

JACQUES AZÉMA

**Noyau potentiel associé à une fonction excessive  
d'un processus de Markov**

*Annales de l'institut Fourier*, tome 19, n° 2 (1969), p. 495-526

[http://www.numdam.org/item?id=AIF\\_1969\\_\\_19\\_2\\_495\\_0](http://www.numdam.org/item?id=AIF_1969__19_2_495_0)

© Annales de l'institut Fourier, 1969, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'institut Fourier » (<http://annalif.ujf-grenoble.fr/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

NOYAU POTENTIEL  
ASSOCIÉ A UNE FONCTION EXCESSIVE  
D'UN PROCESSUS DE MARKOV,

par Jacques AZEMA (\*).

---

1. Préliminaires.

1.1. Définitions et notations.

Soit  $E$  un espace localement compact à base dénombrable,  $\mathcal{B}$  sa tribu borélienne. On appellera dans la suite processus standard la donnée d'un système

$$((\Omega, \mathcal{F}), (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}, (X_t)_{t \geq 0}, (P_x)_{x \in E}, \xi, (\theta_t)_{t \geq 0})$$

où les êtres figurant dans le crochet désignent respectivement un espace mesurable  $(\Omega, \mathcal{F})$ , une famille croissante  $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$  de sous-tribus de  $\mathcal{F}$ , un processus stochastique  $(X_t)_{t \geq 0}$  adapté à cette famille, à valeurs dans  $E$ , une famille de probabilités sur  $\Omega$ , la durée de vie du processus, une famille d'applications de  $\Omega$  dans  $\Omega$  vérifiant la relation  $X_s \cdot \theta_t = X_{s+t}$ . Nous supposerons que ce processus satisfait aux axiomes des processus standards tels qu'ils sont énoncés dans (9) et nous imposerons en outre la condition supplémentaire suivante : la limite quand  $t$  tend vers  $\xi$  de  $X_t$  existe presque sûrement sur l'ensemble  $(\xi < \infty)$ . Nous noterons cette limite  $X_{\xi^-}$ .

Nous noterons comme de coutume si  $A$  est un borélien

(\*) Équipe de Recherche n° 1 « Processus stochastiques et applications » dépendant de la section n° 2 « Théories Physiques et Probabilités » associée au C.N.R.S.

de  $E$ ,  $T_A(\omega) = \inf \{t > 0; X_t(\omega) \in A\}$ ; si  $f$  est une fonction numérique borélienne sur  $E$ ,  $P_t f(x) = E_x f(X_t) = \int f(X_t) dP_x$

$$P_A f(x) = E_x f(X_{T_A}) = \int f(X_{T_A}) dP_x;$$

$$\forall p \geq 0, U_p f(x) = \int_0^\infty e^{-pt} P_t f(x) dt$$

et l'on écrira  $U$  pour  $U_0$ .

### 1.2. Hypothèses.

\* Dans tout ce qui suit nous nous placerons sous l'hypothèse (L) de Meyer souvent appelée également hypothèse d'absolue continuité, qui s'énonce ainsi : il existe une mesure de Radon  $m$  sur  $E$  telle que toute fonction excessive nulle  $m$ -presque sûrement soit nulle partout.

\* Nous supposons également le processus transient; plus précisément, pour tout compact de  $E$  nous supposons vérifiées les deux propriétés suivantes :

a) La fonction  $U1_K = \int_0^\infty P_t 1_K dt$  est bornée.

b) Si l'on définit par récurrence les temps d'arrêt  $T_K^n$  par les relations  $T_K^1 = 1 + T_K \circ \theta_1 \dots T_K^n = T_K^{n-1} + T_K^1 \circ \theta_{T_K^{n-1}}$ , alors on a quel que soit  $x$  dans  $E$ ,  $P_x \left( \bigcap_n (T_K^n < \infty) \right) = 0$ .

Il est à noter que si  $\lambda$  est strictement positif, le semi-groupe  $P_t^\lambda = e^{-\lambda t} P_t$  définit un processus transient.

\* Nous appellerons  $\mathcal{E}_0$  l'ensemble des fonctions excessives  $m$ -presque sûrement finies possédant la propriété suivante : quels que soient les ouverts  $H$  et  $H'$  relativement compacts, de fermetures disjointes,  $\lim_{n \rightarrow \infty} (P_H P_{H'})^n u = 0$   $m$ -presque sûrement. Nous appellerons  $\mathcal{E}_1$  l'ensemble des fonctions excessives  $u$ ,  $m$ -presque sûrement finies qui sont soit localement bornées, soit de la classe (D) de Meyer (cf. [7]).

Les hypothèses de régularité en  $\xi$  faites en 1.1., et de transience faites dans 1.2. entraînent  $\mathcal{E}_1 \subset \mathcal{E}_0$ . Pour qu'une fonction excessive soit dans  $\mathcal{E}_0$  il suffit que sa réduite sur tout ouvert relativement compact  $H$  soit localement bornée sur  $\bar{H}^c$ ; il en résulte que pour les processus « usuels »  $\mathcal{E}_0$  est l'ensemble de toutes les fonctions excessives presque sûrement finies.

### 1.3. Position du problème.

On sait que dans la théorie des processus de Markov il existe plusieurs notions de « potentiel ». Meyer [7] a étudié les « potentiels de la classe (D) », i.e. les fonctions excessives  $u$  qui vérifient (1)  $\lim_{n \rightarrow \infty} P_{T_n} u = 0$  chaque fois que  $T_n$  est une suite de temps d'arrêts tendant vers l'infini; il a montré qu'à tout potentiel fini  $u$  on pouvait faire correspondre une fonctionnelle additive  $A$  admettant  $u$  pour potentiel;

Hunt [3] pour sa part étudie des potentiels plus généraux puisqu'il n'exige la condition (1) que pour des temps d'arrêts particuliers qui sont les temps de sortie d'ouverts relativement compacts, mais il se place dans un cadre plus restrictif; dans cette théorie forte du potentiel on suppose en effet qu'il existe deux processus de Hunt  $X_t$  et  $\hat{X}_t$  à résolvantes fortement Fellériennes  $U_p$  et  $\hat{U}_p$  en dualité, et que l'on a une densité potentiel  $g(x, y)$  telle que  $Uf(x) = \int g(x, y)f(y)m(dy)$  et  $h\hat{U}(y) = \int g(x, y)h(x)m(dx)$ . Alors on a une représentation des potentiels sous forme de potentiel de mesure: A chaque potentiel  $u$  presque sûrement fini, on peut faire correspondre une mesure de Radon  $\lambda$  telle que  $u(x) = \int g(x, y)\lambda(dy)$ .

Le point commun aux représentations de Meyer et Hunt est qu'à chaque potentiel  $u$  on peut faire correspondre un opérateur  $\varphi_u$  défini dans le premier cas par la formule

$$\varphi_u f = U_A f = E \int_0^\infty f(X_t) dA_t$$

et dans le second cas par

$$\varphi_u f = \int g(x, y)f(y)\lambda(dy).$$

Ces opérateurs transforment les fonctions boréliennes positives en fonctions excessives.

Le but de la première partie de ce travail est d'associer à chaque potentiel  $u$  (au sens de Hunt) de  $\xi_0$  un opérateur  $\varphi_u$  et ceci sans hypothèse de dualité. Cette construction est effectuée au paragraphe 3), le paragraphe 2) étant consacré à étudier l'ordre fort sur les noyaux excessifs.

On utilise ces noyaux à plusieurs sortes d'applications. Dans le paragraphe 4) on a regroupé les résultats qui n'étaient

connus que sous dualité (distribution terminale d'un  $u$ -processus, interprétation probabiliste du noyau associé à la fonction excessive  $x \rightarrow P_x[T_G < \infty]$ ). Dans le paragraphe 5) on utilise ces noyaux pour tenter d'obtenir une représentation des potentiels de Hunt sous forme de potentiel de mesure sans hypothèse de régularité sur les résolvantes. Enfin dans la partie 6) on utilise ces noyaux pour étudier le retournement du temps du processus sous des hypothèses plus faibles que ce qui a été fait jusqu'ici. Les parties 5) et 6) établissent un lien entre l'existence d'une densité potentiel permettant la représentation des potentiels sous forme de potentiels de mesure et le fait que le processus retourné à un temps de retour soit markovien. On pourrait conjecturer qu'il y a équivalence entre le fait de pouvoir représenter les potentiels et l'existence d'un processus de Hunt en dualité avec le processus initial. On a malheureusement dû ici se contenter d'établir des résultats partiels concernant ce problème.

## 2. L'ordre fort sur les noyaux excessifs.

Le but de ce paragraphe est d'établir que le cône des noyaux excessifs est réticulé pour son ordre propre. Les méthodes employées sont en tout point analogues à celles que Meyer [7] a introduites pour démontrer que le cône des fonctions excessives est réticulé.

### 2.1. Définitions.

Nous appellerons noyau excessif une fonction  $\varphi$  de  $E \times \mathfrak{B}$  dans  $\overline{\mathbf{R}}_+$ ,  $(x, \Gamma) \rightarrow \varphi(x, \Gamma)$  telle que :

- i) la fonction  $x \rightarrow \varphi(x, E)$  soit  $m$ -presque sûrement finie
- ii) quel que soit le borélien  $\Gamma$  la fonction  $x \rightarrow \varphi(x, \Gamma)$  soit excessive. On notera cette fonction  $\varphi_{1\Gamma}$
- iii) quel que soit  $x$  dans  $E$  la fonction  $\Gamma \rightarrow \varphi(x, \Gamma)$  soit une mesure (positive) sur  $E$  notée  $\varepsilon_x \varphi$ .

Comme d'habitude on peut associer à  $\varphi$  un opérateur transformant les fonctions boréliennes positives en fonctions excessives en posant  $\varphi f(x) = \int \varphi(x, dy) f(y)$  et un opérateur

opérant sur les mesures positives en posant si  $\mu$  est une mesure positive  $\mu\varphi(\Gamma) = \int \mu(dx) \varphi(x, \Gamma)$ .

On désignera par  $\mathcal{N}$  le cône des noyaux excessifs.

Soient  $\varphi_1$  et  $\varphi_2$  dans  $\mathcal{N}$  nous dirons que  $\varphi_1$  est faiblement majoré par  $\varphi_2$  ce que nous noterons  $\varphi_1 \leq \varphi_2$  si l'on a  $\varphi_1 1_\Gamma \leq \varphi_2 1_\Gamma$  quel que soit  $\Gamma$  dans  $\mathcal{B}$ . Nous dirons que  $\varphi_1$  est fortement majoré par  $\varphi_2$  s'il existe un noyau  $\varphi_3$  de  $\mathcal{N}$  tel que  $\varphi_1 + \varphi_3 = \varphi_2$ ; on écrira  $\varphi_1 \ll \varphi_2$ .

**2.2. PROPOSITION.** — Soient  $\varphi_1$  et  $\varphi_2$  dans  $\mathcal{N}$ . Il existe une borne inférieure faible de  $\varphi_1$  et  $\varphi_2$  notée  $\varphi_1 \wedge \varphi_2$ .

*Démonstration.* — Considérons la borne inférieure  $\varepsilon_x \varphi_1 \wedge \varepsilon_x \varphi_2$  des mesures  $\varepsilon_x \varphi_1$  et  $\varepsilon_x \varphi_2$  et posons

$$\psi(x, \Gamma) = (\varepsilon_x \varphi_1 \wedge \varepsilon_x \varphi_2)(\Gamma).$$

On a quel que soit  $p > 0$ :

$$pU_p \psi(x, \Gamma) \leq pU_p \varphi_i(x, \Gamma) \leq \varphi_i(x, \Gamma) \quad (i = 1, 2).$$

D'où  $pU_p \psi(x, \Gamma) \leq \psi(x, \Gamma)$ . Posons alors  $\bar{\psi} = \lim_{p \rightarrow \infty} \uparrow pU_p \psi$   $\bar{\psi}$  est un noyau excessif et  $\bar{\psi} \leq \psi$ . De plus si  $\bar{\psi}'$  est dans  $\mathcal{N}$  et minore faiblement  $\varphi_1$  et  $\varphi_2$ , on a bien évidemment  $\bar{\psi}' \leq \psi$ , soit en régularisant  $\bar{\psi}' \leq \bar{\psi}$ . On peut donc poser  $\bar{\psi} = \varphi_1 \wedge \varphi_2$ .

**2.3. PROPOSITION.** — Soit  $\mathcal{A}$  une partie de  $\mathcal{N}$ .  $\mathcal{A}$  admet une borne inférieure faible.

*Démonstration.* — Soit  $\varphi_0$  un noyau de  $\mathcal{A}$ . On peut en considérant la famille  $(\varphi \wedge \varphi_0)_{\varphi \in \mathcal{A}}$  se ramener au cas où  $\mathcal{A}$  est majorée par un noyau  $\varphi_0$ . Soit alors  $m'$  une mesure équivalente à  $m$  intégrant  $\varphi_0 1$ , posons  $\nu = m' \varphi_0$ . Compte tenu de l'hypothèse (L) rappelée au § 1.2. les mesures  $\varepsilon_x \varphi$  sont absolument continues par rapport à  $\nu$ , quel que soit  $x$  dans  $E$  et  $\varphi$  dans  $\mathcal{A}$ . On peut alors trouver une version bimesurable  $\frac{d\varphi}{d\nu} : E \times E \rightarrow R_+$  de la densité de Radon-Nikodym de la mesure  $\varepsilon_x \varphi$  par rapport à  $\nu$ . Nous appellerons  $\frac{d\varphi}{d\nu}$  la borne inférieure d'une sous-famille dénombrable  $\frac{d\varphi_n}{d\nu}$

réalisant la borne inférieure essentielle de la famille  $\left(\frac{d\varphi}{d\nu}\right)_{\varphi \in \mathfrak{A}}$  par rapport à  $m \otimes \nu$  et poserons

$$\psi(x, \Gamma) = \int_{\Gamma} \frac{d\psi}{d\nu}(x, y) \nu(dy).$$

On a de la même manière que précédemment,  $pU^p\psi \leq \psi$ ; posons alors  $\bar{\psi} = \lim_{p \rightarrow \infty} \uparrow pU^p\psi \leq \psi$ .

Montrons que  $\bar{\psi}$  est un minorant de  $\mathfrak{A}$ ; on a quel que soit  $\varphi$  dans  $\mathfrak{A}$ ,  $\frac{d\psi}{d\nu} \leq \frac{d\varphi}{d\nu}$   $m \otimes \nu$ -presque sûrement. Il en résulte que quel que soit  $\Gamma$  dans  $\mathfrak{B}$ ,  $\psi 1_{\Gamma} \leq \varphi 1_{\Gamma}$   $m$ -presque sûrement, soit en régularisant  $\bar{\psi} 1_{\Gamma} \leq \varphi 1_{\Gamma}$ .

Il reste à montrer que  $\bar{\psi}$  est le plus grand minorant de  $\mathfrak{A}$ . Soit  $\psi'$  un minorant de  $\mathfrak{A}$ ; on a quel que soit  $\Gamma$  dans  $\mathfrak{B}$ , quel que soit  $\varphi$  dans  $\mathfrak{A}$ ,

$$\psi'(x, \Gamma) = \int_{\Gamma} \frac{d\psi'}{d\nu}(x, y) \nu(dy) \leq \int_{\Gamma} \frac{d\varphi}{d\nu}(x, y) \nu(dy).$$

Donc

$$\forall \varphi \in \mathfrak{A}, \quad \forall x \in E, \quad \frac{d\psi'}{d\nu}(x, \cdot) \leq \frac{d\varphi}{d\nu}(x, \cdot)$$

$\nu$ -presque-sûrement ce qui entraîne évidemment  $\frac{d\psi'}{d\nu} \leq \frac{d\psi}{d\nu}$   $m \otimes \nu$ -presque sûrement. On a donc  $\frac{d\psi'}{d\nu} \leq \frac{d\psi}{d\nu}$   $m \otimes \nu$ -presque sûrement, soit  $\psi' 1_{\Gamma} \leq \psi 1_{\Gamma}$   $m$ -presque sûrement, d'où en régularisant,  $\psi' \leq \bar{\psi}$  C.Q.F.D.

*Remarque.* — Si  $(\varphi_i)_{i \in I}$  est une famille de noyaux excessifs, et si chaque  $\varphi_i$  majore fortement un noyau excessif  $\varphi$  alors  $\bigwedge_{i \in I} \varphi_i$  majore fortement  $\varphi$ .

*Démonstration.* — Le noyau  $\psi$  introduit dans la démonstration précédente peut être donné par la relation  $\psi(x, \Gamma) = \bigwedge_{n \in \mathbb{N}} \varepsilon_x \varphi_n(\Gamma)$ . Pour chaque  $i$  il existe un noyau  $\varphi'_i$  de  $\mathfrak{N}$  tel que  $\varphi + \varphi'_i = \varphi_i$ . On aura donc

$$\varepsilon_x \varphi = \bigwedge_n \varepsilon_x \varphi'_n = \varepsilon_x \psi.$$

Posons  $\psi'(x, \Gamma) = \left(\bigwedge_n \varepsilon_x \varphi'_n\right)(\Gamma)$  et  $\bar{\psi}' = \lim_{p \rightarrow \infty} pU_p \psi'$ ; il vient alors en régularisant  $\varphi + \bar{\psi}' = \bar{\psi}$  ce qui montre que  $\varphi$  est fortement majoré par  $\bar{\psi}$ .

**2.4. PROPOSITION.** — Soient  $\varphi_1$  et  $\varphi_2$  deux noyaux de  $\mathcal{N}$  il existe une borne supérieure forte de  $\varphi_1$  et  $\varphi_2$  notée  $\varphi_1 \vee \varphi_2$ .

*Démonstration.* — Considérons l'ensemble  $\mathcal{A}$  des noyaux de  $\mathcal{N}$  majorant fortement  $\varphi_1$  et  $\varphi_2$ . Nous appellerons  $\psi$  la borne inférieure faible de  $\mathcal{A}$ . Il résulte de la proposition précédente et de la remarque qui suit que  $\psi$  est le plus petit élément de  $\mathcal{A}$  (pour l'ordre faible). Il reste à montrer que si  $\varphi \in \mathcal{A}$  alors  $\varphi \gg \psi$ . Ce dernier point s'établit d'une manière tout à fait analogue à la démonstration que Meyer ([7], pp. 162-163) emploie pour construire la borne supérieure forte de deux fonctions excessives.

### 3. Noyau potentiel associé à une fonction excessive.

#### 3.1. Notations.

Les symboles relatifs à l'ordre fort des fonctions excessives seront affectés de la lettre  $e$ . Ainsi si  $u$  et  $v$  sont des fonctions excessives on écrira  $u <_e v$ ,  $u \bigwedge_e v$ ,  $u \bigvee_e v$ , dont les significations sont claires.

Enfin nous noterons  $\mathcal{G}$  (resp.  $\mathcal{K}$ ) l'ensemble des ouverts (resp. des ouverts relativement compacts) et  $\mathcal{K}$  l'ensemble des compacts de  $E$ .

Nous allons maintenant ériger deux trivialisés au rang de proposition, car on s'en servira constamment dans la suite.

**PROPOSITION.** — i) Soient  $u$  une fonction excessive  $m$ -ps finie,  $G$  un ouvert de  $E$ . Si  $v$  est une fonction excessive telle que  $v <_e P_G u$  alors  $P_G v = v$ .

ii) Soient  $u$  et  $v$  deux fonctions de  $\mathcal{E}_0$ ,  $H$  et  $H'$  deux ouverts relativement compacts de fermetures disjointes alors  $P_H u \bigwedge_e P_{H'} v = 0$ .

*Démonstration.* — i) Il existe une fonction excessive  $v'$  telle que  $v + v' = P_G u$ . Appliquons l'opérateur  $P_G$  aux deux

membres il vient  $P_G \nu + P_G \nu' = P_G u$ . Comme  $P_G \nu' \leq \nu'$  on a  $P_G \nu \geq \nu$  sur l'ensemble  $[u < \infty]$ , d'où  $P_G \nu = \nu$  sur  $[u < \infty]$  qui est de  $m$ -mesure nulle. On a bien  $P_G \nu = \nu$  puisque les deux membres sont des fonctions excessives.

ii) Soit  $\omega$  une fonction excessive minorant fortement  $P_H u$  et  $P_H \nu$ . D'après la partie i) on aura  $P_H \omega = P_H \nu = \omega$ . D'où  $(P_H P_H)^n \omega = \omega$ . Comme  $\omega$  est dans  $\mathcal{E}_0$ ,  $\omega = 0$   $m$ -presque sûrement et d'après l'hypothèse (L),  $\omega = 0$ .

**3.2. THÉORÈME.** — Soit  $u$  une fonction excessive de  $\mathcal{E}_0$ . Posons si  $K \in \mathcal{K}$   $\varphi_u(\cdot, K) = \bigwedge_{\substack{G \supseteq K \\ G \in \mathcal{G}}} P_G u$ , et si  $\Gamma$  est un borélien

de  $E$   $\varphi_u(\cdot, \Gamma) = \bigvee_{\substack{K \subset \Gamma \\ K \in \mathcal{K}}} \varphi_u(\cdot, K)$ . Alors  $\varphi_u(x, \Gamma)$  définit un noyau excessif que l'on appellera noyau potentiel associé à  $u$ .

*Démonstration.* — Il résulte immédiatement de la définition que si  $\Gamma$  et  $\Gamma'$  sont deux boréliens de  $E$  tels que  $\Gamma \subset \Gamma'$ , alors  $\varphi_u(\cdot, \Gamma) \leq \varphi_u(\cdot, \Gamma')$ . La seule chose à vérifier est que pour tout  $x \in E$  la fonction  $\varepsilon_x \varphi_u$  définie sur  $\mathcal{B}$  par  $\varepsilon_x \varphi_u(\Gamma) = \varphi_u(x, \Gamma)$  est une mesure positive sur  $E$ .

a) Montrons tout d'abord que si  $K_1$  et  $K_2$  sont deux compacts disjoints on a quel que soit  $x$  dans  $E$

$$\varphi(x, K_1 + K_2) = \varphi(x, K_1) + \varphi(x, K_2).$$

Soit  $H_1$  et  $H_2$  deux ouverts relativement compacts de fermetures disjointes contenant respectivement  $K_1$  et  $K_2$ . On a :

$$\varphi_u(\cdot, K_1) \leq_e P_{H_1} u \quad \text{et} \quad \varphi_u(\cdot, K_2) \leq_e P_{H_2} u.$$

Appliquant alors la proposition 3.1. ii), on a

$$\varphi_u(\cdot, K_1) \bigwedge_e \varphi_u(\cdot, K_2) = 0,$$

ce qui s'écrit encore

$$\varphi_u(\cdot, K_1) \bigvee_e \varphi_u(\cdot, K_2) = \varphi_u(\cdot, K_1) + \varphi_u(\cdot, K_2).$$

Mais la remarque faite au début de cette démonstration prouve que  $\varphi_u(\cdot, K_1 + K_2)$  majore fortement  $\varphi_u(\cdot, K_1)$  et  $\varphi_u(\cdot, K_2)$ ;

on a donc l'inégalité :

$$\varphi_u(\cdot, K_1 + K_2) \underset{e}{>} \varphi_u(\cdot, K_1) + \varphi_u(\cdot, K_2).$$

Montrons maintenant l'inégalité inverse. On a par définition

$$\begin{aligned} \varphi_u(\cdot, K_1) + \varphi_u(\cdot, K_2) &= \bigwedge_{\substack{G_1 \overset{e}{\supset} K_1 \\ G_1 \in \mathcal{C}}} P_{G_1} u + \bigwedge_{\substack{G_2 \overset{e}{\supset} K_2 \\ G_2 \in \mathcal{C}}} P_{G_2} u \\ &= \bigwedge_{\substack{G_1 \overset{e}{\supset} K_1, G_1 \in \mathcal{C} \\ G_2 \overset{e}{\supset} K_2, G_2 \in \mathcal{C}}} (P_{G_1} u + P_{G_2} u) \end{aligned}$$

Mais l'égalité  $P_{G_1} u + P_{G_2} u = P_{T_{G_1} \vee T_{G_2}} u + P_{G_1 \cup G_2} u$  prouve que  $P_{G_1} u + P_{G_2} u \underset{e}{>} P_{G_1 \cup G_2} u$ . On a donc :

$$\varphi(\cdot, K_1) + \varphi(\cdot, K_2) \underset{e}{>} \bigwedge_{\substack{G_1 \cup G_2 \overset{e}{\supset} K_1 \cup K_2 \\ G_1, G_2 \in \mathcal{C}}} P_{G_1 \cup G_2} u = \varphi(\cdot, K_1 \cup K_2).$$

Remarquons que cette dernière inégalité ne suppose pas les compacts disjoints.

b) Nous avons défini une application  $\varepsilon_x \varphi_u$  de  $\mathfrak{K}$  dans  $\mathbf{R}_+$  par la formule  $\varepsilon_x \varphi_u(K) = \varphi_u(x, K)$ . Montrons que cette application est continue à droite, quel que soit  $x$  appartenant à  $[u < \infty]$ .

Remarquons tout d'abord que si  $K$  est un compact contenu dans un ouvert  $G$  on a  $\varphi(\cdot, K) \underset{e}{<} P_G u$ . Il en résulte que  $\varphi_u(\cdot, G) \underset{e}{<} P_G u$  quel que soit l'ouvert  $G$  de  $E$ .

On a donc  $\varphi_u(\cdot, K) \underset{e}{<} \varphi_u(\cdot, G) \underset{e}{<} P_G u$  chaque fois que  $K$  est contenu dans  $G$ . Il en résulte que  $\varphi_u(\cdot, K) = \bigwedge_{\substack{G \in \mathcal{C} \\ G \supset K}} \varphi_u(\cdot, G)$ .

Mais la famille  $(\varphi_u(\cdot, G))_{\substack{G \in \mathcal{C} \\ G \supset K}}$  étant filtrante décroissante pour l'ordre fort, il existe une suite décroissante  $(G_n)_{n \geq 1}$  de voisinages de  $K$  telle que :

$$\varphi_u(\cdot, K) = \text{reg} \left[ \inf_{n \geq 1} \varphi_u(\cdot, G_n) \right]$$

(le symbole  $\text{inf}$  étant relatif à l'ordre ordinaire sur les fonctions numériques). Posons  $\tilde{\varphi}_u = \inf_n \varphi_u(\cdot, G_n)$ ,  $\tilde{\varphi}$  est surmédiane,

et soit  $h_n$  la suite de fonctions excessives satisfaisant à la relation  $\varphi_u(\cdot, G_n) = h_n + \varphi_u(\cdot, G_{n+1})$ . On a alors la relation  $\varphi_u(\cdot, G_1) = \sum_{n \geq 1} h_n + \tilde{\varphi}_u$ . Régularisant cette dernière relation, on voit alors que  $\tilde{\varphi}_u$  est égale à sa régularisée sur l'ensemble  $[u < \infty]$ , ce qui montre que  $\varepsilon_x \varphi_u$  est continue à droite si  $u(x) < \infty$ .

c) Quel que soit  $x$  dans  $[u < \infty]$   $\varepsilon_x \varphi_u$  définit donc une fonction de compact, sous additive, additive sur les compacts disjoints, continue à droite et positive. Il est facile de montrer qu'une telle fonction est fortement additive c'est-à-dire que, quel que soit  $x$  dans  $[u < \infty]$ ,

$$\varepsilon_x \varphi_u(K_1 \cup K_2) + \varepsilon_x \varphi_u(K_1 \cap K_2) = \varepsilon_x \varphi_u(K_1) + \varepsilon_x \varphi_u(K_2).$$

Il résulte alors de la théorie générale des capacités (cf. [8]) que la fonction d'ensemble  $\varepsilon_x \varphi_u^*(A) = \inf_{\substack{G \supset A \\ G \in \mathcal{C}}} \varepsilon_x \varphi_u(G)$  est une

capacité de Choquet, additive sur les ensembles analytiques. De plus tout borélien étant capacitabile,  $\varepsilon_x \varphi_u^*(\Gamma) = \varepsilon_x \varphi_u(\Gamma)$  quel que soit  $\Gamma$  borélien. Enfin la relation

$$\varphi_u\left(x, \sum_n \Gamma_n\right) = \sum_n \varphi_u(x, \Gamma_n)$$

ayant lieu  $m$  presque partout chaque fois que  $\Gamma_n$  est une suite de boréliens disjoints deux à deux, est vrai en tout point  $x$  puisque les deux membres sont des fonctions excessives.

On va maintenant donner une caractérisation plus maniable du noyau  $\varphi_u$ .

**3.3. PROPOSITION.** — Soit  $u$  une fonction de  $\mathcal{E}_0$ . Soit  $\mathfrak{N}_u$  l'ensemble des noyaux  $\varphi$  de  $\mathfrak{N}$  vérifiant la relation  $\varphi 1_G \leq P_G u$  pour tout ouvert  $G$  de  $\mathcal{C}$ . Alors  $\varphi_u$  est le plus grand élément (au sens de l'ordre fort sur  $\mathfrak{N}$ ) de  $\mathfrak{N}_u$ .

*Démonstration.* — On a vu au cours de la démonstration du théorème 3.2. en b) que  $\varphi_u \in \mathfrak{N}_u$ ; montrons qu'il en est le plus grand élément. Soit donc  $\varphi \in \mathfrak{N}_u$ ; on a  $\varphi 1_K \leq \varphi 1_G \leq P_G u$  chaque fois que l'ouvert  $G$  contient le compact  $K$ ; on en tire  $\varphi 1_K \leq \bigwedge_{G \supset K} P_G u = \varphi_u 1_K$ . On a alors pour tout  $\Gamma$  de  $\mathcal{B}$

$\varphi 1_\Gamma = \bigvee_{\substack{\mathbf{k} \subset \Gamma \\ \mathbf{k} \in \mathcal{K}}} \varphi 1_{\mathbf{k}} < \bigvee_{\substack{\mathbf{k} \subset \Gamma \\ \mathbf{k} \in \mathcal{K}}} \varphi_u 1_{\mathbf{k}} = \varphi_u 1_\Gamma$ . Il existe donc une fonction

excessive  $\psi_\Gamma$  telle que  $\varphi 1_\Gamma + \psi_\Gamma = \varphi_u 1_\Gamma$  qui vérifient donc  $\psi_{\Sigma \Gamma_n} = \sum_n \psi_{\Gamma_n}$  sur  $[u < \infty]$  et par conséquent partout, dès que  $\Gamma_n$  est une suite de boréliens disjoints.

COROLLAIRES. — i)  $\varphi_{\varphi_u 1} = \varphi_u$ .

ii) Pour qu'un noyau  $\varphi$  soit le noyau potentiel associé à une fonction  $u$  de  $\mathcal{E}_0$  il est suffisant qu'il vérifie les deux conditions suivantes :

a)  $\varphi 1 = u$

b) quel que soit  $G \in \mathcal{G}$  on a  $P_G \varphi 1_G = \varphi 1_G$ .

Démonstration. — i) Nous avons vu que  $\varphi_u 1_G < P_G u$ , quel que soit  $G \in \mathcal{G}$ ; on a donc (proposition 3.1.)  $\forall G \in \mathcal{G}$ ,  $P_G \varphi_u 1_G = \varphi_u 1_G$ . Appliquant l'opérateur  $P_G$  aux deux membres de l'inégalité  $\varphi_u 1_G < \varphi_u 1$  il vient alors  $\varphi_u 1_G < P_G \varphi_u 1$  ce qui montre que  $\varphi_u \in \mathcal{N}_{\varphi_u 1}$ . La proposition 3.3. nous indique alors qu'il existe un noyau  $\psi$  de  $\mathcal{N}$  tel que  $\varphi_u + \psi = \varphi_{\varphi_u 1}$ . On a donc  $\varphi_u 1 + \psi 1 = \varphi_{\varphi_u 1} 1 < \varphi_u 1$   $\psi 1$  est donc nulle et  $\varphi_u = \varphi_{\varphi_u 1}$ .

ii) la démonstration de i) prouve que chaque fois qu'un noyau de  $\mathcal{N}$  vérifie la propriété  $\forall G \in \mathcal{G}$ ,  $P_G \varphi 1_G = \varphi 1_G$  alors  $\varphi$  est le noyau associé à la fonction excessive  $\varphi 1$ , d'où le résultat.

### 3.4. Exemples de noyaux potentiels.

a) Soit  $A$  une fonctionnelle additive naturelle de potentiel  $U_A$ .  $m$ -presque sûrement fini. Soient  $H$  et  $H'$  deux ouverts relativement compacts de fermetures disjointes, on note  $T_n$  les temps de passages successifs en  $H$  et  $H'$ , on aura  $X_{T_{2n}} \in \bar{H}$ ,  $X_{T_{2n+1}} \in \bar{H}'$  presque sûrement. On a donc  $\lim_{n \rightarrow \infty} T_n = \infty$  presque sûrement et par conséquent

$$(P_H, P_{H'})^n U_A(x) = E_x[(A_\infty - A_{T_n}) 1_{(T_n < \infty)}]$$

tend vers zéro en tout point  $x$  ou  $U_A(x)$  est fini.  $U_A$  est donc dans  $\mathcal{E}_0$ . Considérons alors le noyau défini par la formule

$\varphi(x, \Gamma) = U_{\Lambda} 1_{\Gamma}(x) = E_x \int_0^{\infty} 1_{\Gamma}(X_t) dA_t$ . Soit  $G$  un ouvert de  $E$ , on a  $P_G \varphi 1_G = E. \int_{T_G}^{\infty} 1_G(X_t) dA_t$ . En tout point  $x$  ou  $U_{\Lambda}(x)$  est fini on a :

$$\begin{aligned} \varphi 1_G(x) - P_G \varphi 1_G(x) &= E_x \int_0^{T_G} 1_G(X_t) dA_t \\ &= E_x[(A_{T_G} - A_{T_G^-})(X_{T_G} \in G) (T_{T_G} < \infty)]. \end{aligned}$$

Mais, puisque  $G$  est ouvert  $[X_{T_G} \in G] \subset [X_{T_G} \neq X_{T_G^-}]$ ; la fonctionnelle  $(A)$ , naturelle, n'ayant pas de discontinuité commune avec le processus, le second membre est nul, d'où  $\varphi 1_G = P_G \varphi 1_G$ . Appliquant alors les résultats du paragraphe précédent on voit que  $\varphi$  est le noyau associé à

$$\varphi 1 = E. \int_0^{\infty} 1_E(X_t) dA_t = E. [A_{\xi^-}].$$

Si, la fonctionnelle  $A$  charge pas  $\xi$ , et en particulier si elle est continue  $U_{\Lambda} 1_{\Gamma}(x)$  est donc le noyau associé à  $U_{\Lambda}$ .

b) Nous allons maintenant supposer qu'il existe une densité potentiel régulière. Nous appellerons (DPR) cette hypothèse supplémentaire que l'on formulera ainsi :

(DPR) Il existe une fonction  $g$  de  $E \times E$  dans  $\bar{R}_+$ , bimesurable telle que :

- i)  $\forall y \in E, x \rightarrow g(x, y)$  appartient à  $\mathcal{E}_0$ .
- ii) Soit  $G \in \mathcal{G}$ ,  $P_G g(\cdot, y)(x) = g(x, y)$  quel que soit  $y$  dans  $G$ .
- iii) Quel que soit  $f$  borélienne positive

$$Uf(x) = \int g(x, y) f(y) m(dy).$$

Il est à remarquer que les hypothèses KW de Kunita Watanabé cf. [5], [10] entraînent (DPR). Il en est de même, on le verra plus loin s'il y a deux processus en dualité.

On dira qu'une fonction excessive  $u$  de  $\mathcal{E}_0$  est un potentiel de mesure s'il existe une mesure positive  $\sigma$ -finie  $\lambda_u$  telle que :

$$u(x) = \int g(x, y) \lambda_u(dy).$$

Il est alors facile de voir que le noyau  $\varphi_u$  est donné par la formule  $\varphi_u(x, \Gamma) = \int_{\Gamma} g(x, y) \lambda_u(dy)$ , puisque les conditions a) et b) du corollaire ii) de la proposition 3.3. se vérifient trivialement.

**3.5. PROPOSITION.** — Soient  $u$  et  $v$  deux fonctions excessives de  $\mathcal{E}_0$  on a  $\varphi_{u+v} = \varphi_u + \varphi_v$ .

*Démonstration.* — On a clairement  $(\varphi_u + \varphi_v)1_G \leq P_G(u + v)$  quel que soit  $G$  dans  $\mathcal{G}$ , ce qui montre que  $\varphi_u + \varphi_v \ll \varphi_{u+v}$ . Montrons maintenant l'inégalité inverse.

On a  $\varphi_{u+v}1_\Gamma \leq u + v$  quel que soit  $\Gamma$  dans  $\mathcal{B}$ , et par conséquent

$$\varphi_{u+v}1_\Gamma \leq \varphi_{u+v}1_\Gamma \wedge u + \varphi_{u+v}1_\Gamma \wedge v.$$

Or nous allons démontrer dans le lemme ci-dessous que les deux termes de la somme figurant au second membre de cette inégalité définissent deux noyaux excessifs  $\varphi'$  et  $\varphi''$ . Comme quel que soit  $G$  dans  $\mathcal{G}$ , on a

$$\varphi'1_G \leq \varphi_{u+v}1_G \quad \text{cela entraîne} \quad P_G\varphi'1_G = \varphi'1_G.$$

$\varphi'$  est donc le noyau associé à  $\varphi'1$  qui est fortement majoré par  $u$ , d'où :

$$\varphi' \ll \varphi_u \quad \text{et de même} \quad \varphi'' \ll \varphi_v$$

et

$$\varphi_{u+v} = \varphi' + \varphi'' \ll \varphi_u + \varphi_v.$$

Il ne reste plus qu'à montrer le lemme annoncé.

**LEMME.** — Soit  $u$  et  $v$  deux fonctions excessives de  $\mathcal{E}_0$ . Alors  $\psi(x, \Gamma) = (\varphi_u1_\Gamma \wedge v)(x)$  définit un noyau excessif.

Soit  $K_1$  et  $K_2$  deux compacts disjoints de  $E_1, H_1$  et  $H_2$  deux ouverts relativement compacts respectivement  $K_1$  et  $K_2$ . On a déjà vu dans la démonstration de la proposition que  $P_{H_i}\psi(\cdot, H_i) = \psi(\cdot, H_i)$ . Il en résulte que

$$\psi(\cdot, K_1) \wedge \psi(\cdot, K_2) \leq \psi(\cdot, H_1) \wedge \psi(\cdot, H_2) = 0,$$

donc  $\psi(\cdot, K_1) + \psi(\cdot, K_2) = \psi(\cdot, K_1) \vee \psi(\cdot, K_2)$ . Mais alors :

$$\begin{aligned} \psi(\cdot, K_1) + \psi(\cdot, K_2) &= (\varphi_u1_{K_1} \wedge v) \vee (\varphi_u1_{K_2} \wedge v) \\ &= (\varphi_u1_{K_1} \vee \varphi_u1_{K_2}) \wedge v \\ &= (\varphi_u1_{K_1} + \varphi_u1_{K_2}) \wedge v = \psi(\cdot, K_1 + K_2), \end{aligned}$$

Soient maintenant  $\Gamma_1$  et  $\Gamma_2$  deux boréliens disjoints de  $E$ ,  $K_1^n$  et  $K_2^n$  deux suites croissantes de compacts contenus respectivement dans  $\Gamma_1$  et  $\Gamma_2$  et tels que :

$$\bigvee_n \varphi_u 1_{K_1^n} = \varphi_u 1_{\Gamma_1}, \quad \bigvee_n \varphi_u 1_{K_2^n} = \varphi_u 1_{\Gamma_2}.$$

On a d'une part :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \varphi_u 1_{K_1^n} \bigvee_e \varphi_u 1_{K_2^n} \right) \leq \varphi_u 1_{\Gamma_1} \bigvee_e \varphi_u 1_{\Gamma_2},$$

et d'autre part si  $n' \geq n$  :

$$\varphi 1_{K_1^{n'}} \bigvee_e \varphi_u 1_{K_2^{n'}} \geq \varphi_u 1_{K_1^n} \geq \varphi_u 1_{K_2^n}.$$

Faisons tendre  $n'$  vers l'infini, il vient :

$$\forall n; \lim_{n' \rightarrow \infty} \left( \varphi 1_{K_1^{n'}} \bigvee_e \varphi_u 1_{K_2^{n'}} \right) \geq \varphi_u 1_{K_1^n}$$

donc

$$\lim_{n' \rightarrow \infty} \left( \varphi 1_{K_1^{n'}} \bigvee_e \varphi_u 1_{K_2^{n'}} \right) \geq \varphi_u 1_{\Gamma_1},$$

de même le membre de gauche majore fortement  $\varphi_u 1_{\Gamma_2}$ , donc majore  $\varphi_u 1_{\Gamma_1} \bigvee_e \varphi_u 1_{\Gamma_2}$ ; on a ainsi montré l'égalité  $\varphi_u 1_{\Gamma_1} + \varphi_u 1_{\Gamma_2} = \varphi_u 1_{\Gamma_1} \bigvee_e \varphi_u 1_{\Gamma_2}$ .

Il est alors facile de montrer, en faisant jouer à  $\Gamma_1$  et  $\Gamma_2$  le rôle que  $K_1$  et  $K_2$  tenaient au début de la démonstration de ce lemme, que  $\psi(x, \Gamma_1 + \Gamma_2) = \psi(x, \Gamma_1) + \psi(x, \Gamma_2)$ . Il ne reste plus qu'à montrer, ce qui ne pose aucun problème, que si  $\Gamma_n$  est une suite de boréliens de réunion  $\Gamma$ ,  $\psi(\cdot, \Gamma) = \bigvee_e \psi(\cdot, \Gamma_n)$ .

**COROLLAIRE.** — Soit  $u$  une fonction excessive de  $\mathcal{E}_0$ ,  $u_n$  une suite de fonctions excessives de  $\mathcal{E}_0$ . Soit  $v_n$  la suite de fonctions excessives vérifiant  $u \bigvee_e u_n = v_n + u \bigwedge_e u_n$ . Les mesures  $\varepsilon_x \varphi_{u_n}$  tendent en norme vers  $\varepsilon_x \varphi_u$  en tout point  $x$  où  $v_n(x)$  tend vers 0 et où  $u(x) < \infty$ . En particulier si  $u_n \geq u$  alors  $\varepsilon_x \varphi_{u_n}$  tend en norme vers  $\varepsilon_x \varphi_u$  en tout point  $x$  où  $u_n(x) \rightarrow u(x) < \infty$ .

*Démonstration.* — Plaçons-nous en un point  $x$  où  $u(x) < \infty$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} v_n(x) = 0$  on a alors  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n(x) = u(x)$ . A partir

d'un certain rang  $\nu_n(x)$  et donc  $(u \bigvee_{\epsilon} u_n)(x)$  sont finis et l'on peut écrire quel que soit le borélien  $\Gamma$

$$\begin{aligned} \varphi_{u \wedge_{\epsilon} u_n}(x, \Gamma) - \varphi_u(x, \Gamma) &\leq \varphi_{u_n}(x, \Gamma) - \varphi_u(x, \Gamma) \\ &\leq \varphi_{u \vee_{\epsilon} u_n}(x, \Gamma) - \varphi_u(x, \Gamma) \end{aligned}$$

soit encore

$$|\varphi_{u_n}(x, \Gamma) - \varphi_u(x, \Gamma)| \leq \varphi_{u \vee_{\epsilon} u_n}(x, \Gamma) - \varphi_{u \wedge_{\epsilon} u_n}(x, \Gamma) = \varphi_{\nu_n}(x, \Gamma)$$

On a donc

$$\|(\varepsilon_x \varphi_{u_n} - \varepsilon_x \varphi_u)\| \leq \varphi_{\nu_n}(x, E) \leq \nu_n(x),$$

d'où le résultat.

**3.6. THÉORÈME.** — a) Soient  $u$  une fonction excessive de  $\mathcal{E}_0$ ,  $H$  un ouvert relativement compact de  $E$ . Quel que soit  $x$  de  $E$  les mesures  $\varepsilon_x \varphi_{P_H u}$  sont portées par  $\bar{H}$  et  $\varphi_{P_H u} 1_H = P_H u$ .

b) Soit  $\nu$  un potentiel de  $\mathcal{E}_0$  et  $G$  un ouvert de  $E$ . Les conclusions du a) subsistent:  $\forall x \in E$   $\varepsilon_x \varphi_{P_G \nu}$  est portée par  $\bar{G}$  et  $\varphi_{P_G \nu} 1_{\bar{G}} = P_G \nu$ . En particulier  $\varphi_{\nu} 1 = \nu$ .

c) Soit  $h$  une fonction harmonique de  $\mathcal{E}_1$ . Alors  $\varphi_h = 0$ .

*Démonstration.* — Le a) résulte immédiatement de la définition; on a en effet  $\varphi_{P_H u} 1_{\bar{H}} = \bigwedge_{\substack{H' \supset \bar{H} \\ H' \in \mathcal{E}}} P_{H'} P_H u = P_H u$ ; de plus comme on a

$$\varphi_{P_H u} 1_{\bar{H}} + \varphi_{P_H u} 1_{\bar{H}^c} = \varphi_{P_H u} 1 \leq P_H u,$$

on voit que  $\varphi_{P_H u} 1_{\bar{H}^c} = 0$ .

b) Soit  $H_n$  une suite d'ouverts relativement compacts de  $E$  telle que  $\bar{H}_n \subset H_{n+1}$   $\bigcup_n H_n = E$ . Posons  $G_n = H_n \cap G$ .

On a vu au cours de la démonstration du théorème 3.2. que  $P_{G_{n+1}} \nu + P_{G - \bar{G}_n} \nu > P_G \nu$ . Comme  $\nu$  est un potentiel  $P_{G - \bar{G}_n} \nu \leq P_{\bar{H}_n^c} \nu$  tend  $m$ -presque sûrement vers zéro quand  $n$  tend vers l'infini. On a donc :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_{G_{n+1}} \nu = P_G \nu = \lim_{n \rightarrow \infty} [P_{G_{n+1}} \nu + P_{G - \bar{G}_n} \nu] \quad m\text{-presque sûrement.}$$

Appliquant alors le corollaire de la proposition 3.5., on peut

affirmer que :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_{P_{G_{n+1}u}}(x, \bar{G}) = \varphi_{P_{Gv}}(x, \bar{G}) \quad m\text{-presque sûrement.}$$

Mais d'après a)  $\varphi_{P_{G_{n+1}u}}(x, \bar{G}) = P_{G_{n+1}}\nu$ . On a donc  $\nu = \varphi_{P_{Gv}}1_{\bar{G}}$ .

c) Le résultat provient du fait que si  $h$  est dans  $\mathcal{E}_1$ , on a quel que soit  $G \in \mathcal{C}_y$ ,  $H \in \mathcal{H}$  tels que

$$\bar{G} \cap \bar{H} = \emptyset, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (P_G P_H)^n h = 0.$$

Il en résulte que si  $u$  et  $\nu$  sont dans  $\mathcal{E}_1, P_G u \bigwedge_e P_H \nu = 0$ .

Soit maintenant  $h$  harmonique dans  $\mathcal{E}_1$ ,  $K$  un compact de  $E$ ,  $H$  un voisinage ouvert relativement compact de  $K$ ,  $H'$  un voisinage ouvert relativement compact de  $\bar{H}$ . On a  $P_{\bar{H}'} h = h$  puisque  $h$  est harmonique d'où  $\varphi_h 1_K < h = P_{\bar{H}'} h$  et d'autre part  $\varphi_h 1_K < P_H h$  d'après la définition du noyau  $\varphi_h$  on a donc  $\varphi_h 1_K < P_{\bar{H}'} h \bigwedge_e P_H h = 0$ . Cette relation étant vraie quel que soit le compact  $K$  prouve que  $\varphi_h = 0$ .

*Remarques.* — a) Si  $u$  est une fonction de  $\mathcal{E}_1$ ,  $\varphi_u$  le noyau associé à  $u$ ,  $h$  la fonction excessive telle que  $u = \varphi_u 1 + h$ , il résulte de ce qui précède que la formule qui vient d'être écrite est la décomposition de Riesz de  $u$  en sa partie potentiel et sa partie harmonique. Ceci justifie le nom de noyau potentiel donné à  $\varphi_u$ . Si  $u$  est seulement dans  $\mathcal{E}_0$  on ne peut rien affirmer de tel. Si par exemple on travaille sous les hypothèses de Kunita Watanabé cf. [5], [10] et si l'on considère un point  $y$  tel que la fonction  $x \rightarrow g(x, y)$  ne soit pas un potentiel (et soit par conséquent harmonique), il résulte de ce que nous avons vu en (3.4.) b) que le noyau associé à cette fonction n'est pas nul; il est donné par l'expression  $g(x, y)1_\Gamma(y)$ . Les phénomènes pathologiques cessent de se produire si l'on suppose par exemple que les fonctions harmoniques sont localement bornées; on retrouve là une condition donnée par Kunita et Watanabé pour que les fonctions  $g(\cdot, y)$  soient toutes des potentiels.

b) Si  $F$  est fermé non compact, on n'a pas en général  $\varphi_u 1_F = \bigwedge_{\substack{G \in \mathcal{C}_y \\ G \supset F}} P_G u$ ; Pour le voir il suffit de prendre pour  $u$  une

fonction harmonique de  $\mathcal{E}_1$  et pour fermé  $F$  le complémentaire d'un ouvert relativement compact  $H$ . Le membre de gauche est nul, c'est ce que nous avons vu en 3.6. c); quant au membre de droite il est égal à  $u$ . Mais il n'est pas difficile de voir que cette formule est juste si  $u$  est un potentiel. Mais la formule  $\psi_u 1_F = \bigwedge_{\substack{G \in \mathcal{C} \\ G \supset F}} P_{Gu}$ , est peut-être un moyen de définir un « noyau

de Martin » permettant d'étendre aux fonctions harmoniques la théorie faite ici pour les potentiels.

**3.7. PROPOSITION.** — a) Si  $u$  est un potentiel de la classe (D) presque sûrement fini, alors quel que soit  $x$  dans  $E$ ,  $\varepsilon_x \varphi_u$  ne charge pas les ensembles polaires.

b) Si  $u$  est un potentiel régulier de la classe (D) alors les mesures  $\varepsilon_x \varphi_u$  ne chargent pas les semi-polaires. Nous supposons dans cette proposition que  $X_t$  est un processus de Hunt.

a) Soit  $P$  un ensemble polaire; il existe une suite  $G_n$  d'ouverts contenant  $P$  telle que  $T_{G_n} \rightarrow \infty$   $P_m$ -presque sûrement. On a alors  $\varphi_u 1_P \leq \varphi_u 1_{G_n} \leq P_{G_n} u$ . On en tire que  $\varphi_u 1_P$  est nulle  $m$ -presque sûrement. D'après l'hypothèse (L) cela implique  $\forall x \varepsilon_x \varphi_u = 0$ .

b) Montrons tout d'abord que dans ce cas  $P_A \varphi_u 1_A = \varphi_u 1_A$  quel que soit le borélien  $A$ , soit  $G_n$  une suite décroissante d'ouverts telle que  $T_{G_n} \uparrow T_A$   $P_x$ -presque sûrement pour  $m$ -presque tout  $x$  de  $E$ . On aura alors

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_{G_n} \varphi 1_A = P_A \varphi 1_A = \varphi 1_A \quad m\text{-presque sûrement};$$

cela résulte du fait que une fonction excessive fortement majorée par un potentiel régulier de la classe (D) est elle-même un potentiel régulier de la classe (D). On aura donc  $P_A \varphi 1_A = \varphi 1_A$ . Supposons maintenant  $A$  totalement effilé on aura  $\varphi 1_A = (P_A)^p \varphi 1_A$ . Le temps  $T_A^p$  du  $p$ -ième passage en  $A$  tend presque sûrement vers l'infini quand  $p$  tend vers l'infini. On a donc  $\varphi 1_A = 0$ , d'où le même résultat pour un ensemble semi-polaire, qui est réunion dénombrable d'ensembles totalement effilés.

#### 4. Interprétations probabilistes.

**4.1.** Nous avons regroupé dans ce chapitre un certain nombre d'applications probabilistes que permettent la considération de ce noyau, sans qu'il soit nécessaire de faire des hypothèses supplémentaires. Nous allons commencer par faire le rappel d'un certain nombre de notions qui vont être utilisées ici.

a) Suivant Kunita et Watanabé [5] nous définirons, si  $u$  est une fonction excessive, un nouveau semi-groupe  $P_t^u$ , en posant :

$$\begin{aligned} P_t^u(x, A) &= \frac{1}{u(x)} E_x[1_A; u(X_t)] & \text{si } x \in E_u \\ &= \delta(x, A)e^{-t} & \text{si } x \notin E_u \end{aligned}$$

où l'on a posé  $E_u = \{0 < u < \infty\}$  : Kunita et Watanabé [4], ont montré que  $P_t^u$  était dans un semi-groupe standard, dont la réalisation canonique sera appelée le  $u$ -processus. (Pour plus de commodité nous raisonnerons aussi sur la réalisation canonique du semi-groupe  $P_t$ ). On appellera  $(P_x^u)_{x \in E}$  la famille de probabilités construite à l'aide du semi-groupe  $P_t^u$ . Si  $T$  est un temps d'arrêt de la famille  $\mathcal{F}_t$  on a si  $\Lambda \in \mathcal{F}_T$  et  $x \in E_u$  (cf. [5], [10])

$$P_x^u[\Lambda, T < \zeta] = \frac{1}{u(x)} E_x[u(X_t); \Lambda; T < \zeta]$$

En particulier si  $A$  est un ensemble presque analytique de  $E$ , et si l'on note  $P_A^u$  l'opérateur réduite associé au  $u$ -processus, on aura :

$$\forall x \in E_u \quad P_A^u f(x) = \frac{1}{u(x)} (P_A u f)(x).$$

b) *Temps de retour* : Nous prendrons les définitions de l'exposé de Cartier-Meyer-Weil [2].

Une variable aléatoire positive  $L$  est un temps de retour si :

- 1)  $L(\omega) < \infty \implies L(\omega) \leq \zeta(\omega)$
- 2)  $\forall t \geq 0, L_0 \theta_t = (L - t)^+$ .

Le temps de mort  $\zeta$ , le dernier instant où l'on passe dans un ensemble presque borélien  $A$   $L_A(\omega) = \sup \{t; X_t \in A\}$

(en convenant de poser  $\sup \{\emptyset\} = 0$ ) sont des temps de retour. Si  $L$  est un temps de retour et  $t \geq 0$   $(L - t)^+$  est un temps de retour. Pour tout  $s \geq 0$  on désigne par  $\hat{\mathcal{F}}_s$  la tribu constituée par des ensembles  $A$  de  $\mathcal{F}$  tels que  $\forall u \geq 0$   $\theta_u^{-1}(A) \cap \{s + u < L\} = A \cap \{s + u < L\}$ . La famille de tribu  $\hat{\mathcal{F}}_s$  est croissante et continue à droite; si  $t \geq 0$  la variable aléatoire  $X_{(L-s)^++t}$  est  $\hat{\mathcal{F}}_s$  mesurable; si  $T$  est un temps d'arrêt de la famille  $\hat{\mathcal{F}}_t$ ,  $(L - T)^+$  est un temps de retour.

**4.2. PROPOSITION.** — Soient  $u$  un potentiel de  $\mathcal{E}_0$ ,  $G_1$  et  $G_2$  deux ouverts de fermetures disjointes; on a :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (P_{G_1} P_{G_2})^n u(x) = 0 \text{ en tout point } x \text{ où } u \text{ est finie.}$$

*Démonstration.* — Posons  $u_\infty = \lim_{n \rightarrow \infty} \downarrow (P_{G_1} P_{G_2})^n u$ , et appelons  $\Lambda$  l'ensemble des trajectoires passant une infinité de fois de  $G_1$  à  $G_2$ .

La fonction  $x \rightarrow P_x^u[\Lambda]$  est  $u$ -excessive, en effet :

$$P_t^u[P^u.(\Lambda)](x) = E_x^u[P_{X_t}^u(\Lambda)] = E_x^u[\theta_t^{-1}(\Lambda)]$$

Mais  $\theta_t^{-1}(\Lambda) = \Lambda \cap [t < \zeta]$  ce qui montre à la fois que

$$P_t^u[P^u.(\Lambda)] \leq P^u.(\Lambda) \text{ et que } \lim_{t \downarrow 0} \uparrow P_t^u[P^u.(\Lambda)] = P^u.(\Lambda)$$

D'autre part, on a  $\lim_{n \rightarrow \infty} [P_{G_1}^u P_{G_2}^u]^n = P^u.(\Lambda)$ ; on a donc  $P_x^u(\Lambda) = \frac{u_\infty(x)}{u(x)}$  quel que soit  $x$  dans  $E_u$ , ce que l'on peut écrire  $u_\infty(x) = u(x) P_x^u(\Lambda)$  quel que soit  $x$  appartenant à  $[u < \infty]$ .  $P^u.(\Lambda)$  étant  $u$ -excessive, on peut écrire

$$\begin{aligned} P_x^u(\Lambda) &= \lim_{p \rightarrow \infty} \frac{P}{u(x)} U_p[uP^u.(\Lambda)](x) \\ &= \lim_{p \rightarrow \infty} \frac{P}{u(x)} U_p u_\infty(x) \end{aligned}$$

quel que soit  $x$  dans  $E_u$ . On a donc  $u_\infty = \lim_{p \rightarrow \infty} p U_p u_\infty$  sur  $[u < \infty]$  (en effet  $u_\infty$  étant surmédiane, cette égalité est triviale sur l'ensemble  $[u = 0]$ ). Nous avons donc montré que  $u_\infty$  ne diffère de sa régularisée excessive  $\bar{u}_\infty$  que sur l'ensemble polaire  $[u = \infty]$ . On a alors  $P_{G_1} P_{G_2} u_\infty = P_{G_1} P_{G_2} \bar{u}_\infty$ .

D'autre part  $P_{G_1}P_{G_2}u_\infty = u_\infty$  sur l'ensemble  $[u < \infty]$  d'après le théorème de Lebesgue. D'où finalement sur  $[u < \infty]$ ,  $P_{G_1}P_{G_2}\bar{u}_\infty = P_{G_1}P_{G_2}u_\infty = u_\infty = \bar{u}_\infty$ . Les deux membres extrêmes étant des fonctions excessives, l'égalité

$$P_{G_1}P_{G_2}\bar{u}_\infty(x) = \bar{u}_\infty(x)$$

a lieu pour tout  $x$  et  $\bar{u}_\infty$  est un potentiel vérifiant les égalités  $\bar{u}_\infty = P_{G_1}\bar{u}_\infty = P_{G_2}\bar{u}_\infty$ . Il résulte alors du théorème 3.6. *b*) que quel que soit  $x \in_x \varphi_{\bar{u}_\infty}$  doit être portée par  $\bar{G}_1$  et  $\bar{G}_2$ . Cela entraîne que  $\varphi_{\bar{u}_\infty} = 0$  d'où  $\bar{u}_\infty = \varphi_{\bar{u}_\infty}1 = 0$ .

**4.3. PROPOSITION.** — Soit  $u$  un potentiel de  $\mathcal{E}_0$ . Pour  $P_x^u$  presque tout  $\omega$  la limite quand  $t$  tend en croissant vers  $\zeta(\omega)$  de  $X_t$  existe; on notera cette limite  $X_{\zeta^-}$ .

*Démonstration.* — La proposition est triviale si  $x$  n'est pas dans  $E_u$ , et l'on a dans ce cas  $X_{\zeta^-} = x$   $P_x$ -presque sûrement.

Supposons donc maintenant  $x$  dans  $E_u$ , et soit  $G_n$  une base dénombrable d'ouverts de  $E$ . La proposition précédente nous dit alors que, dès que  $\bar{G}_n \cap \bar{G}_m = \emptyset$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} u(x)(P_{G_n}^u P_{G_m}^u)^k 1(x) = u(x)P_x^u \left[ \bigcap_{k > 0} [T_k < \zeta] \right] = 0$$

où l'on a posé

$$T_1 = T_{G_n}, \quad T_2 = T_{G_n} + T_{G_m} \circ \theta_{T_{G_n}} \dots T_{2k-1} = T_{2k-2} + T_{G_n} \circ \theta_{T_{2k-2}}, \\ T_{2k} = T_{2k-1} + T_{G_m} \circ \theta_{T_{2k-1}};$$

il en résulte que pour tous les  $\omega$  n'appartenant pas à un ensemble  $N$  de  $P_x$ -mesure nulle, les trajectoires  $t \rightarrow X_t(\omega)$  ne passent qu'un nombre fini de fois de  $G_n$  à  $G_m$  dès que  $\bar{G}_n \cap \bar{G}_m = \emptyset$ . Donc pour tout  $\omega \in N^c$  la trajectoire  $t \rightarrow X_t(\omega)$  ne peut avoir qu'une seule valeur d'adhérence dans  $E_\delta$  (compactifié d'alexandrov de  $E$ ) quand  $t$  tend vers l'infini; il reste à montrer que cette limite appartient à  $E$ . Appelons  $\sigma_K$  le temps de sortie d'un compact  $K$ , on a

$$\text{alors si } x \text{ est dans } E_u \quad P_x^u[\sigma_K < \zeta] = \frac{1}{u(x)} (P_{\sigma_K} u)(x).$$

Comme  $u$  est un potentiel on sait (cf. [5]) que  $P_{\sigma_K} u$  tend vers 0 sur  $[u < \infty]$  quand  $K \uparrow E$ . Donc  $\lim_{K \uparrow E} P_x^u[\sigma_K < \zeta] = 0$ , ce qui montre que  $P_x^u[X_{\zeta^-} \in E] = 1$ .

**4.4. PROPOSITION.** — Soit  $u$  un potentiel de  $\mathcal{E}_0$ ; on a quel que soit  $A$  borélien de  $E$   $\varphi_u(x, A) = u(x)P_x^u[X_{\zeta^-} \in A]$  en tout point  $x$  où  $u(x)$  est fini.

*Démonstration.* — L'égalité que nous voulons est triviale en un point  $x$  où  $u(x) = 0$ .

Remarquons tout d'abord que la fonction  $x \rightarrow P_x^u[X_{\zeta^-} \in A]$  est  $u$ -excessive, en effet

$$\begin{aligned} E_x^u[P_{X_t}^u[X_{\zeta^-} \in A]] &= E_x^u[1_{[X_{\zeta^-} \in A]} \circ \theta_t] \\ &= E_x^u[(t < \zeta)(X_{\zeta^-} \in A)] \end{aligned}$$

Considérons alors le noyau  $\psi$  défini de la manière suivante

$$\left\{ \begin{array}{ll} \psi(x, A) = u(x)P_x^u[X_{\zeta^-} \in A] & \text{si } x \in E_u \\ = 0 & \text{si } u(x) = 0 \\ = \infty & \text{si } u(x) = \infty \end{array} \right.$$

$\psi$  est un noyau surmédian, en effet

a) si  $x$  est dans  $E_u$

$$\lim_{p \gg \infty} \uparrow pU_p^u P^u \cdot [X_{\zeta^-} \in A](x) = P_x^u[X_{\zeta^-} \in A]$$

on a donc

$$\lim_{p \gg \infty} \uparrow pU_p u P^u \cdot [X_{\zeta^-} \in A](x) = u(x)P_x^u[X_{\zeta^-} \in A]$$

c'est-à-dire  $\lim_{p \gg \infty} \uparrow pU_p \psi(\cdot, A)(x) = \psi(x, A)$ ;

b) si  $u(x) = 0$ , remarquons que la mesure  $\varepsilon_x U_p$  est portée par  $\{u = 0\}$  et on a :

$$pU_p \psi(\cdot, A)(x) = \int_{(u=0)} pU_p(x, dy)\psi(y, A) = 0$$

quel que soit  $p > 0$ ;

c) si  $u(x) = \infty$  on a trivialement

$$pU_p \psi(\cdot, A)(x) \leq \psi(x, A) = \infty$$

Le noyau  $\psi$  est surmédian et, d'après a) et b) ne diffère de son noyau régularisé  $\bar{\psi}$  que sur l'ensemble polaire  $[u = \infty]$ .

Montrons maintenant que pour tout  $x$  tel que  $u(x)$  soit fini on a la relation  $P_G \psi 1_G(x) = \psi 1_G(x)$ , quel que soit l'ouvert  $G$  de  $E$ .

L'égalité est vraie là où  $u(x) = 0$  puisque  $\psi 1_G$  est sur-

médiane. Soit donc  $x$  dans  $E_u$ , on a :

$$\begin{aligned} P_G \psi 1_G(x) &= E_x[(T_G < \zeta) u(X_{T_G}) P_{X_{T_G}}^u[X_{\zeta^-} \in G]] \\ &= u(x) E_x^u[(T_G < \zeta) P_{X_{T_G}}^u[X_{\zeta^-} \in G]] \\ &= u(x) P_x^u[X_{\zeta^-} \in G] = \psi(x, G). \end{aligned}$$

Mais  $\bar{\psi} 1_G$  et  $\psi 1_G$  ne différant que sur un ensemble polaire  $N$ ,  $P_G \bar{\psi} 1_G$  et  $P_G \psi 1_G$  ne diffèrent que sur le polaire  $G \cap N$ , il en résulte que  $P_G \bar{\psi} 1_G$  et  $\bar{\psi} 1_G$  ne diffèrent que sur un ensemble polaire et sont donc égales.

Si nous récapitulons les propriétés du noyau  $\bar{\psi}$  nous voyons que :

- a)  $\bar{\psi} 1 = u(x)$  sur  $[u < \infty]$  donc partout
- b)  $P_G \bar{\psi} 1_G = \bar{\psi} 1_G$  quel que soit l'ouvert  $G$  de  $E$ .

Il résulte du corollaire ii) de la proposition 3.3. que  $\bar{\psi}$  est le noyau associé à  $u$ . C.Q.F.D.

**4.5. PROPOSITION.** — Soit  $\tau$  un temps de retour et soit  $\hat{\mathcal{F}}_t$  la famille de tribus associée à  $\tau$ . Soit  $A$  un événement de  $\hat{\mathcal{F}}_0$ . La fonction  $x \rightarrow P_x[\tau > 0, A]$  est excessive de 1 et le noyau associé est donné par la formule

$$\varphi(x, \Gamma) = P_x[0 < \tau < \infty; A; X_\tau - \in \Gamma].$$

*Démonstration.* — Appelons  $u$  la fonction  $x \rightarrow P_x[\tau > 0, A]$ ; on a

$$\begin{aligned} P_t u &= P. [(\tau \circ \theta_t) > 0, \theta_t^{-1}(A)] = P. [\tau > t, \theta_t^{-1}(A)] \\ &= P. [\tau > t, A], \end{aligned}$$

il en résulte clairement que  $u$  est excessive, et dans  $\mathcal{E}_1$  puisque elle est bornée.

Considérons maintenant la fonction  $x \rightarrow P_x[\tau = \infty, A]$  et appelons-la  $\nu$ . On a :

$$\begin{aligned} P_t \nu &= P. [(\tau - t)^+ = \infty, \theta_t^{-1}(A)] \\ &= P. [(\tau - t)^+ = \infty, (\tau > t); \theta_t^{-1}(A)] \\ &= P. [(\tau - t)^+ = \infty; (\tau > t); A] = P. [\tau = \infty; A]. \end{aligned}$$

La fonction  $\nu$  est donc invariante bornée, il est alors facile de voir qu'elle est harmonique, on a donc (Théorème 3.6.)  $\nu = 0$  et le noyau  $\varphi$  est égal au noyau  $\varphi_w$  associé à la

fonction  $\varpi : x \rightarrow P_x[0 < \tau < \infty, A]$ . Pour montrer le résultat annoncé il suffit de montrer les deux points suivants

- i)  $\varphi(\cdot, E) = \varpi$
- ii)  $P_G \varphi 1_G = \varphi 1_G$  quel que soit l'ouvert  $G$  de  $E$ .

Le point i) est bien clair. Montrons maintenant le point ii). Formons :

$$P_G \varphi 1_G = E. [(T_G < \zeta) E_{X_{T_G}}(0 < \tau < \infty; X_{T_G} \in G; A)] \\ = E. [(T_G < \zeta) 0 < \tau \circ \theta_{T_G} < \infty; X_{T_G} \circ \theta_{T_G} \in G; \theta_{T_G}^{-1}(A)]$$

Posons  $A' = A \cap [X_{T_G} \in G]$ ,  $A' \in \mathcal{F}_0$  et :

$$P_G \varphi 1_G = E. [T_G < \zeta; 0 < \tau \circ \theta_{T_G} < \infty; \theta_{T_G}^{-1}(A')] \\ = E. [T_G < \zeta; T_G < \tau < \infty; A']$$

Mais  $G$  étant ouvert

$$[X_{T_G} \in G] \cap [0 < \tau < \infty] = [X_{T_G} \in G; T_G < \tau < \infty; T_G < \zeta].$$

On a donc  $P_G \varphi 1_G = \varphi 1_G$ . C.Q.F.D.

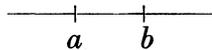
COROLLAIRES. — a) Soit  $A$  un borélien relativement compact. Le noyau potentiel associé à la fonction excessive  $P_A 1$  est donné par la formule :

$$\varphi_{P_A 1}(x, \Gamma) = P_x [T_A < \infty; X_{\tau_A}^- \in \Gamma]$$

où  $\tau_A$  désigne le temps de retour dernier temps de passage en  $A$ .

Cette formule est une application de la proposition précédente, en remarquant que  $[0 < \tau_A < \infty] = (T_A < \infty)$  si  $A$  est relativement compact compte tenu de l'hypothèse de transience faite sur le processus. Si  $A$  n'est pas relativement compact il faut alors faire intervenir la perte de masse due aux trajectoires récurrent dans  $A$ .

Cette interprétation de noyau associé à la fonction  $P_A 1$  permet de construire un contre exemple : il n'est pas vrai que si  $A$  est borélien relativement compact le noyau  $\varphi_{P_A u}$  associé à la réduite  $P_A u$  d'une fonction excessive  $u$  de  $\mathcal{E}_0$  sur  $A$ , soit portée par  $\bar{A}$ .



Considérons le processus de Hunt que nous pouvons « décrire » de la façon suivante. C'est une translation à droite sur

$\mathbf{R}$ , excepté si l'on part de  $a$  où l'on attend en  $a$  un temps exponentiel pour sauter en un point  $b$ .

Considérons la fonction excessive

$$x \rightarrow P_x[T_{\{b\}} < \infty] = 1_{]-\infty, b[}$$

Le noyau associé, donné par la formule :

$$\varphi(x, \Gamma) = P_x[T_{\{b\}} < \infty; X_{\tau_{\{b\}}^-} \in \Gamma)$$

est porté par  $a$  et non pas par  $b$ , si  $x$  est inférieur ou égal à  $a$ .

b) Si  $u$  est un potentiel de  $\mathcal{E}_0$  et  $A$  un borélien de  $E$ , le noyau potentiel associé à  $P_A u$  est donné par la formule :

$$\varphi_{P_A u}(x, \Gamma) = u(x)P_x^u[X_{\tau_A} - \in \Gamma; T_A < \infty] \quad \text{si } u(x) < \infty$$

c) Si  $A \in \hat{\mathcal{F}}_t$ , la fonction  $x \rightarrow P_x[\tau > t; A]$  est excessive et  $a$  pour noyau associé

$$\varphi(x, \Gamma) = P_x[t < \tau < \infty; A; X_{(\tau-t)} - \in \Gamma].$$

Le c) résulte de la proposition 4.5. appliquée au temps de retour  $(\tau - t)^+$ .

**4.6. PROPOSITION.** — Soit  $u$  une fonction purement excessive de  $\mathcal{E}_0$ ; on a  $\varphi_{P_t u}(x, \Gamma) = u(x)P_x^u[X_{(\zeta-t)} - \in \Gamma; (\zeta > t)]$  si  $u(x) < \infty$ .

*Démonstration.* — Montrons d'abord que le membre de droite a un sens. Cela résulte du fait que si  $x$  appartient à  $E_u$ , on a :

$$P_x^u[\zeta < \infty] = \lim_{p \rightarrow 0} [1 - pU_p^u 1] = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{u - pU_p u}{u} = 1.$$

Si  $x$  n'est pas dans  $E_u$  on a aussi  $P_x^u[\zeta < \infty] = 1$ .

On montre alors le résultat en appliquant la même méthode que pour montrer la proposition 4.4.

**COROLLAIRE.** — Quel que soit  $\Gamma$  borélien de  $E$  la fonction de  $E \times \mathbf{R}_+ - \bar{\mathbf{R}}_+$  définie par  $(t, x) \rightarrow \varphi_{P_t u}(x, \Gamma)$  est bimesurable.

Soit tout d'abord  $f$  continue bornée. La fonction  $\varphi_{P_t u} f(x) = u(x)E_u^x[f(X_{(\zeta-t)} -); \zeta > t]$  est excessive en  $x$ , et continue à droite en  $t$  chaque fois que  $x$  est dans  $[u < \infty]$ .

La fonction  $(t, x) \rightarrow \varphi_{P_t u} f(x)$  est donc une application bimesurable de  $[u < \infty] \times \mathbf{R}_+ \rightarrow \mathbf{R}_+$ .

L'ensemble des fonctions bornées ayant cette propriété est d'autre part un espace vectoriel stable pour le passage à la limite croissante; d'après un lemme classique il contient alors toutes les fonctions boréliennes bornées. On vient donc de montrer que quel que soit  $\Gamma$  borélien  $(t, x) \rightarrow \varphi_{P_t u}(x, \Gamma)$  est mesurable de  $[u < \infty] \times \mathbf{R}_+ \rightarrow \mathbf{R}_+$ . Posons alors

$$\begin{aligned} \psi(t, x) &= \infty & \text{si} & \quad u(x) = \infty, \\ \psi(t, x) &= \Phi_{P_t u}(x, \Gamma) & \text{si} & \quad u(x) < \infty, \end{aligned}$$

$\psi$  est mesurable de  $E \times \mathbf{R}_+ \rightarrow \overline{\mathbf{R}}_+$ , et il en est de même de

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \uparrow p U^p \psi(t, \cdot)(x) = \varphi_{P_t u}(x, \Gamma).$$

### 5. Représentation des potentiels sous l'hypothèse de dualité.

Dans tout ce paragraphe nous supposerons qu'il existe deux processus standard  $X_t$  et  $\hat{X}_t$  en dualité qui vérifient les hypothèses du paragraphe 1. On notera  $g_p(x, y)$  la densité potentiel,  $m$  la mesure de base. Notre but est ici d'établir un résultat analogue à celui de Hunt [3] selon lequel tout potentiel admet une représentation sous forme d'un potentiel de mesure, ceci en supprimant l'hypothèse, essentielle dans les démonstrations de Hunt puis de Kunita et Watanabé [5], que la co-résolvante  $\hat{U}_p$  applique les fonctions boréliennes bornées dans les fonctions continues. Malheureusement nous ne démontrons pas complètement ce résultat; nous montrons simplement que si  $u$  est un potentiel purement excessif, alors  $P_t u$  est un potentiel de mesure quel que soit  $t > 0$ .

**5.1. PROPOSITION.** — *Les fonctions  $x \rightarrow g(x, y)$  [resp.  $y \rightarrow g(x, y)$ ] sont dans  $\mathcal{E}_0$  (resp. dans  $\hat{\mathcal{E}}_0$ ); de plus  $P_G g(\cdot, y)(x) = g(x, y)$  quel que soit  $y$  dans  $G$ , chaque fois que  $G \in \mathcal{C}_y$ .*

*Démonstration.* — On a quel que soit le compact  $K$  de  $E$ , et quel que soit  $y$  de  $E$ ,  $\hat{G}1_K(y) = \int_K g(x, y) m(dx) < \infty$ .

Il en résulte que quel que soit  $y$  les fonctions  $x \rightarrow g(x, y)$  sont presque sûrement finies. Soient d'autre part  $H$  et  $H'$  deux ouverts relativement compacts de fermetures disjointes, on a :

$$\lim_n (\hat{P}_H \hat{P}_{H'})^n \hat{G}1_K = 0,$$

d'où l'on tire

$$\forall y \lim_{n \rightarrow \infty} (\hat{P}_H \hat{P}_{H'})^n g(x, \cdot)(y) = 0 \quad \text{pour } m\text{-presque tout } x,$$

soit encore d'après la formule de dualité,

$$\forall y \lim_{n \rightarrow \infty} (P_H P_{H'})^n g(\cdot, y)(x) = 0$$

pour  $m$ -presque tout  $x$ .

Quel que soit  $y$  la fonction  $g(\cdot, y)$  est donc dans  $\mathcal{E}_0$ , d'où le résultat. La dernière assertion résulte immédiatement de la formule de dualité.

**5.2. PROPOSITION.** — Soit  $\lambda$  une mesure positive  $\sigma$ -finie telle que son potentiel  $G\lambda(x) = \int g(x, y)\lambda(dy)$  soit presque-sûrement fini. Alors  $G\lambda \in \mathcal{E}_0$  et  $\varphi_{G\lambda}(x, \Gamma) = \int_{\Gamma} g(x, y)\lambda(dy)$  quel que soit  $\Gamma$  borélien de  $E$ .

Soit  $N = \{G\lambda = \infty\}$ ; pour tout  $x$  de  $N^c$  on a d'après les théorèmes de Fubini et Lebesgue, si  $H$  et  $H'$  sont deux ouverts relativement compacts de fermetures disjointes

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} (P_H P_{H'})^n G\lambda(x) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int (P_H P_{H'})^n g(\cdot, y)(x)\lambda(dy) \\ &= \int \psi(x, y)\lambda(dy) \end{aligned}$$

en appelant  $\psi$  la fonction définie par

$$\psi(x, y) = \lim_{n \rightarrow \infty} (P_H P_{H'})^n g(\cdot, y)(x).$$

D'après la proposition précédente, on a alors :

$$\begin{aligned} \int m(dx) \lim_{n \rightarrow \infty} (P_H P_{H'})^n (G\lambda)(x) &= \int m(dx) \int \lambda(dy) \psi(x, y) \\ &= \int \lambda(dy) \int m(dx) \psi(x, y) = 0 \end{aligned}$$

ce qui montre que  $G\lambda$  est dans  $\mathcal{E}_0$ . La formule nous donnant le noyau potentiel associé à  $G\lambda$  a été déjà vue en 3.4. b).

**5.3. THÉORÈME.** — Soit  $u$  un potentiel purement excessif de  $\mathcal{E}_0$ . Pour chaque  $t$  positif il existe une mesure  $\lambda_t$  positive  $\sigma$ -finie, unique, telle  $P_t u(x) = \int g(x, y)\lambda_t(dy)$ .

*Démonstration.* — Effectuons tout d'abord une transformation sur le processus  $\hat{X}$ . Il existe une fonction  $g$  borélienne vérifiant les propriétés :

- i)  $0 < g \leq 1$ ,    ii)  $0 < g\hat{U} \leq 1$ ,
- iii)  $\int m(dx)u(x)g(x) \leq 1$ .

Le processus  $\hat{X}$  ayant été supposé transient, il existe en effet une suite  $\Gamma_n$  d'ensembles relativement compacts de réunion  $E$  telle que  $1_{\Gamma_n}\hat{U} \leq M_{\Gamma_n}$ . Nous poserons  $g' = \sum_{n \geq 1} \frac{1_{\Gamma_n}}{2^n M_{\Gamma_n}}$ , et  $g'$  vérifie les propriétés i) et ii);  $u$  étant presque sûrement finie nous pouvons choisir une fonction  $g''$  vérifiant i) et iii);  $g = g' \wedge g''$  répond alors à la question. Nous considérerons le processus  $\hat{X}' = \hat{X}^{g\hat{U}}$  en dualité avec  $X$  par rapport à la mesure  $m' = m.g\hat{U}$ , la densité potentiel devenant  $g'(x, y) = \frac{g(x, y)}{g\hat{U}(y)}$ . Il résulte de la proposition 4.3.

que le processus  $\hat{X}'$  vérifie encore les hypothèses du paragraphe 1. Remarquons que la mesure  $\nu = mg$  satisfait à la relation  $\nu\hat{U} = m'$ . Montrons alors le principe d'unicité des masses. Si  $P_t u$  s'écrit

$$P_t u(x) = \int g'(x, y)\lambda'_t(dy)$$

on aura :

$$\varphi_{P_t u}(x, \Gamma) = \int_{\Gamma} g'(x, y)\lambda'_t(dy),$$

d'où l'on tire en intégrant les deux membres par rapport à la mesure  $\nu \lambda'_t = \nu\varphi_{P_t u}$ , ce qui prouve l'unicité de  $\lambda'_t$ .

Montrons maintenant l'existence de  $\lambda_t$ , où ce qui revient au même de  $\lambda'_t$ . Posons  $\lambda'_t = \nu\varphi_{P_t u}$  et montrons que :

$$P_t u(x) = \int g'(x, y)\lambda'_t(dy) = \int \nu(dz) \int \varphi_{P_t u}(z, dy)g'(x, y)$$

(Remarquons que d'après iii)  $\lambda'_t$  est de masse inférieure ou égale à 1).

Soit  $\mathcal{A}$  une famille dénombrable d'ensemble engendrant la  $\sigma$ -algèbre  $\mathcal{B}$ . Il suffit de montrer que :

$$(*) \quad \forall \Gamma' \in \mathcal{A} \int_{\Gamma'} P_t u(x) m'(dx) = \int \nu(dz) [\varphi_{P_t u} 1_{\Gamma'} \hat{U}](z)$$

Intégrons les deux membres par rapport à la mesure  $e^{-pt} dt$ , il vient formellement :

$$(*.*) \quad \int_{\Gamma'} U_p u dm' = \int \nu(dz) \int \varphi_{U_p u}(z, dy) (1_{\Gamma'} \hat{U})(y)$$

ce qui se vérifie sans difficultés : on connaît en effet (3.4.) le noyau associé à  $U_p u = U(u - pU_p u)$  : on a

$$\varphi_{U_p u} f = U[(u - pU_p u)f]$$

quelle que soit  $f$  borélienne positive. Il reste à légitimer le passage de l'équation (\*) à (\*.\*), tout revient à montrer que quel que soit  $\Gamma$  borélien

$$\int e^{-pt} dt \varphi_{P_t u}(x, \Gamma) = \varphi_{U_p u}(x, \Gamma).$$

On remarque tout d'abord que l'intégrale du premier membre a un sens en vertu du corollaire de la proposition 4.6. Appelons alors  $\psi$  le noyau défini par la formule :

$$\psi(x, \Gamma) = \int e^{-pt} dt \varphi_{P_t u}(x, \Gamma).$$

On a :

$$\psi(x, E) = \int e^{-pt} dt \varphi_{P_t u}(x, E) = \int e^{-pt} P_t u(x) dt = U_p u$$

puisque  $P_t u$  est un potentiel, et d'autre part, si  $G$  est un ouvert  $P_G \psi 1_G = \psi 1_G$ , ce qui suffit à montrer le résultat. Terminons alors la démonstration du théorème 5.3. Il existe un ensemble  $N_u$  de mesure de Lebesgue nulle tel que l'on ait, quel que soit  $t$  dans  $N_u^c$  et  $\Gamma'$  dans  $\mathcal{A}$

$$\int_{\Gamma'} P_t u dm' = \int d\nu \varphi_{P_t u}(1_{\Gamma'} \hat{U}).$$

Il ne reste plus qu'à remarquer que si une fonction  $\nu$  est un potentiel de mesure  $\lambda$ , la fonction  $P_s \nu$  est alors le potentiel de la mesure  $\lambda \hat{P}_s$ , en vertu de la relation

$$P_s g(\cdot, y)(x) = g(x, \cdot) \hat{P}_s(y).$$

*Remarques.* — a) Nous verrons dans le paragraphe suivant que le processus  $(X_t)$  retourné a un temps de retour est markovien. Suivant Kunita et Watanabé [6] si  $u$  est une fonction excessive et  $\mu$  une mesure, notons  $P_\mu^u$  la probabilité sur  $\Omega$   $P_\mu^u = \int \mu(dx) u(x) P_x^u$ , et  $P_\mu^\gamma$  la probabilité  $P_\mu^{g(\cdot, \gamma)}$ ; considérons alors l'égalité  $P_s g(\cdot, \gamma)(x) = g(x, \cdot) \hat{P}_s(\gamma)$ , et identifions les noyaux potentiels correspondant aux fonctions excessives des deux membres.

Le noyau correspondant au membre de gauche est, d'après la proposition 4.6. :

$$g(\cdot, \gamma) P_x^\gamma [X_{(\zeta-s)} - \in \Gamma; \zeta > s]$$

sur l'ensemble  $[g(\cdot, \gamma) < \infty]$ ; et le noyau correspondant au membre de droite est  $[g(x, \cdot) 1_\Gamma(\cdot)] \hat{P}_s(\gamma)$ . On a donc en intégrant par rapport à la mesure  $\nu$  ne chargeant pas l'ensemble polaire  $[g(\cdot, \gamma) < \infty]$ ,

$$P_\gamma^\nu[(\zeta > s); X_{(\zeta-s)} - \in \Gamma] = \hat{P}_s 1_\Gamma(\gamma)$$

quel que soit  $\Gamma$  borélien. Cette relation, démontrée par Kunita et Watanabé sous des hypothèses plus fortes, permet de voir les liens entre le processus dual et un processus retourné. On peut de la même manière, en considérant un borélien  $A$ , son temps d'atteinte  $T_A$ , et le dernier temps de passage en  $A$   $\tau_A$  montrer la relation :

$$P_\gamma^\nu[X_{\tau_A} \in \Gamma] = \hat{P}_{\tau_A} 1_\Gamma(\gamma),$$

qui exprime l'égalité des noyaux potentiels des fonctions figurant dans la formule de dualité

$$P_A g(\cdot, \gamma)(x) = g(x, \cdot) \hat{P}_A(\gamma).$$

b) Le problème se pose de savoir si  $u$  (et non plus seulement  $P_t u$ ) est un potentiel de mesure. On peut remarquer que les mesures  $\lambda_t$  forment une loi d'entrée pour le semi-groupe  $(\hat{P}_t)$ . Le problème posé est alors équivalent à celui-ci : appelant  $\lambda_0$  la limite (qui existe) des mesures  $\lambda_t$  à quelles conditions a-t-on  $\lambda_t = \lambda_0 \hat{P}_t$ ? Ce problème est posé à propos du retournement du temps par Meyer dans [10].

## 6. Le retournement du temps.

**6.1.** Nous supposons dans ce paragraphe vérifiées les hypothèses (DPR) énoncées en 3.4. b); en outre nous supposons que, quel que soit le compact  $K$  de  $E$ , la fonction

$$1_K \hat{G} = \int_K g(x, \cdot) m(dx)$$

est bornée, et enfin que si  $h$  est strictement positive  $h \cdot \hat{G}$  est strictement positive. On peut alors procéder de la même manière qu'au théorème 5.3. et l'on a le résultat suivant.

**PROPOSITION.** — Soit  $u$  un potentiel purement excessif de  $\mathcal{E}_0$ ; il existe un ensemble  $N_u$  de  $\mathbf{R}_+$ , de mesure de Lebesgue nulle, tel que, quel que soit  $t > 0$  n'appartenant pas à  $N_u$ ,  $P_t u$  soit le potentiel d'une mesure  $\lambda_t$  positive,  $\sigma$ -finie, unique sur  $E$ .

**6.2.** Soit  $\tau$  un temps de retour, et  $A$  un événement de la  $\sigma$ -algèbre  $\hat{\mathcal{F}}_s$  associée à  $\tau$ . Nous appellerons  $e_s^A$  la fonction excessive  $x \rightarrow P_x[s < \tau < \infty; A]$ .

**PROPOSITION.** — On a la relation :

$$P_x[X_{(\tau-t-s)} - \in \Gamma; A; t + s < \tau < \infty] \\ = e_s^A(x) P_{x_s}^{e_s^A}[X_{(\zeta-t)} - \in \Gamma; \zeta > t]$$

quel que soit  $t > 0$ ,  $\Gamma \in \mathcal{B}$ .

*Démonstration.* — Calculons  $P_t e_s$ ; il vient :

$$P_t e_s(x) = P_x[s < \tau \circ \theta_\tau < \infty; \theta_t^{-1}(A)] = P_x[s + t < \tau < \infty; A]$$

Il en résulte que  $e_s$  est purement excessive. On a vu (Proposition 4.5., corollaire c) qu'on avait alors :

$$\varphi_{e_s}(x, \Gamma) = P_x[s < \tau < \infty; A; X_{(\tau-s)} - \in \Gamma]$$

Le premier membre de l'égalité figurant dans l'énoncé de la proposition n'est autre que  $\varphi_{e_{t+s}}(x, \Gamma)$ ; comme  $e_{t+s} = P_t e_s$  une application de la proposition 4.6. donne alors le résultat.

**6.3.** Soit  $\tau$  un temps de retour; nous noterons  $\tau_s$  le temps de retour défini par la relation  $\tau_s = (\tau - s)^+$ .

Pour tout  $s > 0$ , et quel que soit le compact  $K$  de  $E$ ,

on a :

$$P_{K^c}P.[0 < \tau_s < \infty] = P.[T_{K^c} < \tau_s < \infty] = P.[T_{K^c} < \tau_s < \zeta];$$

il en résulte que la fonction  $P.[0 < \tau_s < \infty]$  est un potentiel quel que soit  $s > 0$ . Le théorème qui suit est alors une sorte de réciproque au théorème 5.3.

**THÉORÈME.** — *Supposons que pour chaque potentiel purement excessif  $u$  et pour chaque  $t > 0$ , la fonction  $P_t u$  soit le potentiel d'une mesure  $\lambda_t$ ; Définissons comme d'habitude le processus  $\hat{X}_t$  retourné au temps  $\tau$  par les formules  $\hat{X}_t = X_{(\tau-t)^-}$  si  $t < \tau < \infty$   $\hat{X}_t = \delta$  si  $\tau = \infty$  où  $\tau \leq t$ ; alors si l'on a muni le processus  $X_t$  de la loi initiale  $\nu$ ,  $(\hat{X}_t)$  est markovien, homogène par rapport aux tribus  $\hat{\mathcal{F}}_t$ , et admet comme probabilité de transition le noyau*

$$\hat{P}_t(y, \Gamma) = \int \nu(dx) g(x, y) E_x^{g(\cdot, \cdot)}[X_{(\zeta-t)} - \in \Gamma; \zeta > t].$$

*Démonstration.* — Montrons que  $P_\nu$ -presque sûrement, et quels que soient  $\Gamma \in \mathcal{B}$  et  $s > 0$ , on a

$$P_\nu[\hat{X}_{t+s} \in \Gamma | \hat{\mathcal{F}}_s] = \hat{P}_t(\hat{X}_s, \Gamma).$$

Soit donc  $A$  un événement de  $\hat{\mathcal{F}}_s$ , nous avons à montrer que :

$$(*) \quad P_\nu[\hat{X}_{t+s} \in \Gamma, A] = E_\nu[A; \hat{P}_t(\hat{X}_s, \Gamma)]$$

Le membre de gauche de l'égalité (\*) s'écrit, en vertu de la proposition 6.2.

$$\int \nu(dx) e_s^\Lambda(x) P_x^{e_s^\Lambda}[X_{(\zeta-t)} - \in \Gamma; (\zeta > t)]$$

Transformons alors le second membre de (\*). Appelons  $\lambda_s^\Lambda$  la mesure  $\lambda_s^\Lambda = \nu \varphi_{e_s^\Lambda}$ . Le second membre de (\*) s'écrit alors :

$$\begin{aligned} & \int \lambda_s^\Lambda(dy) \hat{P}_t(y, \Gamma) \\ &= \int \lambda_s^\Lambda(dy) \int \nu(dx) g(x, y) P_x^{g(\cdot, \cdot)}[X_{(\zeta-t)} - \in \Gamma, \zeta > t] \\ &= \int \lambda_s^\Lambda(dy) \int \nu(dx) \varphi_{P_t g(\cdot, y)}[x, \Gamma] \\ &= \int \nu(dx) \varphi_{P_t e_s^\Lambda}(x, \Gamma) \\ &= \int \nu(dx) e_s^\Lambda(x) P_x^{e_s^\Lambda}[X_{(\zeta-t)} - \in \Gamma; \zeta > t]. \end{aligned}$$

C.Q.F.D.

*Remarque.* — Si l'on suppose que tout potentiel  $u$  (et non pas seulement  $P_t u$  pour  $t > 0$ ) est un potentiel de mesure alors pour tout temps de retour  $\tau$  tel que  $X_{\tau-}$  existe le processus  $(\hat{X}_t)_{t \geq 0}$  retourné au temps  $\tau$  est markovien (et même fortement markovien). C'est notamment le cas sous les hypothèses de Kunita et Watanabé [5], [10].

## BIBLIOGRAPHIE

- [1] R. M. BLUMENTHAL et R. K. GETTOOR, Markov processes and potential theory. Academic Press 1968.
- [2] P. CARTIER, P. A. MEYER et M. WEIL, Le retournement du temps: compléments à l'exposé de M. Weil. *Séminaire de Probabilités II, Lecture Notes in Math.*, Springer Verlag, 22-33.
- [3] G. A. HUNT, Markov Processes and potentials. *Illinois J. Math.*, t. 2, (1958), 151-213.
- [4] H. KUNITA et T. WATANABE, Notes on transformation of Markov processes connected with multiplicative functionals. *Mem. Fac. Sci. Kyushu Un., Ser. A*, vol. 17 (1963), 181-191.
- [5] H. KUNITA et T. WATANABE, Markov processes and Martin Boundaries. *Illinois J. Math.*, 9, (1965), 485-526.
- [6] H. KUNITA et T. WATANABE, On certain reversed processes and their applications to potential theory and boundary theory. *J. of Math. and Mech.*, vol. 15, n° 3, (1966), 393-434.
- [7] P. A. MEYER, Fonctionnelles additives et multiplicatives de Markov. *Ann. Inst. Fourier*, t. 12, (1962), 125-230.
- [8] P. A. MEYER, Probabilités et potentiels. Hermann (1966).
- [9] P. A. MEYER, Processus de Markov. *Lecture Notes in Math.*, Springer Verlag, (1967).
- [10] P. A. MEYER, Processus de Markov: la frontière de Martin. *Lecture Notes in Math.*, Springer Verlag (1968).

Manuscrit reçu le 2 juin 1969.

Jacques AZEMA,  
 Institut Henri Poincaré,  
 11, rue Pierre et Marie Curie,  
 Paris, 5<sup>e</sup>.