

# ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

Christine HUYGHE & Nathalie WACH

**Interprétation cristalline de l'isomorphisme de Deligne–Illusie**

Tome 73, n° 3 (2023), p. 1133-1201.

<https://doi.org/10.5802/aif.3545>

Article mis à disposition par ses auteurs selon les termes de la licence  
CREATIVE COMMONS ATTRIBUTION – PAS DE MODIFICATION 3.0 FRANCE



<http://creativecommons.org/licenses/by-nd/3.0/fr/>



Les *Annales de l'Institut Fourier* sont membres du  
Centre Mersenne pour l'édition scientifique ouverte

[www.centre-mersenne.org](http://www.centre-mersenne.org)

e-ISSN : 1777-5310

# INTERPRÉTATION CRISTALLINE DE L'ISOMORPHISME DE DELIGNE–ILLUSIE

par Christine HUYGHE & Nathalie WACH (\*)

---

RÉSUMÉ. — Soit  $k$  un corps fini de caractéristique  $p > 0$ ,  $W(k)$  l'anneau des vecteurs de Witt de  $k$ ,  $X$  un schéma lisse sur  $\text{spec } W(k)$  de dimension  $< p - 1$ ,  $X_0$  la fibre spéciale de  $X$ . En 1987, Deligne et Illusie ont démontré la dégénérescence de la suite spectrale de Hodge vers de Rham d'une façon purement algébrique, en construisant un quasi-isomorphisme dans la catégorie dérivée entre le complexe de de Rham de  $X_0$  et un complexe à différentielles nulles. Concomitamment, Fontaine et Messing ont construit un Frobenius divisé sur les complexes cristallins associés à  $X_0$ . Nous montrons que ces deux morphismes de catégories dérivées sont compatibles. Comme application de cette compatibilité, nous donnons la structure du  $\varphi$ -module filtré mod  $p$  et celle du  $(\varphi, \Gamma)$ -module associé à la courbe de Drinfeld.

ABSTRACT. — Let  $k$  be a finite field of characteristic  $p > 0$ ,  $W(k)$  the ring of Witt vectors of  $k$ ,  $X$  a smooth scheme over  $\text{spec } W(k)$  of dimension  $< p - 1$  and  $X_0$  the special fiber of  $X$ . In 1987, Deligne and Illusie proved the degeneration of the spectral sequence “de Hodge vers de Rham” in a purely algebraic way, by constructing a quasi-isomorphism at the level of derived categories between the de Rham complex of  $X_0$  with a complex with 0 differentials. Simultaneously Fontaine and Messing constructed a divided Frobenius map on the crystalline complexes associated with  $X_0$ . We show that both morphisms of derived categories are compatible mod  $p > 0$ . We use this compatibility to compute the filtered  $\varphi$ -module mod  $p$  and the  $(\varphi, \Gamma)$ -module mod  $p$  associated to the Drinfeld Curve.

## Introduction

Soient  $k$  un corps fini de caractéristique  $p > 0$ ,  $W = W(k)$ ,  $S = \text{spec } W$ ,  $X$  un  $S$ -schéma propre et lisse sur  $S$ , et  $X_0$  sa fibre spéciale. Fontaine–Messing ont construit en [10] un Frobenius divisé cristallin, construction

---

*Mots-clés* : courbe de Drinfeld, cohomologie cristalline, cohomologie de De Rham, module  $(\varphi, \Gamma)$ .

*Classification Mathématique (2020)* : 11S23, 14F30, 14F40.

(\*) Les deux auteurs ont bénéficié du soutien du projet CETHop : ANR-09-JCJC-0048-01, coordonné par Xavier Caruso, projet de l'Agence Nationale de la Recherche.

généralisée par Breuil [4] dans le cas log-cristallin. D'autre part, pour montrer la dégénérescence de la suite spectrale de Hodge vers de Rham, Deligne et Illusie ont construit une flèche mod  $p$  en [6] qui fait aussi intervenir un Frobenius divisé. L'objet de cet article est de comparer la réduction mod  $p$  du Frobenius divisé cristallin de Fontaine–Messing et la construction de Deligne–Illusie, ce qui répond à une question tout à fait naturelle. L'intérêt du calcul de Deligne–Illusie est qu'il est algorithmique. En effet, ce morphisme est défini explicitement comme une flèche des complexes des modules des formes différentielles sur  $X_0$  vers un complexe de Čech du complexe de de Rham de  $X_0$ , relatif à un recouvrement affine modulo  $p^2$ , sur lequel on dispose d'un relèvement du Frobenius. Ceci nous permet par exemple de calculer le  $\varphi$ -module filtré mod  $p$  associé à la courbe de Drinfeld, en complétant ainsi des résultats de Haastert–Jantzen [12] sur la cohomologie cristalline de ces courbes. En nous appuyant sur leur calcul, nous pouvons calculer, grâce à une méthode due à Wach, le  $(\varphi, \Gamma)$ -module mod  $p$  associé à cette courbe, ce qui est équivalent à la description comme représentation galoisienne de la réduction mod  $p$ , de la cohomologie étale de  $X_{\bar{K}}$  à coefficients dans  $\mathbf{Q}_p$  (où  $\bar{K}$  est une clôture algébrique de  $K$ ).

Voici le contenu de cet article. Nous donnons les notations dans la première partie. Dans la deuxième partie, nous rappelons les constructions cristallines usuelles ainsi que la construction du Frobenius divisé de Fontaine–Messing, précisée par Kato [15]. Dans la troisième partie, nous établissons le théorème de comparaison en comparant d'abord la construction de Deligne–Illusie et celle de Fontaine–Messing en degré  $k = 1$ . Dans ce cas, le calcul du Frobenius cristallin se fait par descente cohomologique. La construction de Deligne–Illusie est multiplicative à partir du cas  $k = 1$ . Le reste de la démonstration consiste à observer que la construction du Frobenius divisé cristallin est elle aussi multiplicative. C'est facile à faire sur un schéma muni d'un relèvement du Frobenius et pour obtenir le cas général on s'y ramène par descente cohomologique. Nous pouvons alors déduire le cas de degré quelconque  $\leq p - 2$  du cas de degré  $k = 1$ . Dans la quatrième partie nous passons aux applications cohomologiques dans le cas où  $X$  est projectif et montrons que, après passage à la cohomologie, le morphisme de Deligne–Illusie coïncide mod  $p$  avec le Frobenius divisé de Mazur. Dans la cinquième partie, nous appliquons le résultat précédent au calcul du Frobenius divisé sur la cohomologie cristalline de la courbe de Drinfeld (théorème 5.4). Nous en déduisons le  $(\varphi, \Gamma)$ -module associé.

Énonçons à présent les principaux résultats de cet article. Désignons par  $X'_0$  le changement de base de  $X_0$  par le morphisme de Frobenius de

$\text{spec } k \rightarrow \text{spec } k$ ,  $DR_{X_0}$  le complexe de de Rham de  $X_0$ , les faisceaux cristallins sont définis en section 1. Le théorème de comparaison 3.1 se résume dans le fait que le diagramme suivant de faisceaux dans la catégorie dérivée des faisceaux de  $\mathcal{O}_{X'_0}$ -modules est commutatif

$$\begin{array}{ccc}
 \bigoplus_{k=0}^{p-2} Ru_{X'_0*} \mathcal{J}_{X'_0/S_0}^{[k]} / \mathcal{J}_{X'_0/S_0}^{[k+1]} & \xrightarrow{\Phi_{\text{cris}}} & \sigma_{\leq p-2} F_* Ru_{X_0*} \mathcal{O}_{X_0/S_0} \\
 \text{can} \downarrow & & \text{can} \downarrow \\
 \bigoplus_{k=0}^{p-2} \Omega_{X'_0}^k[-k] & \xrightarrow{DI} & \sigma_{\leq p-2} F_* DR_{X_0},
 \end{array}$$

dont la flèche horizontale du haut est le Frobenius divisé cristallin, et celle du bas est le morphisme de Deligne–Illusie.

Dans le cas où  $X$  est projectif de dimension  $\leq p-2$ , et vérifie la condition de Mazur (4.1), nous déduisons (théorème 4.1) que le morphisme  $R^n\Gamma \circ DI$  est égal au Frobenius divisé de Mazur pour tout  $n \leq 2 \dim X$  :

$$R^n\Gamma \circ DI = \bar{\Phi}_M : \bigoplus_{i=0}^n H^{n-i}(X'_0, \Omega_{X'_0}^i) \xrightarrow{\sim} DR_{X_0}.$$

Les résultats précédents permettent de calculer explicitement le Frobenius divisé sur la cohomologie de De Rham de plusieurs familles de courbes, ce qui est une nouveauté. À part l’algorithme de Kedlaya pour les courbes hyperelliptiques [16], en général les calculs explicites aboutissent à la matrice de Cartier ou à la matrice de Hasse–Witt, qui sont des blocs de la matrice que nous calculons.

Outre l’application aux courbes hyperelliptiques présentée dans [13] et à de plus larges familles de courbes dans la thèse de Pierrot [18] et [19], nous présentons ici le calcul du Frobenius divisé sur la cohomologie de De Rham de la courbe de Drinfeld. Dans l’article [12], Haastert et Jantzen exhibent une base adaptée à la filtration de Hodge du premier groupe de cohomologie de De Rham de la courbe de Drinfeld et montrent comment le Frobenius divisé échange les droites engendrées par les vecteurs de la base, sans toutefois calculer les coefficients. L’application de Deligne–Illusie (cf. proposition 5.13) permet de calculer explicitement le Frobenius divisé modulo  $p$  sur les vecteurs de la base de [12] et nous en profitons pour étudier à travers quelques cas particuliers, les dimensions possibles des espaces stables.

Le fait que notre résultat de comparaison soit valable en toute dimension laisse penser que l’on doit pouvoir l’utiliser pour calculer explicitement le Frobenius divisé sur la cohomologie cristalline d’hypersurfaces, dont on parvient à calculer la cohomologie de de Rham à la Cech mod.  $p > 0$ .

### Remerciements

Nous tenons à remercier, pour avoir répondu avec gentillesse et précision à nos questions concernant ce sujet : Christophe Breuil, Luc Illusie et Arthur Ogus. Nous remercions aussi Michel Gros de nous avoir signalé l'article de Haastert–Jantzen [12], ainsi que Pierre Berthelot et Bernard le Stum pour l'intérêt qu'ils ont manifesté pour ce travail. Nous remercions aussi le rapporteur de cet article pour ses remarques constructives.

### 1. Notations

Rappelons que  $p$  est un nombre premier différent de 2,  $k$  est un corps fini de caractéristique  $p > 0$ . Nous noterons  $W = W(k)$ ,  $W_n = W/p^n W$ ,  $S = \text{spec } W$ ,  $S_0 = \text{spec } k$ ,  $S_n = \text{spec } W_{n+1}$ . Dans ce texte,  $X$  est un schéma lisse sur  $S$ , dont la fibre spéciale est  $X_0$ .

Pour tout  $S$ -schéma  $Y$ ,  $Y_n$  sera le schéma  $Y_n = \text{spec } S_n \times_S Y$ .

Étant donné une immersion fermée  $\alpha_n : X_n \hookrightarrow Y_n$  de  $X_n$  dans un  $S_n$ -schéma lisse  $Y_n$ , nous noterons  $\mathcal{P}(Y_n)$  l'enveloppe à puissances divisées de l'idéal de cette immersion,  $\mathcal{J}_{Y_n}$  le faisceau de PD-idéaux de  $\mathcal{P}(Y_n)$  et  $P_{Y_n}$  le spectre de  $\mathcal{P}(Y_n)$ . Le faisceaux d'algèbres  $\mathcal{P}(Y_n)$  est filtrée par les puissances divisées du faisceau d'idéaux  $\mathcal{J}_{Y_n} : \mathcal{J}_{Y_n}^{[k]}$  est l'idéal engendré par les éléments  $x_1^{[a_1]} \dots x_r^{[a_r]}$  tels que les entiers naturels  $a_i$  vérifient  $a_1 + \dots + a_r \geq k$ . En particulier, on a l'égalité  $\mathcal{J}_{Y_n} = \mathcal{J}_{Y_n}^{[1]}$ . On omettra le  $Y_n$  en indice quand le contexte sera clair.

Nous serons amenés à considérer dans la suite les sites cristallins  $X_n/S_n$  (ou  $X_n/S_n$ ), dont on notera  $\mathcal{O}_{X_n/S_n}$  le faisceau structural, défini par

$$\mathcal{O}_{X_n/S_n}(T) = \mathcal{O}_T,$$

si  $U \hookrightarrow T$  est un épaissement de  $U$ , c'est-à-dire une immersion fermée définie par un idéal à puissances divisées (PD-idéal)  $J_U = \text{Ker}(\mathcal{O}_T \rightarrow \mathcal{O}_U)$ . Ces idéaux forment le faisceau de PD-idéaux  $\mathcal{J}_{X_n/S_n}$ . On notera  $\mathcal{J}_{X_n/S_n}^{[k]}$  le  $k$ -ième terme de la filtration PD-adique décrite ci-dessous et on notera  $u_{X_n}$  la projection sur le site zariskien

$$(X_n/S_n)_{\text{cris}} \rightarrow (X_n/S_n)_{\text{zar}}.$$

La lettre grecque  $\sigma$  désignera à la fois le Frobenius sur  $k$ , et aussi son relevé sur  $W$  ou  $W_n$  pour tout  $n \geq 0$ . Si  $Y_0$  est un  $k$ -schéma,  $F_{Y_0}$  sera le Frobenius absolu sur  $Y_0$ ,

$$Y'_0 = Y_0 \times_{\text{spec } k} \text{spec } k,$$

le changement de base par le Frobenius sur  $k$ , et  $F$  sera le Frobenius relatif habituel :  $Y_0 \rightarrow Y'_0$ . De façon abusive, nous noterons aussi  $F$  le morphisme induit par  $F : F^{-1}\mathcal{O}_{Y'_0} \rightarrow \mathcal{O}_{Y_0}$ . En général, si  $Y_n$  est un schéma sur  $S_n$ ,  $Y'_n$  sera le produit fibré par le morphisme  $\sigma$  :

$$Y'_n = Y_n \times_{S_n} S_n.$$

Un relèvement du Frobenius sur  $Y_n$  (resp. sur  $Y$  un  $S$ -schéma) sera la donnée d'un morphisme encore noté  $F$  de  $S_n$ -schémas (resp.  $S$ -schémas), dont la réduction modulo  $p$  est le Frobenius relatif  $F : Y_0 \rightarrow Y'_0$ .

Si  $\mathcal{E}$  est un faisceau de  $W_{n+1}$ -modules libres sur un  $S_n$ -schéma, on notera  $m_p$  (resp.  $m_p^{-1}$ ) l'isomorphisme de multiplication par  $p$ ,  $m_p : \mathcal{E}/p^n\mathcal{E} \xrightarrow{\sim} p \cdot \mathcal{E}$ , (resp. son isomorphisme inverse). Si  $u$  est un morphisme de faisceaux  $W_{n+1}$ -linéaire :  $\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{F}$ , le diagramme suivant est bien entendu commutatif

$$\begin{CD} \mathcal{E}/p^n\mathcal{E} @>\tilde{m}_p>> p \cdot \mathcal{E} \\ @V u VV @. @VV u V \\ \mathcal{F}/p^n\mathcal{F} @>\tilde{m}_p>> p \cdot \mathcal{F} \end{CD}$$

ce qui revient à dire que  $m_p^{-1} \circ u = u \circ m_p^{-1}$ .

Si  $Y$  est un  $S$ -schéma (resp.  $S_n$ -schéma), on notera  $Ab_Y$  la catégorie des faisceaux de groupes abéliens pour la topologie Zariski sur  $Y$  et  $D^b(Ab_Y)$  la catégorie dérivée des complexes à cohomologie bornée des faisceaux de  $Ab_Y$ . On notera aussi  $D^b(\mathcal{O}_Y)$  la catégorie dérivée des complexes à cohomologie bornée des faisceaux de  $\mathcal{O}_Y$ -modules cohérents.

Les conventions pour les complexes (indexés par  $\mathbf{Z}$ ) sont les suivantes : si  $K^\bullet$  est un complexe de modules, et  $a \in \mathbf{Z}$ , alors  $(K^\bullet[a])^j = K^{j+a}$ . Le tronqué cohomologique  $\sigma_{\leq a} K^\bullet$  est le complexe :

$$\cdots \rightarrow K_{a-1} \rightarrow K_a \rightarrow Ker(d_{a+1}) \rightarrow 0 \cdots$$

Soient maintenant  $K^{\bullet,\bullet}$  un bi-complexe de modules tel que  $K^{i,j} = 0$  si  $i \leq i_0$  et  $j \leq j_0$  pour un certain couple  $(i_0, j_0)$ , et dont les différentielles horizontales et verticales sont notées respectivement  $d'$  et  $d''$ . Alors le complexe simple associé sera noté  $[K^{\bullet,\bullet}]_s$  et a pour terme général  $[K^{\bullet,\bullet}]_s^n = K^n = \bigoplus_{i+j=n} K^{i,j}$  et pour différentielle pour  $x \in K^{i,j}$ ,  $d(x) = d'(x) + (-1)^i d''(x)$ .

Soient  $(K_1^\bullet, d_1), \dots, (K_k^\bullet, d_k)$   $k$  complexes de  $A$ -modules libres où  $A$  est un anneau commutatif, alors on notera

$$K_1^\bullet \otimes_A^L \cdots \otimes_A^L K_k^\bullet$$

le complexe de  $n$ -ième terme général

$$\bigoplus_{a_1+\dots+a_k=n} K_1^{a_1} \otimes_A \dots \otimes_A K_k^{a_k},$$

dont la différentielle est donnée pour  $x_1 \in K_1^{a_1}, \dots, x_k \in K_k^{a_k}$  par

$$d(x_1 \otimes \dots \otimes x_k) = d_1(x_1) \otimes x_2 \otimes \dots \otimes x_k + (-1)^{a_1} x_1 \otimes d_2(x_2) \otimes \dots \otimes x_k + (-1)^{(\sum_{i=1}^{k-1} a_i)} x_1 \otimes x_2 \otimes \dots \otimes x_{k-1} \otimes d_k(x_k).$$

## 2. Rappel de la construction du Frobenius divisé cristallin

Cette application a été définie par Fontaine–Messing [10], et nous utiliserons la version qu’en donne Kato au niveau des résolutions [15, 1 du chapitre I], ce qui donnera donc le calcul du Frobenius divisé sur la cohomologie cristalline.

### 2.1. Réalisations cristallines

Les résultats de cette partie sont des conséquences faciles des résultats des chapitres 5 et 6 du livre de Berthelot–Ogus [3]. Dans cette partie  $X_n$  désigne un schéma lisse quelconque sur  $S_n$ . On se donne deux  $S_n$ -schémas lisses  $Y_n$  et  $Z_n$ , ainsi que des plongements  $\alpha_n : X_n \hookrightarrow Y_n, \beta_n : X_n \hookrightarrow Z_n$ , un  $S_n$ -morphisme  $h : Z_n \rightarrow Y_n$  tels que le diagramme suivant de  $S_n$ -schémas soit commutatif

$$(2.1) \quad \begin{array}{ccc} & & Z_n \\ & \nearrow \beta_n & \downarrow h \\ X_n & \hookrightarrow & Y_n \end{array}$$

Des plongements  $\alpha_n$  et  $\beta_n$ , on déduit des plongements  $\alpha_{n'} : X_{n'} \hookrightarrow Y_{n'}$  et  $\beta_{n'} : X_{n'} \hookrightarrow Z_{n'}$  pour tout entier  $n' \leq n$ .

DÉFINITION 2.1. — On appelle réalisation (sur  $Y_n$ ) de  $Ru_{X_n} \ast \mathcal{O}_{X_n/S_n}$  tout complexe de  $D^b(\text{Ab}_{Y_n})$  qui est quasi-isomorphe à  $Ru_{X_n} \ast \mathcal{O}_{X_n/S_n}$ .

On remarquera que ces faisceaux en groupes abéliens sur  $Y_n$  sont à support sur  $X_0$ , car c’est le cas des faisceaux de PD-enveloppes  $\mathcal{P}(Y_n)$ . Considérons la réalisation de  $Ru_{X_n} \ast \mathcal{O}_{X_n/S_n}$  suivante

$$(2.2) \quad \begin{aligned} \mathcal{E}_{Y_n} : 0 &\rightarrow \mathcal{P}(Y_n) \rightarrow \mathcal{P}(Y_n) \otimes_{\mathcal{O}_{Y_n}} \Omega_{Y_n}^1 \\ &\rightarrow \dots \rightarrow \mathcal{P}(Y_n) \otimes_{\mathcal{O}_{Y_n}} \Omega_{Y_n}^N \rightarrow 0, \end{aligned}$$

dont la différentielle est obtenue à partir du fait que  $d(x^{[a]}) = x^{[a-1]}dx$  pour toute section locale  $x$  du faisceau d'idéaux à puissances divisées  $\mathcal{J}$  de  $\mathcal{P}(Y_n)$ . On obtient ainsi un quasi-isomorphisme can :  $Ru_{X_n} \ast \mathcal{O}_{X_n/S_n} \xrightarrow{\sim} \mathcal{E}_{Y_n}$ . Remarquons que  $\mathcal{E}_{X_n}$  est le complexe de de Rham  $DR_{X_n}$ .

On a une flèche canonique  $h^* \mathcal{E}_{Y_n} \rightarrow \mathcal{E}_{Z_n}$ , donnée par les morphismes canoniques  $h^* \Omega_{Y_n}^q \rightarrow \Omega_{Z_n}^q$  et  $h^* \mathcal{P}(Y_n) \rightarrow \mathcal{P}(Z_n)$ . Dans  $D^b(\text{Ab}_{Y_n})$  on dispose d'un quasi-isomorphisme de complexes can :  $Ru_{X_n} \ast \mathcal{J}_{X_n/S_n}^{[k]} \xrightarrow{\sim} \mathcal{L}_{Y_n}^{[k]}$ , où  $\mathcal{L}_{Y_n}^{[k]}$  est le complexe de faisceaux Zariski sur  $X_n$ ,

$$(2.3) \quad \begin{aligned} \mathcal{L}_{Y_n}^{[k]} : 0 &\rightarrow \mathcal{J}^{[k]} \rightarrow \mathcal{J}^{[k-1]} \otimes_{\mathcal{O}_{Y_n}} \Omega_{Y_n}^1 \\ &\rightarrow \dots \rightarrow \mathcal{J}^{[k-N]} \otimes_{\mathcal{O}_{Y_n}} \Omega_{Y_n}^N \rightarrow 0. \end{aligned}$$

De même que précédemment, la donnée de ces complexes est fonctorielle en le plongement  $X_n \hookrightarrow Y_n$ .

Nous noterons de plus  $\mathcal{M}_{Y_n}^{[k]}$  le quotient à support dans  $X_n$

$$\mathcal{M}_{Y_n}^{[k]} = \mathcal{L}_{Y_n}^{[k]} / \mathcal{L}_{Y_n}^{[k+1]},$$

c'est-à-dire le complexe

$$(2.4) \quad \begin{aligned} \mathcal{M}_{Y_n}^{[k]} : 0 &\rightarrow \mathcal{J}^{[k]} / \mathcal{J}^{[k+1]} \rightarrow \mathcal{J}^{[k-1]} / \mathcal{J}^{[k]} \otimes_{\mathcal{O}_{Y_n}} \Omega_{Y_n}^1 \\ &\rightarrow \dots \rightarrow \mathcal{J}^{[k-N]} / \mathcal{J}^{[k-N+1]} \otimes_{\mathcal{O}_{Y_n}} \Omega_{Y_n}^N \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Remarquons que d'après 5.2 de [3]

$$(2.5) \quad \mathcal{O}_{X_n/S_n} / \mathcal{J}_{X_n/S_n}^1 = i_{X_n/S_n} \ast \mathcal{O}_{X_n}.$$

Le lemme suivant donne une résolution du faisceau

$$Ru_{X_n} \ast \mathcal{J}_{X_n/S_n}^{[k]} / \mathcal{J}_{X_n/S_n}^{[k+1]} \text{ (section 1)}.$$

LEMME 2.2. — *Pour tout entier  $k$ , il existe un quasi-isomorphisme de complexes*

$$\text{can} : Ru_{X_n/S_n} \ast (\mathcal{J}_{X_n/S_n}^{[k]} / \mathcal{J}_{X_n/S_n}^{[k+1]}) \xrightarrow{\sim} \mathcal{M}_{Y_n}^{[k]}.$$

*Démonstration.* — Ce résultat provient du chapitre 6 de [3], et plus particulièrement du lemme de Poincaré filtré cristallin. Introduisons le faisceau linéarisé filtré de loc. cit.

$$F^k L(\Omega_{Y_n}^q) = \mathcal{J}^{[k-q]}(\mathcal{P}(Y_n) \otimes_{\mathcal{O}_{Y_n}} \mathcal{P}(Y_n) \otimes_{\mathcal{O}_{Y_n}} \Omega_{Y_n}^q).$$

On se reportera à loc. cit. pour voir que ces faisceaux définissent des faisceaux sur  $(X_n/S_n)_{\text{cris}}$ , acycliques pour le foncteur  $u_{X_n} \ast$  et vérifient

$$u_{X_n} \ast (F^k L(\Omega_{Y_n}^q)) \simeq \mathcal{J}^{[k-q]} \otimes_{\mathcal{O}_{Y_n}} \Omega_{Y_n}^q.$$



De plus, par le lemme de Poincaré filtré cristallin, on a un quasi-isomorphisme de faisceaux sur  $(X_n/S_n)_{\text{cris}}$

$$\mathcal{J}_{X_n/S_n}^{[k]} \simeq F^k L(\Omega_{Y_n}^\bullet).$$

En appliquant la longue suite exacte de cohomologie, on trouve que les faisceaux  $F^k L(\Omega_{Y_n}^q)/F^{k+1} L(\Omega_{Y_n}^q)$  sont acycliques pour le foncteur  $u_{X_n^*}$ , de sorte que l'on a une résolution acyclique dans  $(X_n/S_n)_{\text{cris}}$

$$\mathcal{J}_{X_n/S_n}^{[k]} / \mathcal{J}_{X_n/S_n}^{[k+1]} \simeq F^k L(\Omega_{Y_n}^\bullet) / F^{k+1} L(\Omega_{Y_n}^\bullet).$$

On a de plus,

$$\begin{aligned} u_{X_n^*} (F^k L(\Omega_{Y_n}^q) / F^{k+1} L(\Omega_{Y_n}^q)) &\simeq u_{X_n^*} (F^k L(\Omega_{Y_n}^q)) / u_{X_n^*} (F^{k+1} L(\Omega_{Y_n}^q)) \\ &\simeq \mathcal{J}^{[k-q]} / \mathcal{J}^{[k+1-q]} \otimes_{\mathcal{O}_{Y_n}} \Omega_{Y_n}^q. \end{aligned}$$

On calcule donc

$$\begin{aligned} Ru_{X_n^*} (\mathcal{J}_{X_n/S_n}^{[k]} / \mathcal{J}_{X_n/S_n}^{[k+1]}) &\simeq u_{X_n^*} (F^k L(\Omega_{Y_n}^\bullet) / F^{k+1} L(\Omega_{Y_n}^\bullet)) \\ &\simeq \mathcal{J}^{[k-\bullet]} / \mathcal{J}^{[k+1-\bullet]} \otimes_{\mathcal{O}_{Y_n}} \Omega_{Y_n}^\bullet \\ &\simeq \mathcal{M}_{Y_n}^{[k]}, \end{aligned}$$

ce qui donne l'énoncé voulu. □

Il suit de la proposition 1.5.3 de [2] que les complexes  $\mathcal{E}_{Y_n}$ ,  $\mathcal{M}_{Y_n}^{[k]}$ , (resp.  $\mathcal{L}_{Y_n}^{[k]}$ ) sont à termes plats sur  $W_n$ , ce qui implique le lemme suivant qui sera surtout utile dans le cas  $n' = 0$ .

LEMME 2.3. — *Soit  $n' \leq n$ , alors*

$$\begin{aligned} W_{n'} \otimes_{W_n}^{\mathbf{L}} \mathcal{E}_{Y_n} &\simeq \mathcal{E}_{Y_{n'}} \\ W_{n'} \otimes_{W_n}^{\mathbf{L}} \mathcal{M}_{Y_n}^{[k]} &\simeq \mathcal{M}_{Y_{n'}}^{[k]} \text{ (resp. pour } \mathcal{L}_{Y_n}^{[k]} \text{)}. \end{aligned}$$

### 2.2. Cas particuliers

On se donne une immersion fermée  $\alpha_1 : X_1 \hookrightarrow Y_1$ , où  $Y_1$  est un  $S_1$ -schéma lisse, définie par un faisceau d'idéaux  $L_1$ ,  $\beta_1 : X_1 \hookrightarrow Z_1$  une immersion fermée de  $X_1$  dans un  $S_1$ -schéma lisse  $Z_1$ , donnée par un faisceau d'idéaux  $M_1$ ,  $h$  un morphisme de  $S_1$ -schémas :  $Z_1 \rightarrow Y_1$  tel que  $h \circ \beta_1 = \alpha_1$  (comme à la section 2.1 pour  $n = 1$ ). Par changement de base, on a une immersion fermée  $\alpha_0 : X_0 \hookrightarrow Y_0$ , donnée par le faisceau d'idéaux  $L_0 = L_1/pL_1$  (resp.  $X_0 \hookrightarrow Z_0$ , donnée par le faisceau d'idéaux  $M_0$ ). On note aussi  $\mathcal{P}(Y_1)$  la PD-enveloppe de l'idéal  $L_1$ , et  $\mathcal{J}_{Y_1}$  le faisceau de PD-idéaux de cette algèbre (resp.  $\mathcal{J}_{Z_1}$  le faisceau de PD-idéaux de  $\mathcal{P}(Z_1)$ ).

On suppose de plus qu'il existe une section  $s_e$  au morphisme canonique  $\mathcal{O}_{Y_1} \rightarrow \alpha_{1*}\mathcal{O}_{X_1}$ . Cette section  $s_e : \alpha_{1*}\mathcal{O}_{X_1} \rightarrow \mathcal{O}_{Y_1}$  permet de munir l'algèbre  $\mathcal{P}(Y_1)$  d'une structure de  $\alpha_{1*}\mathcal{O}_{X_1}$ -module.

PROPOSITION 2.4. — Soit  $i \in \{0, 1\}$ .

(1) Le complexe  $\mathcal{M}_{Y_i}^{[1]}$  (2.4) est à cohomologie en degrés 0 et 1 et est donné par :

$$\mathcal{M}_{Y_i}^{[1]} : 0 \rightarrow \mathcal{J}_{Y_i} / \mathcal{J}_{Y_i}^{[2]} \rightarrow \alpha_i^* \Omega_{Y_i}^1 \rightarrow 0.$$

(2) On a un quasi-isomorphisme canonique de complexes :  $h^* \mathcal{M}_{Y_i}^{[1]} \rightarrow \mathcal{M}_{Z_i}^{[1]}$ .

(3) Quand  $Y_i = X_i$ , on obtient  $\mathcal{M}_{X_i}^{[1]} \simeq \Omega_{X_i}^1[-1]$ .

Remarque. — La différentielle du complexe  $F_* \mathcal{M}_{Y_0}^{[1]}$  est  $\mathcal{O}_{X'_0}$ -linéaire de sorte que ce complexe est un complexe de  $\mathcal{O}_{X'_0}$ -modules.

Démonstration. — Pour la démonstration, nous fixons  $i = 1$ , le cas  $i = 0$  étant identique. Le (1) est une simple réécriture de (2.4) puisque  $\mathcal{J}^{[k]} = \mathcal{O}_{Y_1}$  si  $k \leq 0$  et que, comme l'immersion fermée  $\alpha_1 : X_1 \hookrightarrow Y_1$  est régulière, on dispose d'après [2, proposition 1.5.3] d'un isomorphisme de faisceaux de  $\mathcal{O}_{Y_1}$ -algèbres

$$\mathcal{O}_{Y_1} / L_1 \xrightarrow{\sim} \mathcal{P}_{Y_1} / \mathcal{J}_{Y_1}.$$

Le (2) provient de la functorialité des résolutions  $\mathcal{L}_{Y_n}^{[m]}$  déjà rappelées au début de la section 2.1, qui fournit des quasi-isomorphismes de complexes ([1, V, corollaire 2.3.5]). L'application induite entre  $h^* \mathcal{M}_{Y_1}^{[1]}$  et  $\mathcal{M}_{Z_1}^{[1]}$  provient des morphismes canoniques  $h^* \mathcal{J}_{Y_1} \rightarrow \mathcal{J}_{Z_1}$ , resp.  $h^* \Omega_{Y_1}^1 \rightarrow \Omega_{Z_1}^1$  et induit un quasi-isomorphisme de complexes puisque ces deux complexes sont une réalisation sur  $Y_1$  et  $Z_1$  de  $Ru_{X_1*}(\mathcal{J}_{X_1/S_1} / \mathcal{J}_{X_1/S_1}^{[2]})$ .  $\square$

Soient  $d_i$  le morphisme canonique  $L_i / L_i^2 \rightarrow \alpha_i^* \Omega_{Y_i}^1$ . On a alors la

PROPOSITION 2.5. — Sous les hypothèses ci-dessus et pour  $i \in \{0, 1\}$ ,

(1) le complexe  $\mathcal{M}_{Y_i}^{[1]}$  est quasi-isomorphe au complexe

$$0 \rightarrow L_i / L_i^2 \xrightarrow{d_i} \alpha_i^* \Omega_{Y_i}^1 \rightarrow 0.$$

(2) On dispose d'un quasi-isomorphisme canonique de complexes :

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & L_i / L_i^2 & \longrightarrow & \alpha_i^* \Omega_{Y_i}^1 & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & M_i / M_i^2 & \longrightarrow & \beta_i^* \Omega_{Z_i}^1 & \longrightarrow & 0. \end{array}$$

*Démonstration.* — La démonstration est donnée pour  $i = 1$ , le cas  $i = 0$  étant identique. On commence par (1). Grâce au lemme précédent, il suffit de montrer que les flèches canoniques qui suivent sont des isomorphismes

$$L_1/L_1^2 \rightarrow \mathcal{J}_{Y_1}/\mathcal{J}_{Y_1}^{[2]}.$$

Cette question est locale sur  $X_1$ . Comme  $\alpha_1$  est une immersion fermée de schémas lisses, cette immersion est régulière et on peut de nouveau utiliser la proposition 1.5.3 de [2]. Soit  $\mathcal{W}$  un ouvert affine de  $Y_1$  tel que  $\tau_1, \dots, \tau_n$  soit une suite régulière de générateurs de  $L(\mathcal{W})$ . Alors, d'après *loc. cit.*, et en utilisant la structure de  $\alpha_{1*}\mathcal{O}_{X_1}$  donné par la section  $s_e$ ,

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_{Y_1}/\mathcal{J}_{Y_1}^{[2]}(\mathcal{W}) &\simeq \bigoplus_{k=1}^n \alpha_{1*}\mathcal{O}_{X_1}(\mathcal{W})\tau_k \\ &\simeq L_1(\mathcal{W})/L_1(\mathcal{W})^2, \end{aligned}$$

ce qui donne le (1). Le (2) est une simple reformulation du lemme précédent. □

Dans la suite, nous appliquerons le résultat précédent aux immersions diagonales  $X_1 \hookrightarrow X_1 \times_{S_1} \cdots \times_{S_1} X_1$ , puisque les surjections canoniques  $\mathcal{O}_{X_1} \otimes_{W_2} \cdots \otimes_{W_2} \mathcal{O}_{X_1} \rightarrow \mathcal{O}_{X_1}$  possèdent des sections. Considérons en particulier  $\alpha_1 : X_1 \hookrightarrow X_1 \times X_1$  l'immersion diagonale et la section  $s_e$  du morphisme  $\mathcal{O}_{X_1} \otimes_{W_2} \mathcal{O}_{X_1} \rightarrow \alpha_{1*}\mathcal{O}_{X_1}$  donnée par  $s_e(b) = 1 \otimes b$ .

PROPOSITION 2.6. — Soit  $i \in \{0, 1\}$ ,

- (1) Le complexe  $\mathcal{M}_{X_i}^{[1]}$  est quasi-isomorphe à  $\Omega_{X_i}^1[-1]$ .
- (2) le complexe  $\mathcal{M}_{X_i \times X_i}^{[1]}$  est quasi-isomorphe au complexe de  $\mathcal{O}_{X_i}$ -modules

$$0 \rightarrow \Omega_{X_i}^1 \rightarrow \alpha_i^*\Omega_{X_i \times X_i}^1 \rightarrow 0,$$

dont la différentielle  $d_i$  est donnée localement, pour  $b, c \in \mathcal{O}_{X_i}$ , par  $d_i(b \cdot dc) = b \cdot (1 \otimes dc - dc \otimes 1)$ .

*Démonstration.* — Il s'agit d'une simple application de la proposition 2.5. Avec les notations de cette proposition, dans le cas (1),  $L_i = 0$ . Dans le cas (2),  $L_i/L_i^2 = \Omega_{X_i}^1$ , et la description de la différentielle résulte alors de la proposition 2.5. □

*Remarque.* — Le quasi-isomorphisme de la proposition 2.5 entre les deux complexes de la proposition est donné par le quotient par l'idéal diagonal

$L_{X_i \times X_i}$  et le morphisme canonique  $\alpha_i^* \Omega_{X_i \times X_i}^1 \rightarrow \Omega_{X_i}^1$ . Le diagramme suivant décrit ce quasi-isomorphisme de complexes

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \Omega_{X_i}^1 & \xrightarrow{d_i} & \alpha_i^* \Omega_{X_i \times X_i}^1 & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & 0 & \xrightarrow{0} & \Omega_{X_i}^1 & \longrightarrow & 0. \end{array}$$

**2.3. Définition du Frobenius divisé pour  $k \leq p - 2$**

On considère  $k \leq p - 2$ , et on se place sous les hypothèses de 1. En particulier, on travaille avec un schéma  $X$  lisse sur  $S$ . Le Frobenius divisé de Fontaine–Messing [10] induit par passage à la cohomologie un Frobenius divisé noté

$$\Phi_{\text{cris}}^{(k)} : Ru_{X_0^*} \mathcal{J}_{X_0'/S_0}^{[k]} / \mathcal{J}_{X_0'/S_0}^{[k+1]} \rightarrow Ru_{X_0^*} \mathcal{O}_{X_0/S_0}.$$

Comme précédemment, on suppose donné  $\alpha_n$  une immersion fermée  $X_n \hookrightarrow Y_n$  de  $X_n$  dans un  $S_n$ -schéma lisse. On suppose ici de plus que  $Y_n$  est muni d'un relèvement du Frobenius  $F : Y_n \rightarrow Y_n'$  comme en 1. On note encore  $F$  l'application induite  $F^{-1} \mathcal{O}_{Y_n'} \rightarrow \mathcal{O}_{Y_n}$  resp.  $F$  l'application induite  $F^{-1} \Omega_{Y_n'}^1 \rightarrow \Omega_{Y_n}^1$ .

Rappelons les définitions de Fontaine–Messing et de Kato du Frobenius divisé. On reprend les notations de la section 2.1.

2.3.1. Frobenius divisé cristallin en degré 0

En degré 0, il suffit de se donner un plongement  $X_0 \hookrightarrow Y_0$  dans un  $S_0$ -schéma lisse. Pour  $k = 0$ , le complexe  $\mathcal{M}_{Y_0'}^{[0]}$  est réduit en degré 0, et est quasi-isomorphe à  $\mathcal{O}_{X_0'}$ . Le morphisme de Frobenius  $F^{-1} \mathcal{O}_{Y_0'} \rightarrow \mathcal{O}_{Y_0}$  induit un morphisme  $F^{-1} \mathcal{P}(Y_0') \rightarrow \mathcal{P}(Y_0)$ , qui envoie le PD-idéal  $\mathcal{J}_{Y_0'}$  sur 0, si bien que ce morphisme induit un morphisme  $\Phi_{e,0}^{(0)} : F^{-1} \mathcal{O}_{X_0'} \rightarrow \mathcal{P}(Y_0)$  (puisque  $\mathcal{P}(Y_0') / \mathcal{J}_{Y_0'} \simeq \mathcal{O}_{X_0'}$ ). En degré 0, le morphisme de Frobenius divisé

$$\Phi_e^{(0)} : \mathcal{M}_{Y_0'}^{[0]} \rightarrow \mathcal{E}_{Y_0},$$

est alors donné par  $\Phi_{e,0}^{(0)}$ . Cette définition ne dépend pas du choix de  $Y_0$ , par un argument standard qui consiste à considérer les produits cartésiens de deux plongements lisses  $Y_0$  et  $Z_0$ . En particulier, pour calculer  $\Phi_e^{(0)}$ , on peut prendre  $Y_0 = X_0$  et on voit que  $\Phi_e^{(0)}$  correspond au morphisme de complexes  $\mathcal{O}_{X_0'} \rightarrow DR_{X_0}$ .

2.3.2. Frobenius divisé cristallin en degré supérieur à 1

LEMME 2.7. — Si  $1 \leq k \leq p - 1$ , alors on a

$$F(\mathcal{L}_{Y'_n}^{[k]}) \subset p^k \mathcal{E}_{Y_n}.$$

*Démonstration.* — L'argument est dû à Fontaine–Messing. Soient  $r$  un entier positif, tel que  $r \leq p - 1$  et  $r' \geq r$ . Alors on dispose du

LEMME 2.8. —  $p^{[r']} \in p^r \mathbf{Z}$ .

Comme  $r \leq p - 1$ , le lemme est trivial si  $r' = r$  car  $p^{[r]}$  est alors de valuation  $p$ -adique égale à  $r$ . On suppose dans la suite que  $r' \geq r + 1$ . Soit  $P(n)$  la somme des chiffres de l'entier  $n$  en base  $p$ , de sorte que la valuation  $p$ -adique  $vp(p^{[r']})$  est égale à  $r' - (r' - P(r'))/(p - 1)$ . Alors on a

$$\begin{aligned} vp(p^{[r']}) - r &= \frac{p - 2}{p - 1}(r' - r) + \frac{1}{p - 1}(P(r') - r) \\ &\geq \frac{p - 2}{p - 1} + \frac{1}{p - 1} - 1, \text{ car } \sigma(r') \geq 1 \text{ et } r \leq p - 1 \\ &\geq 0, \end{aligned}$$

ce qui montre le lemme. Soit  $x \in \mathcal{J}_{Y'_n}$ , alors  $F(x) = x^p + pu$  avec  $u \in \mathcal{O}_{Y_n}$ , et donc  $F(x) = p((p - 1)!x^{[p]} + u) \in p\mathcal{O}_{Y_n}$  et

$$F(x^{[r']}) = p^{[r']}((p - 1)!x^{[p]} + u)^{r'} \in p^r \mathcal{O}_{Y_n},$$

d'après le lemme. De plus, si  $y \in \mathcal{O}_{Y'_n}$ , et si on pose  $F(y) = y^p + pv$ , alors  $d(F(y)) = p((p - 1)!y^{p-1}dy + dv) \in p\Omega_{Y_n}^1$ . On en déduit l'inclusion  $F(\Omega_{Y'_n}^q) \subset p^q \Omega_{Y_n}^q$ . On voit ainsi que si  $k \leq p - 1$ ,

$$F\left(\mathcal{J}_{Y'_n}^{[k-q]} \Omega_{Y'_n}^q\right) \subset p^k \mathcal{E}_{Y_n},$$

ce qui donne l'assertion. □

Soit  $n \geq k$ , on peut donc définir l'application de Frobenius divisé au niveau des résolutions comme le fait Kato [15, chapter I, 1] en constatant qu'il existe une unique application  $\bar{\Phi}_k$  faisant commuter le diagramme suivant

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{L}_{Y'_n}^{[k]} & \xrightarrow{\bar{\Phi}_k} & F_* \mathcal{E}_{Y_{n-k}} \\ & \searrow F & \nearrow m_p^{-k} \\ & & p^k F_* \mathcal{E}_{Y_n}. \end{array}$$

Si  $n = k$ , on remarque que  $\bar{\Phi}_k(p\mathcal{L}_{Y'_k}^{[k]}) = 0$ , de sorte que le morphisme  $\bar{\Phi}_k$  passe au quotient en un morphisme

$$\Phi_k : \mathcal{L}_{Y'_0}^{[k]} \rightarrow F_*\mathcal{E}_{Y_0}.$$

Et comme  $\Phi_k(\mathcal{L}_{Y'_0}^{[k+1]}) = 0$ , ce morphisme passe au quotient en un morphisme noté

$$(2.6) \quad \Phi_e^{(k)} : \mathcal{M}_{Y'_0}^{[k]} \rightarrow F_*\mathcal{E}_{Y_0}.$$

Ces applications sont indépendantes du choix de deux plongements lisses,  $Y_1$  et  $Y_2$ , tels que  $Y_1$  soit muni d'un relèvement du Frobenius relatif  $F_1$  (resp.  $F_2$  sur  $Y_2$ ). Pour voir cela, on utilise un argument standard qui consiste à considérer le plongement de  $X_0$  dans le produit  $Y_1 \times_{S_1} Y_2$  muni du Frobenius relatif  $F_1 \times F_2$ .

Pour un schéma  $X$  lisse sur  $S$  quelconque, on construit l'application de Frobenius divisé  $\Phi_e^{(k)}$  en utilisant un argument de descente cohomologique qui sera détaillé en section 3. Ces applications  $\Phi_e^{(k)}$  induisent les morphismes de Fontaine–Messing dans  $D^b(\mathcal{O}_{X'_0})$

$$(2.7) \quad \Phi_{\text{cris}}^{(k)} : Ru_{X'_0*}\mathcal{J}_{X'_0/S_0}^{[k]} / \mathcal{J}_{X'_0/S_0}^{[k+1]} \rightarrow Ru_{X_0*}\mathcal{O}_{X_0/S_0}.$$

Posons  $\Phi_{\text{cris}} = \bigoplus_{k=0}^{p-2} \Phi_{\text{cris}}^{(k)}$ , on dispose ainsi d'un morphisme dans  $D^b(\mathcal{O}_{X'_0})$

$$(2.8) \quad \Phi_{\text{cris}} : \bigoplus_{k=0}^{p-2} Ru_{X'_0*}\mathcal{J}_{X'_0/S_0}^{[k]} / \mathcal{J}_{X'_0/S_0}^{[k+1]} \rightarrow Ru_{X_0*}\mathcal{O}_{X_0/S_0}.$$

## 2.4. Compatibilité du Frobenius divisé aux produits

### 2.4.1. Structures multiplicatives

Soient  $\alpha_n$  une immersion fermée de  $S_n$ -schémas lisses  $X_n \hookrightarrow Y_n$ ,  $\mathcal{P}(Y_n)$  la PD enveloppe du faisceau d'idéaux définissant l'immersion  $\alpha_n$ ,  $A_n$  l'immersion fermée :  $X_n \hookrightarrow \text{spec } \mathcal{P}(Y_n)$ ,  $\mathcal{J}$  le PD-idéal du faisceau de PD-algèbres  $\mathcal{P}(Y_n)$ . Par construction on a une surjection canonique  $s_n : A_n^* \mathcal{P}(Y_n) \rightarrow \mathcal{O}_{X_n}$ . On dispose aussi de morphismes canoniques  $c_n : \alpha_n^* \Omega_{Y_n}^i \rightarrow \Omega_{X_n}^i$  (on notera plus simplement  $c = c_1$ ).

Notons aussi

$$\tilde{\Omega}_{Y_n}^i = \mathcal{P}(Y_n) \otimes_{\mathcal{O}_{Y_n}} \Omega_{Y_n}^i \text{ et } \mathcal{J}^{[m]} \tilde{\Omega}_{Y_n}^i = \mathcal{J}^{[m]} \otimes_{\mathcal{O}_{Y_n}} \tilde{\Omega}_{Y_n}^i.$$

On dispose de morphismes de réduction  $\text{red} : \tilde{\Omega}_{Y_n}^i \rightarrow \alpha_n^* \Omega_{X_n}^i$  définis par  $\text{red}(1 \otimes \eta) = c(\eta)$  pour  $\eta$  une section locale de  $\Omega_{Y_n}^i$ .

Nous nous référons là encore à [15, chapitre I,2]. Avec les notations de la section 2.1, les complexes  $\mathcal{E}_{Y_n}$  sont des faisceaux de  $\mathbf{Z}$ -algèbres différentielles graduées, abrégées adg dans la suite. On dispose en effet d'un accouplement

$$\mathcal{E}_{Y_n} \otimes_{\mathbf{Z}}^{\mathbf{L}} \mathcal{E}_{Y_n} \rightarrow \mathcal{E}_{Y_n},$$

vérifiant les axiomes usuels des anneaux. Il revient au même d'observer que

$$\mathbf{E}_{Y_n} = \bigoplus_{i=0}^N \mathcal{P}(Y_n) \otimes_{\mathcal{O}_{Y_n}} \Omega_{Y_n}^i$$

est un anneau unitaire gradué avec comme unité  $1 \in \mathcal{P}(Y_n)$  en degré 0 pour l'accouplement suivant : soient  $a \otimes \omega_i \in \mathcal{P}(Y_n) \otimes \Omega_{Y_n}^i$  et  $b \otimes \omega_{i'}$   $\in \mathcal{P}(Y_n) \otimes \Omega_{Y_n}^{i'}$ , on définit

$$(a \otimes \omega_i) \cdot (b \otimes \omega_{i'}) = ab \omega_i \wedge \omega_{i'}.$$

La relation classique

$$d((a \otimes \omega_i) \wedge (b \otimes \omega_{i'})) = d(a \otimes \omega_i) \wedge (b \otimes \omega_{i'}) + (-1)^i (a \otimes \omega_i) \wedge d(b \otimes \omega_{i'}),$$

donne la structure de faisceaux d'algèbres différentielles graduées sur  $\mathcal{E}_{Y_n}$ . Comme

$$\mathcal{J}^{[m]} \tilde{\Omega}_{Y_n}^i \cdot \mathcal{J}^{[m']} \tilde{\Omega}_{Y_n}^{i'} \subset \mathcal{J}^{[m+m']} \tilde{\Omega}_{Y_n}^{i+i'},$$

le complexe  $\mathcal{L}_{Y_n}^{[k]}$  est une adg, non unitaire, et un sous-module différentiel gradué de  $\mathcal{E}_{Y_n}$ , correspondant au module gradué

$$\mathbf{L}_{Y_n}^{[k]} = \bigoplus_{i=0}^N \mathcal{J}^{[k-i]} \tilde{\Omega}_{Y_n}^i.$$

D'autre part, le choix de signe pour les différentielles du complexe produit tensoriel dérivé détaillé en section 1 est fait pour que Prod s'étende en un morphisme de complexes

$$\text{Prod} : \mathcal{E}_{Y_n} \otimes_{\mathbf{Z}}^{\mathbf{L}} \cdots \otimes_{\mathbf{Z}}^{\mathbf{L}} \mathcal{E}_{Y_n} \rightarrow \mathcal{E}_{Y_n}, \text{ resp. } \text{Prod} : \mathcal{L}_{Y_n}^{[1]} \otimes_{\mathbf{Z}}^{\mathbf{L}} \cdots \otimes_{\mathbf{Z}}^{\mathbf{L}} \mathcal{L}_{Y_n}^{[1]} \rightarrow \mathcal{L}_{Y_n}^{[k]}.$$

LEMME 2.9.

- (1) *Le morphisme F induit un endomorphisme d'anneaux unitaires de  $\mathbf{E}_{Y_n}$ , et donc un endomorphisme de l'adg  $\mathcal{E}_{Y_n}$ .*
- (2) *Soit  $n \geq k$ , le diagramme suivant est commutatif*

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{L}_{Y_n}^{[1]} \otimes_{\mathbf{Z}}^{\mathbf{L}} \cdots \otimes_{\mathbf{Z}}^{\mathbf{L}} \mathcal{L}_{Y_n}^{[1]} & \xrightarrow{\otimes^k \bar{\Phi}_k} & F_* \mathcal{E}_{Y_{n-1}} \otimes_{\mathbf{Z}}^{\mathbf{L}} \cdots \otimes_{\mathbf{Z}}^{\mathbf{L}} F_* \mathcal{E}_{Y_{n-1}} \\ \downarrow \text{Prod} & & \downarrow \overline{\text{Prod}} \\ \mathcal{L}_{Y_n}^{[k]} & \xrightarrow{\bar{\Phi}_k} & F_* \mathcal{E}_{Y_{n-k}}, \end{array}$$

où  $\overline{\text{Prod}}$  est l'application produit, suivie de l'application canonique  $F_*\mathcal{E}_{Y_{n-1}} \rightarrow F_*\mathcal{E}_{Y_{n-k}}$ .

(3) Le diagramme suivant est commutatif

$$\begin{CD} \mathcal{M}_{Y'_0}^{[1]} \otimes_{\mathbb{Z}} \cdots \otimes_{\mathbb{Z}} \mathcal{M}_{Y'_0}^{[1]} @>{\otimes^k \Phi_e^{(1)}}>> F_*\mathcal{E}_{Y_0} \otimes_{\mathbb{Z}} \cdots \otimes_{\mathbb{Z}} F_*\mathcal{E}_{Y_0} \\ @VV{\text{Prod}}V @. @VV{\text{Prod}}V \\ \mathcal{M}_{Y'_0}^{[k]} @>{\Phi_e^{(k)}}>> F_*\mathcal{E}_{Y_0}. \end{CD}$$

*Démonstration.* — Par la propriété universelle de l'algèbre des algèbres à puissances divisées,  $F$  induit un morphisme de PD-algèbres :

$$\mathcal{P}(Y'_n) \rightarrow F_*\mathcal{P}(Y_n).$$

D'autre part, le morphisme  $F$  induit un morphisme gradué entre les algèbres extérieures

$$\bigoplus_{i=0}^N \Omega_{Y'_n}^i \rightarrow F_* \bigoplus_{i=0}^N \Omega_{Y_n}^i,$$

de sorte que  $F$  induit un morphisme d'algèbres différentielles graduées  $\mathcal{E}_{Y'_n} \rightarrow F_*\mathcal{E}_{Y_n}$ . De façon précise, si  $\tilde{\omega}_i = a \otimes \omega_i \in \tilde{\Omega}_{Y'_n}^i$ , et  $\tilde{\omega}_{i'} = b \otimes \omega_{i'} \in \tilde{\Omega}_{Y'_n}^{i'}$ ,

$$\begin{aligned} F(\tilde{\omega}_i \cdot \tilde{\omega}_{i'}) &= F(a)F(b)F(\omega_i) \wedge F(\omega_{i'}) \\ &= F(\tilde{\omega}_i) \wedge F(\tilde{\omega}_{i'}). \end{aligned}$$

Ceci montre (1). Soient  $\underline{a} = (a_1, \dots, a_k) \in \{0, \dots, N\}$ , et  $|\underline{a}| = a_1 + \dots + a_k$ . Pour montrer (2), il faut montrer que le diagramme suivant commute

$$\begin{CD} \mathcal{J}^{[1-a_1]} \tilde{\Omega}_{Y'_n}^{a_1} \otimes \cdots \otimes \mathcal{J}^{[1-a_k]} \tilde{\Omega}_{Y'_n}^{a_k} \otimes^k \bar{\Phi}_1 @>>> F_*\mathcal{E}_{Y_{n-1}} \otimes \cdots \otimes F_*\mathcal{E}_{Y_{n-1}} \\ @VV{\text{Prod}}V @. @VV{\overline{\text{Prod}}}V \\ \mathcal{J}^{[1-|\underline{a}|]} \tilde{\Omega}_{Y'_n}^{|\underline{a}|} @>{\bar{\Phi}_k}>> F_*\mathcal{E}_{Y_{n-k}}. \end{CD}$$

On rappelle que l'on a une application  $m_p : \mathcal{E}_{Y_{n-1}} \rightarrow \mathcal{E}_{Y_n}$ , qui envoie  $x$  sur la classe de  $px$ . Soit  $\tilde{\omega}_1 \otimes \cdots \otimes \tilde{\omega}_k$  une section locale de  $\mathcal{J}^{[1-a_1]} \tilde{\Omega}_{Y'_n}^{a_1} \otimes \cdots \otimes \mathcal{J}^{[1-a_k]} \tilde{\Omega}_{Y'_n}^{a_k}$ , d'après (1) on a

$$\begin{aligned} m_p^k \overline{\text{Prod}}(\bar{\Phi}_1^{\otimes k})(\tilde{\omega}_1 \otimes \cdots \otimes \tilde{\omega}_k) &= F(\tilde{\omega}_1) \wedge \cdots \wedge F(\tilde{\omega}_k) \\ &= F(\tilde{\omega}_1 \wedge \cdots \wedge \tilde{\omega}_k) \\ &= m_p^k \bar{\Phi}_k(\tilde{\omega}_1 \wedge \cdots \wedge \tilde{\omega}_k), \end{aligned}$$



ce qui donne le résultat (2). Appliquons ce résultat avec  $n = k$  : le diagramme suivant est commutatif

$$\begin{array}{ccc}
 \mathcal{L}_{Y'_k}^{[1]} \otimes_{\mathbb{Z}} \cdots \otimes_{\mathbb{Z}} \mathcal{L}_{Y'_k}^{[1]} & \xrightarrow{\otimes^k \bar{\Phi}_1} & F_* \mathcal{E}_{Y_{k-1}} \otimes_{\mathbb{Z}} \cdots \otimes_{\mathbb{Z}} F_* \mathcal{E}_{Y_{k-1}} \\
 \downarrow \text{Prod} & & \downarrow \overline{\text{Prod}} \\
 \mathcal{L}_{Y'_k}^{[k]} & \xrightarrow{\bar{\Phi}_k} & F_* \mathcal{E}_{Y_0}.
 \end{array}$$

Le complexe  $\mathcal{M}_{Y'_k}^{[k]}$  est égal au quotient  $\mathcal{L}_{Y'_k}^{[k]} / \mathcal{L}_{Y'_k}^{[k+1]}$  et tous les morphismes considérés sont induits par le passage au quotient. Pour montrer le (3) du lemme, on utilise alors le fait que le diagramme suivant est commutatif, dont les flèches verticales sont les surjections canoniques entre les objets

$$\begin{array}{ccc}
 \mathcal{L}_{Y'_k}^{[1]} \otimes_{\mathbb{Z}} \cdots \otimes_{\mathbb{Z}} \mathcal{L}_{Y'_k}^{[1]} & \xrightarrow{\otimes^k \bar{\Phi}_1} & F_* \mathcal{E}_{Y_{k-1}} \otimes_{\mathbb{Z}} \cdots \otimes_{\mathbb{Z}} F_* \mathcal{E}_{Y_{k-1}} \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 \mathcal{M}_{Y'_0}^{[1]} \otimes_{\mathbb{Z}} \cdots \otimes_{\mathbb{Z}} \mathcal{M}_{Y'_0}^{[1]} & \xrightarrow{\otimes^k \Phi_e^{(1)}} & F_* \mathcal{E}_{Y_0} \otimes_{\mathbb{Z}} \cdots \otimes_{\mathbb{Z}} F_* \mathcal{E}_{Y_0},
 \end{array}$$

ainsi que le diagramme suivant

$$\begin{array}{ccc}
 \mathcal{L}_{Y'_k}^{[k]} & \xrightarrow{\bar{\Phi}_k} & F_* \mathcal{E}_{Y_0} \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 \mathcal{M}_{Y'_0}^{[k]} & \xrightarrow{\Phi_e^{(k)}} & F_* \mathcal{E}_{Y_0}.
 \end{array}$$

□

Remarquons maintenant que l'application Prod est fonctorielle par rapport à  $Y_n$  ([15, 2]). On en déduit formellement les trois lemmes suivants.

Soient  $Z_n$  un  $S_n$ -schéma lisse et  $f$  un  $S_n$ -morphisme tel qu'on ait un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc}
 & & Y_n \\
 X_n & \hookrightarrow & \\
 & & \downarrow f \\
 & & Z_n.
 \end{array}$$

Alors on a

LEMME 2.10.

- (1) Les morphismes canoniques  $f^* \mathcal{L}_{Z_n}^{[k]} \rightarrow \mathcal{L}_{Y_n}^{[k]}$  sont compatibles au produit Prod.
- (2) Les morphismes canoniques  $f^* \mathcal{M}_{Z_n}^{[k]} \rightarrow \mathcal{M}_{Y_n}^{[k]}$  sont compatibles au produit Prod.

Pour la même raison, on a l'énoncé suivant

LEMME 2.11. — *Le diagramme suivant est commutatif*

$$\begin{array}{ccc}
 \mathcal{E}_{Y_n} \otimes_{\mathbf{Z}}^{\mathbf{L}} \cdots \otimes_{\mathbf{Z}}^{\mathbf{L}} \mathcal{E}_{Y_n} & \xrightarrow{\otimes^k \text{red}} & (DR_{X_n})^{\otimes^{\mathbf{L}} k} \\
 \downarrow \text{Prod} & & \downarrow \text{Prod} \\
 \mathcal{E}_{Y_n} & \xrightarrow{\text{red}} & DR_{X_n}.
 \end{array}$$

Reprenons  $c_k$  l'application canonique :  $\alpha_n^* \Omega_{Y_n}^k \rightarrow \Omega_{X_n}^k$ . Les complexes  $\mathcal{M}_{Y_n}^{[k]}$  et  $\alpha_n^* \Omega_{X_n}^k[-k]$  sont quasi-isomorphes, le quasi-isomorphisme étant donné par l'application de réduction  $\text{red}$  définie par

$$\begin{aligned}
 \text{si } s \neq k, \text{red} \left( \mathcal{J}^{[k-s]} / \mathcal{J}^{[k-s+1]} \tilde{\Omega}_{Y_n}^s \right) &= 0 \\
 \text{si } \eta \in \Omega_{Y_n}^k, \text{red}(1 \otimes \eta) &= c_k(1 \otimes \eta).
 \end{aligned}$$

Nous avons aussi le

LEMME 2.12. — *Le diagramme suivant est commutatif*

$$\begin{array}{ccc}
 \mathcal{M}_{Y_n}^{[1]} \otimes_{\mathbf{Z}}^{\mathbf{L}} \cdots \otimes_{\mathbf{Z}}^{\mathbf{L}} \mathcal{M}_{Y_n}^{[1]} & \xrightarrow{\otimes^k \text{red}} & (\Omega_{X_n}^1[-1])^{\otimes^{\mathbf{L}} k} \\
 \downarrow \text{Prod} & & \downarrow \text{Prod} \\
 \mathcal{M}_{Y_n}^{[k]} & \xrightarrow{\text{red}} & \Omega_{X_n}^k[-k].
 \end{array}$$

### 3. Comparaison avec le morphisme de Deligne–Illusie

#### 3.1. Énoncé du résultat

Deligne et Illusie construisent en [6] un quasi-isomorphisme dans  $D^b(\mathcal{O}_{X'_0})$  :

$$DI' = \bigoplus_{k=0}^{p-1} DI^{(k)} : \bigoplus_{k=0}^{p-1} \Omega_{X'_0}^k[-k] \rightarrow \sigma_{\leq p-1} F_* DR_{X_0},$$

dont la définition précise utilisant un recouvrement affine de  $X_1$ , est donnée à la section 3.3.1. On notera  $DI$  la restriction de  $DI'$  aux termes de gauche de degré inférieur à  $p-2$ . D'autre part, nous avons rappelé à la section 2.3 la définition cristalline du Frobenius divisé de Fontaine–Messing.

Nous pouvons considérer le diagramme suivant dans  $D^b(\mathcal{O}_{X'_0})$

$$(3.1) \quad \begin{array}{ccc} \bigoplus_{k=0}^{p-2} Ru_{X'_0*} \mathcal{J}_{X'_0/S_0}^{[k]} / \mathcal{J}_{X'_0/S_0}^{[k+1]} & \xrightarrow{\Phi_{\text{cris}}} & \sigma_{\leq p-2} F_* Ru_{X_0*} \mathcal{O}_{X_0/S_0} \\ \text{can} \downarrow & & \downarrow \text{can} \\ \bigoplus_{k=0}^{p-2} \Omega_{X'_0}^k[-k] & \xrightarrow{DI} & \sigma_{\leq p-2} F_* DR_{X_0}, \end{array}$$

dont les flèches canoniques sont les flèches cristallines habituelles, expliquées à la section 2.1.

Un des objectifs de cet article est de montrer le

**THÉORÈME 3.1.** — *Le diagramme précédent est commutatif.*

La démonstration de ce théorème occupe la section 3 et sera donnée à la section 3.5.

Rappelons que, par passage à la cohomologie, le morphisme  $\mathcal{H}^k \circ DI'^{(k)}$ , coïncide avec l'isomorphisme de Cartier  $C^{-1} : \Omega_{X'_0}^k \rightarrow \mathcal{H}^k F_* DR_{X_0}$ . Pour  $k = 1$ , ce morphisme de Cartier est défini pour  $c$  une section locale de  $\mathcal{O}_{X'_0}$  par  $C^{-1}(dc) =$  classe de  $(c^{p-1}dc)$  dans  $\mathcal{H}^1 F_* DR_{X_0}$ .

### 3.2. Considérations simpliciales

#### 3.2.1. Notations

Il est classique que l'action du Frobenius sur la cohomologie cristalline se calcule par descente cohomologique. Nous mettons en place ce calcul ici.

Donnons-nous un recouvrement ouvert de  $X_1$  par des ouverts affines  $\mathcal{U}_i$  pour  $i \in \{0, \dots, n\}$ , munis de coordonnées globales et d'un relèvement du Frobenius  $F_i : \mathcal{U}'_i \rightarrow \mathcal{U}_i$ . Soit  $\mathcal{U}_{[0]} = \coprod_{i \in I} \mathcal{U}_i$ . On considère aussi  $U_i$  les fibres spéciales de ces ouverts, qui forment un recouvrement de  $X_0$  et  $U_{[0]} = \coprod_{i \in I} U_i$ . Soit  $\mathcal{U}_{(\bullet)}$  le  $S_1$ -schéma simplicial donné par le cosquelette  $\text{cosq}(\mathcal{U}_{[0]} \rightarrow S_1)$ , i.e. le schéma simplicial augmenté vers  $S_1$  de composantes les puissances cartésiennes de  $\mathcal{U}_{[0]}$  sur  $S_1$ ,  $\mathcal{U}_{\bullet}$  le  $X_1$ -schéma simplicial donné par le cosquelette  $\text{cosq}(\mathcal{U}_{[0]} \rightarrow X_1)$ . On introduit aussi  $U_{(\bullet)}$  le  $S_0$ -schéma simplicial donné par le cosquelette  $\text{cosq}(U_{[0]} \rightarrow S_0)$ , ainsi que  $U_{\bullet}$  le schéma simplicial augmenté vers  $X_0$ ,  $\text{cosq}(U_{[0]} \rightarrow X_0)$ . Nous disposons bien entendu, après changement de base par le Frobenius, des schémas simpliciaux  $U'_{\bullet}$  et  $\mathcal{U}'_{\bullet}$ . On note alors  $\varepsilon$  le morphisme canonique  $U'_{[0]} \rightarrow X'_0$ .

Sur le site cristallin associé au schéma simplicial  $U'_{\bullet}$ , on considère les faisceaux  $\mathcal{O}_{U'_{\bullet}/S_0}$ , et pour tout entier  $k$  le faisceau  $J_{U'_{\bullet}}^{[k]}$  (resp.  $J_{U'_{\bullet}/S_0} / J_{U'_{\bullet}/S_0}^{[2]}$ ).

Le schéma  $U_\bullet$  (resp.  $U'_\bullet$ ) est un sous-schéma simplicial de  $\mathcal{U}_\bullet$  (resp.  $\mathcal{U}'_\bullet$ ).  
 Notons encore pour un multi-indice  $\underline{i} = (i_0, \dots, i_u)$  :

- $U_{\underline{i}} = U_{i_0} \cap \dots \cap U_{i_u}$ , (resp.  $U'_{\underline{i}} = U'_{i_0} \cap \dots \cap U'_{i_u}$ ),  $\mathcal{U}_{\underline{i}} = \mathcal{U}_{i_0} \cap \dots \cap \mathcal{U}_{i_u}$   
 (resp.  $\mathcal{U}'_{\underline{i}} = \mathcal{U}'_{i_0} \cap \dots \cap \mathcal{U}'_{i_u}$ ),
- $\mathcal{U}_{(\underline{i})} = \mathcal{U}_{i_0} \times_{S_1} \dots \times_{S_1} \mathcal{U}_{i_u}$ ,  $U_{(\underline{i})} = U_{i_0} \times_{S_0} \dots \times_{S_0} U_{i_u}$  (resp. version primée),
- $\alpha_{\underline{i}}$  l'immersion fermée  $\mathcal{U}_{\underline{i}} \hookrightarrow \mathcal{U}_{(\underline{i})}$ ,  $\alpha'_{\underline{i}}$  l'immersion fermée  $U'_{\underline{i}} \hookrightarrow \mathcal{U}'_{(\underline{i})}$ ,  
 $\beta_{\underline{i}}$  l'immersion fermée  $U_{\underline{i}} \hookrightarrow U_{(\underline{i})}$ ,  $\beta'_{\underline{i}}$  l'immersion fermée  $U'_{\underline{i}} \hookrightarrow U'_{(\underline{i})}$ .  
 Soit  $M'_{\underline{i}}$  l'idéal de cette immersion. Avec ces notations  $M'_{i,j}$  est l'idéal de l'immersion diagonale  $U'_{i,j} \hookrightarrow U_{(i,j)}$ .
- $\mathcal{P}(\mathcal{U}_{(\underline{i})})$  la PD-enveloppe de l'immersion  $\alpha_{\underline{i}}$ ,  $\mathcal{J}_{\underline{i}}$  le PD-idéal de cette PD-enveloppe, (resp.  $\mathcal{P}(\mathcal{U}'_{(\underline{i})})$  la PD-enveloppe de l'immersion  $\alpha'_{\underline{i}}$ , et  $\mathcal{J}'_{\underline{i}}$  le PD-idéal correspondant),  $\mathcal{P}(U_{(\underline{i})})$  la PD-enveloppe de l'immersion fermée  $\beta_{\underline{i}} : U_{\underline{i}} \hookrightarrow U_{(\underline{i})}$ ,  $\mathcal{J}_{\underline{i}}$  le PD-idéal de cette PD-enveloppe, (resp.  $\mathcal{P}(U'_{(\underline{i})})$  la PD-enveloppe de l'immersion fermée  $\beta'_{\underline{i}}$ ,  $\mathcal{J}'_{\underline{i}}$  le PD-idéal correspondant).
- Notons encore les immersions ouvertes  $j_{\underline{i}} : U_{\underline{i}} \hookrightarrow X_0$ , et  $j'_{\underline{i}} : U'_{\underline{i}} \hookrightarrow X'_0$ .
- Nous disposons d'immersions fermées de schémas simpliciaux  $\mathcal{U}'_\bullet \hookrightarrow \mathcal{U}'_{(\bullet)}$ , resp.  $U_\bullet \hookrightarrow U_{(\bullet)}$ , resp.  $\mathcal{U}_\bullet \hookrightarrow \mathcal{U}_{(\bullet)}$ , resp.  $U_\bullet \hookrightarrow U_{(\bullet)}$ . Nous pouvons alors introduire les complexes simpliciaux  $\mathcal{E}$ ,  $\mathcal{L}^{[k]}$  et  $\mathcal{M}^{[k]}$  correspondant à ces immersions fermées, et qui seront notés respectivement  $\mathcal{L}_{\mathcal{U}'_{(\bullet)}}^{[k]}$ ,  $\mathcal{L}_{U'_{(\bullet)}}^{[k]}$ ,  $\mathcal{M}_{\mathcal{U}'_{(\bullet)}}^{[k]}$ ,  $\mathcal{M}_{U'_{(\bullet)}}^{[k]}$ ,  $\mathcal{E}_{\mathcal{U}_{(\bullet)}}$ ,  $\mathcal{E}_{U_{(\bullet)}}$ .
- Notons  $\mathcal{V}_{(\bullet)}$  l'un des schémas simpliciaux précédents et  $\mathcal{K}_{\mathcal{V}_{(\bullet)}}$  un complexe simplicial sur  $\mathcal{V}_{(\bullet)}$ , on notera  $\mathcal{K}_{\mathcal{V}_{(\bullet)}}(u) = \mathcal{K}_{\mathcal{V}_{(\bullet)}}(\Delta_u)$  où  $\Delta_u$  est l'ensemble fini ordonné  $\{0, \dots, u\}$  de sorte que

$$\mathcal{K}_{\mathcal{V}_{(\bullet)}}(u) = \mathcal{K}_{\mathcal{V}_{(\bullet)}} \left( \coprod_{|\underline{i}|=u} \mathcal{V}_{\underline{i}} \right), \text{ et } \mathcal{K}_{\mathcal{V}_{(\bullet)},s}(u)$$

désignera le  $s$ -ième terme de ce complexe. Dans la suite, nous dirons que  $\mathcal{K}_{\mathcal{V}_{(\bullet)}}(u)$  est le complexe situé à l'étage  $u$  du complexe simplicial  $\mathcal{K}_{\mathcal{V}_{(\bullet)}}$ .

Nous serons amenés à adapter la proposition 2.4 aux immersions fermées  $\beta_{\underline{i}}$ . Soit  $k$  un entier ( $k \in \mathbb{N}$ ). Comme  $U'_\bullet$  a pour composantes des réunions disjointes d'ouverts de  $X'_0$ , les composantes du faisceau  $\varepsilon^* \mathcal{J}_{X'_0/S_0}^{[k]} / \mathcal{J}_{X'_0/S_0}^{[k+1]}$

sont sommes directes de restrictions de  $\mathcal{J}_{X'_0/S_0}^{[k]}/\mathcal{J}_{X'_0/S_0}^{[k+1]}$  à des intersections de  $u$ -ouverts parmi les  $U'_i$ , pour  $u$  variable. On voit ainsi que  $\varepsilon^* \mathcal{J}_{X'_0/S_0}^{[k]}/\mathcal{J}_{X'_0/S_0}^{[k+1]}$  est le faisceau simplicial  $\mathcal{J}_{U'_\bullet/S_0}^{[k]}/\mathcal{J}_{U'_\bullet/S_0}^{[k+1]}$ .

Par [1, V 3.4.8], la flèche canonique d'adjonction  $\mathcal{J}_{X'_0/S_0}^{[k]}/\mathcal{J}_{X'_0/S_0}^{[k+1]} \rightarrow R\varepsilon_* \varepsilon^* \mathcal{J}_{X'_0/S_0}^{[k]}/\mathcal{J}_{X'_0/S_0}^{[k+1]}$  est un isomorphisme, ce qui nous donne finalement un isomorphisme canonique dans  $D^b(\mathcal{O}_{X'_0})$ ,

$$Ru_{X'_0*} \mathcal{J}_{X'_0/S_0}^{[k]}/\mathcal{J}_{X'_0/S_0}^{[k+1]} \xrightarrow{\sim} R\varepsilon_* \circ Ru_{U'_\bullet*} \mathcal{J}_{U'_\bullet/S_0}^{[k]}/\mathcal{J}_{U'_\bullet/S_0}^{[k+1]}.$$

L'application  $\varepsilon : U'_\bullet \rightarrow X'_0$  est affine, et grâce à la proposition 2.4, les termes du complexe  $Ru_{U'_\bullet*} \mathcal{J}_{U'_\bullet/S_0}^{[k]}/\mathcal{J}_{U'_\bullet/S_0}^{[k+1]}$  sont  $\mathcal{O}_{U'_i}$  cohérents, de sorte que ce complexe est à termes acycliques pour  $\varepsilon_*$ . Nous le calculons explicitement dans la sous-section suivante.

Dans la suite, on notera  $DC'$  les morphismes de descente cohomologique se rapportant à des résolutions simpliciales de  $X'_0$ .

### 3.2.2. Conventions pour les complexes simples

En vue du théorème de comparaison, nous devons faire le remarque suivante. Soit  $U_\bullet$  le schéma simplicial correspondant au recouvrement  $(U_i)$ . Le complexe de Čech utilisé par Deligne–Illusie est un quotient du complexe de chaînes du complexe simplicial  $DR_{U_\bullet}$ . De ce fait, nous modifions légèrement le passage au complexe simple de la façon suivante, pour se ramener à un analogue du complexe de Čech.

In fine, nous aurons à considérer des complexes simpliciaux  $\mathcal{K}_{U_{(\bullet)}}$  sur le schéma simplicial  $U_\bullet$ . Pour un tel complexe, nous pouvons considérer le complexe sur  $X_0$

$$\bigoplus_{|i|=u} j_{i*} \mathcal{K}_{U_{\underline{i}}}.$$

Nous remarquons alors que ceci définit un complexe simplicial sur le schéma simplicial constant  $X_{0\bullet}$ , noté  $j_* \mathcal{K}_{U_{(\bullet)}}$ . Le complexe simple associé est le complexe de cochaînes du complexe simplicial  $\mathcal{K}_{U_{(\bullet)}}$ . Le complexe des cochaînes alternées est naturellement un sous-complexe du complexe de cochaînes. On pose alors

DÉFINITION 3.2. — *Le complexe simple associé à  $\mathcal{K}_{U_{(\bullet)}}$  et noté*

$$[j_* \mathcal{K}_{U_{(\bullet)}}]$$

*sera le complexe quotient du complexe de cochaînes associé à  $\mathcal{K}_{U_{(\bullet)}}$  par le complexe des cochaînes alternées.*

Il résulte de 3.8 du chapitre 1 de [11] que le complexe simple ainsi défini et le complexe de cochaînes sont homotopes. Cette définition est bien entendu fonctorielle. Dans le cas d'un faisceau sur  $X_0$ , qui définit un faisceau simplicial sur  $U_\bullet$ , le complexe ainsi défini est le complexe de Čech usuel. Si on ne prend pas cette définition, on trouve le complexe de Čech non ordonné (et infini) du faisceau considéré.

Dans la suite, nous utiliserons des propriétés de descente cohomologique, avec des morphismes satisfaisant la descente cohomologique. Il sera sous-entendu dans la suite que ces morphismes seront à valeurs dans un complexe simple au sens de la définition ci-dessus, c'est-à-dire qu'il sera obtenu en faisant suivre le morphisme de descente cohomologique habituel par passage au quotient du complexe de cochaînes. Pour les morphismes de descente cohomologique, cette flèche sera un quasi-isomorphisme, puisque l'application de passage au quotient est un isomorphisme.

Rappelons maintenant la construction de Deligne–Illusie.

### 3.3. Rappel de la construction du morphisme de Deligne–Illusie

#### 3.3.1. Principe de la construction

Celle-ci est expliquée en [6]. Reprenons les notations de la section 3.2.1. On désigne par  $DR_{X_0}$  le complexe de de Rham sur  $X_0$  et  $\mathcal{C}^\vee(DR_{X_0})$  le complexe simple associé au complexe de Čech du complexe  $DR_{X_0}$ . Ces deux complexes sont quasi-isomorphes.

Tout d'abord  $DI^{(0)}$  est induit par le Frobenius en degré 0 :  $\mathcal{O}_{X'_0} \rightarrow F_*DR_{X_0}$ .

Deligne et Illusie définissent (voir ci-dessous section 3.3.3)

$$DI_e^{(1)} : \Omega_{X'_0}^1[-1] \rightarrow F_*\mathcal{C}^\vee(DR_{X_0}),$$

qui donne un morphisme dans  $D^b(\mathcal{O}_{X'_0})$  :

$$DI^{(1)} : \Omega_{X'_0}^1[-1] \rightarrow F_*DR_{X_0}.$$

Pour  $k \leq p - 1$ , il existe une section

$$\begin{aligned} \mathcal{S} : \quad \Omega_{X'_0}^k[-k] &\longrightarrow \left( \Omega_{X'_0}^1[-1]^{\otimes k} \right) \\ \omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_k &\longmapsto \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_k} \omega_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes \omega_{\sigma(k)}, \end{aligned}$$

où  $\mathfrak{S}_k$  désigne le groupe des permutations sur  $k$  éléments.

Deligne et Illusie définissent  $DI^{(k)} : \Omega_{X'_0}^k[-k] \rightarrow F_*DR_{X_0}$ , comme le composé

$$\Omega_{X'_0}^k[-k] \xrightarrow{S} \left( \Omega_{X'_0}^1[-1]^{\otimes k} \right) \xrightarrow{DI^{(1)\otimes k}} (F_*DR_{X_0})^{\otimes L k} \xrightarrow{\text{Prod}} F_*DR_{X_0},$$

où le morphisme Prod est défini comme en 2.4.1.

### 3.3.2. Comparaison en degré 0

En degré 0, d'après la section 2.3.1, on peut utiliser  $X_0$  pour calculer  $\Phi_e^{(0)} : \mathcal{O}_{X'_0} \rightarrow DR_{X_0}$ . On voit alors que  $\Phi_e^{(0)} = DI_e^{(0)}$  (section 3.3.1), ce qui signifie qu'en degré 0, le diagramme (3.1) est commutatif.

### 3.3.3. Construction en degré 1

Identifions comme d'habitude  $p\mathcal{O}_{X_1}$  à  $\mathcal{O}_{X_0}$  via  $m_p : \mathcal{O}_{X_0} \xrightarrow{\sim} p\mathcal{O}_{X_1}$ .  
 Suivant [14, 2.11 et 5.4], il existe un morphisme  $\mathcal{O}_{X'_0}$ -linéaire

$$h_{i,j} \in \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_{X'_0}}(\Omega_{X'_0/S_0}^1, F_*\mathcal{O}_{X_0})(U_{i,j}),$$

tel que

- (1)  $\forall b, c \in \mathcal{O}_{X'_0}$ ,  $\tilde{c}$  un relèvement de  $c$  dans  $\mathcal{O}_{X'_1}$ ,  $h_{i,j}(b \cdot dc) = b^p m_p^{-1}(F_j(\tilde{c}) - F_i(\tilde{c}))$ , qui est indépendant du choix de  $\tilde{c}$  et,
- (2)  $h_{i,j} + h_{j,k} = h_{i,k}$ .

La deuxième relation implique que les  $h_{i,j}$  définissent un cocycle de  $\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_{X'_0}}(\Omega_{X'_0/S_0}^1, F_*\mathcal{O}_{X_0})$ . On a :

$$\begin{aligned} F_*\mathcal{C}^\vee(DR_{X_0}) : 0 &\rightarrow \prod_i F_*\mathcal{O}_{U_i} \rightarrow \prod_{i<j} F_*\mathcal{O}_{U_{i,j}} \oplus \prod_i F_*\Omega_{U_i} \\ &\rightarrow \prod_{i<j<k} F_*\mathcal{O}_{U_{i,j,k}} \oplus \prod_{i<j} F_*\Omega_{U_{i,j}}^1 \oplus \prod_i F_*\Omega_{U_i}^2 \\ &\rightarrow \dots \rightarrow F_*\Omega_{U_{i_0, \dots, i_n}}^N \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Deligne et Illusie définissent un morphisme relativement au recouvrement par les ouverts  $(U_i)_i$  en degrés  $\leq 1$  par :

- (1)  $\forall a \in \mathcal{O}_{X'_0}$ ,  $DI_e^{(0)}(a) = (F(a)|_{U_i}) \in \prod_i F_*\mathcal{O}_{U_i}$ ,
- (2)  $\forall \omega \in \Omega_{X'_0}^1$ ,  $DI_e^{(1)}(\omega) = (h_{i,j}(\omega)|_{U_{i,j}}) \oplus (m_p^{-1}(dF_i(\omega))|_{U_i}) \in \prod_{i<j} F_*\mathcal{O}_{U_{i,j}} \oplus \prod_i F_*\Omega_{U_i}$ .

**3.4. Le calcul pour  $k = 1$**

Les notations sont celles définies en 3.2.1. Dans ce cas, le calcul est explicite.

3.4.1. Description des étapes du calcul pour  $k = 1$

Toutes les constructions et énoncés expliqués ici font l’objet des sous-sections suivantes.

- (1) On considère d’abord la première colonne du diagramme (3.1) pour  $k = 1$ . On peut utiliser le schéma simplicial  $U'_\bullet \hookrightarrow U'_{(\bullet)}$  pour calculer une réalisation de  $Ru_{X'_0} \mathcal{J}_{X'_0/S_0}^{[1]} / \mathcal{J}_{X'_0/S_0}^{[2]}$  par descente cohomologique. On obtient ainsi un complexe  $K^\bullet$  explicité en 3.6 et un quasi-isomorphisme de descente cohomologique  $DC'_2 : Ru_{X'_0} \mathcal{J}_{X'_0/S_0}^{[1]} / \mathcal{J}_{X'_0/S_0}^{[2]} \rightarrow K^\bullet$ . On définit alors en 3.3 un morphisme de complexes  $w : \Omega_{X'_0}^1[-1] \rightarrow K^\bullet$  qui rend commutatif le diagramme suivant

$$\begin{array}{ccc}
 K^\bullet & \xleftarrow{DC'_2} & Ru_{X'_0} \mathcal{J}_{X'_0/S_0}^{[1]} / \mathcal{J}_{X'_0/S_0}^{[2]} \\
 & \searrow w & \downarrow \text{can} \\
 & & \Omega_{X'_0}^1[-1].
 \end{array}$$

- (2) On procède de même pour la deuxième colonne du diagramme (3.1) pour  $k = 1$ . Le schéma  $U_\bullet \hookrightarrow U_{(\bullet)}$  permet de calculer une réalisation  $E^\bullet$  de  $F_* Ru_{X_0} \mathcal{O}_{X_0/S_0}$  (cf. section 2.1). Soit  $F_* \mathcal{C}^\vee(DR_{X_0})$  le complexe de Čech relatif au recouvrement par les ouverts  $U_i$  de  $X_0$ , du complexe de de Rham  $DR_{X_0}$ . On dispose d’un quasi-isomorphisme de réduction canonique  $\text{red} : E^\bullet \rightarrow F_* DR_{X_0}$ , ainsi que d’un quasi-isomorphisme  $\text{res}$  (résolution) :  $F_* DR_{X_0} \rightarrow F_* \mathcal{C}^\vee(DR_{X_0})$  et on montre que le diagramme suivant est commutatif

$$\begin{array}{ccc}
 F_* Ru_{X_0} \mathcal{O}_{X_0/S_0} & \xrightarrow{DC_2} & E^\bullet \\
 \downarrow \text{can} & & \downarrow \text{red} \\
 F_* DR_{X_0} & \xrightarrow{\text{res}} & F_* \mathcal{C}^\vee(DR_{X_0}).
 \end{array}$$

- (3) Pour  $k = 1$ , le morphisme de Deligne–Illusie est défini (section 3.3.3) par un morphisme de complexes  $DI_e^{(1)} : \Omega_{X'_0}^1[-1] \rightarrow F_* \mathcal{C}^\vee(DR_{X_0})$ . D’autre part, comme les ouverts  $U_i$  se relève mod  $p^2$  en les ouverts



$\mathcal{U}_i$ , on peut utiliser le schéma simplicial  $U_\bullet \hookrightarrow U_{(\bullet)}$  pour calculer le Frobenius divisé cristallin. Concrètement, en procédant comme en (2.6), nous obtenons un morphisme de complexes  $\Phi_e^{(1)} : K^\bullet \rightarrow E^\bullet$ . La dernière étape de la vérification consiste alors à montrer (proposition 3.7) que le diagramme suivant est commutatif

$$\begin{array}{ccc}
 K^\bullet & \xrightarrow{\Phi_e^{(1)}} & E^\bullet \\
 \uparrow w & & \downarrow \text{red} \\
 \Omega_{X'_0}^1[-1] & \xrightarrow{DI_e^{(1)}} & F_*\mathcal{C}^\vee(DR_{X_0}).
 \end{array}$$

La comparaison pour  $k = 1$  est alors formelle à partir des trois étapes précédentes et fait l’objet du corollaire 3.9.

### 3.4.2. Conventions d’écriture

Les algèbres  $\mathcal{P}(\mathcal{U}'_{(\underline{i})})$  sont des  $\mathcal{O}_{\mathcal{U}'_{(\underline{i})}}$ -algèbres, obtenues par la propriété universelle des algèbres à puissances divisées. Les morphismes  $\mathcal{J}_{\underline{i}}/\mathcal{J}_{\underline{i}}^{[2]} \rightarrow \mathcal{J}'_{\underline{i}}/\mathcal{J}'_{\underline{i}}^{[2]}$  avec  $|\underline{i}| = u$  et  $|\underline{i}'| = u'$  sont obtenus par functorialité des enveloppes à puissances divisées à partir des morphismes habituels  $\mathcal{O}_{\mathcal{U}'_{(\underline{i})}} \rightarrow \mathcal{O}_{\mathcal{U}'_{(\underline{i}')}}$ , et dont la construction est rappelée ci-dessous. Pour expliciter ces morphismes, nous nous contentons dans la suite de donner les formules pour les flèches  $\mathcal{O}_{\mathcal{U}'_{(\underline{i})}} \rightarrow \mathcal{O}_{\mathcal{U}'_{(\underline{i}')}}$ . Il est alors sous-entendu que ces flèches donnent des flèches au niveau des complexes simpliciaux considérés, par functorialité des constructions. Il s’agit donc d’un abus de notation, qui est habituel. Nous considérons les applications analogues sur les ouverts  $U'_{\underline{i}}$ , qui seront notées de la même façon.

Nous donnerons au cours du calcul l’expression détaillée de ces flèches.

D’autre part, nous travaillons dans des quotients. Nous utiliserons alors la notation  $\bar{a}$  pour signaler qu’on regarde l’image de l’élément  $a$  dans un quotient, qui sera en principe clair. Ainsi, dans  $\mathcal{J}'_{\underline{i}}/\mathcal{J}'_{\underline{i}}^{[2]}$  (où  $\mathcal{J}'_{\underline{i}}$  est le PD-ideal de  $\mathcal{P}(\mathcal{U}'_{(\underline{i})})$ ), si  $b$  est une section locale de  $\mathcal{O}_{\mathcal{U}'_{\underline{i}}}$ , resp.  $c$  une section locale de  $\mathcal{O}_{\mathcal{U}'_{\underline{j}}}$ , l’élément  $\bar{1} \otimes \overline{bc} - \bar{b} \otimes \overline{c}$  sera l’image de l’élément  $1 \otimes bc - b \otimes c$  modulo  $\mathcal{J}'_{\underline{i}}^{[2]}$ . Les conventions sont les mêmes pour les applications analogues sur les ouverts  $U'_{\underline{i}}$ .

Considérons, pour  $u \in \mathbf{N}$ ,  $\underline{i} = \{i_0, \dots, i_u\}$ , et  $l \in \{0, \dots, n\} \setminus \{i_0, \dots, i_u\}$ ,

$$\begin{aligned}
 \delta_l : \quad & \mathcal{O}_{\mathcal{U}'_{i_0}} \otimes_{S_1} \cdots \otimes_{S_1} \mathcal{O}_{\mathcal{U}'_{i_u}} \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathcal{U}'_{i_0}} \otimes_{S_1} \cdots \otimes_{S_1} \mathcal{O}_{\mathcal{U}'_l} \otimes_{S_1} \cdots \otimes_{S_1} \mathcal{O}_{\mathcal{U}'_{i_u}} \\
 & f_0 \otimes \cdots \otimes f_u \longmapsto f_0 \otimes \cdots \otimes 1 \otimes \cdots \otimes f_u.
 \end{aligned}$$

Ces flèches induisent des flèches

$$\begin{aligned}
 d'^{0,u} : \quad & \prod_{|\underline{i}|=u+1} \mathcal{P}(\mathcal{U}'_{(\underline{i})}) \longrightarrow \prod_{|\underline{i}|=u+2} \mathcal{P}(\mathcal{U}'_{(\underline{i})}) \\
 & S = \prod(S_{\underline{i}}) \longmapsto d'^{0,u}(S) \\
 & \text{avec } (d'^{0,u}(S))_{\underline{i}} = \sum_{l=0}^{u+1} (-1)^l \delta_l(S_{i_0, \dots, \widehat{i_l}, \dots, i_{u+1}}),
 \end{aligned}$$

ainsi que les flèches analogues pour  $v \in \mathbb{N}$ ,  $d'^{v,u}$  :

$$(3.2) \quad \prod_{|\underline{i}|=u+1} \mathcal{P}(\mathcal{U}'_{(\underline{i})}) \otimes \Omega_{\mathcal{U}'_{(\underline{i})}}^v \rightarrow \prod_{|\underline{i}|=u+2} \mathcal{P}(\mathcal{U}'_{(\underline{i})}) \otimes \Omega_{\mathcal{U}'_{(\underline{i})}}^v.$$

De plus, on a les inclusions  $\delta_l(\mathcal{J}'_{i_0, \dots, i_u}) \subset \mathcal{J}'_{i_0, \dots, l, \dots, i_u}$ , de sorte que  $\delta_l$  induit une application

$$(3.3) \quad \delta_l : \mathcal{J}'_i / \mathcal{J}'_i^{[2]} \rightarrow \mathcal{J}'_{i,l} / \mathcal{J}'_{i,l}^{[2]}.$$

Ces énoncés restent vrais pour les ouverts  $U'_i$  et les idéaux  $J'_i$ .

Le complexe  $R\varepsilon_* \circ Ru_{U'_*} \mathcal{J}'_{U'_*/S_0} / \mathcal{J}'_{U'_*/S_0}^{[2]}$ , avec les notations de la proposition 2.4 appliquées aux immersions fermées  $\beta'_i$ , est quasi-isomorphe au bicomplexe  $M^{\bullet, \bullet}$ , qu'on représente comme un complexe dont les termes sont des complexes en degré 0, 1, ...,  $n$  :

$$(3.4) \quad M^{\bullet, \bullet} : 0 \rightarrow \prod_i \mathcal{M}_{U'_i}^{[1]} \rightarrow \prod_{i,j} \mathcal{M}_{U'_{(i,j)}}^{[1]} \rightarrow \dots \rightarrow \mathcal{M}_{U'_{(0, \dots, n)}}^{[1]} \rightarrow 0.$$

Toujours d'après la proposition 2.4, chaque complexe  $\mathcal{M}_{U'_{(\underline{i})}}^{[1]}$  admet une résolution en deux crans. Soient  $i, j > 0$ , on a  $\mathcal{M}_{U'_{(i,j)}}^{[1]} \simeq \Omega_{U'_{(i,j)}}^1[-1]$  et  $\mathcal{M}_{U'_{(i,j)}}^{[1]}$  est le complexe

$$(3.5) \quad \mathcal{M}_{U'_{(i,j)}}^{[1]} : 0 \rightarrow J'_{i,j} / J'^{[2]}_{i,j} \rightarrow \beta'^*_{i,j} \Omega_{U'_{(i,j)}}^1 \rightarrow 0.$$

L'immersion fermée  $\beta'_{i,j} : U'_{i,j} \hookrightarrow U'_{(i,j)}$  induit un morphisme de complexes  $\beta'^*_{i,j} \mathcal{M}_{U'_{(i,j)}}^{[1]} \rightarrow \mathcal{M}_{U'_{(\underline{i})}}^{[1]}$ , nul en degré 0 et qui est donné en degré 1 par le morphisme canonique  $\beta'^*_{i,j} \Omega_{U'_{(i,j)}}^1 \rightarrow \Omega_{U'_{(\underline{i})}}^1$ .

Considérons le bi-complexe de terme général  $K^{t,u}$  pour  $u, t \geq 0$ ,

$$K^{0,u} = \prod_{|\underline{i}|=u+1} J'_i / J'^{[2]}_i, \text{ et } K^{1,u} = \prod_{|\underline{i}|=u+1} \beta'^*_{\underline{i}} \Omega_{U'_{(\underline{i})}}^1,$$

avec pour différentielle  $d'^{\cdot,u} : K^{\cdot,u} \rightarrow K^{\cdot,u+1}$  décrites ci-dessus (3.2) et  $d'^{t,\cdot}$ , qui est la différentielle provenant du complexe donné proposition 2.4 et qui

sera explicitée plus loin. Écrivons les premiers termes de ce bicomplexe :

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \dots \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\
 0 & \longrightarrow & \prod_i \Omega_{U'_i}^1 & \xrightarrow{d^{1,1}} & \prod_{i<j} \beta'_{i,j}^* \Omega_{U'_{(i,j)}}^1 & \longrightarrow & \prod_{i<j<k} \beta'_{i,j,k}^* \Omega_{U'_{(i,j,k)}}^1 & \longrightarrow & \dots \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\
 0 & \longrightarrow & 0 & \xrightarrow{d^{0,1}} & \prod_{i<j} J'_{i,j} / J'^{[2]}_{i,j} & \longrightarrow & \prod_{i<j<k} J'_{i,j,k} / J'^{[2]}_{i,j,k} & \longrightarrow & \dots
 \end{array}$$

Le complexe simple  $K^\bullet$  associé à ce bi-complexe est quasi-isomorphe à  $R\varepsilon_* \circ Ru_{U'_*} \mathcal{J}_{U'_i/S_0} / \mathcal{J}_{U'_i/S_0}^{[2]}$  et aussi au complexe  $Ru_{X_0^*} (\mathcal{J}_{X_0/S_0} / \mathcal{J}_{X_0/S_0}^{[2]})$ , c'est-à-dire finalement au complexe à  $\Omega_{X_0^1}^1[-1]$  (cf. proposition 2.5). En particulier, la cohomologie de ce complexe est concentrée en degrés 0 et 1, de sorte que ce complexe simple est quasi-isomorphe à son tronqué cohomologique  $\sigma_{\leq 1} K^\bullet$ . Le complexe simple  $K^\bullet$  est le complexe :

$$\begin{aligned}
 (3.6) \quad K^\bullet : 0 \rightarrow 0 &\xrightarrow{d_0} \prod_{i<j} J'_{i,j} / J'^{[2]}_{i,j} \bigoplus_i \Omega_{U'_i}^1 \\
 &\xrightarrow{d_1} \prod_{i<j<k} J'_{i,j,k} / J'^{[2]}_{i,j,k} \bigoplus_{i<j} \beta'_{i,j}^* \Omega_{U'_{(i,j)}}^1 \rightarrow \dots \rightarrow \beta'_{0,\dots,n}^* \Omega_{U'_{(i_0,\dots,i_n)}}^1 \rightarrow 0,
 \end{aligned}$$

et les premières différentielles proviennent par functorialité de la formation des PD-algèbres, des flèches suivantes :

$$\begin{aligned}
 d_1 \left( \prod_{i<j} \overline{h_{i,j}} \oplus \prod_{i=1}^n \omega_i \right) \\
 = \prod_{i<j<k} (\overline{\delta_0(h_{j,k}) - \delta_1(h_{i,k}) + \delta_2(h_{i,j})}) \oplus \prod_{i<j} (1 \otimes \omega_j - \omega_i \otimes 1 - d\overline{h_{i,j}}).
 \end{aligned}$$

On note finalement  $DC'_2$  le morphisme de descente cohomologique

$$DC'_2 : Ru_{X_0^*} \mathcal{J}_{X_0'/S_0} / \mathcal{J}_{X_0'/S_0}^{[2]} \rightarrow K^\bullet.$$

Dans la sous-section suivante, nous précisons ce calcul.

### 3.4.3. Première étape pour $k = 1$

Soit  $\mathcal{C}^\vee(\Omega_{X_0^1}^1)$  le complexe de Čech du faisceau  $\Omega_{X_0^1}^1$ , associé au recouvrement des  $(U'_i)$ , alors on dispose d'un morphisme canonique de résolution  $\text{res}' : \Omega_{X_0^1}^1 \rightarrow \mathcal{C}^\vee(\Omega_{X_0^1}^1)$  donné en degré 0 par  $\text{res}'(\omega) = ((\omega|_{U_i}))$ .

Il est tautologique que le diagramme suivant est commutatif

$$\begin{array}{ccc}
 Ru_{X'_0*} \mathcal{J} / \mathcal{J}_{X'_0/S_0}^{[2]} & \xrightarrow{\text{can}=DC'_0} & \Omega_{X'_0}[-1] \\
 \searrow DC'_1 & \circlearrowleft & \swarrow \text{res}' \\
 & & \mathcal{C}^\vee(\Omega_{X'_0}^1)[-1].
 \end{array}$$

Le deuxième terme  $K^1$  du complexe  $K^\bullet$  de (3.6) s'identifie à

$$(3.7) \quad K^1 \simeq \prod_{i < j} \Omega_{U'_{i,j}}^1 \oplus \prod_i \Omega_{U'_i}^1.$$

DÉFINITION 3.3. — Pour  $\omega$  une section locale de  $\Omega_{X'_0}^1$ , on pose

$$w_1(\omega) = ((\omega|_{U'_{i,j}}) \oplus \omega|_{U'_i}) \in K^1.$$

PROPOSITION 3.4. — L'application  $w$  définit un morphisme de complexes  $\Omega_{X'_0}^1[-1] \rightarrow K^\bullet$  rendant commutatif le diagramme :

$$\begin{array}{ccc}
 Ru_{X'_0*} \mathcal{J}_{X'_0/S_0} / \mathcal{J}_{X'_0/S_0}^{[2]} & \xrightarrow{\text{can}=DC'_0} & \mathcal{O}_{X'_0} \oplus \Omega_{X'_0}^1[-1] \\
 \searrow DC'_2 & \circlearrowleft & \swarrow w \\
 & & K^\bullet.
 \end{array}$$

Démonstration. — Montrons d'abord que  $w$  est un morphisme de complexes. Rappelons d'abord qu'on considère  $\mathcal{O}_{X'_0 \times X'_0}$  comme un  $\mathcal{O}_{X'_0}$ -module via  $b \mapsto 1 \otimes b$ .

Comme  $\Omega_{X'_0}^1[-1]$  est un complexe à différentielle nulle, il suffit de montrer que  $d_1 \circ w_1 = 0$ . Un élément  $\omega$  de  $\Omega_{X'_0}^1$  s'écrit localement  $\omega = bdc$ , soit comme la classe de  $\overline{1 \otimes bc - c \otimes b}$ , avec  $b, c \in \mathcal{O}_{X'_0}$ . Alors  $w_1(\omega) = (0 \oplus \overline{1 \otimes bc - c \otimes b|_{U'_i \times U'_j}}) \oplus (b \cdot dc|_{U'_i})$ . La composante sur  $J_{i,j,k} / J_{i,j,k}^{[2]}$  de  $d_1 \circ w_1(\omega)$  est

$$\begin{aligned}
 & d_1 \circ w_1(\omega)_{i,j,k} \\
 &= \overline{1 \otimes 1 \otimes bc - 1 \otimes c \otimes b - (1 \otimes 1 \otimes bc - c \otimes 1 \otimes b) + 1 \otimes bc \otimes 1 - c \otimes b \otimes 1} \\
 &= \overline{(c \otimes 1 \otimes 1 - 1 \otimes c \otimes 1)(1 \otimes 1 \otimes b - 1 \otimes b \otimes 1)} \in J_{i,j,k}^{[2]} \\
 &= 0.
 \end{aligned}$$

La composante sur  $\beta_{i,j}^* \Omega_{U'_{(i,j)}}^1$  de  $d_1 \circ w_1(\omega)$  est

$$\begin{aligned} d_1 \circ w_1(\omega) &= -\overline{d((1 \otimes b)(1 \otimes c - c \otimes 1))} + b(1 \otimes dc - dc \otimes 1)|_{U'_{i,j}} \\ &= -\overline{(1 \otimes c - c \otimes 1)(1 \otimes db)} \\ &\quad - (b(1 \otimes dc - dc \otimes 1) + b(1 \otimes dc - dc \otimes 1)|_{U'_{i,j}}) \\ &= \overline{(1 \otimes c - c \otimes 1)(1 \otimes db)} \\ &= 0 \in \beta_{i,j}^* \Omega_{U'_{(i,j)}}^1, \end{aligned}$$

car  $(1 \otimes c - c \otimes 1)(1 \otimes db) \in M_{i,j} \otimes \Omega_{U'_{(i,j)}}^1$ , où on rappelle que  $M_{i,j}$  est l'idéal diagonal de l'immersion  $U'_{i,j} \hookrightarrow U'_{(i,j)}$ . On en conclut que  $w$  est un morphisme de complexes.

Considérons ensuite le diagramme de morphismes de schémas simplciaux, où les deux carrés sont commutatifs

$$\begin{array}{ccc} U'_{\bullet} \hookrightarrow & & U'_{(\bullet)} \\ \parallel & \square & \uparrow \\ U'_{\bullet} \hookrightarrow & & U'_{\bullet} \\ \downarrow & \square & \downarrow \\ X'_{0\bullet} \hookrightarrow & & X'_{1\bullet} \end{array}$$

Le carré cartésien du haut donne une flèche canonique  $\text{red}' : K^{\bullet} \rightarrow \mathcal{C}^{\vee}(\Omega_{X'_0}^1)[-1]$  tel que  $\text{red}' \circ DC'_2 = DC'_1$ . Le complexe  $\mathcal{C}^{\vee} = \mathcal{C}^{\vee}(\Omega_{X'_0}^1)[-1]$  s'écrit :

$$0 \rightarrow 0 \xrightarrow{d'_0} \prod_i \Omega_{U'_i}^1 \xrightarrow{d'_1} \oplus_{i < j} \Omega_{U'_{i,j}}^1 \rightarrow \dots \xrightarrow{d'_n} \Omega_{U'_{0,\dots,n}}^1 \rightarrow 0.$$

Calculons  $\text{red}'_1$ . On rappelle (3.7) l'égalité

$$K^1 = \prod_{i < j} J'_{i,j} / J'^{[2]}_{i,j} \oplus \prod_i \Omega_{U'_i}^1.$$

Alors, d'après la démonstration de la proposition 2.6 et 3.4.2, la flèche  $\text{red}'_1$  est la projection :

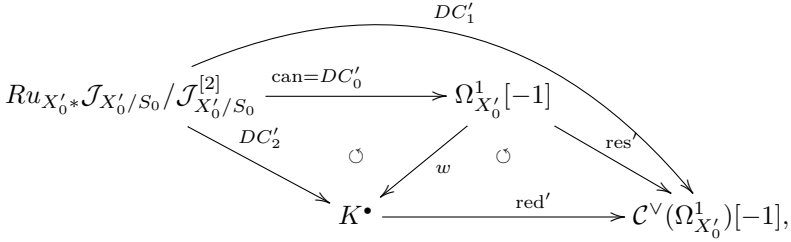
$$\text{red}'_1((\omega_{i,j}) \oplus (\eta_i)) = (\eta_i).$$

Ceci nous permet de calculer pour  $\omega \in \Omega_{X'_0}^1$ ,

$$\begin{aligned} \text{red}'_1 \circ w_1(\omega) &= \text{red}'_1((\omega|_{U'_{i,j}}) \oplus (\omega|_{U'_i})) \\ &= (\omega|_{U'_i}) \\ &= \text{res}'_1(\omega). \end{aligned}$$

On en conclut que  $\text{res}' = \text{red}' \circ w$ .

On dispose finalement du diagramme suivant dans  $D^b(\text{Ab}_{X'_0})$



où

$$\begin{aligned}
 \text{red}' \circ DC'_2 &= DC'_1 \\
 \text{res}' \circ DC'_0 &= DC'_1 \\
 \text{red}' \circ w &= \text{res}' .
 \end{aligned}$$

On en déduit :  $\text{red}' \circ DC'_2 = \text{res}' \circ DC'_0 = \text{red}' \circ w \circ DC'_0$ . Comme l'application  $\text{red}'$  est un quasi-isomorphisme, cela nous donne l'égalité des morphismes dans la catégorie dérivée :  $w \circ DC'_0 = DC'_2$ .  $\square$

Nous obtenons en particulier le

**COROLLAIRE 3.5.** — *Le morphisme de complexes  $w$  construit à la définition 3.3 est un quasi-isomorphisme de complexes.*

### 3.4.4. Fin du cas $k = 1$

Relativement aux immersions  $U_{\underline{i}} \hookrightarrow U_{(i)}$ , nous pouvons considérer les complexes

$$\mathcal{E}_{U_{(i)}} : 0 \rightarrow \mathcal{P}(U_{(i)}) \rightarrow \mathcal{P}(U_{(i)}) \otimes_{\mathcal{O}_{U_{(i)}}} \Omega_{U_{(i)}}^1 \rightarrow \dots \rightarrow \mathcal{P}(U_{(i)}) \otimes_{\mathcal{O}_{U_{(i)}}} \Omega_{U_{(i)}}^N \rightarrow 0 .$$

D'après la section 2.3, le morphisme  $\Phi_e^{(1)}$  induit un morphisme de complexes entre le bicomplexe suivant  $M^{\bullet,\bullet}$  défini en (3.4)

$$0 \rightarrow \prod_i \mathcal{M}_{U_i}^{[1]} \rightarrow \prod_{i,j} \mathcal{M}_{U_{(i,j)}}^{[1]} \rightarrow \dots \rightarrow \mathcal{M}_{U_{(0,\dots,n)}}^{[1]} \rightarrow 0,$$

et le complexe

$$0 \rightarrow \prod_i F_* \mathcal{E}_{U_i} \rightarrow \prod_{i,j} F_* \mathcal{E}_{U_{(i,j)}} \rightarrow \dots \rightarrow F_* \mathcal{E}_{U_{(0,\dots,n)}},$$

et donc par définition de  $K^\bullet$ , qui est le complexe simple associé au complexe source, un morphisme  $\Phi_e^{(1)}$  :

$$K^\bullet \rightarrow \left[ 0 \rightarrow \prod_i F_* \mathcal{E}_{U_{(i)}} \rightarrow \prod_{i,j} F_* \mathcal{E}_{U_{(i,j)}} \rightarrow \cdots \rightarrow F_* \mathcal{E}_{U_{(i_0, \dots, i_n)}} \right].$$

Dans la suite, nous noterons  $E^\bullet$  le complexe simple but du morphisme précédent. Nous pouvons expliciter ce complexe de la façon suivante :

$$\begin{aligned} E^\bullet : 0 &\rightarrow \prod_i F_* \mathcal{O}_{U_i} \rightarrow \prod_{i < j} F_* \mathcal{P}(U_{(i,j)}) \oplus \prod_i F_* \Omega_{U_i}^1 \\ &\rightarrow \prod_{i < j < k} F_* \mathcal{P}(U_{(i,j,k)}) \oplus \prod_{i < j} F_* \mathcal{P}(U_{(i,j)}) \otimes \Omega_{U_{(i,j)}}^1 \oplus \prod_i F_* \mathcal{O}_{U_i} \otimes \Omega_{U_i}^2 \\ &\rightarrow \cdots \rightarrow F_* \mathcal{P}(U_{(0, \dots, n)}) \otimes \Omega_{U_{0, \dots, n}}^{N(n+1)} \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Considérons maintenant comme pour la démonstration de la proposition 3.4, le diagramme de schémas simpliciaux

$$\begin{array}{ccc} U_\bullet & \hookrightarrow & U_{(\bullet)} \\ \parallel & \square & \uparrow \\ U_\bullet & \xlongequal{\quad} & \dot{U}_\bullet \\ \downarrow & \square & \downarrow \\ X_{0\bullet} & \hookrightarrow & X_{0\bullet\bullet} \end{array}$$

Par descente cohomologique, on a un quasi-isomorphisme entre  $E^\bullet$  et  $F_* Ru_{X_0} \mathcal{O}_{X_0/S_0}$ . On dispose enfin d'une flèche canonique  $\text{red}$  :

$$E^\bullet \xrightarrow{\text{red}} F_* \mathcal{C}_s^\vee(DR_{X_0}),$$

qui provient des quasi-isomorphismes  $F_* \mathcal{E}_{U_{(i)}} \rightarrow F_* DR_{U_{(i)}}$ , et tel que le diagramme suivant soit commutatif :

$$\begin{array}{ccc} F_* Ru_{X_0} \mathcal{O}_{X_0/S_0} & \xrightarrow{DC_1} & F_* \mathcal{C}_s^\vee(DR_{X_0}) \\ & \searrow DC_2 & \uparrow \text{red} \\ & & E^\bullet \end{array}$$

De même, si l'on note  $\text{res}$  la flèche de résolution canonique  $F_* DR_{X_0} \rightarrow F_* \mathcal{C}_s^\vee(DR_{X_0})$ , le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccc} F_* Ru_{X_0} \mathcal{O}_{X_0/S_0} & \xrightarrow{DC_1} & F_* \mathcal{C}_s^\vee(DR_{X_0}) \\ & \searrow DC_0 = \text{can} & \uparrow \text{res} \\ & & F_* DR_{X_0} \end{array}$$

Finalement, nous obtenons formellement

$$(3.8) \quad \text{red} \circ DC_2 = \text{res} \circ \text{can} .$$

Calculons l'application  $\text{red}$  :

$$\text{red}_0 : \quad \prod_i F_* \mathcal{O}_{U_i} \longrightarrow \prod_i F_* \mathcal{O}_{U_i} \\ (g_i) \longmapsto (g_i),$$

$$\text{red}_1 : \quad \prod_i F_* \mathcal{P}(U_{(i,j)}) \oplus \prod_i F_* \Omega_{U_i}^1 \longrightarrow \prod_i F_* \mathcal{O}_{U_{i,j}} \oplus \prod_i F_* \Omega_{U_i}^1 \\ (k_{i,j}) \oplus (\omega_i) \longmapsto \tau_{i,j}(k_{i,j}) \oplus (\omega_i),$$

où  $\tau_{i,j}$  est l'application de réduction canonique :  $F_* \mathcal{P}(U_{(i,j)}) \rightarrow F_* \mathcal{O}_{U_{i,j}}$ , correspondant au fait que  $\mathcal{O}_{U_{i,j}} \simeq \mathcal{P}(U_{(i,j)})/J_{i,j}$ .

PROPOSITION 3.6. — *Le diagramme suivant est commutatif : (niveau 0)*

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O}_{X'_0}[-1] & \xrightarrow{w} & K^\bullet \\ \downarrow DI_e^{(0)} & \circlearrowleft & \downarrow \Phi_e^{(1)} \\ F_* \mathcal{C}_s^\vee(DR_{X_0}) & \xleftarrow{\text{red}} & E^\bullet \end{array}$$

*Démonstration.* — Nous reprenons la description (3.6) du complexe  $K^\bullet$ . En particulier, son terme  $K^0$  est canoniquement isomorphe à  $\prod_i \mathcal{O}_{U_i}$ . Soit  $f$  une section locale de  $\mathcal{O}_{X'_0}$ , alors

$$\begin{aligned} w_0(f) &= (f|_{U_i}) \in K^0, \\ \Phi_0^{(1)} \circ w_0(f) &= (F(f|_{U_i})) \in E^0 \\ \text{red}_0 \circ \Phi_0^{(1)} \circ w_0(f) &= (F(f|_{U_i})), \\ &= DI_0^{(1)}(f) \end{aligned} \quad \square$$

PROPOSITION 3.7. — *Le diagramme suivant est commutatif :*

$$\begin{array}{ccc} \Omega_{X'_0}^1[-1] & \xrightarrow{w} & K^\bullet \\ \downarrow DI_e^{(1)} & \circlearrowleft & \downarrow \Phi_e^{(1)} \\ F_* \mathcal{C}^\vee(DR_{X_0}) & \xleftarrow{\text{red}} & E^\bullet \end{array}$$

*Démonstration.* — Nous reprenons la description (3.6) du complexe  $K^\bullet$ . Soit  $\omega \in \Omega_{X'_0}^1$ , qu'on écrit localement comme  $\omega = b \cdot dc$ , i.e.  $\omega = \overline{1} \otimes bc - c \otimes \overline{b}$ , avec  $b, c \in \mathcal{O}_{X'_0}$ . Il suffit, par linéarité, de montrer que  $\text{red}_1 \circ \Phi_e^{(1)} \circ w_1(dc) = DI_e^{(1)}(dc)$ , pour toute section locale  $c$  de  $\mathcal{O}_{X'_0}$ . Dans



la suite, nous prenons  $\omega = dc$ . Nous identifions à nouveau comme dans la proposition 2.6 le faisceau  $\Omega_{U'_{i,j}}^1$  à  $J_{i,j}/J_{i,j}^{[2]}$ , et  $dc$  à  $\overline{1} \otimes c - c \otimes \overline{1}$  (le surlignage indique que l'on prend la classe modulo  $J_{i,j}^{[2]}$ ). Alors on a

$$\Phi_e^{(1)} : K^1 = \prod_{i < j} \Omega_{U'_{i,j}}^1 \oplus \prod_i \Omega_{U'_i}^1 \rightarrow \prod_{i < j} F_* \mathcal{P}(U_{(i,j)}) \oplus \prod_i F_* \Omega_{U_i}^1,$$

et

$$DI_e^{(1)} : \Omega_{X'_0}^1 \rightarrow \prod_{i < j} F_* \mathcal{O}_{U_{i,j}} \oplus \prod_i F_* \Omega_{U'_i}^1.$$

Dans la suite, on compare les applications  $\text{red} \circ \Phi_e^{(1)} \circ w_1$  composante par composante. On note  $p_{i,j}$  les projections  $E^1 \rightarrow F_* \mathcal{P}(U_{(i,j)})$  (resp. de  $F_* \mathcal{C}^{\vee 1}(DR_{X_0}) \rightarrow F_* \mathcal{O}(U_{i,j})$ ), et  $p_i$  les projections  $E^1 \rightarrow F_* \Omega_{U_i}^1$  (resp. de  $F_* \mathcal{C}^{\vee 1}(DR_{X_0}) \rightarrow F_* \Omega_{U_i}^1$ ).

Le Frobenius divisé  $\Phi_e^{(1)}$  se calcule composante par composante. On sait que

$$w_1(\omega) = (\omega|_{U'_i}) \oplus (\omega|_{U'_{i,j}}).$$

Pour calculer  $p_{i,j} \circ \Phi_e^{(1)}(\omega)$ , il faut prendre un relèvement local  $\tilde{c}$  de  $c$  dans  $\mathcal{O}_{X'_1}$ ,  $\tilde{\omega} = \overline{1} \otimes \tilde{c} - \tilde{c} \otimes \overline{1}$  est alors une section locale de  $\Omega_{X'_1}^1$ . On calcule

$$F_i \times F_j(\tilde{\omega}|_{\mathcal{U}'_{i,j}}) \in p\mathcal{P}(\mathcal{U}_{(i,j)}),$$

et on applique  $m_p^{-1}$  pour avoir le résultat dans  $\mathcal{P}(U_{(i,j)})$ . Le résultat ne dépend pas du choix de  $\tilde{c}$ . On calcule (en notant  $\tilde{c} = c|_{\mathcal{U}'_{i,j}}$ ) :

$$\begin{aligned} (F_i \times F_j)(\tilde{\omega}|_{\mathcal{U}'_{i,j}}) &= (F_i \times F_j)(1 \otimes \tilde{c} - \tilde{c} \otimes 1) \in \mathcal{P}(\mathcal{U}_{(i,j)}), \\ &= 1 \otimes F_j(\tilde{c}) - F_i(\tilde{c}) \otimes 1. \end{aligned}$$

Soit  $r_{i,j} = (1 \otimes F_j(\tilde{c}) - F_i(\tilde{c}) \otimes 1) \in \mathcal{P}(\mathcal{U}_{(i,j)})$ , et  $\gamma$  les puissances divisées sur le PD-idéal  $\mathcal{J}_{i,j}$  idéal. Il est clair, d'après la construction de  $\Phi_e^{(1)}$  donnée section 2.3, que  $r_{i,j} \in p\mathcal{P}(\mathcal{U}_{(i,j)})$ , ce que l'on peut vérifier explicitement.

LEMME 3.8. —  $r_{i,j} \in p\mathcal{P}(\mathcal{U}_{(i,j)})$ .

Vérifions ce lemme. Nous savons que  $F_j(\tilde{c}) - F_i(\tilde{c}) \in p\mathcal{P}(\mathcal{U}_{(i,j)})$ , et

$$1 \otimes \tilde{c}^p - \tilde{c}^p \otimes 1 = (1 \otimes \tilde{c} - \tilde{c} \otimes 1)^p \text{ mod } p\mathcal{P}(\mathcal{U}_{(i,j)}).$$

Finalement, ceci nous donne

$$\begin{aligned}
 1 \otimes F_j(\tilde{c}) - F_i(\tilde{c}) \otimes 1 &= 1 \otimes F_i(\tilde{c}) - F_i(\tilde{c}) \otimes 1 + 1 \otimes (F_j(\tilde{c}) - F_i(\tilde{c})) \\
 &= 1 \otimes F_i(\tilde{c}) - F_i(\tilde{c}) \otimes 1 \pmod{p\mathcal{P}(\mathcal{U}_{(i,j)})} \\
 &= 1 \otimes \tilde{c}^p - \tilde{c}^p \otimes 1 \pmod{p\mathcal{P}(\mathcal{U}_{(i,j)})} \\
 &= p(p-1)! \gamma (1 \otimes \tilde{c} - \tilde{c} \otimes 1) \pmod{p\mathcal{P}(\mathcal{U}_{(i,j)})} \\
 &= 0 \pmod{p\mathcal{P}(\mathcal{U}_{(i,j)})}
 \end{aligned}$$

Observons maintenant que

$$\text{red}_1 (m_p^{-1}(1 \otimes F_j(\tilde{c}) - F_i(\tilde{c}) \otimes 1)) = m_p^{-1}(F_j(\tilde{c}) - F_i(\tilde{c})) \in \mathcal{O}_{U_{i,j}}.$$

Donc, pour  $\omega = dc$  une section locale de  $\Omega_{X'_0}^1$ , en utilisant l'expression de  $DI_e^{(1)}$  donnée à la section 3.3.3, nous obtenons

$$\begin{aligned}
 p_{i,j} \circ \text{red}_1 \circ \Phi_e^{(1)} \circ w_1(\omega) &= m_p^{-1}(F_j(\tilde{c}) - F_i(\tilde{c})) \in \mathcal{O}_{U_{i,j}}, \\
 &= p_{i,j} \circ DI_e^{(1)}(\omega).
 \end{aligned}$$

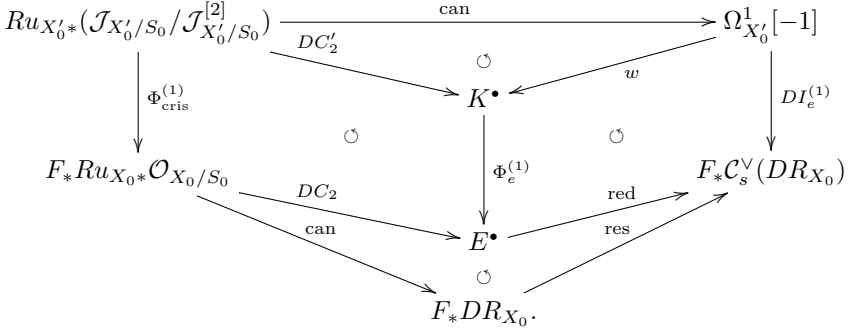
Comme ceci est vrai pour tout  $i, j$ , ceci achève la démonstration de la proposition. □

Nous terminons par un corollaire qui achève la démonstration du théorème.

**COROLLAIRE 3.9.** — *Le diagramme suivant de morphismes dans les catégories dérivées est commutatif :*

$$\begin{array}{ccc}
 Ru_{X'_0*} \mathcal{J}_{X'_0/S_0} / \mathcal{J}_{X'_0/S_0}^{[2]} & \xrightarrow{\Phi_{\text{cris}}^{(1)}} & F_* Ru_{X_0*} \mathcal{O}_{X_0/S_0} \\
 \text{can} \downarrow & & \downarrow \text{can} \\
 \Omega_{X'_0}^1 & \xrightarrow{DI^{(1)}} & F_* DR_{X_0}.
 \end{array}$$

*Démonstration.* — Les propositions 3.4 et 3.7 nous donnent le diagramme :



De ce diagramme on déduit les égalités de morphismes de complexes

$$\begin{aligned}
 \text{res} \circ \text{can} \circ \Phi_{\text{cris}}^{(1)} &= \text{red} \circ DC_2 \circ \Phi_{\text{cris}}^{(1)} \\
 &= \text{red} \circ \Phi_e^{(1)} \circ DC'_2 \\
 &= \text{red} \circ \Phi_e^{(1)} \circ w \circ \text{can} \\
 &= DI_e^{(1)} \circ \text{can},
 \end{aligned}$$

et donc que le diagramme précédent de morphismes dans les catégories dérivées ad hoc est commutatif. □

En particulier, l'égalité des morphismes précédents montre l'égalité des morphismes dans  $D^b(\mathcal{O}_{X'_0})$

$$\text{can} \circ \Phi_{\text{cris}}^{(1)} = DI^{(1)} \circ \text{can},$$

et donc le cas  $k = 1$  du théorème 3.1.

Appliquons maintenant le foncteur  $\sigma_{\leq 1}$  au diagramme (3.1). On note  $\Phi_{\text{cris}}^{\leq 1} = \sigma_{\leq 1} \circ \Phi_{\text{cris}}$  et  $DI^{\leq 1} = \sigma_{\leq 1} \circ DI$ . Le morphisme  $DI$  est un quasi-isomorphisme puisque par passage à la cohomologie il coïncide avec l'isomorphisme de Cartier. Sous l'hypothèse de la section 1, que  $X_0$  est un  $S_0$ -schéma projectif lisse, qui se relève modulo  $p^2$ , i.e. qui admet un relèvement projectif lisse sur  $S_1$ , nous en déduisons formellement le

**COROLLAIRE 3.10.** — *Nous avons les énoncés suivants, en utilisant la notation donnée en (2.5).*

- (1) *Le morphisme  $\Phi_{\text{cris}}^{\leq 1} : Ru_{X'_0*}(i_{X'_0/O_{X'_0}} \oplus \mathcal{J}_{X'_0/S_0}/\mathcal{J}_{X'_0/S_0}^{[2]}) \rightarrow \sigma_{\leq 1}F_*Ru_{X_0*}\mathcal{O}_{X_0/S_0}$  est un quasi-isomorphisme  $D^b(\mathcal{O}_{X'_0})$  dans  $D^b(\mathcal{O}_{X_0})$ .*

- (2) Si  $X_0$  est une courbe, le morphisme  $\Phi_{\text{cris}}$  est un quasi-isomorphisme de  $D^b(\mathcal{O}_{X'_0})$  dans  $D^b(\mathcal{O}_{X_0})$ .

**3.5. Comparaison : le cas général,  $k \leq p - 2$**

Nous avons vu que le calcul du morphisme de Deligne–Illusie provient de la structure produit sur le complexe de de Rham. Le but des diagrammes commutatifs qui suivent, de 3.5.1 à 3.5.4 est de montrer que le Frobenius cristallin  $\Phi_{\text{cris}}^{(k)}$  peut aussi se calculer à partir de  $k$  fois le produit de  $\Phi_{\text{cris}}^{(1)}$ , dans la catégorie dérivée. La comparaison dans le cas général entre les morphismes de Frobenius cristallins et de Deligne–Illusie se fait alors en se ramenant au cas  $k = 1$  (corollaire 3.10).

Définissons le morphisme  $\Phi^{(k)}$  dans  $D^b(\mathcal{O}_{X'_0})$  comme l'unique morphisme faisant commuter le diagramme

$$\begin{array}{ccc}
 Ru_{X'_0*}(\mathcal{J}_{X'_0/S_0}^{[k]}/\mathcal{J}_{X'_0/S_0}^{[k+1]}) & \xrightarrow{\Phi_{\text{cris}}^{(k)}} & F_*Ru_{X_0*}\mathcal{O}_{X_0/S_0} \\
 \downarrow \text{can} & & \downarrow \text{can} \\
 \Omega_{X'_0}^k[-k] & \xrightarrow{\Phi^{(k)}} & F_*DR_{X_0}.
 \end{array}$$

Nous souhaitons montrer que le diagramme suivant de complexes de faisceaux dans la catégorie dérivée est commutatif

$$\begin{array}{ccc}
 (\Omega_{X'_0}^1[-1])^{\otimes k} & \xrightarrow{\Phi^{(1)\otimes k}} & (F_*DR_{X_0})^{\otimes L k} \\
 \downarrow \text{Prod} & & \downarrow \text{Prod} \\
 \Omega_{X'_0}^k[-k] & \xrightarrow{\Phi^{(k)}} & F_*DR_{X_0}.
 \end{array}$$

Dans le cas où  $X_1$  admet un relèvement global du Frobenius c'est facile à voir, mais dans le cas général nous devons utiliser un recouvrement affine de  $X_1$  comme à la section 3.2.1.

3.5.1. Un premier diagramme commutatif

Nous reprenons ici la construction simpliciale et les notations simpliciales de la section 3.2.1. Nous noterons  $\mathcal{C}^\vee(\Omega^1_{X'_0})$  le complexe de Čech du

faisceau  $\Omega_{X'_0}^1$  relativement au recouvrement par les ouverts  $U'_i$ , de terme général

$$\bigoplus_{|i|=t} j_{i*} \Omega_{U'_i}^1.$$

Les immersions fermées  $\beta'_i : U'_i \rightarrow U'_{(i)}$  induisent un morphisme de schémas simpliciaux entre les schémas simpliciaux  $U'_i$  et  $U'_{(i)}$  et  $U'_i \hookrightarrow U'_{(i)}$ . On peut considérer les complexes simpliciaux calculant  $Ru_{X_0*} \mathcal{J}_{X'_0/S_0}^{[k]} / \mathcal{J}_{X'_0/S_0}^{[k+1]}$  sur ces deux schémas simpliciaux. À l'étage  $t$  du schéma simplicial  $U'_{(\bullet)}$ , ce complexe est le complexe  $\bigoplus_{|i|=t} \Omega^k_{U'_i}$ , tandis qu'à l'étage  $t$  du schéma simplicial  $U'_{(\bullet)}$ , on a le complexe  $\bigoplus_{|i|=t} \mathcal{M}_{U'_{(i)}}^{[k]}$ . Reprenons les notations du début de la section 2.4.1. On rappelle que pour  $0 \leq s \leq k$ , le  $s$ -ième terme de l'étage  $t$  de ce complexe simplicial est

$$\mathcal{M}_{U'_{(\bullet)}}^{[k]}(t)_s = \bigoplus_{|i|=t} J'^{[k-s]}_{U'_i} \tilde{\Omega}_{U'_{(i)}}^s / J'^{[k+1-s]}_{U'_i} \tilde{\Omega}_{U'_{(i)}}^s.$$

En particulier, on dispose de morphismes canoniques de complexes, ou applications de réduction :

$$\text{red} : \beta'^*_{i*} \mathcal{M}_{U'_{(i)}}^{[k]} \rightarrow \Omega^k_{U'_i}[-k],$$

qui est nulle, sauf en degré  $s = k$  et qui en degré  $k$  est donnée par le morphisme canonique  $\beta'^*_{i*} \Omega^k_{U'_{(i)}} \rightarrow \Omega^k_{U'_i}$ . Notons  $\beta'$  le morphisme simplicial défini par les  $\beta'_{i*}$ . Observons ici que les complexes simpliciaux  $\mathcal{M}_{U'_{(\bullet)}}^{[k]}$  sont à support sur le schéma simplicial  $U'_i$  de sorte que

$$\mathcal{M}_{U'_{(\bullet)}}^{[k]} \xrightarrow{\sim} \beta'_{*} \beta'^* \mathcal{M}_{U'_{(\bullet)}}^{[k]}.$$

Comme les morphismes  $\text{red}$  sont canoniques, ils donnent lieu à un morphisme de complexes simpliciaux

$$\text{red} : \beta'^* \mathcal{M}_{U'_{(\bullet)}}^{[k]} \rightarrow \Omega^k_{U'_i}[-k].$$

Les inclusions  $j'_i$  induisent un morphisme de schémas simpliciaux  $U'_i \hookrightarrow X'_{0\bullet}$ , où le deuxième schéma est le schéma simplicial constant égal à  $X'_0$ . On remarquera aussi au passage que le complexe simple associé au complexe simplicial

$$j'_{*} \left( \Omega^1_{U'_i} \right)^{\otimes k}$$

est le complexe de Čech

$$\mathcal{C}^\vee \left( \left( \Omega_{X'_0}^1 \right)^{\otimes k} \right)$$

relatif au recouvrement par les ouverts  $U'_i$  de  $X'_0$ .

Le morphisme produit Prod est un morphisme de complexes simpliciaux

$$\text{Prod} : \left( \mathcal{M}_{U'_i(\bullet)}^{[1]} \right)^{\otimes Lk} \rightarrow \mathcal{M}_{U'_i(\bullet)}^{[k]},$$

de même pour

$$\text{Prod} : \left( \Omega_{U'_i}^1 \right)^{\otimes k} \rightarrow \Omega_{U'_i}^k,$$

de sorte que nous pouvons considérer le diagramme suivant de complexes simpliciaux

$$\begin{array}{ccc} \left( \beta'^* \mathcal{M}_{U'_i(\bullet)}^{[1]} \right)^{\otimes Lk} & \xrightarrow{\text{red}^{\otimes k}} & \Omega_{U'_i}^1[-1]^{\otimes k} \\ \downarrow \text{Prod} & & \downarrow \text{Prod} \\ \beta'^* \mathcal{M}_{U'_i(\bullet)}^{[k]} & \xrightarrow{\text{red}} & \Omega_{U'_i}^k[-k] \end{array}$$

On dispose alors du

LEMME 3.11. — *Le diagramme précédent est commutatif.*

*Démonstration.* — La vérification se fait terme à terme et à chaque étage  $t$  des complexes simpliciaux, et en ce cas on est ramené au lemme 2.12.  $\square$

À partir du lemme précédent et en passant aux complexes simples associés, on obtient un diagramme commutatif, dont les flèches horizontales sont des quasi-isomorphismes

$$\begin{array}{ccc} j'_* \beta'^* \left[ \mathcal{M}_{U'_i(\bullet)}^{[1]} \right]^{\otimes Lk} & \xrightarrow{\text{red}^{\otimes k}} & \mathcal{C}^\vee \left( \Omega_{X'_0}^1[-1]^{\otimes k} \right) \\ \downarrow \text{Prod} & & \downarrow \text{Prod} \\ j'_* \beta'^* \left[ \mathcal{M}_{U'_i(\bullet)}^{[k]} \right] & \xrightarrow{\text{red}_k} & \mathcal{C}^\vee \left( \Omega_{X'_0}^k[-k] \right). \end{array}$$

D'autre part, on a une flèche de résolution canonique

$$\Omega_{X'_0}^1 \otimes^k \xrightarrow{\text{res}} \mathcal{C}^\vee \left( \Omega_{X'_0}^1 \right)^{\otimes k},$$

définie en degré 0 par

$$\text{red}(\omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_k) = ((\omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_k)|_{U_i}).$$

Il est évident que le diagramme suivant est commutatif

$$\begin{CD}
 \mathcal{C}^\vee \left( \Omega_{X'_0}^1[-1]^{\otimes k} \right) @<\text{res}<< \Omega_{X'_0}^1[-1]^{\otimes k} \\
 @V \text{Prod} VV @VV \text{Prod} V \\
 \mathcal{C}^\vee \left( \Omega_{X'_0}^k[-k] \right) @<\text{res}<< \Omega_{X'_0}^k[-k].
 \end{CD}$$

Définissons dans la catégorie dérivée des morphismes  $\theta_1 = \text{red}^{-1} \circ \text{res}$ ,  $\theta_1^{\otimes k} = (\text{red}^{\otimes k})^{-1} \circ \text{res}$  et

$$\theta_k = \text{red}_k^{-1} \circ \text{res} : \Omega_{X'_0}^k[-k] \rightarrow \left[ \mathcal{M}_{U'_0(\bullet)}^{[k]} \right].$$

La commutativité des diagrammes précédents entraîne alors que dans la catégorie dérivée  $D^b(\mathcal{O}_{X'_0})$ , le diagramme suivant est commutatif

$$\begin{CD}
 \left[ j'_* \beta'^* \mathcal{M}_{U'_0(\bullet)}^{[1]} \otimes^{\mathbb{L}k} \right] @<\theta_1^{\otimes k}<< \Omega_{X'_0}^1[-1]^{\otimes k} \\
 @V \text{Prod} VV @VV \text{Prod} V \\
 \left[ j'_* \beta'^* \mathcal{M}_{U'_0(\bullet)}^{[k]} \right] @<\theta_k<< \Omega_{X'_0}^k[-k].
 \end{CD}$$

### 3.5.2. Un deuxième diagramme commutatif

Le deuxième diagramme commutatif que nous devons considérer est analogue au premier et on démontre exactement de la même façon que le premier qu'il est commutatif. Soit  $\beta_{\underline{i}}$  l'inclusion de  $U_{\underline{i}}$  dans  $U_{(\underline{i})}$  et  $\beta$  le morphisme de schémas simpliciaux  $U_\bullet \hookrightarrow U_{(\bullet)}$  défini par ces applications. Les complexes de faisceaux  $\mathcal{E}_{U_{(\bullet)}}$  sont à support dans  $U_\bullet$ , ce qui se traduit par le fait que  $\mathcal{E}_{U_{(\bullet)}} \simeq \beta_* \beta^* \mathcal{E}_{U_{(\bullet)}}$ . On note  $c_{\underline{i}}$  le morphisme canonique

$$\beta_{\underline{i}}^* \widetilde{\Omega}_{U_{(\underline{i})}}^s \rightarrow \Omega_{U_{\underline{i}}}^s,$$

déduit de l'immersion fermée  $U_{\underline{i}} \hookrightarrow U_{(\underline{i})}$ . Pour  $0 \leq s \leq k$ , on rappelle aussi que

$$\mathcal{E}_{U_{(\bullet)}}(t)_s = \bigoplus_{|\underline{i}|=t} \widetilde{\Omega}_{U_{(\underline{i})}}^s.$$

À chaque étage  $t$  du schéma simplicial  $U_{(\bullet)}$ , on dispose donc d'applications canoniques de réduction  $\text{red} : \beta^* \mathcal{E}_{U_{(\bullet)}} \rightarrow DR_{U_\bullet}$  définies terme à terme, sur

une section locale  $1 \otimes \omega$  de  $\tilde{\Omega}_{U(\underline{i})}^s$  par  $\text{red}(1 \otimes \omega) = c_{\underline{i}}(1 \otimes \omega)$ . Comme précédemment, le morphisme  $\text{Prod} : \mathcal{E}_{U(\bullet)}^{\otimes Lk} \rightarrow \mathcal{E}_{U(\bullet)}$  (resp.  $DR_{U(\bullet)}^{\otimes Lk} \rightarrow DR_{U(\bullet)}$ ) est un morphisme de complexes simpliciaux. Pour  $\underline{i}$  fixé, le complexe  $j_{\underline{i}*}DR_{U_{\underline{i}}}$ , resp.  $j_{\underline{i}*}\beta^*\mathcal{E}_{U(\underline{i})}$ , resp.  $j_{\underline{i}*}DR_{U_{\underline{i}}}^{\otimes Lk}$ , resp.  $j_{\underline{i}*}\beta^*\mathcal{E}_{U(\underline{i})}^{\otimes Lk}$  est un complexe de faisceaux sur  $X_0$ , de sorte que les complexes  $\bigoplus_{\underline{i}} j_{\underline{i}*}DR_{U_{\underline{i}}}$ ,  $\bigoplus_{\underline{i}} j_{\underline{i}*}\beta^*\mathcal{E}_{U(\underline{i})}$ ,  $\bigoplus_{\underline{i}} j_{\underline{i}*}DR_{U_{\underline{i}}}^{\otimes Lk}$ ,  $\bigoplus_{\underline{i}} j_{\underline{i}*}\beta^*\mathcal{E}_{U(\underline{i})}^{\otimes Lk}$  forment des complexes simpliciaux sur le schéma simplicial constant  $X_{0\bullet}$ . Les complexes simples associés seront notés respectivement  $[DR_{U(\bullet)}]$ ,  $[DR_{U(\bullet)}^{\otimes Lk}]$ ,  $[\mathcal{E}_{U(\bullet)}]$ ,  $[\mathcal{E}_{U(\bullet)}^{\otimes Lk}]$ .

De plus, il vient du lemme 2.11 que le morphisme de réduction  $\text{red}$  commute au morphisme  $\text{Prod}$ , terme à terme, à chaque étage du schéma simplicial  $U_{\bullet}$ . On en déduit, en passant aux complexes simples associés, que le diagramme suivant est commutatif, dont les flèches horizontales sont des quasi-isomorphismes

$$\begin{CD} [j_*\beta^*\mathcal{E}_{U(\bullet)}]^{\otimes Lk} @>\text{red}^{\otimes k}>> [j_*DR_{U(\bullet)}]^{\otimes Lk} \\ @VV\text{Prod}V @VV\text{Prod}V \\ [j_*\beta^*\mathcal{E}_{U(\bullet)}] @>\text{red}>> \mathcal{C}^\vee(DR_{X_0}). \end{CD}$$

Fixons un multi-indice  $\underline{i}$  de longueur  $t$ . L'application canonique de restriction définie par

$$\text{res}(\eta_{i_1} \wedge \cdots \wedge \eta_{i_t}) = \eta_{i_1} \wedge \cdots \wedge \eta_{i_t|U_{\underline{i}}},$$

induit un morphisme de faisceaux sur  $X_0$  :

$$\text{res} : DR_{X_0} \rightarrow j_{\underline{i}*}DR_{U_{\underline{i}}}.$$

En passant au produit tensoriel dérivé, on obtient une application

$$\text{res}^{\otimes k} : DR_{X_0}^{\otimes Lk} \rightarrow j_{\underline{i}*}DR_{U_{\underline{i}}}^{\otimes Lk}.$$

Ces applications définissent donc des morphismes de complexes de faisceaux sur  $X_0$

$$\begin{aligned} \text{res} : DR_{X_0} &\rightarrow \bigoplus_{|\underline{i}|=t} j_{\underline{i}*}DR_{U_{\underline{i}}}, \text{ resp.} \\ \text{res}^{\otimes k} : DR_{X_0}^{\otimes Lk} &\rightarrow \bigoplus_{|\underline{i}|=t} j_{\underline{i}*}DR_{U_{\underline{i}}}^{\otimes Lk}. \end{aligned}$$

Ces complexes sont le terme général des complexes simpliciaux  $j_*DR_{U_{\bullet}}$ , resp.  $j_*DR_{U_{\bullet}}^{\otimes Lk}$  sur le schéma simplicial constant  $X_{0\bullet}$  et les applications  $\text{res}$  et  $\text{res}^{\otimes k}$  sont des morphismes de complexes simpliciaux.



Par définition, ces morphismes *res* sont compatibles à l'application produit *Prod* (puisque c'est vrai terme à terme). En passant aux complexes simples associés, on a un diagramme commutatif de complexes, dont les lignes horizontales sont des quasi-isomorphismes

$$\begin{CD} [j_* DR_{U_\bullet}^{\otimes Lk}] @<< \text{res}^{\otimes k} << DR_{X_0}^{\otimes Lk} \\ @V \text{Prod} VV @VV \text{Prod} V \\ C^\vee(DR_{X_0}) @<< \text{res} << DR_{X_0}. \end{CD}$$

Notons maintenant les quasi-isomorphismes dans la catégorie dérivée  $D^b(\mathcal{O}_{X_0})$

$$\begin{aligned} \Theta &= \text{red}^{-1} \circ \text{res} : DR_{X_0} \rightarrow [j_* \beta^* \mathcal{E}_{U_\bullet}], \\ \Theta^{\otimes k} &= \text{red}^{\otimes k-1} \circ \text{res}^{\otimes k} : DR_{X_0}^{\otimes Lk} \rightarrow [j_* \beta^* \mathcal{E}_{U_\bullet}^{\otimes Lk}]. \end{aligned}$$

Des deux diagrammes précédents on déduit que le diagramme suivant est commutatif

$$\begin{CD} DR_{X_0}^{\otimes Lk} @> \Theta^{\otimes k} >> [j_* \beta^* \mathcal{E}_{U_\bullet}^{\otimes Lk}] \\ @V \text{Prod} VV @VV \text{Prod} V \\ DR_{X_0} @> \Theta >> [j_* \beta^* \mathcal{E}_{U_\bullet}]. \end{CD}$$

### 3.5.3. Un troisième diagramme commutatif

Par functorialité, les morphismes de Frobenius induisent des morphismes de complexes simpliciaux

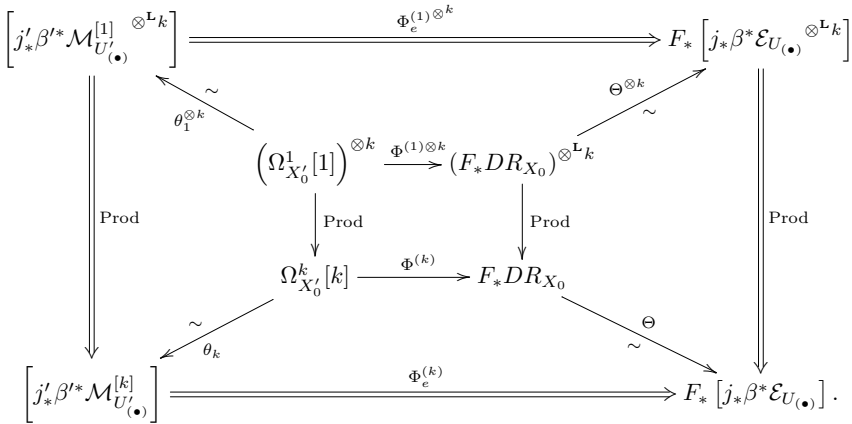
$$\Phi_e^{(1)} : \mathcal{M}_{U'_\bullet}^{[1]} \rightarrow F_* \mathcal{E}_{U_\bullet}, \text{ resp. } \Phi_e^{(k)} : \mathcal{M}_{U'_\bullet}^{[k]} \rightarrow F_* \mathcal{E}_{U_\bullet}.$$

Il découle du lemme 2.9 qu'à chaque étage  $t$  des schémas simpliciaux  $U'_\bullet$  (resp.  $U_\bullet$ ), les morphismes de Frobenius  $\Phi_e^{(1)}$  et  $\Phi_e^{(k)}$  sont compatibles aux produits *Prod*. On en déduit, en passant aux complexes simples associés que le diagramme suivant est commutatif

$$\begin{CD} [j'_* \beta'^* \mathcal{M}_{U'_\bullet}^{[1] \otimes Lk}] @> \Phi_e^{(1) \otimes k} >> F_* [j_* \beta^* \mathcal{E}_{U_\bullet}^{\otimes Lk}] \\ @V \text{Prod} VV @VV \text{Prod} V \\ [j'_* \beta'^* \mathcal{M}_{U'_\bullet}^{[k]}] @> \Phi_e^{(k)} >> F_* [j_* \beta^* \mathcal{E}_{U_\bullet}]. \end{CD}$$

3.5.4. Un dernier diagramme commutatif et démonstration du théorème principal

On considère désormais le diagramme suivant, dont tous les diagrammes extérieurs sont commutatifs, et dont le diagramme extérieur aux flèches doubles est aussi commutatif d'après le lemme 2.9



On calcule alors

$$\begin{aligned} \Theta \circ \text{Prod} \circ \Phi^{(1)\otimes k} \circ (\theta_1^{\otimes k})^{-1} &= \text{Prod} \circ \Theta^{\otimes k} \circ \Phi^{(1)\otimes k} \circ (\theta_1^{\otimes k})^{-1} \\ &= \text{Prod} \circ \Phi_e^{(1)\otimes k}, \end{aligned}$$

et de façon analogue

$$\begin{aligned} \Theta \circ \Phi^{(k)} \circ \text{Prod} \circ (\theta_1^{\otimes k})^{-1} &= \Phi_e^{(k)} \circ \theta_k \circ \text{Prod} \circ (\theta_1^{\otimes k})^{-1} \\ &= \Phi_e^{(k)} \circ \text{Prod}. \end{aligned}$$

On en déduit finalement que le diagramme central du diagramme précédent est commutatif c'est-à-dire que

$$(3.9) \quad \text{Prod} \circ \Phi^{(1)\otimes k} = \Phi^{(k)} \circ \text{Prod}.$$

Soit  $\mathcal{S}$  la section de  $\text{Prod}$ ,  $\mathcal{S} : \Omega_{X'_0}^k \rightarrow \Omega_{X'_0}^1{}^{\otimes k}$ . Par définition, puisque  $\Phi^{(1)} = DI^{(1)}$  d'après le corollaire 3.10, le morphisme de Deligne–Illusie est le morphisme

$$DI^{(k)} = \text{Prod} \circ \Phi^{(1)\otimes k} \circ \mathcal{S}.$$

En composant à droite avec  $\mathcal{S}$  l'égalité précédente (3.9), on trouve que

$$\forall k \leq p - 2, \Phi^{(k)} = DI^{(k)}.$$

Ce qui achève la démonstration du théorème 3.1.

### 4. Comparaison avec le Frobenius divisé de Mazur modulo $p$

Nous supposons dans cette section que la condition de Mazur [17] est vérifiée, c'est-à-dire que

$$(4.1) \quad \forall p, q \geq 0, \text{ les groupes } H^p(X, \Omega_X^q) \text{ sont des } W\text{-modules libres de rang fini.}$$

C'est par exemple le cas si  $X_0$  est une courbe projective lisse, une variété abélienne, ou une surface  $K3$ . Sous ces conditions la suite spectrale de Hodge vers de Rham pour  $X$  sur  $S = \text{spec } W$  dégénère d'après [5]. En particulier les groupes de cohomologie de de Rham  $H_{DR}^*(X/S)$  et donc aussi les groupes de cohomologie cristalline sont sans torsion. Soit  $\mathcal{C}_i$  le tronqué bête du complexe de de Rham

$$\mathcal{C}_i : 0 \rightarrow \dots \rightarrow 0 \rightarrow \Omega_X^i \rightarrow \dots \rightarrow \Omega_X^N \rightarrow 0,$$

alors la dégénérescence de la suite spectrale de Hodge vers de Rham nous donne des suites exactes, pour tout  $m \geq 0$ ,

$$(4.2) \quad 0 \rightarrow R^m\Gamma(X, \mathcal{C}_{i+1}) \rightarrow R^m\Gamma(X, \mathcal{C}_i) \rightarrow H^m(X, \Omega_X^i) \rightarrow 0.$$

Enfin, sous ces conditions, la suite exacte des coefficients universels ([3, 7.25]) nous dit que pour tous  $n, m, i \geq 0$ ,

$$(4.3) \quad W/p^{n+1}W \otimes_W H^m(X, \Omega_X^i) \simeq H^m(X_n, \Omega_{X_n}^i),$$

$$\text{et } H_{DR}^m(X) \otimes_W W/p^{n+1}W \simeq H_{DR}^m(X_n).$$

Pour définir le Frobenius divisé de Mazur, on se fixe un scindage  $\tau = \bigoplus \tau_i$  compatible à la filtration de Hodge, c'est-à-dire que  $\tau_i$  est un scindage de la surjection canonique  $R^n\Gamma(X', \mathcal{C}_i) \rightarrow H^{n-i}(X', \Omega_{X'}^i)$ . Dans ce cas, on note encore  $\tau_i$  l'application :  $H^{n-i}(X', \Omega_{X'}^i) \rightarrow H_{DR}^n(X')$ .

Le Frobenius cristallin donne un morphisme dans la catégorie dérivée des faisceaux de groupes abéliens  $F : DR_{X'_0} \rightarrow DR_{X_0}$ . Il résulte de la section 2.3.2 que le morphisme  $m_p^{-i} \circ F$  induit un morphisme dans la catégorie dérivée :  $\Psi^{(i)} : \mathcal{C}_i \rightarrow DR_X$ . Le Frobenius divisé de Mazur  $\Phi_M^{(i)} : H^{n-i}(X', \Omega_{X'}^i) \rightarrow DR_X$  est alors défini comme  $\Phi_M^{(i)} = \Psi^{(i)} \circ \tau_i$  en degré  $i$ . Le Frobenius divisé de Mazur est défini comme

$$\Phi_M = \bigoplus_{i=0}^n \Phi_M^{(i)} : \bigoplus_{i=0}^n H^{n-i}(X', \Omega_{X'}^i) \rightarrow H_{DR}^n(X).$$

Réduisons  $\Phi_M^{(i)}$  (resp.  $\Phi_M$ ) modulo  $p$ , d'après les propriétés rappelées en (4.3), on obtient

$$\bar{\Phi}_M^{(i)} : H^{n-i}(\Omega_{X'_0}^i) \rightarrow H_{DR}^n(X_0) \text{ (resp. } \bar{\Phi}_M).$$

Par construction, le morphisme  $\Psi^{(i)} \bmod p$  est le Frobenius divisé cristallin de (2.7), qui est obtenu par passage au quotient, de sorte que  $\bar{\Psi}^{(i)} = W/pW \otimes_W \Psi^{(i)}$  induit un morphisme dans la catégorie dérivée

$$\bar{\Psi}^{(i)} : W/pW \otimes_W \mathcal{C}_i/\mathcal{C}_{i+1} \rightarrow DR_{X_0}.$$

En passant au foncteur dérivé du foncteur section globale, on trouve

$$\bar{\Psi}^{(i)} : H^{n-i}(X'_0, \Omega_{X'_0}^i) \rightarrow H_{DR}^n(X_0),$$

qui coïncide par construction avec la réduction mod  $p$  du Frobenius divisé de Mazur en degré  $i$ . En particulier, on voit que ce morphisme est indépendant du choix du scindage  $\tau_i$ . En appliquant le précédent théorème 3.1, on trouve donc

**THÉORÈME 4.1.** — *Supposons que  $X$  est une variété projective lisse sur  $S$ , vérifiant les conditions de Mazur (4.1).*

- (1) *Le Frobenius divisé mod  $p$  de Mazur est indépendant du choix du scindage compatible à la filtration de Hodge.*
- (2) *Si  $p \geq \dim(X)+2$ , le Frobenius divisé de Mazur mod  $p$  sur  $H_{DR}^n(X)$ , le  $n$ -ième groupe de cohomologie de de Rham de  $X$ , coïncide avec le composé  $R^n\Gamma \circ DI$  (3.1).*

## 5. Applications à la courbe de Drinfeld

### 5.1. Généralités

La situation générale est celle décrite dans la section précédente, où  $X_0$  est une courbe propre et lisse sur  $\text{spec } k$  se relevant en  $X$  projectif et lisse sur  $\text{spec } W$ .

La cohomologie de de Rham de  $X$  est munie de l'endomorphisme du Frobenius absolu  $F_{DR}$ , semi-linéaire par rapport à  $\sigma$ . D'autre part, le choix d'un scindage  $\tau$  de la suite exacte courte

$$(5.1) \quad 0 \rightarrow H^0(X', \Omega_{X'}^1) \rightarrow H_{DR}^1(X') \rightarrow H^1(X', \mathcal{O}_{X'}) \rightarrow 0,$$

détermine un isomorphisme

$$H^0(X', \Omega_{X'}^1) \oplus H^1(X', \mathcal{O}_{X'}) \simeq H_{DR}^1(X').$$

On peut alors définir le Frobenius divisé

$$\Phi_M : H^0(X', \Omega_{X'}^1) \oplus H^1(X', \mathcal{O}_{X'}) \rightarrow H_{DR}^1(X)$$

et sa réduction modulo  $p$ ,

$$\bar{\Phi}_M = \bar{\Phi}_M^{(0)} \oplus \bar{\Phi}_M^{(1)} : H^0(X'_0, \Omega_{X'_0}^1) \oplus H^1(X'_0, \mathcal{O}_{X'_0}) \rightarrow H_{DR}^1(X_0),$$

qui ne dépend pas de  $\tau$ .

D'autre part, le schéma  $X_1$  étant un relèvement plat de  $X_0$  sur  $W_2$ , l'application de Deligne et Illusie ([6])

$$DI : \bigoplus_{i=0}^{p-2} \Omega_{X'_0}^i[-i] \rightarrow F_*\Omega_{X_0}$$

est un quasi-isomorphisme et induit l'isomorphisme

$$R^1\Gamma \circ DI : H^0(X'_0, \Omega_{X'_0}^1) \oplus H^1(X'_0, \mathcal{O}_{X'_0}) \rightarrow H_{DR}^1(X_0)$$

qui n'est autre que  $\bar{\Phi}_M$  par le théorème 4.1.

Rappelons brièvement la méthode, qui utilise le complexe de Cech, dans le cas où la courbe  $X_0$  admet un recouvrement  $\mathcal{U}$  constitué de deux ouverts affines lisses notés  $U_0$  et  $V_0$ . Ces deux ouverts se relèvent en  $U_1$  et  $V_1$  constituant un recouvrement affine lisse de  $X_1$  sur  $W_2$ . Le Frobenius sur  $X_0$  se relève alors séparément sur chacun des deux ouverts  $U_1$  et  $V_1$  en des applications notées  $f_{U_1}$  et  $f_{V_1}$ . Notons  $\check{C}(\mathcal{U}, \Omega_{X_0})$  le complexe simple associé au bicomplexe de Cech du recouvrement  $\mathcal{U}$ . Le morphisme  $\Omega_{X_0} \rightarrow \check{C}(\mathcal{U}, \Omega_{X_0})$  est un quasi-isomorphisme et induit un isomorphisme

$$H_{DR}^i(X_0) \simeq H^i(\check{C}(\mathcal{U}, \Omega_{X_0})).$$

De même  $F_*\Omega_{X_0} \rightarrow F_*\check{C}(\mathcal{U}, \Omega_{X_0})$  est un quasi-isomorphisme, d'où la méthode suivante pour déterminer  $DI$  :

- en degré 0,  $f_{X_1}^{(0)} : \mathcal{O}_{X_1} \rightarrow F_*\mathcal{O}_U \oplus F_*\mathcal{O}_V$  est l'application  $\sigma$ -linéaire de  $k$ -algèbres qui envoie  $x$  sur  $x^p$ .
- en degré 1,  $f_{X_1}^{(1)} = (f_U, f_V, h) : \Omega_{X'_0}^1 \rightarrow F_*\Omega_{U_0/k}^1 \oplus F_*\Omega_{V_0/k}^1 \oplus F_*\mathcal{O}_{U_0 \cap V_0}$  est induite par l'application qui localement vérifie

$$\begin{aligned} f_U(\omega) &= m_p^{-1} \circ dF_{U_1}(\omega|_{U_1}) \\ f_V(\omega) &= m_p^{-1} \circ dF_{V_1}(\omega|_{V_1}) \\ h(dx) &= m_p^{-1}(F_{V_1}(x) - F_{U_1}(x)). \end{aligned}$$

On peut alors identifier  $H_{DR}^1(X_0)$  à l'ensemble des classes de triplets  $\bar{\eta}$ , de représentants

$$\eta = (\omega_U, \omega_V, h) \in \Omega_{U_0/k}^1 \times \Omega_{V_0/k}^1 \times \mathcal{O}_{U_0 \cap V_0}$$

tels que  $(\omega_U)|_{U_0 \cap V_0} - (\omega_V)|_{U_0 \cap V_0} + dh = 0$ , avec pour relations  $\bar{\eta} = 0$  si  $h$  peut s'écrire comme une somme  $h = h_U + h_V$ , où  $h_U$  (respectivement  $h_V$ ) est une fonction définie sur  $U_0$  (respectivement sur  $V_0$ ) et  $\omega_U = -dh_U$  (respectivement  $\omega_V = dh_V$ ).

### 5.2. Cohomologie de de Rham des courbes de Drinfeld

Soit  $n$  un entier strictement positif,  $k$  un corps parfait de caractéristique  $p$  et  $W$  l'anneau des vecteurs de Witt à coefficients dans  $k$ ; posons  $q = p^n$ . On considère la courbe  $C_k$  projective et lisse sur  $\mathbf{F}_p$ , d'équation

$$XY^q - X^qY - Z^{q+1} = 0$$

dans  $\mathbf{P}^2$ . Le groupe  $SL_2(\mathbf{F}_q)$  agit sur  $\mathbf{P}_k^2$  via

$$g \mapsto \begin{pmatrix} & & 0 \\ g & & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

et cette action laisse stable  $C_k$ . De plus, si  $F$  désigne le Frobenius géométrique agissant sur  $C_k$ , les actions de  $F^n$  et de  $SL_2(\mathbf{F}_q)$  sur  $C_k$  commutent entre elles.

La courbe  $C_k$  peut-être recouverte par deux ouverts affines

$$U_0 = \text{spec } k[u_1, u_2] = \text{spec } k[Y, Z]/(Y^q - Y - Z^{q+1})$$

$$V_0 = \text{spec } k[v_1, v_2] = \text{spec } k[X, Z]/(X - X^q - Z^{q+1})$$

avec les changements de carte  $u_1 = \frac{1}{v_1}$  et  $v_2 = \frac{u_2}{u_1}$ .

Notons  $C_W$  la courbe projective et lisse d'équation  $XY^q - X^qY - Z^{q+1} = 0$  dans  $\mathbf{P}_W^2$ ; c'est un relèvement de  $C_k$  sur  $W$ , qui peut aussi être recouvert par deux ouverts affines notés  $U_W = \text{spec } W[u_1, u_2]$  et  $V_W = \text{spec } W[v_1, v_2]$ .

LEMME 5.1.

- (1) *Le Frobenius se relève sur l'ouvert  $U_1$  en une application  $F_{U_1}$  définie sur les générateurs par*

$$F_{U_1}(u_1) = u_1^p \left( 1 - \sum_{l=1}^{p-1} (-1)^l \binom{p}{l} u_1^{(q-1)(p-l)} \right) \text{ et } F_{U_1}(u_2) = u_2^p.$$

(2) *Le Frobenius se relève sur l'ouvert  $V_1$  en une application  $F_{V_1}$  définie sur les générateurs par*

$$F_{V_1}(v_1) = v_1^p \left( 1 - \sum_{l=1}^{p-1} (-1)^l \binom{p}{l} v_1^{(q-1)l} \right) \text{ et } F_{V_1}(v_2) = v_2^p.$$

*Démonstration.* — On recherche un relèvement sous la forme

$$F_{U_1}(u_1) = u_1^p (1 + pK(u_1))$$

et  $F_{U_1}(u_2) = u_2^p$ , et l'on obtient  $K(u_1) = -\sum_{l=1}^{p-1} (-1)^l \frac{\binom{p}{l}}{p} u_1^{(q-1)(p-l)}$ .  $\square$

En utilisant le recouvrement ci-dessus et la cohomologie de Čech, Haastert et Jantzen démontrent la proposition suivante ([12, corollary 2.2 et proposition 2.3]), où  $A$  représente  $k$ ,  $W$  ou plus généralement un anneau noethérien intègre dans lequel  $q^2 - 1$  est inversible.

PROPOSITION 5.2.

(1) *Le  $A$ -module  $H^0(C_A, \Omega_{C_A}^1)$  est libre de base*

$$\{u_1^a u_2^b (qu_1^{q-1} - 1)^{-1} du_2, a \in \mathbf{N}, b \in \mathbf{N}, a + b \leq q - 2\};$$

(2) *Le  $A$ -module  $H^1(C_A, \mathcal{O}_{C_A})$  est libre de base*

$$\{[u_1^{-a} u_2^b], 1 \leq a < b \leq q\}.$$

Dans le cas où le corps  $k$  contient  $\mathbf{F}_{q^2}$ , on dispose également d'une action de  $\mathbf{F}_{q^2}^\times$  sur  $C_k$  via

$$\alpha \mapsto \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \alpha^{-q} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Le représentant de Teichmüller fournit un plongement naturel de  $\mathbf{F}_{q^2}^\times$  dans  $W$  et est utilisé pour définir l'action sur  $C_A$ .

On constate que  $\mu = \{\alpha \in \mathbf{F}_{q^2}^\times \mid \alpha^{q+1} = 1\}$  agit sur les ouverts affines et, pour  $\alpha \in \mu$ ,  $\alpha(u_1) = [\alpha]^{-(q+1)} u_1 = u_1$  et  $\alpha(u_2) = [\alpha]^{-1} u_2$ . L'action de  $\mathbf{F}_{q^2}^\times$  permet de décomposer la cohomologie de de Rham et les groupes de cohomologie de Hodge en sous-espaces propres de dimension 1 ([12, proposition 2.11]).

Notons  $\psi(j)$ , pour  $j \in \mathbf{Z}$ , le caractère de  $\mathbf{F}_{q^2}^\times$  défini par  $\alpha \mapsto \alpha^j$ .

PROPOSITION 5.3. — *Les décompositions suivantes sont des décompositions en espaces propres de dimension 1 pour l'action de  $\mathbf{F}_{q^2}^\times$  :*

- (1)  $H^1(C_A, \mathcal{O}_{C_A}) = \bigoplus_{0 \leq j < i \leq q-1} H^1(C_A, \mathcal{O}_{C_A})_{\psi(i+qj)}$ ;
- (2)  $H^0(C_A, \Omega_{C_A}^1) = \bigoplus_{0 \leq i < j \leq q-1} H^0(C_A, \Omega_{C_A}^1)_{\psi(i+qj)}$ ;
- (3)  $H_{DR}^1(C_A) = \bigoplus_{0 \leq i \neq j \leq q-1} H_{DR}^1(C_A)_{\psi(i+qj)}$ .

*Démonstration.*

- (1) Pour  $1 \leq a < b \leq q$ , la classe  $[u_1^{-a}u_2^b]$  est un générateur de  $H^1(C_A, \mathcal{O}_{C_A})_{\psi(i+qj)}$  en posant  $i = q - b + a$  et  $j = a - 1$  ;
- (2) de la même manière, on obtient un générateur de  $H^0(C_A, \Omega_{C_A}^1)_{\psi(i+qj)}$  en considérant  $u_1^a u_2^b (qu_1^{q-1} - 1)^{-1} du_2$  avec les relations  $i = q - 2 - a - b$  et  $j = q - 1 - a$ . □

*Remarque.* — La proposition permet de construire un scindage naturel de la suite exacte courte (5.1) : pour  $u \in H^1(C_A, \mathcal{O}_{C_A})_{\psi(i+qj)}$ , choisissons  $\tau(u)$  comme l'unique élément de  $H_{DR}^1(C_A)_{\psi(i+qj)}$  d'image  $u$  par la surjection. Le scindage  $\tau$  étant fixé, nous noterons dorénavant  $\Phi_M = \Phi_M^\tau$  et nous l'assimilons à une application de  $H_{DR}^1(C'_A)$  vers  $H_{DR}^1(C_A)$ .

### 5.3. Calcul du Frobenius divisé

Compte tenu des remarques ci-dessus, choisissons, pour chaque couple d'entiers strictement positifs  $(i, j)$  tels que  $0 \leq i < j \leq q - 1$ , le générateur

$$v(i, j) = u_1^{q-1-j} u_2^{j-i-1} (qu_1^{q-1} - 1)^{-1} du_2$$

du  $W$ -module  $H^0(C_W, \Omega_{C_W}^1)_{\psi(i+qj)}$  libre de rang 1 ; l'ensemble  $\{v(i, j) \mid 0 \leq i < j \leq q - 1\}$  est une base de  $H^0(C_W, \Omega_{C_W}^1)$ .

De même, pour  $0 \leq j < i \leq q - 1$ , choisissons le générateur

$$v(-i, -j) = \tau([u_1^{-j-1} u_2^{q-i+j+1}])$$

du  $W$ -module  $H_{DR}^1(C_W)_{\psi(i+qj)}$  libre de rang 1.

Le fait de remarquer que si  $v \in H_{DR}^1(C_W)_{\psi(m)}$ , alors  $F_{DR}(v) \in H_{DR}^1(C_W)_{\psi(pm)}$ , permet à Haastert et Jantzen de décrire comment l'action du Frobenius échange les espaces propres pour l'action de  $\mathbf{F}_{q^2}^\times$  ([12, proposition 3.5]). On sait alors quels coefficients de la matrice du Frobenius dans la base  $(v(i, j), v(-i, -j))$  ne sont pas nuls, sans les calculer. Nous proposons ici un calcul explicite modulo  $p$  des coefficients du Frobenius divisé.

*AVERTISSEMENT.* — Les éléments  $v(i, j)$  (respectivement  $v(-i, -j)$ ) présents dans cet article correspondent à  $v(i, q - j - 1)$  (respectivement  $v(-i, -(q - j - 1))$ ) de [12]. Moyennant cette correction, il n'est pas difficile de vérifier que les calculs ci-dessous sont cohérents avec les résultats de loc. cit..



5.3.1. Algorithme

On travaille dans l'anneau  $A = W[u_1, u_2, v_1]$ , où  $u_1, u_2$  et  $v_1$  vérifient les relations  $u_1^q - u_1 - u_2^{q+1} = 0$  et  $u_1 v_1 - 1 = 0$ . Les calculs impliqués sont des calculs de polynômes dérivés et des combinaisons linéaires. La taille de la matrice, qui est  $q(q - 1) = p^n(p^n - 1)$ , grossit très vite en fonction de  $n$ , mais on sait a priori qu'il n'y a que  $q(q - 1)$  coefficients non nuls.

*Étape 1.* — Pour  $i$  et  $j$  entiers tels que  $0 \leq j < i \leq q - 1$ , on détermine d'abord un triplet représentant  $v(-i, -j)$  dans le complexe de Cech. Pour cela on calcule la différentielle  $d(v_1^{j+1} u_2^{q-i+j+1})$ , puis on la décompose en une somme

$$d(v_1^{j+1} u_2^{q-i+j+1}) = \omega_U(-i, -j) + \omega_V(-i, -j)$$

où  $\omega_U$  (respectivement  $\omega_V$ ) est défini sur l'ouvert  $U$  (respectivement sur  $V$ ). Le triplet recherché est

$$(-\omega_U(-i, -j), \omega_V(-i, -j), v_1^{j+1} u_2^{q-i+j+1}).$$

*Étape 2.* — Calcul de  $\bar{\Phi}_M(v(-i, -j))$ . On calcule les coefficients  $a_l$  et  $b_l$  tels que

$$v_1^{p(j+1)} u_2^{p(q-i+j+1)} = \sum_{l \geq 1} b_l v_1^l u_2^b + \sum_{l \geq 0} a_l u_1^l u_2^b$$

dans l'anneau  $A$ , où  $b$  est le reste de la division euclidienne de  $p(q - i + j + 1)$  par  $q + 1$ . On pose  $h = \sum_{l=1}^{b-1} b_l v_1^l u_2^b$ .

Si  $h \neq 0$ , il existe un unique entier  $l$  tel que  $h = b_l v_1^l u_2^b$ . On a alors

$$\bar{\Phi}_M(v(-i, -j)) = b_l v(-(q - b + l), -(l - 1)).$$

Si  $h = 0$ , on pose  $h_U = \sum_{l \geq 0} a_l u_1^l u_2^b$  et on calcule  $d(h_U)$ . Il existe un unique couple d'entiers  $(l, m)$  et  $\alpha \in k$  tels que  $d(h_U) = -\alpha u_1^l u_2^m du_2$ . On a alors

$$\bar{\Phi}_M(v(-i, -j)) = \alpha v(q - 2 - m - l, q - 1 - l).$$

*Étape 3.* — Calcul de  $\bar{\Phi}_M(v(i, j))$ . On calcule

$$h_{ij} = u_1^{p(q-1-j)} u_2^{p(j-i-1)} \sum_{l=1}^{p-1} (-1)^l \frac{\binom{p}{l}}{p} v_1^{l(q-1)},$$

puis, comme dans l'étape 2, les coefficients  $a_l$  et  $b_l$  tels que

$$h_{ij} = \sum_{l \geq 1} b_l v_1^l u_2^b + \sum_{l \geq 0} a_l u_1^l u_2^b$$

où  $b$  est le reste de la division euclidienne de  $p(j - i - 1)$  par  $q + 1$ . On obtient  $h_{ij} = h_U + h_V + h$  comme ci-dessus.

Si  $h \neq 0$ , il existe un unique entier  $l$  tel que  $h = b_l v_1^l u_2^b$ . On a alors

$$\bar{\Phi}_M(v(i, j)) = b_l v(-(q - b + l), -(l - 1)).$$

Si  $h = 0$ , on pose  $h_U = \sum_{l \geq 0} a_l u_1^l u_2^b$  et on calcule  $d(h_U)$ . Il existe un unique couple d'entiers  $(l, m)$  et  $\alpha \in k$  tels que

$$-u_1^{p(j-1)} u_2^{p(q-i-j)} u_2^{p-1} du_2 + d(h_U) = -\alpha u_1^l u_2^m du_2.$$

On a alors

$$\bar{\Phi}_M(v(-i, -j)) = \alpha v(q - 2 - m - l, q - 1 - l).$$

La programmation de cet algorithme permet de déterminer  $\bar{\Phi}_M$  une fois fixées les valeurs de  $p$  et  $n$ .

Il est possible de décrire en toute généralité  $\bar{\Phi}_M$ . Le théorème qui suit rassemble les résultats démontrés dans le reste de cette partie.

Nous utiliserons la décomposition de  $i$  et  $j$  dans la base  $p$  :

$$i = \sum_{l=0}^{n-1} i_l p^l \quad \text{et} \quad j = \sum_{l=0}^{n-1} j_l p^l$$

où les entiers  $i_l$  et  $j_l$  sont compris entre 0 et  $p - 1$ .

On pose  $i' = j_{n-1} + \sum_{l=1}^{n-1} i_{l-1} p^l$  et  $j' = i_{n-1} + \sum_{l=1}^{n-1} j_{l-1} p^l$ .

**THÉORÈME 5.4.**

(1) Action du Frobenius sur la famille  $(v(-i, -j))$  (Proposition 5.10)

(a) Si  $i_{n-1} = p - 1$ ,  $j_{n-1} = 0$  et  $\sum_{l=0}^{n-2} j_l p^l < \sum_{l=0}^{n-2} i_l p^l$ , alors

$$\bar{\Phi}_M(v(-i, -j)) = v(-i', -j').$$

(b) Si  $i_{n-1} - j_{n-1} \leq p - 2$  et  $\sum_{l=0}^{n-2} j_l p^l < \sum_{l=0}^{n-2} i_l p^l$ , alors

$$\bar{\Phi}_M(v(-i, -j)) = (-1)^{p-1-i_{n-1}} \binom{p-1-i_{n-1}+j_{n-1}}{j_{n-1}} v(-i', -j')$$

(c) Si  $\sum_{l=0}^{n-2} j_l p^l \geq \sum_{l=0}^{n-2} i_l p^l$ , alors

$$\bar{\Phi}_M(v(-i, -j)) = (-1)^{p-i_{n-1}} (j_{n-1} + 1) \binom{p-i_{n-1}+j_{n-1}}{j_{n-1}+1} v(i', j').$$

(2) Action du Frobenius sur la famille  $(v(i, j))$  (Propositions 5.13 et 5.14)

(a) Si  $j \leq p^{n-1} - 1$ , alors  $\bar{\Phi}_M(v(i, j)) = v(pi, pj) = v(i', j')$ .

(b) Si  $i \geq q - p^{n-1}$ , alors  $\bar{\Phi}_M(v(i, j)) = v(i', j')$ .

On suppose  $i \leq q - p^{n-1} - 1$  et  $j \geq p^{n-1}$ .

(c) Si  $\sum_{l=0}^{n-2} i_l p^l \geq \sum_{l=0}^{n-2} j_l p^l$ , alors

$$\bar{\Phi}_M(v(i, j)) = \frac{1}{\binom{j_{n-1} - i_{n-1}}{i_{n-1}}} v(-i', -j').$$

(d) Si  $\sum_{l=0}^{n-2} i_l p^l < \sum_{l=0}^{n-2} j_l p^l$ , alors  $\bar{\Phi}_M(v(i, j)) \in H^0(C_A, \Omega_A^1)$  et

$$\bar{\Phi}_M(v(i, j)) = (-1)^{i_{n-1}} \frac{1}{\binom{i_{n-1}}{j_{n-1}}} v(i', j').$$

### 5.3.2. Calculs préliminaires

LEMME 5.5. — Pour  $0 \leq m$  et  $0 \leq l$ ,

$$d(u_1^l u_2^m) \equiv (-lu_1^{q-1} + m + l)u_1^l u_2^{m-1} du_2 \pmod{p}$$

Démonstration. — Le calcul repose sur les relations  $u_2^{q+1} \equiv u_1(u_1^{q-1} - 1) \pmod{p}$  et  $du_1 \equiv -u_2^q du_2 \pmod{p}$ . □

LEMME 5.6. — Pour  $0 \leq i < j \leq p - 1$ ,

$$\begin{aligned} \sum_{l=p-j}^{p-1-i} (-1)^{p-1-i} \frac{\binom{p}{l}}{p} \binom{j-i-1}{j-p+l} &\equiv (-1)^{i+j} \frac{(j-i-1)!}{(p-j) \cdots (p-i-1)} \\ &\equiv \frac{1}{(j-i) \binom{i}{j}} \pmod{p} \end{aligned}$$

Démonstration. — On remarque que  $\frac{\binom{p}{l}}{p} \equiv (-1)^{l-1} \frac{1}{l} \pmod{p}$  et que  $\sum_{l=p-j}^{p-1-i} (-1)^{p-1-i} \frac{\binom{p}{l}}{p} \binom{j-i-1}{j-p+l}$  est la valeur en 1 du polynôme

$$F(x) = (-1)^{i+j} \sum_{l=0}^{j-i-1} (-1)^l \frac{1}{p-j+l} \binom{j-i-1}{l} x^{p-j+l},$$

de polynôme dérivé

$$\begin{aligned} F'(x) &= (-1)^{i+j} \sum_{l=0}^{j-i-1} (-1)^l \binom{j-i-1}{l} x^{p-j+l-1} \\ &= (-1)^{i+j} x^{p-j-1} (1-x)^{j-i-1}. \end{aligned}$$

En intégrant successivement par parties la deuxième expression, on obtient le résultat. □

Rappelons qu'un élément de  $H^1_{DR}(C_k)$  peut être représenté dans le complexe de Čech relativement aux deux ouverts  $U$  et  $V$  par un triplet  $(\omega_U, \omega_V, f)$  de

$$H^0(U_k, \Omega^1_{C_k}) \times H^0(V_k, \Omega^1_{C_k}) \times H^0(U_k \cap V_k, \mathcal{O}_{C_k})$$

tel que  $\omega_U - \omega_V + df = 0$ . Le sous-espace  $H^0(C_k, \Omega^1_{C_k})$  s'identifie aux triplets tels que  $f = 0$ .

Un monôme  $u_1^l u_2^m$ , où  $l$  et  $m$  sont des entiers et  $m$  est positif, est défini :

- sur  $U$  lorsque  $l$  est positif ;
- sur  $V$  lorsque  $l + m \leq 0$  ;
- uniquement sur  $U \cap V$ , lorsque  $-m + 1 \leq l \leq -1$ .

LEMME 5.7. — Soit  $f_U$  (respectivement  $f_V$ ) une fonction définie sur  $U$  (respectivement sur  $V$ ) et  $f = f_U + f_V$ . Supposons de plus que  $df = 0$ .

Alors  $(0, 0, f)$  représente un élément de  $H^1_{DR}(C_k)$  qui est dans  $H^0(C_k, \Omega^1_{C_k})$ .

Démonstration. — La condition  $df = df_U + df_V = 0$  assure que le triplet  $(0, 0, f)$  représente bien une classe de  $H^1_{DR}(C_k)$ .

On obtient

$$(0, 0, f) = (-df_U, 0, f_U) + (0, df_V, f_V) + (df_U, -df_V, 0)$$

et le fait que  $(df_U, -df_V, 0)$  représente la même classe que  $(0, 0, f)$  dans  $H^1_{DR}(C_k)$  □

### 5.3.3. Calcul de l'action du Frobenius sur la famille $(v(-i, -j))$

Nous sommes dans la situation où  $0 \leq j < i \leq q - 1$  et par conséquent  $j_{n-1} \leq i_{n-1}$ .

Rappelons que nous utilisons la décomposition de  $i$  et  $j$  dans la base  $p$  :

$$i = \sum_{l=0}^{n-1} i_l p^l \quad \text{et} \quad j = \sum_{l=0}^{n-1} j_l p^l$$

où les entiers  $i_l$  et  $j_l$  sont compris entre 0 et  $p - 1$ .

Considérons  $\alpha$  tel que

$$\alpha p^{n-1} + 1 \leq i - j \leq (\alpha + 1)p^{n-1};$$

on remarque que  $0 \leq \alpha \leq p - 1$ .

LEMME 5.8.

- (1) *Le quotient et le reste de la division euclidienne de  $p(q - i + j + 1)$  par  $q + 1$  sont respectivement  $(p - 1 - \alpha)$  et  $q(1 + \alpha) - p(i - j) + \alpha + 1$ .*
- (2) *Si  $\sum_{l=0}^{n-2} j_l p^l < \sum_{l=0}^{n-2} i_l p^l$ , alors  $\alpha = i_{n-1} - j_{n-1}$ .*
- (3) *Si  $\sum_{l=0}^{n-2} j_l p^l \geq \sum_{l=0}^{n-2} i_l p^l$ , alors  $\alpha = i_{n-1} - j_{n-1} - 1$ .*

*Démonstration.*

(1). — Il s'agit de vérifier les inégalités  $0 \leq q(1 + \alpha) - p(i - j) + \alpha + 1 \leq q$ . Par définition de  $\alpha$ ,  $0 \leq q(1 + \alpha) - p(i - j)$ , d'où la première inégalité.

La deuxième inégalité de déduit de  $\alpha q + p \leq p(i - j)$  et  $\alpha \leq p - 1$  : en effet

$$q(1 + \alpha) - p(i - j) + \alpha + 1 \leq q(1 + \alpha) - q\alpha - p + \alpha + 1 \leq q - p + 1 + \alpha.$$

(2) et (3). — il suffit d'écrire

$$i - j = (i_{n-1} - j_{n-1})p^{n-1} + \left( \sum_{l=0}^{n-2} i_l p^l - \sum_{l=0}^{n-2} j_l p^l \right). \quad \square$$

Soit  $l_0$  le plus petit entier tel que  $pi - q(1 + \alpha) + 1 \leq l_0(q - 1)$ .

LEMME 5.9.

- (1) *Si  $\sum_{l=0}^{n-2} j_l p^l < \sum_{l=0}^{n-2} i_l p^l$ , alors  $l_0 = j_{n-1}$ .*
- (2) *Si  $\sum_{l=0}^{n-2} j_l p^l \geq \sum_{l=0}^{n-2} i_l p^l$ , alors  $l_0 = j_{n-1} + 1$ .*

*Démonstration.* — On calcule

$$pi - q(1 + \alpha) + 1 = q(i_{n-1} - 1 - \alpha) + \sum_{l=0}^{n-2} i_l p^{l+1} + 1,$$

et on remarque  $l_0 = i_{n-1} - \alpha$  dans chacun des deux cas. □

On pose  $i' = j_{n-1} + \sum_{l=1}^{n-1} i_{l-1} p^l$  et  $j' = i_{n-1} + \sum_{l=1}^{n-1} j_{l-1} p^l$ .

PROPOSITION 5.10.

- (1) *Si  $i_{n-1} = p - 1$ ,  $j_{n-1} = 0$  et  $\sum_{l=0}^{n-2} j_l p^l < \sum_{l=0}^{n-2} i_l p^l$ , alors*

$$\bar{\Phi}_M(v(-i, -j)) = v(-i', -j').$$

- (2) *Si  $i_{n-1} - j_{n-1} \leq p - 2$  et  $\sum_{l=0}^{n-2} j_l p^l < \sum_{l=0}^{n-2} i_l p^l$ , alors*

$$\bar{\Phi}_M(v(-i, -j)) = (-1)^{p-1-i_{n-1}} \binom{p-1-i_{n-1}+j_{n-1}}{j_{n-1}} v(-i', -j')$$

(3) Si  $\sum_{l=0}^{n-2} j_l p^l \geq \sum_{l=0}^{n-2} i_l p^l$ , alors

$$\bar{\Phi}_M(v(-i, -j)) = (-1)^{p-i_{n-1}} (j_{n-1} + 1) \binom{p - i_{n-1} + j_{n-1}}{j_{n-1} + 1} v(i', j').$$

*Démonstration.* — Pour tout couple  $(i, j)$ , l'image de  $v(-i, -j)$  dans  $H^1(C_k, \mathcal{O}_{C_k})$  est la classe  $[u_1^{-j-1} u_2^{q-i+j+1}]$  et l'action de  $F$  sur  $\mathcal{O}_{C_k}$  est l'élévation à la puissance  $p$ . Lorsque la classe de  $[u_1^{-(j+1)p} u_2^{p(q-i+j+1)}]$  dans  $H^1(C_k, \mathcal{O}_{C_k})$  n'est pas nulle, son expression en fonction de la base de la proposition 5.2 permet de connaître  $\bar{\Phi}_M(v(-i, -j))$  grâce au scindage naturel de la suite exacte (5.1).

(1). — Supposons  $i_{n-1} = p - 1, j_{n-1} = 0$  et  $\sum_{l=0}^{n-2} j_l p^l < \sum_{l=0}^{n-2} i_l p^l$ ; alors

$$p(q - i + j + 1) = q - \sum_{l=0}^{n-2} (i_l - j_l) p^{l+1} + p \leq q;$$

dans ce cas,  $[F(u_1^{-j-1} u_2^{q-i+j+1})] = [u_1^{-(j+1)p} u_2^{p(q-i+j+1)}]$  est un générateur de  $H^1(C_k, \mathcal{O}_{C_k})_{\psi(p(i+j))}$  et l'on obtient

$$\bar{\Phi}_M(v(-i, -j)) = v(-i', -j').$$

Supposons à présent que l'une des trois conditions précédentes n'est pas vérifiée, c'est-à-dire  $i_{n-1} - j_{n-1} \leq p - 2$  ou  $\sum_{l=0}^{n-2} j_l p^l \geq \sum_{l=0}^{n-2} i_l p^l$ , alors  $p(q - i + j + 1) \geq q + 1$ ; dans ces conditions, en utilisant le lemme 5.8

$$\begin{aligned} u_1^{-p(j+1)} u_2^{p(q-i+j+1)} &= u_1^{-p(j+1)} u_2^{q(1+\alpha)-p(i-j)+1+\alpha} (u_1^q - u_1)^{p-1-\alpha} \\ &= \sum_{r=0}^{p-1-\alpha} (-1)^{p-1-\alpha-r} \binom{p-1-\alpha}{r} u_1^{(q-1)r-pj-1-\alpha} \\ &\qquad\qquad\qquad u_2^{q(1+\alpha)-p(i-j)+1+\alpha}. \end{aligned}$$

Les termes dont la classe est non nulle dans  $H^1(C_k, \mathcal{O}_{C_k})$  sont ceux tels que

$$1 \leq -(q-1)r + pj + 1 + \alpha \leq q(1+\alpha) - p(i-j) + \alpha.$$

On en déduit la condition (\*) :  $pi - q(1+\alpha) + 1 \leq r(q-1) \leq pj + \alpha$ .

Comme

$$pj + \alpha - pi + q(1+\alpha) - 1 = p(j-i) + q(1+\alpha) + \alpha - 1 \leq q - p + \alpha - 1 \leq q - 2,$$

il existe au plus un seul entier  $r$  vérifiant la condition (\*) et c'est l'entier  $l_0$ .

(2). — Nous sommes dans la situation où  $\alpha = i_{n-1} - j_{n-1}$  et  $l_0 = j_{n-1}$ . On constate que  $l_0 = j_{n-1}$  vérifie la condition (\*) ; le résultat provient des calculs

$$(q - 1)l_0 - pj - 1 - \alpha = (q - 1)j_{n-1} - pj - 1 - i_{n-1} + j_{n-1} = -i' - 1$$

et

$$q(1 + \alpha) - p(i - j) + 1 + \alpha = q - i' + j' + 1.$$

(3). — Sous ces conditions,  $\alpha = i_{n-1} - j_{n-1} - 1$  et  $l_0 = j_{n-1} + 1$ . Le triplet  $(0, 0, u_1^{-p(j+1)}u_2^{p(q-i+j+1)})$  représente un élément de  $H_{DR}^1(C_k)$  qui est dans  $H^0(C_k, \Omega_{C_k}^1)$ . En effet

$$f_U = \sum_{r=l_0}^{p-1-\alpha} (-1)^{p-1-\alpha-r} \binom{p-1-\alpha}{r} u_1^{(q-1)r-pj-1-\alpha} u_2^{q(1+\alpha)-p(i-j)+1+\alpha}$$

est alors un élément défini sur  $U$ , et

$$f_V = \sum_{r=0}^{l_0-1} (-1)^{p-1-\alpha-r} \binom{p-1-\alpha}{r} u_1^{(q-1)r-pj-1-\alpha} u_2^{q(1+\alpha)-p(i-j)+1+\alpha}$$

est défini sur  $V$ .

On a ainsi

$$f = u_1^{-p(j+1)}u_2^{p(q-i+j+1)} = f_U + f_V$$

et

$$d(u_1^{-p(j+1)}u_2^{p(q-i+j+1)}) = 0 = df_U + df_V.$$

Le lemme 5.7 s'applique et  $\bar{\Phi}_M(v(-i, -j)) \in H^0(C_k, \Omega_{C_k}^1)$ .

Calculons

$$\begin{aligned} df_U &= d \left( \sum_{r=j_{n-1}+1}^{p-i_{n-1}+j_{n-1}} (-1)^{p-i_{n-1}+j_{n-1}-r} \binom{p-i_{n-1}+j_{n-1}}{r} \right. \\ &\quad \left. u_1^{r(q-1)-pj-i_{n-1}+j_{n-1}} u_2^{q(i_{n-1}-j_{n-1})-p(i-j)+i_{n-1}-j_{n-1}} \right) \\ &= \sum_{r=j_{n-1}+1}^{p-i_{n-1}+j_{n-1}} (-1)^{p-i_{n-1}+j_{n-1}-r} \binom{p-i_{n-1}+j_{n-1}}{r} \left( (i_{n-1} - j_{n-1} + r) \right. \\ &\quad \left. u_1^{q-1} - r \right) u_1^{r(q-1)-pj-i_{n-1}+j_{n-1}} u_2^{j'-i'-1} du_2 \\ &= (-1)^{p-i_{n-1}-1} \binom{p-i_{n-1}+j_{n-1}}{j_{n-1}+1} (j_{n-1} + 1) u_1^{q-i'-1} u_2^{j'-i'-1} du_2 \end{aligned}$$

Par la remarque (2) de la démonstration de la proposition 5.3,

$$u_1^{q-i'-1} u_2^{j'-i'-1} du_2 = -v(i', j'),$$

d'où le résultat. □

COROLLAIRE 5.11. — Supposons  $q = p$  ;

$$\bar{\Phi}_M(v(-i, -j)) = (-1)^{p-i} (j + 1) \binom{p-i+j}{j+1} v(j, i).$$

5.3.4. Calcul du Frobenius divisé sur la famille  $(v(i, j))$

Rappelons que, pour  $i$  et  $j$  tels que  $0 \leq i < j \leq q - 1$ , l'élément  $v(i, j) = -u_1^{q-1-j} u_2^{j-i-1} du_2$ , peut être représenté dans le complexe de Čech par le triplet  $(-u_1^{q-1-j} u_2^{j-i-1} du_2, -v_1^i v_2^{j-i-1} dv_2, 0)$ . Son image par l'application de Deligne–Illusie est représentée par le triplet

$$\left(-u_1^{p(q-1-j)} u_2^{p(j-i-1)} u_2^{p-1} du_2, -v_1^{pi} v_2^{p(j-i-1)} v_2^{p-1} dv_2, h_{ij}\right)$$

où

$$h_{ij} = \sum_{l=1}^{p-1} (-1)^l \binom{p}{l} u_2^{p(j-i)} u_1^{p(q-1-j)-l(q-1)}.$$

Puisque  $i < j$ , nous sommes maintenant dans la situation où  $i_{n-1} \leq j_{n-1}$ . On pose à nouveau  $j' = i_{n-1} + \sum_{l=0}^{n-2} j_l p^{l+1}$  et  $i' = j_{n-1} + \sum_{l=0}^{n-2} i_l p^{l+1}$ .

Considérons  $\beta$  tel que  $\beta p^{n-1} + 1 \leq j - i \leq (\beta + 1) p^{n-1}$  et  $\mu_0$  le plus petit entier tel que  $pj - p(q - 1) - \beta \leq \mu_0(q - 1)$ . On remarque que  $0 \leq \beta \leq p - 1$  et que  $\mu_0 \leq 0$ .

LEMME 5.12.

- (1) Le quotient de la division euclidienne de  $p(j - i)$  par  $q + 1$  est  $\beta$ .
- (2) Si  $\sum_{l=0}^{n-2} i_l p^l < \sum_{l=0}^{n-2} j_l p^l$ , alors  $\beta = j_{n-1} - i_{n-1}$ .
- (3) Sinon,  $\beta = j_{n-1} - i_{n-1} - 1$ .
- (4) Dans tous les cas,  $\mu_0 = -(p - 1 - j_{n-1})$ .

Démonstration.

(1). — Immédiat.

(2) et (3). — Rappelons que  $\beta$  est le quotient de la division euclidienne de  $p(j - i)$  par  $q + 1$ . Or  $j_{n-1} - i_{n-1} \leq p - 1$  et

$$p(j - i) = (j_{n-1} - i_{n-1})q + p \left( \sum_{l=0}^{n-2} j_l p^l - \sum_{l=0}^{n-2} i_l p^l \right),$$

d'où le calcul de  $\beta$ .



(4). —  $\mu_0$  est le plus petit entier tel que  $p(q - 1 - j) + \mu_0(q - 1) + \beta \geq 0$ ; sachant  $\mu_0 \leq 0$ ,

$$p(q - 1 - j) + \beta = \beta + \sum_{l=1}^n (p - 1 - j_l)p^l$$

et

$$-\mu_0(q - 1) = (p + \mu_0) + \sum_{l=1}^{n-1} (p - 1)p^l + (-\mu_0 - 1)p^n,$$

on en déduit  $\mu_0 = -(p - 1 - j_{n-1})$ . □

PROPOSITION 5.13.

- (1) Si  $j \leq p^{n-1} - 1$ , alors  $\bar{\Phi}_M(v(i, j)) = v(pi, pj) = v(i', j')$ .
- (2) Si  $i \geq q - p^{n-1}$ , alors  $\bar{\Phi}_M(v(i, j)) = v(i', j')$ .

Démonstration.

(1). — Comme  $u_1^r u_2^s$  est définie sur  $U$  lorsque  $r$  et  $s$  sont positifs,  $h_{ij}$  est alors définie sur  $U$  lorsque  $j \leq p^{n-1} - 1$  (dans ce cas  $\beta = 0$ ) et

$$\begin{aligned} dh_{ij} &= d \left( \sum_{l=1}^{p-1} (-1)^l \frac{\binom{p}{l}}{p} u_2^{p(j-i)} u_1^{p(q-1-j)-l(q-1)} \right) \\ &= \sum_{l=1}^{p-1} (-1)^l \frac{\binom{p}{l}}{p} \left( -l u_1^{q-1} + l \right) u_1^{p(q-1-j)-l(q-1)} u_2^{p(j-i)-1} du_2 \\ &= u_1^{p(q-1-j)} u_2^{p(j-i)-1} du_2 - u_1^{q-1-pj} u_2^{p(j-i)-1} du_2 \end{aligned}$$

Le triplet  $(-u_1^{q-1-pj} u_2^{p(j-i)-1} du_2, -v_1^{pi} v_2^{p(j-i-1)} v_2^{p-1} dv_2, 0)$  est un autre représentant de  $\bar{\Phi}_M(v(i, j))$ , d'où le résultat dans le premier cas. La deuxième égalité provient du fait que  $i_{n-1} = j_{n-1} = 0$  dans ce cas.

(2). — Dans le deuxième cas ( $\beta = 0$  également), comme  $u_1^r u_2^s$  est défini sur  $V$  lorsque  $-r$  et  $s$  sont positifs, avec  $-r \geq s$ ,  $h_{ij}$  est alors défini sur  $V$  et

$$\bar{\Phi}_M(v(i, j)) = -u_1^{p(q-1-j)} u_2^{p(j-i-1)} u_2^{p-1} du_2.$$

On remarque  $i_{n-1} = j_{n-1} = p - 1$ . □

On suppose désormais  $i \leq q - p^{n-1} - 1$  et  $j \geq p^{n-1}$ . Les conditions sur  $i$  et  $j$  impliquent

$$j_{n-1} \geq i_{n-1}, \quad i_{n-1} \leq p - 2 \quad \text{et} \quad j_{n-1} \geq 1.$$

PROPOSITION 5.14. — On suppose  $i \leq q - p^{n-1} - 1$  et  $j \geq p^{n-1}$ .

(1) Si  $\sum_{l=0}^{n-2} i_l p^l \geq \sum_{l=0}^{n-2} j_l p^l$ , alors

$$\bar{\Phi}_M(v(i, j)) = \frac{1}{(j_{n-1} - i_{n-1}) \binom{i_{n-1}}{j_{n-1}}} v(-i', -j').$$

(2) Si  $\sum_{l=0}^{n-2} i_l p^l < \sum_{l=0}^{n-2} j_l p^l$ , alors  $\bar{\Phi}_M(v(i, j)) \in H^0(C_A, \Omega_A^1)$  et

$$\bar{\Phi}_M(v(i, j)) = (-1)^{i_{n-1}} \frac{1}{\binom{i_{n-1}}{j_{n-1}}} v(i', j').$$

Démonstration. — Rappelons que :

$$h_{ij} = \sum_{l=1}^{p-1} (-1)^l \frac{\binom{p}{l}}{p} u_2^{p(j-i)} u_1^{p(q-1-j)-l(q-1)}.$$

Pour  $l \leq p - j_{n-1} - 1$ , le monôme  $u_2^{p(j-i)} u_1^{p(q-1-j)-l(q-1)}$  est défini sur  $U$ , alors que pour  $l \geq p - i_{n-1}$ , il est défini sur  $V$ . Il reste donc à étudier

$$\sum_{l=p-j_{n-1}}^{p-i_{n-1}+1} (-1)^l \frac{\binom{p}{l}}{p} u_2^{p(j-i)} u_1^{p(q-1-j)-l(q-1)}.$$

En utilisant la relation  $u_2^{p(j-i)} = u_2^{p(j-i)-(q+1)\beta} (u_1^q - u_1)^\beta$ , cette somme est égale à

$$\sum_{l=p-j_{n-1}}^{p-i_{n-1}+1} (-1)^l \frac{\binom{p}{l}}{p} \sum_{r=0}^{\beta} (-1)^{\beta-r} \binom{\beta}{r} u_2^{p(j-i)-(q+1)\beta} u_1^{p(q-1-j)+(r-l)(q-1)+\beta}.$$

Lorsque  $r - l \geq \mu_0$ , le monôme  $u_1^{p(q-1-j)+(r-l)(q-1)+\beta} u_2^{p(j-i)-(q+1)\beta}$  est défini sur  $U$ , alors que pour  $(r - l)(q - 1) \leq -p(q - 1 - i) + q\beta$ , il est défini sur  $V$ .

Considérons l'encadrement

$$-p(q - 1 - i) + q\beta < (r - l)(q - 1) < -p(q - 1 - j) - \beta;$$

la longueur de l'intervalle est

$$(-p(q - 1 - j) - \beta - 1) - (-p(q - 1 - i) + q\beta + 1) = p(j - i) - (q + 1)\beta - 2.$$

Puisque  $\beta$  est le quotient de la division euclidienne de  $p(j - i)$  par  $q + 1$ , cet intervalle est de longueur inférieure ou égale à  $q - 2$ . On en déduit qu'il existe au plus un entier  $r'$  tel que  $-p(q - 1 - i) + q\beta < r'(q - 1) < -p(q - 1 - j) - \beta$

et cet entier est  $\mu_0 - 1$  par définition de  $\mu_0$ . En étudiant le signe de

$$\begin{aligned}
 (5.2) \quad & p(q-1-i) - q\beta + (\mu_0 - 1)(q-1) \\
 &= -\beta p^n + \sum_{l=0}^{n-1} (p-1-i_l)p^{l+1} \\
 &\quad - (p-j_{n-1}) \sum_{l=0}^{n-1} (p-1)p^l \\
 &= \sum_{l=1}^{n-1} (p-1-i_l)p^{l+1} \\
 &\quad - (j_{n-1} + \sum_{l=1}^{n-1} (p-1)p^l) + (p-j_{n-1}-1-\beta)p^n \\
 &= -j_{n-1} - \sum_{l=1}^{n-1} i_{l-1}p^l - (\beta + i_{n-1} - j_{n-1})p^n,
 \end{aligned}$$

on voit apparaître les deux conditions, à savoir :

- (a) Si  $\sum_{l=0}^{n-2} i_l p^l \geq \sum_{l=0}^{n-2} j_l p^l$ ,  $\beta = j_{n-1} - i_{n-1} - 1$  et

$$-j_{n-1} - \sum_{l=1}^{n-1} i_{l-1}p^l - (\beta + i_{n-1} - j_{n-1})p^n > 0.$$

On en déduit que le monôme  $u_1^{p(q-1-j)+(j_{n-1}-p)(q-1)+\beta} u_2^{p(j-i)-(q+1)\beta}$  n'est défini ni sur  $U$  ni sur  $V$ , mais sur  $U \cap V$  et  $\bar{\Phi}_M(v(i, j))$  est colinéaire à  $v(-i', -j')$ .

- (b) Si  $\sum_{l=0}^{n-2} i_l p^l < \sum_{l=0}^{n-2} j_l p^l$ ,  $\beta = j_{n-1} - i_{n-1}$  et

$$-j_{n-1} - \sum_{l=1}^{n-1} i_{l-1}p^l - (\beta + i_{n-1} - j_{n-1})p^n \leq 0.$$

On peut alors décomposer  $h_{ij}$  en  $h_{ij} = h_U + h_V$ , où la fonction  $h_U$  est définie sur  $U$ ,  $h_V$  est définie sur  $V$  et

$$\begin{aligned}
 h_U = & \sum_{l=1}^{p-j_{n-1}-1} (-1)^l \frac{\binom{p}{l}}{p} u_2^{p(j-i)} u_1^{p(q-1-j)-l(q-1)} \\
 & + \sum_{l=p-j_{n-1}}^{p-i_{n-1}-1} (-1)^l \frac{\binom{p}{l}}{p} \sum_{r=l+j_{n-1}-p+1}^{\beta} (-1)^{\beta-r} \binom{\beta}{r} \\
 & \quad \times u_2^{p(j-i)-(q+1)\beta} u_1^{p(q-1-j)+(r-l)(q-1)+\beta}
 \end{aligned}$$

Il reste à calculer l'expression de  $\bar{\Phi}_M(v(i, j))$ ; on rappelle les relations

$$u_1^q - u_1 = u_2^{q+1} \quad \text{et} \quad -du_1 = u_2^q du_2.$$

Dans le cas (1). — Le coefficient du monôme

$$u_1^{p(q-1-j)+(j_{n-1}-p)(q-1)+\beta} u_2^{p(j-i)-(q+1)\beta}$$

dans  $h_{ij}$  est

$$c_{ij} = \sum_{l=p-j_{n-1}}^{p-i_{n-1}-1} (-1)^{p-i_{n-1}-1} \frac{\binom{p}{l}}{p} \binom{j_{n-1} - i_{n-1} - 1}{l - p + j_{n-1}}$$

et le lemme 5.6 donne le résultat.

Dans le cas (2). — Calculons  $dh_U$  :

$$\begin{aligned} & d \left( \sum_{l=1}^{p-j_{n-1}-1} (-1)^l \frac{\binom{p}{l}}{p} u_2^{p(j-i)} u_1^{p(q-1-j)-l(q-1)} \right) \\ &= u_1^{p(q-1-j)} u_2^{p(j-i)-1} du_2 + \sum_{l=1}^{p-j_{n-1}-2} (-1)^l \left( \binom{p-1}{l+1} + \binom{p-1}{l} \right) \\ & \quad \times u_1^{p(q-1-j)-l(q-1)} u_2^{p(j-i)-1} du_2 \\ & \quad + (-1)^{p-j_{n-1}-1} \binom{p-1}{p-j_{n-1}-2} u_1^{p(q-1-j)-(p-j_{n-1}-1)(q-1)} u_2^{p(j-i)-1} du_2 \\ &= u_1^{p(q-1-j)} u_2^{p(j-i)-1} du_2 + (-1)^{p-j_{n-1}-1} \binom{p-1}{p-j_{n-1}-2} \\ & \quad \times u_1^{-pj+(j_{n-1}+1)(q-1)} u_2^{p(j-i)-1} du_2 \\ &= u_1^{p(q-1-j)} u_2^{p(j-i)-1} du_2 \\ & \quad + (-1)^{p-j_{n-1}-1} \binom{p-1}{p-j_{n-1}-2} \sum_{r=0}^{\beta} (-1)^{\beta-r} \binom{\beta}{r} \\ & \quad \times u_1^{-pj+(j_{n-1}+1+r)(q-1)+\beta} u_2^{p(j-i)-(q+1)\beta-1} du_2 \end{aligned}$$

Dans les formules qui suivent, on note  $\gamma = p(j - i) - (q + 1)\beta$ .

$$\begin{aligned}
 & d \left( \sum_{r=l+j_{n-1}-p+1}^{\beta} (-1)^{\beta-r} \binom{\beta}{r} u_2^\gamma u_1^{p(q-1-j)+(r-l)(q-1)+\beta} \right) \\
 &= \sum_{r=l+j_{n-1}-p+1}^{\beta} (-1)^{\beta-r} \binom{\beta}{r} ((r-l-\beta)u_1^{q-1} du_2 \\
 &\quad - (r-l)u_2^{\gamma-1} u_1^{p(q-1-j)+(r-l)(q-1)+\beta} du_2) \\
 &= (-1)^{\beta-l-j_{n-1}+p} \binom{\beta}{l+j_{n-1}-p+1} (j_{n-1}-p+1) \\
 &\quad \times u_1^{(j_{n-1}-p+1)(q-1)+p(q-1-j)+\beta} u_2^{\gamma-1} du_2 \\
 &\quad + \left( \sum_{r=l+j_{n-1}-p+1}^{\beta-1} (-1)^{\beta-r+1} l \binom{\beta+1}{r+1} u_1^{(r-l+1)(q-1)} - l u_1^{(\beta-l+1)(q-1)} \right) \\
 &\quad \times u_1^{p(q-1-j)+\beta} u_2^{\gamma-1} du_2 \\
 &= (-1)^{p-l-i_{n-1}} \binom{\beta}{l+j_{n-1}-p+1} (j_{n-1}-p+1) \\
 &\quad \times u_1^{-pj+(j_{n-1}+1)(q-1)+\beta} u_2^{p(j-i)-(q+1)\beta-1} du_2 \\
 &\quad + l \sum_{r=l+j_{n-1}-p+1}^{\beta} (-1)^{\beta-r+1} \binom{\beta+1}{r+1} \\
 &\quad \times u_1^{-pj+(r-l+1+p)(q-1)+\beta} u_2^{p(j-i)-(q+1)\beta-1} du_2
 \end{aligned}$$

Calculons à présent les coefficients de

$$u_1^{-pj+(r'+p)(q-1)+\beta} u_2^{p(j-i)-(q+1)\beta-1} du_2$$

pour  $r'$  compris entre  $j_{n-1} - p + 1$  et  $j_{n-1} - p + \beta$ .

- pour  $r' = j_{n-1} - p + 1$ , on retrouve  $v(i', j')$  et le coefficient est

$$\begin{aligned} & (-1)^{\beta+p-j_{n-1}-1} \binom{p-1}{p-j_{n-1}-2} \\ & + \sum_{l=p-j_{n-1}}^{p-i_{n-1}-1} (-1)^l \frac{\binom{p}{l}}{p} (-1)^{p-l-i_{n-1}} \binom{\beta}{l+j_{n-1}-p+1} (j_{n-1}-p+1) \\ & = (-1)^{p-1-i_{n-1}} (p-j_{n-1}-1) \sum_{l=p-j_{n-1}}^{p-i_{n-1}-1} \frac{\binom{p}{l}}{p} \binom{\beta}{l+j_{n-1}-p+1} \\ & = (-1)^{p+j_{n-1}} \frac{(j_{n-1}-i_{n-1})!}{(p-j_{n-1}) \cdots (p-i_{n-1}-1)}, \end{aligned}$$

par le lemme 5.6.

- pour  $r' > j_{n-1} - p + 1$ , ce coefficient est

$$\begin{aligned} & (-1)^{\beta-r'} \binom{p-1}{p-j_{n-1}-2} \binom{\beta}{p-1-j_{n-1}+r'} \\ & + \sum_{l=p-j_{n-1}}^{\beta-r'+1} (-1)^{\beta-r'} \frac{\binom{p}{l}}{p} l \binom{\beta+1}{r'+l} \\ & = (-1)^{\beta-r'} \binom{p-1}{p-j_{n-1}-2} \binom{\beta}{p-1-j_{n-1}+r'} \\ & + (-1)^{\beta-r'} \sum_{l=p-j_{n-1}}^{\beta-r'+1} \binom{p-1}{l-1} \binom{\beta+1}{r'+l} \end{aligned}$$

En remarquant que pour  $p - j_{n-1} \leq l \leq \beta - r'$

$$\binom{p-1}{l-2} \binom{\beta}{l-1+r'} + \binom{p-1}{l-1} \binom{\beta+1}{l+r'} = \binom{p-1}{l-1} \binom{\beta}{l+r'},$$

cette somme se réduit à

$$\binom{p-1}{\beta-r'-1} \binom{\beta}{\beta} + \binom{p-1}{\beta-r'} \binom{\beta+1}{\beta+1} = 0 \text{ modulo } p. \quad \square$$

COROLLAIRE 5.15. — *Supposons  $n = 1$ ; alors*

$$\bar{\Phi}_M(v(i, j)) = (-1)^{i+j} \frac{(j-i-1)!}{(p-j) \cdots (p-i-1)} v(-j, -i).$$

5.3.5. Exemples

Les calculs précédents permettent d'étudier des propriétés du  $\varphi$ -module filtré  $H_{DR}^1(C_k)$ .

*Exemple 5.16.* — Dans le cas où  $n = 1$ ,  $H_{DR}^1(C_k)$  se décompose en sommes directes de  $\frac{p(p-1)}{2}$  sous-modules de dimension 2. Plus précisément :

**COROLLAIRE 5.17.** — *Supposons  $q = p$  et soit  $i$  et  $j$  tels que  $0 \leq i < j \leq p - 1$  ; l'espace vectoriel engendré par  $(v(i, j), v(-j, -i))$  est un sous-module filtré de  $H_{DR}^1(C_k)$  stable par le Frobenius divisé. Il existe une base de ce sous-module adaptée à la filtration dans laquelle la matrice de  $\bar{\Phi}$  est  $\begin{pmatrix} 0 & (-1)^{p+1+i+j} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ .*

*Démonstration.* — Posons  $\lambda = (-1)^{i+j} \frac{(j-i-1)!}{(p-j)\cdots(p-i-1)}$  et  $\nu = (-1)^{p-j} (i+1) \binom{p-j+i}{i+1}$  ; alors  $\bar{\Phi}(v(i, j)) = \lambda v(-j, -i)$  et  $\bar{\Phi}(v(-j, -i)) = \nu v(i, j)$  ; dans la base  $(v(i, j), \lambda v(-j, -i))$ , la matrice de  $\bar{\Phi}$  est  $\begin{pmatrix} 0 & \lambda \nu \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ . Il reste à calculer  $\lambda \nu = \lambda \nu$ , puisque  $\lambda \in \mathbf{F}_p$ . □

*Exemple 5.18.* — L'élément  $v(-1, 0)$  engendre un sous-module filtré de dimension  $2n$  stable par le Frobenius divisé, facteur direct dans  $H_{DR}^1(C_k)$ .

*Démonstration.* — En appliquant les formules de la proposition 5.10, on obtient :

$$\bar{\Phi}_M(v(-1, 0)) = v(-p, 0), \quad \bar{\Phi}_M(v(-p^l, 0)) = v(-p^{l+1}, 0) \quad \text{pour } 0 \leq l \leq n-2,$$

et  $\bar{\Phi}_M(v(-p^{n-1}, 0)) = -v(0, 1)$ .

$$\bar{\Phi}_M(v(0, 1)) = v(0, p) \quad \bar{\Phi}_M(v(0, p^l)) = v(0, p^{l+1}) \quad \text{pour } 0 \leq l \leq n-2.$$

Calculons à présent  $\bar{\Phi}_M(v(0, p^{n-1}))$  : nous sommes dans le cas (2) de la proposition 5.14, avec  $i_{n-1} = 0$  et  $j_{n-1} = 1$ . On conclut que

$$\bar{\Phi}_M(v(0, p^{n-1})) = (-1)^{p-1} v(1, 0). \quad \square$$

*Remarque.* — Dans la base

$$\left( v(-1, 0), v(-p, 0), \dots, v(-p^{n-1}, 0), -v(0, 1), -v(0, p), \dots, -v(0, p^{n-1}) \right),$$

la matrice du Frobenius divisé est

$$\begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 & (-1)^p \\ 1 & \ddots & & & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

D'autre part,

$$v(-p^l, 0) \notin \text{Fil}^1 H_{DR}^1(C_k) \quad \text{et} \quad v(0, p^l) \in H^0(C_k, \Omega_{C_k}^1) = \text{Fil}^1 H_{DR}^1(C_k),$$

la suite des crans de filtration associée à la base est  $(0, \dots, 0, 1, \dots, 1)$ ; elle n'admet pas de sous-suite périodique.

La description des  $\varphi$ -modules filtrés simples de Fontaine–Laffaille [9] et l'équivalence de catégories avec certaines familles de représentations galoisiennes modulo  $p$  (*op cit.*) permettent de conclure que ce sous-module est irréductible, ainsi que la représentation modulo  $p$  qui lui est associée.

*Exemple 5.19.* — On peut trouver des exemples de sous-modules de dimension  $2n$  stables par le Frobenius divisé qui ne sont pas irréductibles. Par exemple, pour  $p = 3$  et  $n = 3$  :

$$\begin{aligned} \bar{\Phi}_M(v(6, 13)) &= v(-19, -12), & \bar{\Phi}_M(v(-19, -12)) &= v(4, 11), \\ \bar{\Phi}_M(v(4, 11)) &= v(-13, -6), & \bar{\Phi}_M(v(-13, -6)) &= -v(12, 19), \\ \bar{\Phi}_M(v(12, 19)) &= -v(-11, -4), & \bar{\Phi}_M(v(-11, -4)) &= -v(6, 13). \end{aligned}$$

Le module de base

$$(v(6, 13), v(-19, -12), v(4, 11), v(-13, -6), -v(12, 19), v(-11, -4))$$

est stable par le Frobenius divisé, de matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

La suite des crans de filtration associée à la base est  $(1, 0, 1, 0, 1, 0)$ , qui admet  $(1, 0)$  comme sous-suite périodique. À nouveau, la théorie de [9] permet de conclure que le sous-module n'est pas irréductible.

Plus directement, en posant

$$u = v(6, 13) + v(4, 11) + v(12, 19) \in \text{Fil}^1 H_{DR}^1(C_k) = H^0(C_k, \Omega_{C_k}^1)$$

et

$$v = -v(-19, -12) + v(-13, -6) - v(-11, -4),$$

on remarque que  $\bar{\Phi}_M(u) = v$  et  $\bar{\Phi}_M(v) = -u$ ; on a exhibé un sous-module filtré de dimension 2 stable par le Frobenius divisé.



5.3.6. Sous-espaces stables par le Frobenius divisé

Revenons sur la décomposition de  $H^1_{DR}(C_k)$  en sous-espaces de dimension 1 stables sous l'action de  $\mathbf{F}_{q^2}^\times$  (proposition 5.3)

$$H^1_{DR}(C_k) = \bigoplus_{0 \leq i \neq j \leq q-1} H^1_{DR}(C_k)_{\psi(i+qj)};$$

pour  $m$  un entier, le Frobenius divisé envoie  $H^1_{DR}(C_k)_{\psi(m)}$  sur  $H^1_{DR}(C_k)_{\psi(pm)}$ .

PROPOSITION 5.20. — *Les seuls sous-espaces stables à la fois par le Frobenius divisé et par l'action de  $\mathbf{F}_{q^2}^\times$  sont de dimension  $2\alpha$  où  $\alpha$  divise  $n$ , à savoir :*

- (1)  $\bigoplus_{r=0}^{2n-1} H^1_{DR}(C_k)_{\psi(p^r m)}$ , où  $m$  est un entier ;
- (2) si  $\frac{n}{\alpha}$  est impair,  $\bigoplus_{r=0}^{2\alpha-1} H^1_{DR}(C_k)_{\psi(p^r m)}$ , où  $m = a \sum_{r=0}^{\frac{n}{\alpha}-1} p^{2\alpha r}$  et  $a$  est un entier.

Démonstration. — Puisque  $H^1_{DR}(C_k)_{\psi(m)}$  a pour image  $H^1_{DR}(C_k)_{\psi(pm)}$ , il s'agit de trouver le plus petit entier non nul  $r$  tel que  $p^r m \equiv m$  modulo  $q^2 - 1$  ; par la propriété  $q^2 m \equiv m$  modulo  $q^2 - 1$ , on voit que  $r$  divise  $2n$ .

- si  $r$  est un diviseur de  $n$ , alors  $q^2 - 1 = (p^r - 1) \sum_{l=0}^{\frac{2n}{r}-1} p^{rl}$  divise  $(p^r - 1)m$  ; on en déduit que  $\sum_{l=0}^{\frac{2n}{r}-1} p^{rl}$  divise  $m$ . Il existe  $a$  tel que

$$m = a \sum_{l=0}^{\frac{2n}{r}-1} p^{rl} = a \sum_{l=0}^{\frac{n}{r}-1} p^{rl} + p^n a \sum_{l=0}^{\frac{n}{r}-1} p^{rl} ;$$

cette valeur de  $m$  ne remplit pas les conditions  $m = i + qj$  avec  $i \neq j$  et  $1 \leq m \leq q^2 - 1$ .

- si  $r = 2\alpha$ , alors  $q^2 - 1 = (p^{2\alpha} - 1) \sum_{l=0}^{\frac{n}{\alpha}-1} p^{2\alpha l}$  divise  $(p^{2\alpha} - 1)m$  ; on en déduit que  $\sum_{l=0}^{\frac{n}{\alpha}-1} p^{2\alpha l}$  divise  $m$ . Si  $\frac{n}{\alpha}$  est impair, il existe  $a$  tel que

$$m = a \sum_{l=0}^{\frac{n}{\alpha}-1} p^{2\alpha l} = a \sum_{l=0}^{\lfloor \frac{n}{2\alpha} \rfloor} p^{2\alpha l} + p^n a \sum_{l=0}^{\lfloor \frac{n}{2\alpha} \rfloor - 1} p^{2\alpha l} ;$$

Cette valeur de  $m$  convient.

Si  $\frac{n}{\alpha}$  est pair, les conditions  $m = i + qj$  avec  $i \neq j$  et  $1 \leq m \leq q^2 - 1$  ne sont pas remplies. □

Exemple 5.21. — Lorsque  $p = 3$  et  $n = 3$ , alors soit  $\alpha = 1$ , soit  $\alpha = 3$ . Pour  $\alpha = 1$ , on trouve des sous-espaces stables de dimension 2 :

- le sous-espace engendré par  $v(3, 10)$  et  $v(-10, -3)$ , ce qui correspond à  $a = 1$  et  $m = 1 + 9 + 27 \times 3$ . En effet

$$\bar{\Phi}_M(v(-10, -3)) = v(3, 10), \quad \bar{\Phi}_M(v(3, 10)) = v(-10, -3).$$

- le sous-espace engendré par  $v(6, 20)$  et  $(v(-20, -6))$ , ce qui correspond à  $a = 2$ ; en effet

$$\bar{\Phi}_M(v(-20, -6)) = -v(6, 20), \quad \bar{\Phi}_M(v(6, 20)) = -v(-20, -6).$$

### 5.4. $(\varphi, \Gamma)$ -module associé

#### 5.4.1. Rappels sur les $(\varphi, \Gamma)$ -modules

Notons  $K = \text{Frac } W$  et considérons la  $\mathbf{Z}_p$ -extension cyclotomique  $K_\infty$  de  $K$  contenue dans  $\bar{K}$ ; soit  $\Gamma$  le groupe de Galois de  $K_\infty/K$ , qui est isomorphe à  $\mathbf{Z}_p$ , et choisissons-en un générateur topologique, noté  $\gamma$ . On munit l'anneau  $S = W[[T]]$  d'une action de  $\Gamma$  telle que  $\gamma(T) - T = \alpha(p+T)T$ , où  $\alpha$  est une unité de  $S$ , qui est congrue à une unité de  $\mathbf{Z}_p$  modulo  $T$  et à 1 modulo  $(p, T)$ . Dans ces conditions,  $S$  est également muni d'une action de Frobenius, notée  $\varphi$ , commutant à l'action de  $\Gamma$ , compatible avec le Frobenius sur  $W$ , qui relève l'élévation à la puissance  $p$  modulo  $p$  et telle que  $\varphi(T) = u(p+T)^{p-1}T$ , où  $u \equiv 1$  modulo  $pS$  (pour un exposé détaillé des propriétés de  $S$ , voir [7, 3.2], [8], ou [20, 3.1.1.]).

L'anneau  $S$  peut être décrit à partir de l'anneau usuel  $S' = W[[T']]$ , que l'on munit d'une action du groupe de Galois de la  $\mathbf{Z}_p^*$ -extension cyclotomique  $K'_\infty$  de  $K$ ; ce groupe est isomorphe à  $\mathbf{Z}_p^*$  via le caractère cyclotomique  $\chi$ . On pose  $g(T') = (1 + T')^{\chi(g)} - 1$  pour  $g \in \text{Gal}(K'_\infty/K)$  et  $\varphi(T') = (1 + T')^p - 1$  est l'action du Frobenius. Le lien entre  $S'$  et  $S$  est le suivant : puisque  $\mathbf{Z}_p^* = \mathbf{F}_p^* \times \mathbf{Z}_p$ ,  $\mathbf{F}_p^*$  agit sur  $S'$  ;

$$S = S'^{\mathbf{F}_p^*} \quad \text{et} \quad T = \sum_{a \in \mathbf{F}_p^*} g_a(T') = \sum_{a \in \mathbf{F}_p^*} \left( (1 + T')^{[a]} - 1 \right).$$

Un  $(\varphi, \Gamma)$ -module sur  $S$  est un  $S$ -module de type fini muni d'actions de  $\varphi$  et de  $\Gamma$ , semi-linéaires par rapport aux actions respectives sur  $S$  et commutant entre elles.

On peut associer à une courbe projective et lisse  $X$  sur  $W$  un  $(\varphi, \Gamma)$ -module de la façon suivante. On dispose du Frobenius divisé

$$\Phi_M^\tau : H_{DR}^1(X') \rightarrow H_{DR}^1(X),$$

associé à une section  $\tau$  de la suite exacte (5.1).

Choisissons  $(e_i)_{1 \leq i \leq 2g}$  une base de  $H_{DR}^1(X)$  adaptée à la filtration de Hodge, c'est-à-dire telle que  $(\bar{e}_i)_{1 \leq i \leq 2g}$  soit une base de  $\text{Gr } H_{DR}^1(X)$ , et notons  $r_i$  le plus grand entier tel que  $e_i \in \text{Fil}^{r_i} H_{DR}^1(X)$ . La base  $(e_i)_{1 \leq i \leq 2g}$  est également une base de  $H_{DR}^1(X')$  et le fait que  $\Phi_M^T$  soit un isomorphisme implique que la matrice  $A = (a_{ij})$ , exprimant  $\Phi_M^T$  dans la base  $(e_i)_{1 \leq i \leq 2g}$ , est inversible.

On définit alors sur le module  $N = S \otimes_W H_{DR}^1(X)$  une action de  $\varphi$  par

$$\varphi(1 \otimes e_j) = (p + T)^{r_j} \sum_{i=1}^{2g} a_{ij} 1 \otimes e_i,$$

l'action de  $\Gamma$  sur  $N$  étant induite par la proposition suivante (cf. [20, 3.1.4, théorème 3]) :

PROPOSITION 5.22. — *Il existe sur  $N$  une unique action de  $\Gamma$  commutant à  $\varphi$  et triviale modulo  $T$ .*

### 5.4.2. Application à la courbe de Drinfeld

En reprenant les notations de la section 5.3, la base  $\left( (v(i, j))_{0 \leq i < j \leq q-1}, (v(-i, -j))_{0 \leq j < i \leq q-1} \right)$  de  $H_{DR}^1(C_W)$  est une base adaptée à la filtration, avec  $v(i, j) \in \text{Fil}^1 H_{DR}^1(C_W)$ .

Pour uniformiser les énoncés, notons  $e_{i+qj} = v(i, j)$  et de même  $e_{i+qj} = v(-i, -j)$ . Rappelons que Haastert et Jantzen (cf. [12]) ont montré que l'endomorphisme de Frobenius agit sur la base  $(v(i, j), v(-i, -j))$  en permutant les vecteurs, à un scalaire près. Concernant le Frobenius divisé, il existe donc une permutation  $s$  de l'ensemble des entiers compris entre 1 et  $q(q-1)$  et des éléments  $a_l$  de  $W$  inversibles tels que  $\Phi_M(e_l) = a_l e_{s(l)}$ , pour  $l$  compris entre 1 et  $q(q-1)$ .

Par abus de notation, on désigne  $1 \otimes e_l$  dans  $N$  simplement par  $e_l$ . L'action de  $\varphi$  sur  $N$  est donnée par

$$\varphi(e_l) = (p + T)^{r_l} a_l e_{s(l)},$$

si  $e_l \in \text{Fil}^{r_l} H_{DR}^1(C_W)$ . Ici, soit  $r_l = 0$ , soit  $r_l = 1$ .

PROPOSITION 5.23. — *L'action de  $\Gamma$  sur le  $(\varphi, \Gamma)$ -module associé à la courbe de Drinfeld est diagonale dans la base  $(e_l)_{1 \leq l \leq q(q-1)}$ .*

Démonstration. — Autrement dit, il s'agit de montrer que chaque vecteur  $e_l$  pour  $1 \leq l \leq q(q-1)$  est un vecteur propre sous l'action de  $\Gamma$ . La démonstration se fait par dévissage modulo  $T$ , puis modulo  $p$ , comme celle de la proposition 5.22.

Puisque l'action est triviale modulo  $T$ , on sait que  $\gamma(e_l) \equiv e_l \pmod T$ .

- Posons  $\gamma_1(e_l) = e_l$  et évaluons l'erreur sur la commutativité de  $\varphi$  et  $\gamma$ .

$$\begin{aligned} \varphi(\gamma_1(e_l)) - \gamma_1(\varphi(e_l)) &= \varphi(e_l) - \gamma_1(\varphi(e_l)) \\ &= (p + T)^{r_l} a_l e_{s(l)} - (p + \gamma(T))^{r_l} \gamma(a_l) e_{s(l)} \end{aligned}$$

Si  $r_l = 1$ ,  $\varphi(\gamma_1(e_l)) - \gamma_1(\varphi(e_l)) = -a_l \alpha(p + T)T$ ; si  $r_l = 0$ , la différence est nulle. Dans tous les cas,

$$\varphi(\gamma_1(e_l)) - \gamma_1(\varphi(e_l)) \equiv 0 \pmod{(p + T)^{r_l} T}$$

- Formulons ainsi l'hypothèse de récurrence : soit  $n$  un entier supérieur ou égal à 1 tel qu'il existe, pour tout  $l$  compris entre 1 et  $q(q - 1)$ , un élément  $\rho_l$  de  $W[[T]]$  avec  $\rho_l \equiv 1 \pmod T$  permettant de définir  $\gamma_n(e_l) = \rho_l e_l$  vérifiant

$$\varphi(\gamma_n(e_l)) - \gamma_n(\varphi(e_l)) \equiv 0 \pmod{T^n(p + T)^{r_l}}$$

Ceci revient à supposer

$$\varphi(\rho_l) a_l (p + T)^{r_l} - a_l (p + \gamma(T))^{r_l} \rho_{s(l)} \equiv 0 \pmod{T^n(p + T)^{r_l}}$$

Considérons alors  $\beta_l \in S$  tel que

$$\varphi(\rho_l) a_l (p + T)^{r_l} - a_l (p + \gamma(T))^{r_l} \rho_{s(l)} = T^n (p + T)^{r_l} \beta_l.$$

On cherche à construire  $\gamma_{n+1}$  sous la forme

$$\gamma_{n+1}(e_l) = \rho'_l e_l = (\rho_l + x_l T^{n+1}) e_l = \gamma_n(e_l) + x_l T^{n+1} e_l;$$

tel que

$$\varphi(\gamma_{n+1}(e_l)) - \gamma_{n+1}(\varphi(e_l)) \equiv 0 \pmod{T^{n+1}(p + T)^{r_l}}.$$

Les éléments  $x_l$  de  $S$  doivent donc vérifier

$$\begin{aligned} T^n (p + T)^{r_l} \beta_l + \varphi(T^n) \varphi(x_l) a_l (p + T)^{r_l} - a_l (p + \gamma(T))^{r_l} T^n x_{s(l)} \\ \equiv 0 \pmod{T^{n+1}(p + T)^{r_l}}. \end{aligned}$$

Comme  $\varphi(T) = u(p + T)^{p-1}T$  et  $\gamma(T) = T + \alpha(p + T)T$ , on est ramené à résoudre les équations

$$\beta_l \equiv a_l x_{s(l)} (1 + \alpha T) - u^n (p + T)^{n(p-1)} a_l \varphi(x_l) \pmod T,$$

d'où

$$\beta_l \equiv a_l x_{s(l)} - u^n p^{n(p-1)} a_l \varphi(x_l) \pmod T.$$

Un dévissage modulo  $p$  permet alors de montrer qu'il existe un unique  $q(q - 1)$ -uplet  $(x_l)$  d'éléments de  $W$  solution. En particulier, comme  $a_l$  est inversible dans  $W$ , il vient  $x_{s(l)} = a_l^{-1} \beta_l$  modulo  $p$ . □

Dans la section précédente cf. propositions 5.10, 5.13 et 5.14, les coefficients  $a_l$  ont été déterminés modulo  $p$ . On en déduit la matrice de  $\gamma$  modulo  $p$ . Le procédé de calcul étant algorithmique, on peut obtenir les coefficients de l'action de  $\gamma$  modulo  $p$  lorsqu'une précision  $T^m$  est fixée.

*Exemple 5.24.* — Dans le cas où  $n = 1$ , dans les corollaires 5.11 et 5.15, on a calculé  $\bar{\Phi}_M(v(-i, -j)) = (-1)^{p-i}(j+1)\binom{p-i+j}{j+1}v(j, i)$  et  $\bar{\Phi}_M(v(i, j)) = (-1)^{i+j}\frac{(j-i-1)!}{(p-j)\cdots(p-i-1)}v(-j, -i)$ , d'où

$$a_{i+qj} = (-1)^{i+j}\frac{(j-i-1)!}{(p-j)\cdots(p-i-1)} \quad \text{si } 0 \leq i < j \leq q-1$$

et

$$a_{i+qj} = (-1)^{p-i}(j+1)\binom{p-i+j}{j+1} \quad \text{si } 0 \leq j < i \leq q-1.$$

## BIBLIOGRAPHIE

- [1] P. BERTHELOT, *Cohomologie cristalline des schémas de caractéristique  $p > 0$* , Lecture Notes in Mathematics, vol. 407, Springer-Verlag, Berlin, 1974, 604 pages.
- [2] ———, «  $\mathcal{D}$ -modules arithmétiques. I. Opérateurs différentiels de niveau fini », *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)* **29** (1996), n° 2, p. 185-272.
- [3] P. BERTHELOT & A. OGUS, *Notes on crystalline cohomology*, Princeton University Press, Princeton, N.J., 1978, vi+243 pages.
- [4] C. BREUIL, « Cohomologie étale de  $p$ -torsion et cohomologie cristalline en réduction semi-stable », *Duke Math. J.* **95** (1998), n° 3, p. 523-620.
- [5] P. DELIGNE, « Théorème de Lefschetz et critères de dégénérescence de suites spectrales », *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.* (1968), n° 35, p. 259-278.
- [6] P. DELIGNE & L. ILLUSIE, « Relèvements modulo  $p^2$  et décomposition du complexe de de Rham », *Invent. Math.* **89** (1987), n° 2, p. 247-270.
- [7] J.-M. FONTAINE, « Représentations  $p$ -adiques des corps locaux. I », in *The Grothendieck Festschrift, Vol. II*, Progr. Math., vol. 87, Birkhäuser Boston, Boston, MA, 1990, p. 249-309.
- [8] ———, « Le corps des périodes  $p$ -adiques », in *Périodes  $p$ -adiques (Bures-sur-Yvette, 1988)*, Astérisque, vol. 223, Société Mathématique de France, Paris, 1994, With an appendix by Pierre Colmez, p. 59-111.
- [9] J.-M. FONTAINE & G. LAFFAILLE, « Construction de représentations  $p$ -adiques », *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)* **15** (1982), n° 4, p. 547-608 (1983).
- [10] J.-M. FONTAINE & W. MESSING, «  $p$ -adic periods and  $p$ -adic étale cohomology », in *Current trends in arithmetical algebraic geometry (Arcata, Calif., 1985)*, Contemp. Math., vol. 67, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1987, p. 179-207.
- [11] R. GODEMENT, *Topologie algébrique et théorie des faisceaux*, Actualités Scientifiques et Industrielles [Current Scientific and Industrial Topics], No. 1252, Hermann, Paris, 1958, Publ. Math. Univ. Strasbourg. No. 13, viii+283 pages.
- [12] B. HAASERT & J. C. JANTZEN, « Filtrations of the discrete series of  $SL_2(q)$  via crystalline cohomology », *J. Algebra* **132** (1990), n° 1, p. 77-103.
- [13] C. HUYGHE & N. WACH, « Représentations galoisiennes associées aux courbes hyperelliptiques lisses », *Q. J. Math.* **66** (2015), n° 1, p. 171-189.

- [14] L. ILLUSIE, « Frobenius et dégénérescence de Hodge », in *Introduction à la théorie de Hodge*, Panor. Synthèses, vol. 3, Société Mathématique de France, Paris, 1996, p. 113-168.
- [15] K. KATO, « On  $p$ -adic vanishing cycles (application of ideas of Fontaine–Messing) », in *Algebraic geometry, Sendai, 1985*, Adv. Stud. Pure Math., vol. 10, North-Holland, Amsterdam, 1987, p. 207-251.
- [16] K. S. KEDLAYA, « Counting points on hyperelliptic curves using Monsky–Washnitzer cohomology », *J. Ramanujan Math. Soc.* **16** (2001), n° 4, p. 323-338.
- [17] B. MAZUR, « Frobenius and the Hodge filtration (estimates) », *Ann. of Math. (2)* **98** (1973), p. 58-95.
- [18] A. PIERROT, « Calcul du  $\varphi$ -module filtré associé à certains revêtements de la droite projective », Thèse, Université de Strasbourg, 2017, 119 pages.
- [19] ———, « Computation of the divided Frobenius modulo  $p$  on the crystalline cohomology of some covering of the projective line », <http://arxiv.org/pdf/1811.07565>, 2018.
- [20] N. WACH, « Représentations cristallines de torsion », *Compositio Math.* **108** (1997), n° 2, p. 185-240.

Manuscrit reçu le 22 janvier 2020,  
révisé le 30 janvier 2021,  
accepté le 5 mars 2021.

Christine HUYGHE  
IRMA  
7 rue René Descartes  
67084 Strasbourg Cedex (France)  
huyghe@math.unistra.fr

Nathalie WACH  
IRMA  
7 rue René Descartes  
67084 Strasbourg Cedex (France)  
wach@math.unistra.fr