarrow X : g \mapsto g \cdot x$.

Démonstration. — D'après (2.6), en utilisant $\rho|_{e_G \times X} = \text{id}_X$, on a (1).

Pour (2), par fonctorialité, il suffit de montrer que $H^2_{G_{\bar{k}}}(X_{\bar{k}}, \mu_\infty) = 0$. On peut supposer que $k = \bar{k}$. Dans ce cas, $X \cong G$, $\mu_\infty \cong \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ et $\rho = m : G \times G \rightarrow G$ la multiplication. D'après le corollaire 3.4(1), $H^2_G(G, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) = 0$, d'où l'on déduit (1).

Pour (3), d'après (2.6), $p_1^*|_{H_{1,e}^2(G, \mu_\infty)}$ est injective et donc il suffit de montrer que

$$(\rho^* - p_2^*)(H_G^2(X, \mu_\infty)) \subset p_1^*(H_{1,e}^2(G, \mu_\infty)).$$

Puisque $(\rho^* - p_2^*)|_{e_G \times X} = 0$, d'après (2.6), il suffit de montrer que

$$(\rho^* - p_2^*)(H_G^2(X, \mu_\infty)) \subset H_1^2(G \times X, \mu_\infty).$$

On peut supposer que $k = \bar{k}$. Un point $x \in X(k)$ induit un morphisme $G \xrightarrow{\rho_x} X : g \mapsto g \cdot x$. Alors on a un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccccc} H^2(X, \mu_\infty) & \xrightarrow{p_2^* - \rho^*} & H^2(G \times X, \mu_\infty) & \xleftarrow{p_1^*} & H^2(G, \mu_\infty) \\ \downarrow \rho_x^* & & \downarrow (\text{id}_G \times \rho_x)^* & & \downarrow = \\ H^2(G, \mu_\infty) & \xrightarrow{p_{2,G}^* - m^*} & H^2(G \times G, \mu_\infty) & \xleftarrow{p_{1,G}^*} & H^2(G, \mu_\infty). \end{array}$$

D'après (1), $\text{Im}(p_{2,G}^* - m^*) \cap \text{Im}(p_{1,G}^*) = 0$ et donc $\text{Im}(p_2^* - \rho^*) \cap \text{Im}(p_1^*) = 0$, d'où (3).

Pour (4), pour tout $\alpha \in H_G^2(X, \mu_\infty)$, on obtient $(\rho^* - p_2^*)(\alpha)|_{G \times x} = (\rho_x^* - i_x^*)(\alpha)$. □

La suite spectrale $E_2^{i,j} := H^i(k, H^j(X_{\bar{k}}, \mu_\infty)) \Rightarrow H^{i+j}(X, \mu_\infty)$ induit une suite exacte

$$(3.2) \quad H^2(k, \mu_\infty) \rightarrow H_1^2(X, \mu_{\bar{k}}) \xrightarrow{\partial} H^1(k, H^1(X_{\bar{k}}, \mu_\infty)) \rightarrow \text{Ker}(H^3(k, \mu_\infty) \rightarrow H^3(X, \mu_\infty)).$$

Par les définitions de λ ci-dessus et de λ_{H^1} dans (2.7), on a un diagramme commutatif :

$$(3.3) \quad \begin{array}{ccccc} H_1^2(X, \mu_\infty) & \hookrightarrow & H_G^2(X, \mu_\infty) & \xrightarrow{\lambda} & H_{1,e}^2(G, \mu_\infty) \\ \downarrow \partial & & & & \downarrow = \\ H^1(k, H^1(X_{\bar{k}}, \mu_\infty)) & \xrightarrow{\lambda_{H^1,*}} & H^1(k, H^1(G_{\bar{k}}, \mu_\infty)) & \xleftarrow{\cong} & H_{1,e}^2(G, \mu_\infty). \end{array}$$

PROPOSITION 3.6. — Soient G un groupe algébrique connexe et (X, ρ) une G -variété lisse géométriquement connexe. Alors

- (1) on a : $\text{Br}_{2/3}(X) \subset \text{Br}'_G(X) \subset \text{Br}_G(X)$;
- (2) si X est un G -torseur, on a $\text{Br}_{2/3}(X) = \text{Br}'_G(X)$;
- (3) il existe un homomorphisme unique (l'homomorphisme de Sansuc)

$$\lambda_{\text{Br}} : \text{Br}'_G(X) \rightarrow \text{Br}_{2/3,e}(G)$$

tel que $(\rho^* - p_2^*) = p_1^* \circ \lambda_{\text{Br}}$;

(4) pour tout $x \in X(k)$, on a $\lambda_{\text{Br}} = \rho_x^* - i_x^* : \text{Br}'_G(X) \rightarrow \text{Br}'_{2/3}(G)$, où $i_x : G \rightarrow X : g \mapsto x$ et $\rho_x : G \rightarrow X : g \mapsto g \cdot x$.

Démonstration. — D'après la proposition 2.4,

$$\text{Br}_{2/3}(X) = \text{Im}(H_1^2(X, \mu_\infty) \rightarrow \text{Br}(X)).$$

Alors la proposition 3.5(1) et (2) impliquent les (1) et (2) ici. Pour (3), d'après la proposition 3.5(3), on a $(\rho^* - p_2^*)(\text{Br}'_G(X)) \subset p_1^*(\text{Br}'_{2/3,e}(G))$. Donc il suffit de montrer que $p_1^*|_{\text{Br}'_{2/3,e}(G)}$ est injectif, i.e. $p_1^* : \text{Br}'_{2/3,e}(G) \rightarrow \text{Br}'_{2/3,e}(G_K)$ est injectif, où $K := k(X)$ et $p : G_K \rightarrow G$. Ceci découle du corollaire 2.5. Ensuite, le (3) et la proposition 3.5(4) implique le (4). \square

Pour toute extension de corps K/k , et tous $x \in X(K)$, $g \in G(K)$, $\alpha \in \text{Br}'_G(X)$, d'après la proposition 3.6(3), on a :

$$(3.4) \quad (g \cdot x)^*(\alpha) = g^*(\lambda_{\text{Br}}(\alpha)) + x^*(\alpha) \in \text{Br}(K).$$

Alors, dans le cas où k est un corps de nombres, on a :

$$(3.5) \quad G(\mathbf{A}_k)^{\text{Br}_{2/3}(G)} \cdot X(\mathbf{A}_k)^{\text{Br}'_G(X)} = X(\mathbf{A}_k)^{\text{Br}'_G(X)}.$$

Dans le cas où G est linéaire, on a :

COROLLAIRE 3.7. — Sous les hypothèses de la proposition 3.6, supposons que G est linéaire. Alors $\text{Br}_{2/3}(G) = \text{Br}_1(G) \cong H_1^2(G, \mu_\infty)$ et $\text{Br}_G(X) = \text{Br}'_G(X)$.

Démonstration. — Si G est linéaire, on a $\text{Pic}(G_{\bar{k}})_{\text{free}} = 0$ et $\text{Pic}(G)$ est fini. Par définition, on a $\text{Br}_{2/3}(G) = \text{Br}_1(G)$. D'après le corollaire 2.6, on a $\text{Br}_{2/3}(G) \cong H_1^2(G, \mu_\infty)$.

D'après [24, Lem. 6.6], $\text{Pic}(G \times X) \cong \text{Pic}(G) \oplus \text{Pic}(X)$ et donc $\text{Pic}(G \times X) \otimes \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \cong \text{Pic}(X) \otimes \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$. Notons $i_e : X \rightarrow G \times X : x \mapsto (e_G, x)$. La suite exacte de Kummer donne un diagramme commutatif de suites exactes

$$\begin{CD} H^2(X, \mu_\infty) @>l_X>> \text{Br}(X) @>>> 0 \\ @VV\phi_{H^2}V @VV\phi_{\text{Br}}V \\ 0 @>>> \text{Pic}(G \times X) \otimes \mathbb{Q}/\mathbb{Z} @>>H^2(G \times X, \mu_\infty) @>l_{G \times X}>> \text{Br}(G \times X) @>>> 0 \\ @VV\cong V @VVi_{e, H^2}^*V @VVi_{e, \text{Br}}^*V \\ 0 @>>> \text{Pic}(X) \otimes \mathbb{Q}/\mathbb{Z} @>>H^2(X, \mu_\infty) @>> \text{Br}(X) @>>> 0, \end{CD}$$

où $\phi_{H^2} := (\rho^* - p_2^*)|_{H^2(X, \mu_\infty)}$ et $\phi_{\text{Br}} := (\rho^* - p_2^*)|_{\text{Br}(X)}$. Alors $l_{G \times X}$ induit un isomorphisme $l_0 : \text{Ker}(i_{e, H^2}^*) \xrightarrow{\sim} \text{Ker}(i_{e, \text{Br}}^*)$. Puisque $\text{Br}_1(G) \cong H_1^2(G, \mu_\infty)$, on a

$$p_1^*|_{H^2(H_1^2(G, \mu_\infty))} = l_0^{-1}(p_1^*|_{\text{Br}(\text{Br}_1(G))}).$$

Pour tout $b \in H^2(X, \mu_\infty)$ avec $a := l_X(b) \in \text{Br}_G(X)$, on a $\phi_{\text{Br}}(a) \in p_1^*|_{\text{Br}}(\text{Br}_1(G))$ ([3, Prop. 3.7]), $i_{e, H^2}^*(\phi_{H^2}(b)) = 0$ (puisque $\rho \circ i_e = p_2 \circ i_e$), et donc $\phi_{H^2}(b) \in p_1^*|_{H^2}(H_1^2(G, \mu_\infty))$. Alors $b \in H_G^2(X, \mu_\infty)$ et $\text{Br}_G(X) \subset \text{Br}'_G(X)$, d'où le résultat. \square

4. Suites exactes de Sansuc

Dans toute cette section, k est un corps quelconque de caractéristique 0. Sauf mention explicite du contraire, une variété est une k -variété.

Le but de cette section est d'établir des suites exactes fondamentales de H_1^2 , H_G^2 et de Br'_G . Le théorème 4.1 est une variante de la suite exacte de Sansuc [24, Prop. 6.10] en remplaçant la cohomologie de \mathbb{G}_m par la cohomologie de μ_∞ , dans le cas où G n'est pas nécessairement linéaire. Ensuite, en utilisant ce théorème, on montre que les sous-groupes invariants $H_G^2(X, \mu_\infty)$ et $\text{Br}'_G(X)$ sont stables si l'on remplace X par son torseur sous un groupe connexe (proposition 4.5) ou si l'on remplace G par son extension avec un groupe connexe (proposition 4.6).

La suite exacte longue dans le théorème 4.1 suivant est appelée *la suite exacte de Sansuc* de μ_∞ .

THÉOREME 4.1. — *Soient Z une k -variété lisse géométriquement intègre, G un k -groupe algébrique connexe et $f : X \rightarrow Z$ un G -torseur. Alors on a une suite exacte, fonctorielle en (X, Z, f, G) :*

$$\begin{aligned}
 0 \rightarrow H^1(Z, \mu_\infty) &\xrightarrow{f^*} H^1(X, \mu_\infty) \xrightarrow{\lambda_{H^1}} H_e^1(G, \mu_\infty) \\
 &\rightarrow H^2(Z, \mu_\infty) \xrightarrow{f^*} H^2(X, \mu_\infty) \xrightarrow{\rho^* - p_2^*} H^2(G \times X, \mu_\infty),
 \end{aligned}$$

où $\rho : G \times X \rightarrow X$ est l'action et λ_{H^1} est défini dans (2.7).

Démonstration. — On suit l'idée de Sansuc [24, Prop. 6.10] : on utilise la suite spectrale qui lie la cohomologie étale avec la cohomologie de Čech (la suite spectrale (4.4) ci-dessous). Alors on fait tout d'abord des calculations sur la cohomologie de Čech.

Étape 1, préfaisceaux des cohomologies étales

Soient $\mathcal{H}^i : U \rightarrow H^i(U, \mu_\infty)$, $\mathcal{H}_0^1 : U \rightarrow H^1(\pi_0(U), \mu_\infty)$ et $\mathcal{H}_a^1 : U \rightarrow \text{Coker}(H^1(\pi_0(U), \mu_\infty) \rightarrow H^1(U, \mu_\infty))$ des préfaisceaux, où $\pi_0(U)$ est le

schéma des composantes connexes géométriques de U . Le \mathcal{H}^i ici est exactement le \underline{H}^i dans [20, III] (cf. [20, III, Rem. 1.6(e)]). Alors on a une suite exacte de préfaisceaux :

$$(4.1) \quad 0 \rightarrow \mathcal{H}_0^1 \rightarrow \mathcal{H}^1 \rightarrow \mathcal{H}_a^1 \rightarrow 0.$$

Le revêtement fidèlement plat de présentation finie $f : X \rightarrow Z$ induit une suite exacte longue des cohomologies de Čech :

$$(4.2) \quad \dots \rightarrow \check{H}^i(X/Z, \mathcal{H}_0^1) \rightarrow \check{H}^i(X/Z, \mathcal{H}^1) \rightarrow \check{H}^i(X/Z, \mathcal{H}_a^1) \\ \rightarrow \check{H}^{i+1}(X/Z, \mathcal{H}_0^1) \rightarrow \dots$$

Étape 2, calcul de la cohomologie de Čech

Notons $G^1 := G$, $X^1 := X$, $G^i := G \times G^{i-1}$ et $X^i := X \times_Z X^{i-1}$ pour $i \geq 1$. Notons $p_j^i : X^{i+1} \rightarrow X^i$ la projection qui enlève la j -ième coordonnée, où $1 \leq j \leq i+1$. Ainsi on a directement $X^i \cong G^{i-1} \times X$. Alors la cohomologie de Čech d'un préfaisceau \mathcal{F} est la cohomologie du complexe :

$$0 \rightarrow \mathcal{F}(X^1) \xrightarrow{p_1^{1,*} - p_2^{1,*}} \mathcal{F}(X^2) \xrightarrow{p_1^{2,*} - p_2^{2,*} + p_3^{2,*}} \mathcal{F}(X^3) \rightarrow \dots$$

Par exemple, $\check{H}^0(X/Z, \mathcal{F}) = \ker(p_1^{1,*} - p_2^{1,*})$.

- (1) On a $\check{H}^0(X/Z, \mathcal{H}^0) = \mu_\infty(k)$ et $\check{H}^i(X/Z, \mathcal{H}^0) = 0$ pour tout $i \geq 1$. Ceci vaut car $\mathcal{H}^0(X^i) \cong \mu_\infty(k)$ pour i et tout $p_j^{i,*}$ est l'identité pour tout i, j .
- (2) On a $\check{H}^0(X/Z, \mathcal{H}_0^1) = H^1(k, \mu_\infty)$ et $\check{H}^i(X/Z, \mathcal{H}_0^1) = 0$ pour tout $i \geq 1$. Ceci vaut car $\pi_0(X^i) = \text{Spec } k$, $\mathcal{H}_0^1(X^i) \cong H^1(k, \mu_\infty)$ pour tout i et $p_j^{i,*}$ est l'identité pour tout i, j .
- (3) On a $\check{H}^i(X/Z, \mathcal{H}_a^1) = 0$ pour tout $i \geq 2$ et une suite exacte naturelle :

$$0 \rightarrow \check{H}^0(X/Z, \mathcal{H}_a^1) \rightarrow \mathcal{H}_a^1(X) \xrightarrow{p^* - p_2^*} \mathcal{H}_a^1(G) \rightarrow \check{H}^1(X/Z, \mathcal{H}_a^1) \rightarrow 0.$$

En fait, d'après [24, Lem. 6.12] et le fait $\mathcal{H}_a^1(k) = 0$, il suffit de montrer que

$$\mathcal{H}_a^1(X \times G^i) \cong \mathcal{H}_a^1(X) \oplus \mathcal{H}_a^1(G)^{\oplus i}.$$

Ceci est établi dans (2.5).

(4) On a $\check{H}^i(X/Z, \mathcal{H}^1) = 0$ pour tout $i \geq 2$ et une suite exacte naturelle :

$$(4.3) \quad 0 \rightarrow \check{H}^0(X/Z, \mathcal{H}^1) \rightarrow \mathcal{H}^1(X) \xrightarrow{\rho^* - p_2^*} \mathcal{H}_a^1(G) \rightarrow \check{H}^1(X/Z, \mathcal{H}^1) \rightarrow 0.$$

D'après (2) et les suites exactes (4.1) et (4.2), on a

$$\check{H}^i(X/Z, \mathcal{H}^1) \cong \check{H}^i(X/Z, \mathcal{H}_a^1)$$

pour tout $i \geq 1$ et un diagramme commutatif de suites exactes :

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \check{H}^0(X/Z, \mathcal{H}_0^1) & \longrightarrow & \check{H}^0(X/Z, \mathcal{H}^1) & \longrightarrow & \check{H}^0(X/Z, \mathcal{H}_a^1) \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow \cong & & \downarrow & & \downarrow \phi \\ 0 & \longrightarrow & \mathcal{H}_0^1(X) & \longrightarrow & \mathcal{H}^1(X) & \longrightarrow & \mathcal{H}_a^1(X) \longrightarrow 0. \end{array}$$

D'après le lemme du serpent, on a une suite exacte :

$$0 \rightarrow \check{H}^0(X/Z, \mathcal{H}^1) \rightarrow \mathcal{H}^1(X) \rightarrow \text{coker}(\phi) \rightarrow 0.$$

L'énoncé découle de (3).

Étape 3, la suite spectrale

Puisque $H^i(X, \mu_\infty) \cong H_{\text{fppf}}^i(X, \mu_\infty)$ ([20, III, Thm. 3.9] pour μ_n) et $f : X \rightarrow Z$ est un revêtement fidèlement plat de présentation finie, on a la suite spectrale ([20, III, Prop. 2.7])

$$(4.4) \quad E_2^{i,j} = \check{H}^i(X/Z, \mathcal{H}^j) \Rightarrow H^{i+j}(Z, \mu_\infty).$$

Dans la suite spectrale (4.4), d'après (1) et (4), $E_2^{i,0} = 0$ pour tout $i \geq 1$ et $E_2^{i,1} = 0$ pour tout $i \geq 2$. Alors cette suite spectrale induit un isomorphisme $\check{H}^0(X/Z, \mathcal{H}^1) \cong H^1(Z, \mu_\infty)$ et une suite exacte :

$$0 \rightarrow \check{H}^1(X/Z, \mathcal{H}^1) \rightarrow H^2(Z, \mu_\infty) \rightarrow \check{H}^0(X/Z, \mathcal{H}^2) \rightarrow 0.$$

D'après (4.3), on a une suite exacte longue :

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow H^1(Z, \mu_\infty) \rightarrow \mathcal{H}^1(X) \xrightarrow{\rho^* - p_2^*} \mathcal{H}_a^1(G) \rightarrow H^2(Z, \mu_\infty) \\ \rightarrow \check{H}^0(X/Z, \mathcal{H}^2) \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Puisque $\check{H}^0(X/Z, \mathcal{H}^2) = \text{Ker}(H^2(X, \mu_\infty) \xrightarrow{\rho^* - p_2^*} H^2(G \times X, \mu_\infty))$, il suffit de montrer que l'homomorphisme canonique $l : H_e^1(G, \mu_\infty) \rightarrow \mathcal{H}_a^1(G)$ est un isomorphisme et que $l \circ \lambda_{H_1} = \rho^* - p_2^*$. Ceci découle de la définition et de (2.7). □

COROLLAIRE 4.2. — *Sous les hypothèses du théorème 4.1, on a un diagramme commutatif de suites exactes, fonctoriel en (X, Z, f, G) :*

$$\begin{CD}
 H_e^1(G, \mu_\infty) @>>> H^2(Z, \mu_\infty) @>f^*>> H_G^2(X, \mu_\infty) @>\lambda>> H_{1,e}^2(G, \mu_\infty) \\
 @V=VV @V=VV @VVV @VVp_1^*V \\
 H_e^1(G, \mu_\infty) @>>> H^2(Z, \mu_\infty) @>f^*>> H^2(X, \mu_\infty) @>\rho^*-p_2^*>> H^2(G \times X, \mu_\infty).
 \end{CD}$$

Démonstration. — D’après (2.6), p_1^* est injective. Le résultat découle du théorème 4.1 et de la proposition 3.5(3). □

COROLLAIRE 4.3. — *Sous les hypothèses du théorème 4.1, supposons que $H^2(k, H^1(Z_{\bar{k}}, \mu_\infty)) = 0$ et $H^2(Z_{\bar{k}}, \mu_\infty) = 0$. Si $H^3(k, \mu_\infty) = 0$ ou $X(k) \neq \emptyset$, alors les homomorphismes de Sansuc $\lambda : H_G^2(X, \mu_\infty) \rightarrow H_{1,e}^2(G, \mu_\infty)$ et $\lambda_{\text{Br}} : \text{Br}'_G(X) \rightarrow \text{Br}_{2/3,e}(G)$ sont surjectifs.*

Démonstration. — Par hypothèses, le théorème 4.1 induit une suite exacte :

$$0 \rightarrow H^1(Z_{\bar{k}}, \mu_\infty) \rightarrow H^1(X_{\bar{k}}, \mu_\infty) \xrightarrow{\lambda_{H^1}} H^1(G_{\bar{k}}, \mu_\infty) \rightarrow 0$$

et donc un homomorphisme surjectif

$$\lambda_{H^1,*} : H^1(k, H^1(X_{\bar{k}}, \mu_\infty)) \rightarrow H^1(k, H^1(G_{\bar{k}}, \mu_\infty)).$$

Puisque $H^3(k, \mu_\infty) = 0$ ou $X(k) \neq \emptyset$, d’après (3.2), $H^1_1(X, \mu_\infty) \rightarrow H^1(k, H^1(X_{\bar{k}}, \mu_\infty))$ est surjectif. D’après (3.3), λ est surjectif et donc λ_{Br} est surjectif. □

COROLLAIRE 4.4. — *Soient G un groupe algébrique connexe et (X, ρ) un G -torseur. Si $H^3(k, \mu_\infty) = 0$ ou $X(k) \neq \emptyset$, alors on a des suites exactes :*

$$H^2(k, \mu_\infty) \rightarrow H_G^2(X, \mu_\infty) \xrightarrow{\lambda} H_{1,e}^2(G, \mu_\infty) \rightarrow 0$$

et

$$\text{Br}(k) \rightarrow \text{Br}'_G(X) \xrightarrow{\lambda_{\text{Br}}} \text{Br}_{2/3,e}(G) \rightarrow 0.$$

Démonstration. — D’après le corollaire 4.3, λ et λ_{Br} sont surjectifs. Le corollaire 4.2 donne la première suite exacte. D’après la proposition 3.6(2), $\text{Br}'_G(X) = \text{Br}_{2/3}(X)$. Donc il suffit de montrer que $\text{Br}_{2/3}(X)/\text{Im Br}(k) \rightarrow \text{Br}_{2/3,e}(G)$ est injectif.

Si $X(k) \neq \emptyset$, ceci découle de la proposition 3.6(4). En général, soit $K := k(X)$. Alors $X_K(K) \neq \emptyset$ et donc $\text{Br}_{2/3}(X_K)/\text{Im Br}(K) \rightarrow \text{Br}_{2/3,e}(G_K)$ est injectif. D’après le corollaire 2.5, $\text{Br}_{2/3}(X)/\text{Im Br}(k) \rightarrow \text{Br}_{2/3}(X_K)/\text{Im Br}(K)$ et $\text{Br}_{2/3,e}(G) \rightarrow \text{Br}_{2/3,e}(G_K)$ sont injectifs, d’où le résultat. □

Les deux propositions suivantes décrivent les propriétés de $H_G^2(X, \mu_\infty)$ et de $\text{Br}'_G(X)$ par rapport au changement de X et de G .

PROPOSITION 4.5. — Soient G, H deux groupes algébriques connexes et $p : Y \rightarrow X$ un G -morphisme de G -variétés. Si p est un H -torseur, alors

- (1) on a $(p^*)^{-1}H_G^2(Y, \mu_\infty) = H_G^2(X, \mu_\infty)$, où $p^* : H^2(X, \mu_\infty) \rightarrow H^2(Y, \mu_\infty)$ est l'homomorphisme induit par p ;
- (2) si H est linéaire, on a $(p_{\text{Br}}^*)^{-1}\text{Br}'_G(Y) = \text{Br}'_G(X)$, où $\text{Br}(X) \xrightarrow{p_{\text{Br}}^*} \text{Br}(Y)$.

Démonstration. — Notons $\rho : G \times X \rightarrow X, \rho_Y : G \times Y \rightarrow Y$ deux actions et $p_2 : G \times X \rightarrow X, p_1 : G \times X \rightarrow G, p_{2,Y} : G \times Y \rightarrow Y$ les projections.

Puisque $G \times Y \xrightarrow{\text{id}_G \times p} G \times X$ est aussi un H -torseur, d'après le théorème 4.1, on a un diagramme commutatif de suites exactes

$$\begin{CD} H_e^1(H, \mu_\infty) @>>> H^2(X, \mu_\infty) @>p^*>> H^2(Y, \mu_\infty) \\ @VV=V @VV\phi^*V @VV\phi_Y^*V \\ H_e^1(H, \mu_\infty) @>>> H^2(G \times X, \mu_\infty) @>(\text{id}_G \times p)^*>> H^2(G \times Y, \mu_\infty), \end{CD}$$

où $\phi = \rho$ (resp. $\phi = p_2$) et $\phi_Y = \rho_Y$ (resp. $\phi_Y = p_{2,Y}$). Donc, pour tout $\alpha \in (p^*)^{-1}H_G^2(Y, \mu_\infty)$, on a

$$\begin{aligned} \rho^*(\alpha) - p_2^*(\alpha) &\in p_1^*H^2(G, \mu_\infty) + \text{Im } H_e^1(H, \mu_\infty) \\ &\subset p_1^*H^2(G, \mu_\infty) + p_2^*H^2(X, \mu_\infty). \end{aligned}$$

Puisque $(\rho^*(\alpha) - p_2^*(\alpha))|_{e_{G \times X}} = 0$, on a $\rho^*(\alpha) - p_2^*(\alpha) \in p_1^*H^2(G, \mu_\infty)$. Ceci donne (1).

Pour (2), par la suite exacte de Sansuc [24, Prop. 6.10], on a une suite exacte

$$\text{Pic}(X) \rightarrow \text{Pic}(Y) \rightarrow \text{Pic}(H)$$

avec $\text{Pic}(H)$ fini. Donc $\text{Pic}(X) \otimes \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \rightarrow \text{Pic}(Y) \otimes \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ est surjectif. Par la suite exacte de Kummer, on a un diagramme commutatif de suites exactes :

$$\begin{CD} 0 @>>> \text{Pic}(X) \otimes \mathbb{Q}/\mathbb{Z} @>>> H^2(X, \mu_\infty) @>>> \text{Br}(X) @>>> 0 \\ @. @VVp_{\text{Pic}}^*V @VVp^*V @VVp_{\text{Br}}^*V \\ 0 @>>> \text{Pic}(Y) \otimes \mathbb{Q}/\mathbb{Z} @>>> H^2(Y, \mu_\infty) @>>> \text{Br}(Y) @>>> 0. \end{CD}$$

Puisque p_{Pic}^* est surjectif, une chasse au diagramme donne (2). □

Dans le cas où $X \cong G/H$ avec $H \subset G$ un sous-groupe connexe, $p : G \rightarrow X$ est un H -torseur. La proposition 4.5(1) et la proposition 3.5(2) impliquent

$$H_G^2(X, \mu_\infty) \subset \ker(H^2(X, \mu_\infty) \xrightarrow{p^*} H^2(G_{\bar{k}}, \mu_\infty))$$

et donc

$$(4.5) \quad \text{Br}'_G(X) \subset \text{Br}_1(X, G) := \ker(\text{Br}(X) \xrightarrow{p^*} \text{Br}(G_{\bar{k}})).$$

PROPOSITION 4.6. — Soient $1 \rightarrow N \rightarrow H \xrightarrow{\psi} G \rightarrow 1$ une suite exacte de groupes algébriques connexes, et (X, ρ) une G -variété lisse géométriquement intègre. Alors $H_G^2(X, \mu_\infty) = H_H^2(X, \mu_\infty)$ et $\text{Br}'_G(X) = \text{Br}'_H(X)$.

Démonstration. — Puisque $H \times X \xrightarrow{\psi \times \rho} G \times X$ est un N -torseur, d'après le corollaire 4.2, on a un diagramme commutatif de suites exactes :

$$\begin{CD} H_e^1(N, \mu_\infty) @>>> H^2(G, \mu_\infty) @>>> H_N^2(H, \mu_\infty) @>>> H_{1,e}^2(N, \mu_\infty) \\ @VV=V @VVp_1^*V @VVp_1^*V @VV=V \\ H_e^1(N, \mu_\infty) @>>> H^2(G \times X, \mu_\infty) @>\psi_X^*>> H_N^2(H \times X, \mu_\infty) @>>> H_{1,e}^2(N, \mu_\infty). \end{CD}$$

Donc

$$(\psi_X^*)^{-1}(p_1^* H_N^2(H, \mu_\infty)) = p_1^* H^2(G, \mu_\infty).$$

Puisque $H_{1,e}^2(H, \mu_\infty) \subset H_1^2(H, \mu_\infty) \subset H_N^2(H, \mu_\infty)$ (Proposition 3.5(1)), on a $(\psi_X^*)^{-1}(p_1^* H_{1,e}^2(H, \mu_\infty)) \subset p_1^* H^2(G, \mu_\infty)$. La proposition 3.5(3) donne

$$\begin{aligned} H_H^2(X, \mu_\infty) &= \{a \in H^2(X, \mu_\infty) \mid \psi_X^*((\rho^* - p_2^*)(a)) \in p_1^* H_{1,e}^2(H, \mu_\infty)\} \\ &\subset \{a \in H^2(X, \mu_\infty) \mid (\rho^* - p_2^*)(a) \in p_1^* H^2(G, \mu_\infty)\} = H_G^2(X, \mu_\infty), \end{aligned}$$

d'où le résultat. □

COROLLAIRE 4.7. — Sous les hypothèses de la proposition 4.6, supposons qu'il existe une H -variété Y et un H -morphisme $Y \xrightarrow{p} X$ tels que $Y \rightarrow X$ soit un N -torseur. Alors

- (1) $H^2(X, \mu_\infty) \xrightarrow{p^*} H^2(Y, \mu_\infty)$ satisfait $(p^*)^{-1} H_H^2(Y, \mu_\infty) = H_G^2(X, \mu_\infty)$, et on a une suite exacte (où λ est l'homomorphisme de Sansuc), fonctorielle en (X, Y, p, N) :

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow H^1(X, \mu_\infty) \rightarrow H^1(Y, \mu_\infty) \rightarrow H_e^1(N, \mu_\infty) \\ \xrightarrow{\chi} H_G^2(X, \mu_\infty) \xrightarrow{p^*} H_H^2(Y, \mu_\infty) \xrightarrow{\lambda} H_{1,e}^2(N, \mu_\infty). \end{aligned}$$

(2) si N est linéaire, $\text{Br}(X) \xrightarrow{p^*} \text{Br}(Y)$ satisfait $(p^*)^{-1}\text{Br}'_H(Y) = \text{Br}'_G(X)$ et on a une suite exacte (où λ_{Br} est l'homomorphisme de Sansuc), fonctorielle en (X, Y, p, N) :

$$\text{Pic}(Y) \rightarrow \text{Pic}(N) \xrightarrow{\chi} \text{Br}'_G(X) \xrightarrow{p^*} \text{Br}'_H(Y) \xrightarrow{\lambda_{\text{Br}}} \text{Br}_e(N).$$

Démonstration. — Une application du théorème 4.1 et du corollaire 4.2 au N -torseur $Y \rightarrow X$ donne une suite exacte :

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow H^1(X, \mu_\infty) \rightarrow H^1(Y, \mu_\infty) \rightarrow H^1_e(N, \mu_\infty) \\ \xrightarrow{\chi} H^2(X, \mu_\infty) \xrightarrow{p^*} H^2_N(Y, \mu_\infty) \xrightarrow{\lambda} H^2_{1,e}(N, \mu_\infty). \end{aligned}$$

Une application de la proposition 4.5 au N -torseur $p : Y \rightarrow X$ (avec l'action de H) donne (en utilisant la proposition 4.6)

$$\begin{aligned} \chi(H^1_e(N, \mu_\infty)) \subset (p^*)^{-1}(0) \subset (p^*)^{-1}(H^2_H(Y, \mu_\infty)) = H^2_H(X, \mu_\infty) \\ = H^2_G(X, \mu_\infty), \end{aligned}$$

d'où on obtient (1).

L'énoncé (2) découle du même argument que (1) en remplaçant le corollaire 4.2 par [3, Thm. 3.10]. □

5. Spécialisation du sous-groupe invariant

Dans toute cette section, k est un corps quelconque de caractéristique 0. Sauf mention explicite du contraire, une variété est une k -variété.

Considérons maintenant une suite exacte de groupes algébriques connexes

$$(5.1) \quad 1 \rightarrow G \xrightarrow{\varphi} H \xrightarrow{\psi} T \rightarrow 1$$

avec T un tore. Pour une H -variété Y munie d'un H -morphisme $f : Y \rightarrow T$ et pour tout $t \in T(k)$, la fibre Y_t est une G -variété (voir le théorème 5.4 ci-dessous). Dans [3, Prop. 3.13], on calcule le noyau et le conoyau de l'homomorphisme de spécialisation $\text{Br}_H(Y) \rightarrow \text{Br}_G(Y_t)$ lorsque H est linéaire. Dans cette section, on généralise ce résultat au cas où H n'est pas nécessairement linéaire (le théorème 5.4).

La proposition 5.1 suivante généralise [3, Lem. 5.5].

PROPOSITION 5.1. — Pour la suite exacte (5.1), on a un diagramme commutatif de suites exactes :

$$\begin{CD}
 H_e^1(G, \mu_\infty) @>>> H_{1,e}^2(T, \mu_\infty) @>\psi^*>> H_{1,e}^2(H, \mu_\infty) @>\varphi^*>> H_{1,e}^2(G, \mu_\infty) @>>> H^3(k, T^*) \\
 @VV=V @VVV @VVV @VV=V \\
 H_e^1(G, \mu_\infty) @>>> H_T^2(T, \mu_\infty) @>\psi^*>> H_H^2(H, \mu_\infty) @>\lambda>> H_{1,e}^2(G, \mu_\infty) @>>>
 \end{CD} \quad (1)$$

où la deuxième ligne est induite par application du corollaire 4.7(1) au G -torseur $H \rightarrow T$.

Démonstration. — On applique le corollaire 4.7(1) au G -torseur $H \rightarrow T$ et on obtient la suite exacte de la deuxième ligne.

D'après la proposition 3.5, $e_T^* : H_1^2(T, \mu_\infty) \rightarrow H^2(k, \mu_\infty)$ équivaut à la composition :

$$H_1^2(T, \mu_\infty) \cong H_T^2(T, \mu_\infty) \rightarrow H_H^2(H, \mu_\infty) \cong H_1^2(H, \mu_\infty) \xrightarrow{e_H^*} H^2(k, \mu_\infty).$$

Donc $\text{Im } H_e^1(G, \mu_\infty) \subset \text{Ker}(e_T^*)$ et la première ligne est exacte en $H_{1,e}^2(T, \mu_\infty)$.

Par la suite exacte de Kummer, $H^1(T_{\bar{k}}, \mu_\infty) \cong T^* \otimes \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ et donc

$$(5.2) \quad H^2(k, H^1(T_{\bar{k}}, \mu_\infty)) \cong H^3(k, T^*).$$

Le corollaire 3.4(2) induit une suite exacte

$$0 \rightarrow H^1(T_{\bar{k}}, \mu_\infty) \rightarrow H^1(H_{\bar{k}}, \mu_\infty) \xrightarrow{\varphi^*} H^1(G_{\bar{k}}, \mu_\infty) \rightarrow 0.$$

Appliquons $H^i(k, -)$ à cette suite exacte. Le corollaire 2.6 et (5.2) donnent une suite exacte :

$$H_{1,e}^2(T, \mu_\infty) \rightarrow H_{1,e}^2(H, \mu_\infty) \xrightarrow{\varphi^*} H_{1,e}^2(G, \mu_\infty) \rightarrow H^3(k, T^*).$$

Ceci donne la première suite exacte.

D'après la proposition 3.5(4), le carré (1) est commutatif et donc le diagramme est commutatif. □

COROLLAIRE 5.2. — Dans la suite exacte (5.1), si l'on a $H^3(k, T^*) = 0$, alors les homomorphismes $H_{1,e}^2(H, \mu_\infty) \rightarrow H_{1,e}^2(G, \mu_\infty)$ et $\text{Br}_{2/3,e}(H) \xrightarrow{\varphi^*} \text{Br}_{2/3,e}(G)$ sont surjectifs.

Démonstration. — Ceci découle de la proposition 5.1 et du corollaire 2.6. □

LEMME 5.3. — Soient G, N deux groupes algébriques connexes et X une G -variété lisse géométriquement intègre. Soient $H := N \times G$ et P une

H -variété tels que P soit un N -torseur sur k . Soient $Y := P \times X$ et $Y \xrightarrow{p_1} P$, $Y \xrightarrow{p_2} X$ les deux projections. Supposons donnée une action :

$$H \times Y \rightarrow Y : (n, g) \times (p, x) \mapsto ((n, g) \cdot p, g \cdot x).$$

Alors

(1) si $P = N$, on a un isomorphisme :

$$(p_1^*, p_2^*) : H_{1,e}^2(N, \mu_\infty) \oplus H_G^2(X, \mu_\infty) \xrightarrow{\sim} H_H^2(Y, \mu_\infty);$$

(2) si $H^3(k, \mu_\infty) = 0$, on a un isomorphisme :

$$(p_1^*, p_2^*) : H_1^2(P, \mu_\infty) / \text{Im } H^2(k, \mu_\infty) \oplus H_G^2(X, \mu_\infty) / \text{Im } H^2(k, \mu_\infty) \\ \xrightarrow{\sim} H_H^2(Y, \mu_\infty) / \text{Im } H^2(k, \mu_\infty).$$

Démonstration. — Par la proposition 3.5(2), on a

$$H_N^2(P, \mu_\infty) \cong H_1^2(P, \mu_\infty).$$

D'après le corollaire 4.7(1) et l'isomorphisme

$$H_{1,e}^2(N, \mu_\infty) \cong H_1^2(N, \mu_\infty) / \text{Im } H^2(k, \mu_\infty),$$

on a un diagramme commutatif de suites exactes

$$\begin{array}{ccccccccc} H^1(P, \mu_\infty) & \xrightarrow{\vartheta_1} & H_e^1(N, \mu_\infty) & \rightarrow & H^2(k, \mu_\infty) & \rightarrow & H_1^2(P, \mu_\infty) & \xrightarrow{\vartheta_2} & H_{1,e}^2(N, \mu_\infty) \\ \downarrow & & \downarrow = & & \downarrow & & \downarrow p_1^* & & \downarrow = \\ H^1(Y, \mu_\infty) & \rightarrow & H_e^1(N, \mu_\infty) & \rightarrow & H_G^2(X, \mu_\infty) & \xrightarrow{p_2^*} & H_H^2(Y, \mu_\infty) & \rightarrow & H_{1,e}^2(N, \mu_\infty). \end{array}$$

Puisque $P(k) \neq \emptyset$ ou $H^3(k, \mu_\infty) = 0$, d'après le corollaire 4.4, l'homomorphisme ϑ_2 est surjectif. Une chasse au diagramme donne une suite exacte

$$(5.3) \quad H^2(k, \mu_\infty) \xrightarrow{\vartheta_3} H_1^2(P, \mu_\infty) \oplus H_G^2(X, \mu_\infty) \xrightarrow{(p_1^*, p_2^*)} H_H^2(Y, \mu_\infty) \rightarrow 0,$$

et, si $P(k) \neq \emptyset$, l'homomorphisme ϑ_3 est injectif, d'où le résultat. \square

THÉORÈME 5.4. — *Considérons la suite exacte (5.1). Soient Y une H -variété lisse, géométriquement intègre et $Y \xrightarrow{f} T$ un H -morphisme. Notons $H_{1,e}^2(H, \mu_\infty) \xrightarrow{\varphi^*} H_{1,e}^2(G, \mu_\infty)$ l'homomorphisme induit par $\varphi : G \rightarrow H$. Alors, pour tout $t \in T(k)$, la fibre Y_t est G -invariante et on a une suite exacte naturelle*

$$H_{1,e}^2(T, \mu_\infty) \rightarrow H_H^2(Y, \mu_\infty) \rightarrow H_G^2(Y_t, \mu_\infty) \rightarrow \text{coker}(\varphi^*).$$

Démonstration. — D’après [7, Prop. 2.2], Y_t est lisse, géométriquement intègre. Puisque T est commutatif, la fibre Y_t est G -invariante. Notons :

$$Y_t \xrightarrow{i} H \times Y_t : y \mapsto (e_H, y) \quad \text{et} \quad H \times Y_t \xrightarrow{\rho} Y : (h, y) \mapsto h \cdot y.$$

Alors $\rho \circ i$ est l’immersion $Y_t \subset Y$. On fixe des actions

$$H \times G \curvearrowright H \times Y_t : (h, g) \times (h', y) \mapsto (hh'g^{-1}, g \cdot y)$$

et

$$H \times G \curvearrowright H : (h, g) \times h' \mapsto hh'g^{-1}.$$

Par définition, $Y \cong H \times^G Y_t$ est le produit contracté (cf. [25, Lem. 2.2.3]) et on a un diagramme commutatif de $H \times G$ -morphisms

$$\begin{array}{ccc} Y_t & \xleftarrow{p_2} H \times Y_t & \xrightarrow{p_1} H \\ & \downarrow \rho & \downarrow t \cdot \psi(-) \\ & Y & \xrightarrow{f} T \end{array}$$

tels que les colonnes soient des G -torseurs.

On applique le lemme 5.3(1) à la $H \times G$ -variété $H \times Y_t$, et on obtient un isomorphisme

$$(5.4) \quad H^2_{1,e}(H, \mu_\infty) \oplus H^2_G(Y_t, \mu_\infty) \xrightarrow{(p_1^*, p_2^*)} H^2_{H \times G}(H \times Y_t, \mu_\infty).$$

Le corollaire 4.7(1) et la proposition 5.1 donnent un diagramme commutatif de suites exactes :

$$\begin{array}{ccccccc} H^1_e(G, \mu_\infty) & \longrightarrow & H^2_{1,e}(T, \mu_\infty) & \longrightarrow & H^2_{1,e}(H, \mu_\infty) & \xrightarrow{\varphi^*} & H^2_{1,e}(G, \mu_\infty) \\ \downarrow = & & \downarrow & & \downarrow p_1^* & & \downarrow = \\ H^1_e(G, \mu_\infty) & \longrightarrow & H^2_H(Y, \mu_\infty) & \xrightarrow{\rho^*} & H^2_{H \times G}(H \times Y_t, \mu_\infty) & \longrightarrow & H^2_{1,e}(G, \mu_\infty) \\ & & & & \downarrow i^* & & \\ & & & & H^2(Y_t, \mu_\infty) & & . \end{array}$$

Puisque $p_2 \circ i = \text{id}$ et $i^* \circ p_1^* = 0$, d’après (5.4), on a $H^2_G(Y_t, \mu_\infty) = \text{Im}(i^*) \cong \text{coker}(p_1^*)$. Une chasse au diagramme donne l’énoncé. \square

COROLLAIRE 5.5. — *Sous les hypothèses de le théorème 5.4, supposons $H^3(k, T^*) = 0$. Alors, pour tout $t \in T(k)$, les homomorphismes $H^2_H(Y, \mu_\infty) \rightarrow H^2_G(Y_t, \mu_\infty)$ et $\text{Br}'_H(Y) \rightarrow \text{Br}'_G(Y_t)$ sont surjectifs.*

Démonstration. — Ce corollaire découle du théorème 5.4 et de la proposition 5.1. \square

6. Descente

Dans toute cette section, k est un corps de nombres. Sauf mention explicite du contraire, une variété est une k -variété.

La méthode de descente des points adéliques est établie par Colliot-Thélène et Sansuc dans [8]. L’auteur étudie la méthode de descente des points adéliques orthogonaux aux sous-groupes de Brauer invariants dans [3, 4] et, en particulier, [4, Prop. 5.7] est utilisé dans la démonstration de [4, Thm. 1.4].

Dans cette section, on donne une variante de [4, Prop. 5.1] et une variante de [4, Prop. 5.7] dans le cas où le k -groupe n’est pas forcément linéaire. La première est la proposition 6.2, qui établit la formule de descente par rapport au sous-groupe de Brauer invariant pour un torseur sous un k -groupe de type multiplicatif. La deuxième est la proposition 6.4, qui suit l’idée de Demarche dans [13, Prop. 5].

LEMME 6.1. — Soient $1 \rightarrow T \rightarrow H \xrightarrow{\psi} G \rightarrow 1$ une suite exacte de groupes algébriques connexes avec T un tore quasi-trivial, X une G -variété lisse géométriquement intègre, Y une H -variété lisse et $Y \xrightarrow{f} X$ un H -morphisme tels que $Y \rightarrow X$ soit un T -torseur. Alors on a

$$X(\mathbf{A}_k)^{\text{Br}'_G(X)} = f(Y(\mathbf{A}_k)^{\text{Br}'_H(Y)}).$$

Démonstration. — Ceci découle de [4, (5.2)] et du corollaire 4.7(2). □

PROPOSITION 6.2. — Soient G, H deux groupes algébriques connexes et $\psi : H \rightarrow G$ un homomorphisme surjectif de noyau central S de type multiplicatif. Soient X (resp. Y) une G -variété (resp. H -variété) lisse géométriquement intègre et $f : Y \rightarrow X$ un H -morphisme tels que Y soit un S -torseur sur X , où l’action de S est induite par l’action de H . Alors, pour tout $\sigma \in H^1(k, S)$, le tordu Y_σ est une H -variété et on a :

$$X(\mathbf{A}_k)^{\text{Br}'_G(X)} = \bigcup_{\sigma \in H^1(k, S)} f_\sigma(Y_\sigma(\mathbf{A}_k)^{\text{Br}'_H(Y_\sigma)}).$$

Démonstration. — On suit la démonstration de [4, Prop. 5.1].

D’après [9, Prop. 1.3] et [3, Lem. 5.4], il existe une suite exacte

$$(6.1) \quad 0 \rightarrow S \rightarrow T_0 \xrightarrow{\varphi} T \rightarrow 0$$

où T_0 est un tore quasi-trivial et le groupe des caractères T^* du tore T vérifie $H^3(k, T^*) = 0$.

Soit $H_0 := H \times^S T_0$ le produit contracté (cf. [25, Lem. 2.2.3]). Alors H_0 est un groupe algébrique connexe et $H \xrightarrow{\psi} G$ induit une suite exacte

$$1 \rightarrow T_0 \rightarrow H_0 \xrightarrow{\psi_0} G \rightarrow 1.$$

Soit $Y_0 := Y \times^S T_0$. Notons $i : Y \rightarrow Y_0$ l'immersion fermée canonique. Alors Y_0 est une H_0 -variété et f induit un H_0 -morphisme $Y_0 \xrightarrow{f_0} X$ tels que f_0 est un T_0 -torseur. D'après le lemme 6.1, on a

$$X(\mathbf{A}_k)^{\text{Br}'_G(X)} = f_0(Y_0(\mathbf{A}_k)^{\text{Br}'_{H_0}(Y_0)}).$$

L'isomorphisme $Y_0 \times^{T_0} T \cong Y \times^S T_0 \times^{T_0} T \cong X \times T$ induit un T_0 -morphisme $\phi : Y_0 \rightarrow T$ tel que $\phi^{-1}(e_T) = i(Y)$. D'après des arguments classiques (voir la démonstration de [3, Thm. 5.9]), pour tout $t \in T(k)$, on a $\phi^{-1}(t) \cong Y_{\partial(t)}$ et le morphisme $\phi^{-1}(t) \hookrightarrow Y_0 \xrightarrow{f_0} X$ est exactement $f_{\partial(t)}$, où $\partial : T(k) \rightarrow H^1(k, S)$ est l'homomorphisme induit par (6.1). D'après le théorème 5.4 et le corollaire 5.5, $\phi^{-1}(t)$ est une H -variété et l'homomorphisme canonique $\text{Br}'_{H_0}(Y_0) \rightarrow \text{Br}'_H(\phi^{-1}(t))$ est surjectif pour tout $t \in T(k)$.

D'après [6, Thm. 5.1], on a

$$T(\mathbf{A}_k)^{\text{Br}_1(T)} = \varphi(T_0(\mathbf{A}_k)^{\text{Br}_1(T_0)}) \cdot T(k).$$

D'après le corollaire 3.7, on a

$$\text{Br}_1(T) \cong \text{Br}'_T(T), \quad \text{Br}_1(T_0) \cong \text{Br}'_{T_0}(T_0)$$

et

$$\phi(Y_0(\mathbf{A}_k)^{\text{Br}'_{H_0}(Y_0)}) \subset T(\mathbf{A}_k)^{\text{Br}_1(T)}.$$

D'après (3.5), $Y_0(\mathbf{A}_k)^{\text{Br}'_{H_0}(Y_0)}$ est $T_0(\mathbf{A}_k)^{\text{Br}_1(T_0)}$ -invariant. Ceci implique :

$$Y_0(\mathbf{A}_k)^{\text{Br}'_{H_0}(Y_0)} = T_0(\mathbf{A}_k)^{\text{Br}_1(T_0)} \cdot \left(\bigsqcup_{t \in T(k)} \phi^{-1}(t)(\mathbf{A}_k)^{\text{Br}'_H(\phi^{-1}(t))} \right),$$

et donc

$$\begin{aligned} X(\mathbf{A}_k)^{\text{Br}'_G(X)} &= f_0 \left[\bigsqcup_{t \in T(k)} \phi^{-1}(t)(\mathbf{A}_k)^{\text{Br}'_H(\phi^{-1}(t))} \right] \\ &= \bigsqcup_{t \in T(k)} f_{\partial(t)}[Y_{\partial(t)}(\mathbf{A}_k)^{\text{Br}'_H(Y_{\partial(t)})}]. \end{aligned} \quad \square$$

Pour toute variété lisse X , définissons $X(\mathbf{A}_k^{nc})$ l'espace des points adéliques de X hors des places complexes, i.e. on a

$$X(\mathbf{A}_k) \cong \left(\prod_{v \text{ complexe}} X(k_v) \right) \times X(\mathbf{A}_k^{nc}).$$

De plus, on a :

$$(6.2) \quad X(\mathbf{A}_k)^{\text{ob}} \cong \left(\prod_{v \text{ complexe}} X(k_v) \right) \times X(\mathbf{A}_k^{nc})^{\text{ob}}$$

pour l'obstruction $\text{ob} = \text{Br}(X)$ ou $\text{ob} = \text{Br}_{2/3}(X)$ ou $\text{ob} = \text{ét}, \text{Br}$ ou, si X est une G -variété pour un groupe algébrique connexe G , pour $\text{ob} = \text{Br}'_G(X)$ ou $\text{ob} = G - \text{ét}, \text{Br}'_G$.

Le lemme suivant généralise [4, Lem. 5.2] (voir [12, Lem. 2.2.8] pour une variante).

LEMME 6.3. — Soient X une variété lisse et $\{X_i\}_{i \in I}$ les composantes connexes de X telles que X_i soit géométriquement intègre pour tout $i \in I$. Alors on a :

$$X(\mathbf{A}_k^{nc})^{\text{Br}_{2/3}(X)} = \prod_{i \in I} X_i(\mathbf{A}_k^{nc})^{\text{Br}_{2/3}(X_i)}$$

et, si X est une G -variété pour un groupe linéaire connexe G , on a :

$$X(\mathbf{A}_k^{nc})^{\text{Br}'_G(X)} = \prod_{i \in I} X_i(\mathbf{A}_k^{nc})^{\text{Br}'_G(X_i)}$$

et

$$X(\mathbf{A}_k^{nc})^{G-\text{ét}, \text{Br}'_G} = \prod_{i \in I} X_i(\mathbf{A}_k^{nc})^{G-\text{ét}, \text{Br}'_G}.$$

Démonstration. — Puisque $\text{Br}_{2/3}(-)$ (resp. $\text{Br}'_G(-)$, resp. l'ensemble des F -torseurs, resp. l'ensemble des F -torseurs G -compatibles pour un k -groupe fini F) de X est la somme directe de celui des composantes connexes de X , on obtient l'inclusion \supset dans les trois cas ci-dessus.

Par ailleurs, soit $\pi_0(X)$ le schéma des composantes connexes géométriques de X , i.e. $\pi_0(X)$ est un k -schéma fini étale et il existe un k -morphisme surjectif $\phi : X \rightarrow \pi_0(X)$ de fibres géométriquement intègres. D'après [19, Prop. 3.3], on a $\pi_0(X)(\mathbf{A}_k^{nc})^{\text{Br}(\pi_0(X))} = \pi_0(X)(k)$. Par définition, $\phi^*(\text{Br}(\pi_0(X))) \subset \text{Br}_{2/3}(X)$ et $\phi^*(\text{Br}(\pi_0(X))) \subset \text{Br}'_G(X)$, d'où l'on obtient l'inclusion \subset . □

PROPOSITION 6.4. — Soit X une k -variété lisse géométriquement intègre. Soit

$$1 \rightarrow S \rightarrow L \xrightarrow{\psi} F \rightarrow 1$$

une suite exacte de k -groupes finis. Soient $V \rightarrow X$ un L -torseur et $Y := V/S \rightarrow X$ le F -torseur induit par ψ . Supposons que S est contenu dans le centre de L . Alors, pour tout $\sigma \in H^1(k, F)$ avec $Y_\sigma(\mathbf{A}_k)^{\text{Br}_{2/3}(Y_\sigma)} \neq \emptyset$, il existe un $\alpha \in H^1(k, L)$ tel que $\psi_*(\alpha) = \sigma$.

Démonstration. — D'après le lemme 6.3, il existe une composante connexe $X' \subset Y_\sigma$ telle que $X'(\mathbf{A}_k)^{\text{Br}_{2/3}(X')} \neq \emptyset$. Ainsi, X' est géométriquement intègre sur k .

D'après [9, Prop. 1.3], il existe une suite exacte $0 \rightarrow S \rightarrow T \rightarrow T_0 \rightarrow 0$ avec T un tore flasque et T_0 un tore quasi-trivial. Soit $L' := L \times^S T$ le produit contracté (cf. [25, Lem. 2.2.3]). Alors L' est un groupe linéaire, car S est contenu dans le centre de L . Ceci induit un diagramme commutatif de suites exactes et de colonnes exactes :

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & 1 & & 1 & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 1 & \longrightarrow & S & \longrightarrow & L & \xrightarrow{\psi} & F \longrightarrow 1 \\
 & & \downarrow \phi & & \downarrow \psi_2 & & \downarrow = \\
 1 & \longrightarrow & T & \longrightarrow & L' & \xrightarrow{\psi_1} & F \longrightarrow 1 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & T_0 & \xrightarrow{=} & T_0 & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & 0 & & 0 & & .
 \end{array}$$

Puisque $H^1(k, T_0) = 0$, ceci induit un diagramme commutatif de suites exactes d'ensembles pointés :

$$\begin{array}{ccccc}
 H^1(k, L) & \xrightarrow{\psi_*} & H^1(k, F) & \longrightarrow & H^2(k, S) \\
 \downarrow & & \downarrow = & & \downarrow \\
 H^1(k, L') & \xrightarrow{\psi_{1,*}} & H^1(k, F) & \longrightarrow & H^2(k, T).
 \end{array}$$

D'après [17, (2)], on a un diagramme commutatif de suites exactes :

$$\begin{array}{ccccc}
 H^1(Y, S) & \xrightarrow{\chi} & \text{Hom}_{D^+(k)}(S^*, KD'(Y)) & \longrightarrow & H^2(k, S) \\
 & & \downarrow \psi_3 & & \\
 H^1(Y_\sigma, S_\sigma) & \longrightarrow & \text{Hom}_{D^+(k)}(S_\sigma^*, KD'(Y_\sigma)) & \longrightarrow & H^2(k, S_\sigma) \\
 \downarrow & & \downarrow \psi_4 & & \downarrow \\
 H^1(X', S_\sigma) & \xrightarrow{\chi_S} & \text{Hom}_{D^+(k)}(S_\sigma^*, KD'(X')) & \xrightarrow{\partial_S} & H^2(k, S_\sigma) \\
 \downarrow & & \downarrow -\circ\phi_\sigma^* & & \downarrow \\
 H^1(X', T_\sigma) & \xrightarrow{\chi_T} & \text{Hom}_{D^+(k)}(T_\sigma^*, KD'(X')) & \xrightarrow{\partial_T} & H^2(k, T),
 \end{array}$$

où ψ_3 est induit par le tordu de σ (voir [5, Lem. 7.2]) et ψ_4 est induit par $X' \subset Y_\sigma$ (et donc $KD'(Y_\sigma) \rightarrow KD'(X')$). Appliquons [5, Lem. 7.3] au L' -torseur $\psi_{2,*}([V])$ sur X . On obtient que $\sigma \in \text{Im}(\psi_{1,*}) = \text{Im}(\psi_*)$ si et seulement si

$$\partial_S((\psi_4 \circ \psi_3 \circ \chi)([V]_Y)) = \partial_T((\psi_4 \circ \psi_3 \circ \chi)([V]_Y) \circ \phi_\sigma^*) = 0,$$

où $[V]_Y$ est le S -torseur $V \rightarrow Y$. D'après la proposition 2.2, le type χ_S est surjectif, d'où le résultat. □

7. Démonstration

Dans toute cette section, k est un corps de nombres. Sauf mention explicite du contraire, une variété est une k -variété.

Les définitions $X(\mathbf{A}_k)^{\text{ét}, \text{Br}}$, $X(\mathbf{A}_k)^{G\text{-ét}, \text{Br}_G}$, $X(\mathbf{A}_k)^{G\text{-ét}, \text{Br}'_G}$ peuvent être généralisés à la façon ci-dessous (7.1).

Soit \mathbf{AB} la catégorie des groupes abéliens. Soit \mathbf{GX} la catégorie des couples (G, X) avec G un groupe algébrique connexe et X une G -variété lisse, et un morphisme $(H, Y) \rightarrow (G, X)$ dans \mathbf{GX} est un couple (ψ, f) avec $\psi : H \rightarrow G$ un homomorphisme et $f : Y \rightarrow X$ un H -morphisme, où l'action de H sur X est induite par ψ .

En fait, pour tout toseur $f : Y \rightarrow X$ sous un k -groupe fini, il existe un groupe algébrique connexe H et un homomorphisme fini surjectif $\psi : H \rightarrow G$ tels que $(\psi, f) \in \mathbf{GX}$ et ψ soit minimal pour cette propriété (cf. [4, Prop. 3.8]). Ce groupe H s'appelle le *groupe minimal compatible avec le toseur f* ([4, Déf. 3.9]).

Soit $B(-, -) : \mathbf{GX} \rightarrow \mathbf{AB}$ un foncteur contravariant qui associe au couple (G, X) un sous-groupe $B(G, X) \subset \text{Br}(X)$. On définit

$$(7.1) \quad X(\mathbf{A}_k)^{G\text{-ét}, B(G, -)} := \bigcap_{\substack{f: Y \xrightarrow{F} X \\ F \text{ fini}}} \bigcup_{\substack{G\text{-compatible}, \\ \sigma \in H^1(k, F)}} f_\sigma(Y_\sigma(\mathbf{A}_k)^{B(G, Y_\sigma)})$$

On fixe un objet $(G, X) \in \mathbf{GX}$. Soit \mathbf{GX}_X l'ensemble des objets $(H, Y) \in \mathbf{GX}$ tels qu'il existe un morphisme $(\psi, f) : (H, Y) \rightarrow (G, X)$ dans \mathbf{GX} avec ψ, f finis. En fait, la démonstration de [4, Thm. 1.4] montre le théorème ci-dessous.

THÉORÈME 7.1 ([4, Rem. 6.7]). — Soit $B(-, -) : \mathbf{GX} \rightarrow \mathbf{AB}$ un foncteur contravariant comme ci-dessus. Supposons que, pour tout entier $n \geq 2$ et tout objet (H, Y) dans \mathbf{GX}_X avec Y géométriquement intègre, on a :

- (1) si $Y(\mathbf{A}_k)^{B(H, Y)} \neq \emptyset$, alors il existe un toreur universel de n -torsion pour Y ;
- (2) pour tout élément de n -torsion $\alpha \in \text{Br}(Y)$ et tout toreur universel de n -torsion $f : \mathcal{T}_Y \rightarrow Y$ (s'il existe) sous le groupe S_Y , on a $f^*(\alpha) \in B(H', \mathcal{T}_Y)$, où H' est le groupe minimal compatible avec le toreur f ;
- (3) pour tout $(H', Y') \in \mathbf{GX}_X$, si $Y' = \bigsqcup_{i \in I} Y_i$ avec Y_i géométriquement intègre pour tout $i \in I$, on a

$$Y'(\mathbf{A}_k^{nc})^{B(H', Y')} = \prod_{i \in I} Y_i(\mathbf{A}_k^{nc})^{B(H', Y_i)}$$

et

$$Y'(\mathbf{A}_k^{nc})^{H'\text{-ét}, B(H', -)} = \prod_{i \in I} Y_i(\mathbf{A}_k^{nc})^{H'\text{-ét}, B(H', -)};$$

- (4) pour une extension centrale de k -groupes finis $1 \rightarrow S \rightarrow L \xrightarrow{\psi} F \rightarrow 1$, un $\sigma \in H^1(k, F)$, un L -torseur $V \rightarrow Y$ avec $Z := V/S \rightarrow Y$ le F -torseur induit par ψ , alors $Z_\sigma(\mathbf{A}_k)^{B(H', Z_\sigma)} \neq \emptyset$ implique $\sigma \in \text{Im}(H^1(k, L) \rightarrow H^1(k, F))$, where H' est le groupe minimal compatible avec le toreur $Z_\sigma \rightarrow Y$;
- (5) pour un morphisme $(\psi, f) : (H', Y') \rightarrow (H, Y)$ dans \mathbf{GX}_X tel que ψ soit fini surjectif de noyau S central, Y' soit géométriquement intègre et f soit un S -torseur, où l'action de S est induite par l'action de H' , on a, pour tout $\sigma \in H^1(k, S)$, le tordeu Y'_σ est une H' -variété

et :

$$Y(\mathbf{A}_k)^{B(H,Y)} = \bigcup_{\sigma \in H^1(k,S)} f_\sigma(Y'_\sigma(\mathbf{A}_k)^{B(H',Y'_\sigma)}).$$

Alors on a $X(\mathbf{A}_k)^{\text{ét,Br}} = X(\mathbf{A}_k)^{G\text{-ét},B(G,-)}$.

Rappelons que, soit S_X un k -groupe fini commutatif avec

$$S_X^* \cong H^1(X_{\bar{k}}, \mu_n),$$

un *torseur universel de n -torsion* pour X est un S_X -torseur \mathcal{T}_X sur X tel que $\chi([\mathcal{T}_X])$ dans (2.3) soit l'homomorphisme canonique $H^1(X_{\bar{k}}, \mu_n) \rightarrow KD'(X)$ (cf. [4, Déf. 2.1]).

LEMME 7.2. — Soit $B(-, -) : \mathbf{GX} \rightarrow \mathbf{AB}$ un foncteur contravariant comme ci-dessus. Si $\text{Br}_{2/3}(Y) \subset B(H, Y)$ pour tout $(H, Y) \in \mathbf{GX}_X$, alors les hypothèses (1) et (4) du théorème 7.1 valent.

Démonstration. — La proposition 6.4 implique (4).

La proposition 2.2 implique, si $Y(\mathbf{A}_k)^{\text{Br}_{2/3}(Y)} \supset Y(\mathbf{A}_k)^{B(H,Y)} \neq \emptyset$, alors χ dans (2.3) est surjectif, d'où on a (1). □

Démonstration du théorème 1.3. — Par définition, il suffit de montrer que

$$X(\mathbf{A}_k)^{G\text{-ét},\text{Br}'_G} = X(\mathbf{A}_k)^{\text{ét,Br}}.$$

D'après le théorème 7.1, il suffit de vérifier les hypothèses (1)-(5) du théorème 7.1 pour $B(-, -) := \text{Br}'_{(-)}(-)$.

Le lemme 7.2 et la proposition 3.6(1) impliquent (1) et (4). Le lemme 6.3 implique (3). La proposition 6.2 implique (5). À la fin, l'hypothèse (2) découle du même argument que [4, Prop. 3.12]. On le rappelle ci-dessous.

Notons $\psi : H' \rightarrow H$ l'homomorphisme, $\rho : H \times Y \rightarrow Y$, $\rho_t : H' \times \mathcal{T}_Y \rightarrow \mathcal{T}_Y$ les actions et $p_1 : H \times Y \rightarrow H$, $p_2 : H \times Y \rightarrow Y$, $p_{1,t} : H' \times \mathcal{T}_Y \rightarrow H'$, $p_{2,t} : H' \times \mathcal{T}_Y \rightarrow \mathcal{T}_Y$ les projections. Soit \mathcal{T}_H un *torseur universel de n -torsion* pour H sous le groupe S_H .

La formule de Künneth de degré 2 ([28], cf. [4, Cor. 2.7]) donne un homomorphisme surjectif

$$H^2(H, \mu_n) \oplus H^2(Y, \mu_n) \oplus \text{Hom}_k(S_H, S_Y^*) \xrightarrow{(p_1^*, p_2^*, \varepsilon)} H^2(H \times Y, \mu_n),$$

où $\varepsilon(\phi) = \phi_*([\mathcal{T}_H]) \cup [\mathcal{T}_Y]$. On obtient : pour tout $\alpha_1 \in H^2(Y, \mu_n)$, il existe un $\phi \in \text{Hom}(S_H, S_Y^*)$ et un $\beta \in H^2(H, \mu_n)$ tels que $(\rho^* - p_2^*)(\alpha_1) = \varepsilon(\phi) + p_1^*(\beta)$.

Puisque $f^*([\mathcal{T}_Y]) = 0 \in H^1(\mathcal{T}_Y, S_Y)$, on a

$$(\psi \times f)^*(\varepsilon(\phi)) = (\psi \times f)^*(\phi_*([\mathcal{T}_H]) \cup [\mathcal{T}_Y]) = \phi_*(\psi^*([\mathcal{T}_H])) \cup f^*([\mathcal{T}_Y]) = 0.$$

Alors $(\rho_t^* - p_{2,t}^*)(f^*(\alpha_1)) = (\psi \times f)^*((\rho^* - p_2^*)(\alpha_1)) = (\psi \times f)^*(p_1^*(\beta)) = p_{1,t}^*(\psi^*(\beta))$. D'après la suite exacte de Kummer,

$$(\rho_t^* - p_{2,t}^*)(f^*(\alpha)) \subset p_{1,t}^* \operatorname{Im}(H^2(H', \mu_n) \rightarrow \operatorname{Br}(H')),$$

d'où le résultat. \square

COROLLAIRE 7.3. — *Soit X un G -espace homogène à stabilisateur géométrique connexe. Alors*

$$X(\mathbf{A}_k)^{\operatorname{Br}'_G(X)} = X(\mathbf{A}_k)^{\text{ét}, \operatorname{Br}}.$$

Démonstration. — D'après [4, Cor. 3.5(4)], tout torseur G -compatible sous un k -groupe fini provient de k . Donc on a

$$X(\mathbf{A}_k)^{G\text{-ét}, \operatorname{Br}'_G} = X(\mathbf{A}_k)^{\operatorname{Br}'_G(X)}.$$

Le résultat découle du théorème 1.3. \square

BIBLIOGRAPHIE

- [1] M. BOROVOI & C. DEMARCHE, « Manin obstruction to strong approximation for homogeneous spaces », *Comment. Math. Helv.* **88** (2013), n° 1, p. 1-54.
- [2] T. BRÖCKER & T. TOM DIECK, *Representations of compact Lie groups*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 98, Springer-Verlag, New York, 1995, Translated from the German manuscript, Corrected reprint of the 1985 translation, x+313 pages.
- [3] Y. CAO, « Approximation forte pour les variétés avec une action d'un groupe linéaire », *Compos. Math.* **154** (2018), n° 4, p. 773-819.
- [4] ———, « Sous-groupe de Brauer invariant et obstruction de descente itérée », *Algebra Number Theory* **14** (2020), n° 8, p. 2151-2183.
- [5] Y. CAO, C. DEMARCHE & F. XU, « Comparing descent obstruction and Brauer–Manin obstruction for open varieties », *Trans. Amer. Math. Soc.* **371** (2019), n° 12, p. 8625-8650.
- [6] Y. CAO, Y. LIANG & F. XU, « Arithmetic purity of strong approximation for homogeneous spaces », *J. Math. Pures Appl. (9)* **132** (2019), p. 334-368.
- [7] Y. CAO & F. XU, « Strong approximation with Brauer–Manin obstruction for groupic varieties », *Proc. Lond. Math. Soc. (3)* **117** (2018), n° 4, p. 727-750.
- [8] J.-L. COLLIOT-THÉLÈNE & J.-J. SANSUC, « La descente sur les variétés rationnelles. II », *Duke Math. J.* **54** (1987), n° 2, p. 375-492.
- [9] ———, « Principal homogeneous spaces under flasque tori : applications », *J. Algebra* **106** (1987), n° 1, p. 148-205.
- [10] B. CONRAD, « Weil and Grothendieck approaches to adelic points », *Enseign. Math. (2)* **58** (2012), n° 1-2, p. 61-97.
- [11] B. CREUTZ, « There are no transcendental Brauer–Manin obstructions on abelian varieties », *Int. Math. Res. Not. IMRN* (2020), n° 9, p. 2684-2697.
- [12] C. DEMARCHE, « Méthodes cohomologiques pour l'étude des points rationnels sur les espaces homogènes », Thèse, Université Paris-Sud, 2009.

- [13] ———, « Obstruction de descente et obstruction de Brauer–Manin étale », *Algebra Number Theory* **3** (2009), n° 2, p. 237-254.
- [14] L. FU, *Étale cohomology theory*, revised éd., Nankai Tracts in Mathematics, vol. 14, World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., Hackensack, NJ, 2015, x+611 pages.
- [15] A. GROTHENDIECK (éd.), *Revêtements étales et groupe fondamental (SGA 1)*, Documents Mathématiques (Paris), vol. 3, Société Mathématique de France, Paris, 2003, Séminaire de géométrie algébrique du Bois Marie 1960–61. Directed by A. Grothendieck, With two papers by M. Raynaud, Updated and annotated reprint of the 1971 original [Lecture Notes in Math., 224, Springer, Berlin; MR0354651 (50 #7129)], xviii+327 pages.
- [16] D. HARARI, « Groupes algébriques et points rationnels », *Math. Ann.* **322** (2002), n° 4, p. 811-826.
- [17] D. HARARI & A. N. SKOROBOGATOV, « Descent theory for open varieties », in *Torsors, étale homotopy and applications to rational points*, London Math. Soc. Lecture Note Ser., vol. 405, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2013, p. 250-279.
- [18] K. IWASAWA, « On some types of topological groups », *Ann. of Math. (2)* **50** (1949), p. 507-558.
- [19] Q. LIU & F. XU, « Very strong approximation for certain algebraic varieties », *Math. Ann.* **363** (2015), n° 3-4, p. 701-731.
- [20] J. S. MILNE, *Étale cohomology*, Princeton Mathematical Series, vol. 33, Princeton University Press, Princeton, N.J., 1980, xiii+323 pages.
- [21] J. MILNOR, *Morse theory*, Annals of Mathematics Studies, vol. 51, Princeton University Press, Princeton, N.J., 1963, Based on lecture notes by M. Spivak and R. Wells, vi+153 pages.
- [22] M. ORR, A. N. SKOROBOGATOV, D. VALLONI & Y. G. ZARHIN, « Invariant Brauer group of an abelian variety », *Israel J. Math.* **249** (2022), n° 2, p. 695-733.
- [23] B. POONEN, « Insufficiency of the Brauer–Manin obstruction applied to étale covers », *Ann. of Math. (2)* **171** (2010), n° 3, p. 2157-2169.
- [24] J.-J. SANSUC, « Groupe de Brauer et arithmétique des groupes algébriques linéaires sur un corps de nombres », *J. Reine Angew. Math.* **327** (1981), p. 12-80.
- [25] A. SKOROBOGATOV, *Torsors and rational points*, Cambridge Tracts in Mathematics, vol. 144, Cambridge University Press, Cambridge, 2001, viii+187 pages.
- [26] ———, « Descent obstruction is equivalent to étale Brauer–Manin obstruction », *Math. Ann.* **344** (2009), n° 3, p. 501-510.
- [27] A. N. SKOROBOGATOV, « Beyond the Manin obstruction », *Invent. Math.* **135** (1999), n° 2, p. 399-424.
- [28] A. N. SKOROBOGATOV & Y. G. ZARHIN, « The Brauer group and the Brauer–Manin set of products of varieties », *J. Eur. Math. Soc. (JEMS)* **16** (2014), n° 4, p. 749-768.
- [29] V. SRINIVAS, *Algebraic K-theory*, second éd., Progress in Mathematics, vol. 90, Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 1996, xviii+341 pages.
- [30] M. STOLL, « Finite descent obstructions and rational points on curves », *Algebra Number Theory* **1** (2007), n° 4, p. 349-391.
- [31] C. A. WEIBEL, *An introduction to homological algebra*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, vol. 38, Cambridge University Press, Cambridge, 1994, xiv+450 pages.

Manuscrit reçu le 7 septembre 2020,
révisé le 10 juillet 2021,
accepté le 4 novembre 2021.

Yang CAO
University of Science and Technology of China
96 Jinzhai Road
230026 Hefei (China)
yangcao1988@ustc.edu.cn
yangcao1988@gmail.com