

INTERPOLATION ENTRE DES ESPACES
LOCALEMENT CONVEXES DÉFINIS
A L'AIDE DE SEMI-GROUPES;
CAS DES ESPACES DE GEVREY

par Charles GOULAOUIC

1. Introduction.

On caractérise des espaces d'interpolation entre espaces vectoriels topologiques constitués par les éléments $a \in D(\Lambda^\infty)$ tels que la suite $(\|\Lambda^k a\|_E)_{k \in \mathbf{N}}$ vérifie certaine condition de croissance, Λ étant un générateur infinitésimal d'un *groupe* opérant dans un espace de Banach E . On montre que l'on ne peut pas obtenir les résultats analogues lorsque Λ est seulement générateur infinitésimal d'un semi-groupe, et en particulier on en déduit que les foncteurs d'interpolation qui donnent les espaces de Gevrey comme espaces d'interpolation entre l'espace des fonctions indéfiniment différentiables et l'espace des fonctions analytiques sur une variété analytique compacte sans bord, ne donnent pas les espaces analogues dans le cas d'une variété à bord.

On se donne : un espace de Banach E , un semi-groupe $G(t)$ fortement continu opérant dans E , de générateur infinitésimal Λ , une suite $(M_k)_{k \in \mathbf{N}}$ de réels strictement positifs. On note, pour tout $L > 0$,

$$D(\Lambda, M_k, L) = \left\{ f \in D(\Lambda^\infty); \sup_{k \in \mathbf{N}} \frac{\|\Lambda^k f\|_E}{M_k L^k} < \infty \right\}$$

avec $D(\Lambda^\infty) = \bigcap_{k \in \mathbf{N}} D(\Lambda^k)$.

L'espace $D(\Lambda, M_k, L)$ est un espace de Banach pour la norme

$$\|f\|_{D(\Lambda, M_k, L)} = \sup_{k \in \mathbb{N}} \frac{\|\Lambda^k f\|_E}{M_k L^k}.$$

On note $D(\Lambda, M_k) = \lim_{L \rightarrow \infty} D(\Lambda, M_k, L)$, c'est-à-dire l'espace $\bigcup_{L > 0} D(\Lambda, M_k, L)$ muni de la topologie limite inductive.

Pour plus de clarté, on se limite aux cas où M_k est de la forme $sk!$ avec $s \geq 1$. Par exemple, lorsque Λ est un opérateur différentiel convenable dans $L^2(\Gamma)$ avec Γ une variété analytique compacte, on obtient ainsi les espaces de fonctions analytiques et les espaces de Gevrey sur Γ .

On construit des foncteurs d'interpolation Φ tels que :

$$\Phi[D(\Lambda, k!), D(\Lambda, s_1 k!)] = D(\Lambda, sk!)$$

avec s compris entre s_0 et s_1 , ou tels que

$$\Phi[D(\Lambda^\infty), D(\Lambda, s_1 k!)] = D(\Lambda, sk!)$$

avec $s \geq s_1$, lorsque N est générateur infinitésimal d'un groupe. Des résultats de ce type sont obtenus dans [4] lorsque Λ est un opérateur non borné auto-adjoint dans un espace de Hilbert. Ici, on montre aussi, à l'aide d'un contre-exemple, que la généralisation au cas des semi-groupes n'est pas possible; on en déduit un résultat (négatif) sur l'interpolation des espaces de Gevrey sur une variété compacte à bord. Nous signalons aussi, à ce propos (remarque 3), un autre contre-exemple dont l'idée nous a été suggérée par L. Boutet de Monvel.

2. Une caractérisation des espaces $D(\Lambda, M_k)$ lorsque Λ est générateur infinitésimal d'un groupe.

On note T le tore $\mathbf{R}/2\pi\mathbf{Z}$ et $\mathcal{C}(T, E)$ (resp. $\mathcal{E}(T, E)$) l'espace des fonctions continues (resp. indéfiniment différentiables) de T dans E , et :

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{M_k} &= \mathcal{E}_{M_k}(T, E) \\ &= \left\{ f \in \mathcal{E}(T, E); \exists L > 0 \text{ avec } \sup_{k \in \mathbb{N}} \frac{\|f^{(k)}\|_{L^q(T, E)}}{L^k M_k} < \infty \right\}. \end{aligned}$$

On définit une application P de E dans $\mathcal{C}(T, E)$ par :

$$(Pa)(t) = G(\sin t)a, \quad \text{pour tout } a \in E \text{ et } t \in T;$$

et une application R de $\mathcal{C}(T, E)$ dans lui-même par :

$$Rf = f - Pf(0) \quad \text{pour tout } f \in \mathcal{C}(T, E).$$

On a immédiatement :

PROPOSITION 1. — *L'application P est un isomorphisme de E sur $\{f \in \mathcal{C}(T, E); Rf = 0\}$ et la restriction de P à $D(\Lambda^\infty) = \bigcap_{k \in \mathbb{N}} D(\Lambda^k)$, notée aussi P, est un isomorphisme de $D(\Lambda^\infty)$ sur $\{f \in \mathcal{E}(T, E); Rf = 0\}$,
De même :*

PROPOSITION 2. — *Soit $M_k = (sk)!$ avec $s \geq 1$. La restriction de P à $D(\Lambda, M_k)$ notée aussi P, est un isomorphisme de $D(\Lambda, M_k)$ sur $\{f \in \mathcal{E}_{M_k}; Rf = 0\}$.*

Démonstration. — Elle repose simplement sur les majorations des dérivées de fonctions composées. On note $\alpha = Pa$.

1° On a de façon générale (cf. [2]) :

$$D^n(g \circ \varphi) = \sum_{p=1}^n \frac{1}{p!} g^{(p)} \circ \varphi \cdot \left[\sum_{q=1}^p \binom{p}{q} (-\varphi)^{p-q} D^n(\varphi^q) \right],$$

soit, ici avec $g(u) = G(u)a$, où $a \in D(\Lambda^\infty)$ et $\varphi(t) = \sin t$,

$$D^n \alpha(t) = \sum_{p=1}^n \frac{1}{p!} G(\varphi(t)) \Lambda^p a \cdot A_p(t),$$

avec

$$A_p(t) = \sum_{q=1}^p \binom{p}{q} (-\varphi(t))^{p-q} D^n(\varphi^q(t)).$$

On vérifie que le choix de φ implique :

$$\sup_{t \in T} |A_p(t)| \leq 2^p p^n.$$

D'où :

$$\|D^n \alpha\|_{L^n(T, E)} \leq \sum_{p=1}^n \frac{1}{p!} p^n 2^p M \|\Lambda^p a\|_E \leq M 2^n \sum_{p=1}^n \frac{p^n}{p!} \|\Lambda^p a\|_E$$

avec $M = \sqrt{2\pi} \sup_{|u| \leq 1} \|G(u)\|_{\mathcal{L}(E, E)}$.

2° Supposons maintenant que a appartienne à $D(\Lambda, sk!)$; alors la fonction $\alpha = (G \circ \varphi)a$ appartient à

$$\{f \in \mathcal{E}_{sk!}(\mathbb{T}, \mathbb{E}); \quad Rf = 0\};$$

en effet :

Par hypothèse, il existe deux constantes C et L strictement positives telles que :

$$\|\Lambda^p \alpha\|_{\mathbb{E}} \leq CL^p (sp)! \quad \text{pour tout } p \in \mathbb{N}.$$

Donc :

$$\begin{aligned} \|D^n \alpha\|_{L^p(\mathbb{T}, \mathbb{E})} &\leq CM 2^n \sum_{p=1}^n \frac{p^n}{p!} L^p \cdot (sp)! \\ &\leq CM(2L)^n \sum_{p=1}^n \frac{p^n (sp)!}{p!}. \end{aligned}$$

Donc, il existe des constantes C_1, L_1 strictement positives telles que :

$$\|D^n \alpha\|_{L^p(\mathbb{T}, \mathbb{E})} \leq C_1 L_1^n (sn)!, \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N},$$

donc $\alpha \in \mathcal{E}(\Lambda, sk!)$;

On a en fait montré que l'application P , restreinte à $D(\Lambda, M_k, L)$ est continue de cet espace dans $\mathcal{E}_{sk!}(\mathbb{T}, \mathbb{E})$; de plus $RP\alpha = 0$. Il en résulte que P est continue de $D(\Lambda, M_k)$ dans $\{f \in \mathcal{E}_{sk!}(\mathbb{T}, \mathbb{E}); Rf = 0\}$.

3° Montrons maintenant que $P(D(\Lambda, M_k))$ est $\{f \in \mathcal{E}_{sk!}; Rf = 0\}$; on remarque que l'on a, pour tout $t \in [-1, 1]$, $G(t)a = \alpha$ (Arcsint), et pour tout

$$a \in D(\Lambda^n), \quad \Lambda^n a = D^n(\alpha(\text{Arcsint})) (0).$$

Soit $\alpha \in \mathcal{E}_{sk!}$, telle que $R\alpha = 0$; on note $a = \alpha(0)$. Il suffit de montrer que l'on a $a \in D(\Lambda, sk!)$.

$$\Lambda^n a = \sum_{p=1}^n \frac{1}{p!} \alpha^{(p)}(0) \cdot D^n((\text{Arcsint})^p)_{t=0}.$$

Il existe des constantes $M, r > 0$ telles que :

$$\|\Lambda^n a\| \leq Mr^n \sum_{p=1}^n \frac{(n+p)!}{(p!)^2} \|\alpha^{(p)}(0)\|.$$

Et puisque $\alpha \in \mathcal{E}_{sk!}$, on peut trouver des constantes $C, L > 0$ telles que l'on ait, pour $p \in \mathbb{N}$, $\|\alpha^{(p)}(0)\| \leq C(sp)! L^p$.

D'où il résulte que l'on peut trouver des constantes $C_1, L_1 > 0$ telles que l'on ait, pour tout $n \in \mathbf{N}$:

$$\|\Lambda^n a\| \leq C_1 L_1^n \cdot (sn)! \quad (\text{c.q.f.d.})$$

3. Interpolation entre espaces $D(\Lambda, M_k)$.

Soient :

$$1 \leq s_0 \leq s_1 < \infty ; \\ M_k = s_0 k! \quad \text{et} \quad N_k = s_1 k!$$

On note

$$\dot{\mathcal{E}}_{M_k} = \{f \in \mathcal{E}_{M_k}(T, E); f(0) = 0\}$$

et de même $\dot{\mathcal{E}}_{N_k}$.

On vérifie que l'application R , qui à f associe $f - (G \circ \varphi)f(0)$, définit un morphisme du couple compatible $(\mathcal{E}_{M_k}, \mathcal{E}_{N_k})$ dans le couple compatible $(\dot{\mathcal{E}}_{M_k}, \dot{\mathcal{E}}_{N_k})$.

Il existe un morphisme S de $(\dot{\mathcal{E}}_{M_k}, \dot{\mathcal{E}}_{N_k})$ dans $(\mathcal{E}_{M_k}, \mathcal{E}_{N_k})$ tel que $RS = \text{Id}(\dot{\mathcal{E}}_{M_k}, \dot{\mathcal{E}}_{N_k})$; il suffit de poser $Sf = f$ pour tout $f \in \dot{\mathcal{E}}_{N_k}$.

On peut alors appliquer un résultat de [1] que l'on rappelle ici :

LEMME 1. — Soient (X_0, X_1) et (Y_0, Y_1) deux couples compatibles d'espaces vectoriels topologiques et R un morphisme de (X_0, X_1) dans (Y_0, Y_1) ; on suppose qu'il existe un morphisme S de (Y_0, Y_1) dans (X_0, X_1) tel que $TS = \text{Id}_{(X_0, X_1)}$.

Alors pour tout foncteur d'interpolation $\Phi^{(1)}$, on a :

$$\Phi[X_{0R}, X_{1R}] = \Phi[X_0, X_1]_R$$

où A_R désigne $\{f \in A \subset X_0 + X_1; Rf = 0\}$, muni de la topologie induite par A .

Il en résulte donc :

THÉORÈME 1. — Quel que soit le foncteur d'interpolation $\Phi^{(1)}$, on a :

$$\Phi[P(E_{M_k}), P(E_{N_k})] = \{f \in \Phi[\mathcal{E}_{M_k}, \mathcal{E}_{N_k}]; Rf = 0\}$$

(1) Défini sur une catégorie dont les couples compatibles considérés sont des objets.

Or, on sait, par les méthodes développées dans [4], interpoler entre des espaces du type $\mathcal{E}_{M_k}(\mathbb{T}, E)$ ou $\mathcal{E}(\mathbb{T}, E)$, en utilisant le fait que le développement en séries de Fourier réalise un isomorphisme de $\mathcal{E}(\mathbb{T}, E)$ sur $\lim_{\overleftarrow{r>0}} L_{\mathbb{T}}^1$ et de $\mathcal{E}_{skl}(\mathbb{T}, E)$ sur $\lim_{\overleftarrow{r>0}} L_{e^{x^s/r}}^1$ avec

$$\begin{cases} L_{\mathbb{T}}^1 = \{a = (a_n) \in E^{\mathbb{N}}; \|a\|_{L_{\mathbb{T}}^1} = \sum_{n \in \mathbb{N}} \|a_n\| n^r < \infty\} \\ L_{e^{x^s/r}}^1 = \{a = (a_n) \in E^{\mathbb{N}}; \|a\|_{L_{e^{x^s/r}}^1} = \sum_{n \in \mathbb{N}} \|a_n\| e^{x^s/r} < \infty\}. \end{cases}$$

En particulier, on sait trouver, pour $s \geq 1$, un foncteur d'interpolation Φ_s indépendant de E , tel que

$$\Phi_s[\mathcal{E}(\mathbb{T}, E), \mathcal{E}_{kl}(\mathbb{T}, E)] = \mathcal{E}_{skl}(\mathbb{T}, E);$$

et de même, étant donné $S = (s_0, s_1, s)$ vérifiant $1 \leq s_0 \leq s \leq s_1$, on sait trouver un foncteur d'interpolation Φ_s indépendant de E , tel que :

$$\Phi_s[\mathcal{E}_{s_0kl}(\mathbb{T}, E), \mathcal{E}_{s_1kl}(\mathbb{T}, E)] = \mathcal{E}_{skl}(\mathbb{T}, E).$$

Il résulte alors du théorème 1 et des propositions 1 et 2, le résultat :

COROLLAIRE. — Soit Λ le générateur infinitésimal d'un groupe opérant dans un espace de Banach E , on a :

$$\begin{aligned} \Phi_s[D(\Lambda^\infty), D(\Lambda, k!)] &= D(\Lambda, sk!) \\ \Phi_s[D(\Lambda, s_0k!), D(\Lambda, s_1k!)] &= D(\Lambda, sk!) \end{aligned}$$

Remarque 1. — On trouve ainsi des résultats d'interpolation qui généralisent ceux de [4] (si Λ est un opérateur auto-adjoint dans un espace de Hilbert E , $i\Lambda$ est générateur d'un groupe unitaire opérant dans E).

Remarque 2. — Il est immédiat d'étendre ces résultats au cas de plusieurs générateurs infinitésimaux de groupes d'opérateurs dans un espace de Banach qui commutent entre eux.

4. Cas des semi-groupes.

On souhaiterait des résultats analogues en supposant seulement que Λ est générateur infinitésimal d'un semi-groupe. La réponse est négative.

PROPOSITION 3. — Soient $M_k = k!$; $N_k = (s_1 k)!$; $R_k = (sk)!$ avec $1 < s < s_1$.

On peut trouver un espace de Hilbert E et un semi-groupe opérant dans E de générateur infinitésimal Λ , tels que l'on ait, pour tout foncteur d'interpolation Φ :

$$\Phi[D(\Lambda, M_k), D(\Lambda, N_k)] \neq D(\Lambda, R_k).$$

Comme exemple, prenons : $E = L^2(0, \infty)$; le semi-groupe $G(t)$ défini par $G(t) f(x) = f(x - t)$; le générateur infinitésimal de ce semi-groupe est :

$$\begin{cases} D(\Lambda) = H_0^1(0, \infty) = \{f \in E; f' \in E \text{ et } f(0) = 0\} \\ \Lambda f = f' \text{ pour tout } f \in D(\Lambda). \end{cases}$$

D'abord, on montre que $D(\Lambda, M_k) = \{0\}$; en effet, $f \in D(\Lambda, k!)$ est analytique sur $[0, \infty[$ et vérifie $f^{(k)}(0) = 0$ pour tout $k \in \mathbf{N}$.

Par ailleurs, il est évident que :

$$\begin{aligned} D(\Lambda, R_k) &\neq \{0\} \\ D(\Lambda, N_k) &\neq \{0\} \\ D(\Lambda, R_k) &\neq D(\Lambda, N_k). \end{aligned}$$

Ce qui suffit à démontrer la proposition 3.

On en déduit les conséquences suivantes :

5. Interpolation des espaces de Gevrey.

Posons :

$\bar{\Omega} = [0, 1]$; E , un espace de Hilbert séparable.

$G_s(\bar{\Omega}) = \{f \in \mathcal{E}(\bar{\Omega}, E); \text{ il existe } C, L > 0 \text{ avec, pour tout } k \in \mathbf{N}, \|f^{(k)}\|_{L^{\infty}(\bar{\Omega}, E)} \leq CL^k (sk)!\}$.

On démontre le résultat :

PROPOSITION 4. — Pour $s_1 > 1$, on a, pour tout foncteur d'interpolation Φ ⁽²⁾ $\Phi_s[G_1(\bar{\Omega}), G_{s_1}(\bar{\Omega})] \neq G_s(\bar{\Omega})$.

Démonstration. — La démonstration se fait par l'absurde; on sait que l'on peut avoir

$$\Phi_s[D(\Lambda, k!), D(\Lambda, s_1 k!)] \neq D(\Lambda, sk!)$$

⁽²⁾ Voir page 273.

Il suffit donc de démontrer que l'égalité

$$\Phi_s[G_1(\bar{\Omega}), G_{s_1}(\bar{\Omega})] = G_s(\bar{\Omega})$$

implique l'égalité :

$$\Phi_s[D(\Lambda, k!), D(\Lambda, s_1 k!)] = D(\Lambda, sk!),$$

pour tout générateur infinitésimal Λ de semi-groupe.

On considère pour cela, comme au paragraphe I, l'application P de E dans $\mathcal{C}(\bar{\Omega}, E)$ définie par : $Pa(t) = G(t)a$.

On vérifie que P définit un isomorphisme de $D(\Lambda, sk!)$ sur

$$\{f \in \mathcal{E}_{sk!}(\bar{\Omega}, E); f - Gf(0) = 0\} \quad \text{pour tout } s \geq 1.$$

On en déduit, comme pour le théorème 1, que pour tout facteur d'interpolation Φ , on a :

$$\begin{aligned} P\Phi[D(\Lambda, k!), D(\Lambda, s_1 k!)] \\ = \{f \in \Phi[\mathcal{E}_{k!}(\bar{\Omega}, E), \mathcal{E}_{s_1 k!}(\bar{\Omega}, E)]; f - Gf(0) = 0\} \end{aligned}$$

ce qui achève la démonstration.

Remarque 3. — A la suite d'un entretien avec L. Boutet de Monvel, on a explicité un autre type de contre-exemple, par une méthode différente.

PROPOSITION 5. — Soit $s > 1$, et soit Φ un foncteur d'interpolation tel que :

$$\Phi[G_1(T), \mathcal{E}(T)] = G_s(T).$$

On a alors : $\Phi[G_1(I), \mathcal{E}(I)] \neq G_s(I)$ (où I désigne $[-1, 1]$).

Démonstration. — On note S l'application de $\mathcal{C}(I)$ dans $\mathcal{C}(T)$ définie par :

$$(Sf)(x) = f(\cos x).$$

On désigne par $\tilde{\mathcal{E}}(T)$ et $\tilde{G}_s(T)$ les sous-espaces fermés de $\mathcal{E}(T)$ et $G_s(T)$ constitués par les fonctions paires.

On sait que :

LEMME 3. — L'application S est un isomorphisme de $\mathcal{E}(I)$ sur $\tilde{\mathcal{E}}(T)$.

LEMME 4. — *La restriction de S à $G_1(I)$ est un isomorphisme de $G_1(I)$ sur $\tilde{G}_1(T)$.*

On démontre :

LEMME 5. — *La restriction de S à $G_s(I)$ pour $s > 1$ n'est pas un isomorphisme de $G_s(I)$ sur $\tilde{G}_s(T)$.*

On remarque d'abord que $\cos \theta$ est analytique par rapport à θ^2 et que pour θ petit, θ^2 est analytique par rapport à $1 - \cos \theta$.

Il suffit donc de trouver une fonction $f \in \mathcal{E}([0, 1])$ telle que g , définie par $g(x) = f(x^2)$, soit dans $G_s([-1, 1])$ et que $f \notin G_s([0, 1])$.

Pour cela, on se donne une suite $(a_n)_{n \in \mathbf{N}}$ définie par :

$$\begin{aligned} a_{2n+1} &= 0 \\ a_{2n} &= (2sn)! \end{aligned}$$

D'après le théorème 2 de [3], on peut trouver une fonction $g \in G_s([-1, 1])$, paire et telle que :

$$g^{(n)}(0) = a_n \quad \text{pour tout } n \in \mathbf{N}.$$

On a donc :

$$g(x) = f(x^2) \quad \text{avec } f \in \mathcal{E}([0, 1])$$

et telle que :

$$f^{(n)}(0) = \frac{n! (2sn)!}{(2n)!} \quad \text{pour tout } n \in \mathbf{N}.$$

et f ne peut pas être dans $G_t([0, 1])$ pour $t < 2s - 1$.

La proposition résulte alors des lemmes 3,4,5 et du fait que l'on a aussi :

$$\Phi[\tilde{G}_1(T), \tilde{C}^\infty(T)] = \tilde{G}_s(T),$$

(en effet, on utilise encore le lemme 1 avec $S = \text{Identité et } T$ défini par $Tf = \frac{1}{2}(f - \check{f})$ où $\check{f}(x) = f(-x)$).

BIBLIOGRAPHIE

- [1] M. S. BAOUENDI et Ch. GOULAOUIC, Commutation de l'intersection et des foncteurs d'interpolation, *C.R. Acad. Sc. Paris*, t. 265, 313-315 (1967).
- [2] N. BOURBAKI, *Éléments de Mathématiques*, Livre IV, chap. 1, Hermann (Paris).

- [3] L. CARLESON, On universal moment problems, *Math. Scand.*, 9 (1961), 197-206.
- [4] C. GOULAOUIC, Prolongements de foncteurs d'interpolation et applications, *Ann. Inst. Fourier*, Grenoble 18, 1 (1968), 1-98.
- [5] J. L. LIONS et E. MAGENES, Problèmes aux limites non homogènes, tome 3, Dunod (Paris).

Manuscrit reçu le 25 septembre 1969.

Charles GOULAOUIC,
Département de Mathématiques,
Faculté des Sciences,
35-Rennes.
