

R. GÉRARD

Le problème de Riemann Hilbert sur une variété analytique complexe

Annales de l'institut Fourier, tome 19, n° 2 (1969), p. 1-32

http://www.numdam.org/item?id=AIF_1969__19_2_1_0

© Annales de l'institut Fourier, 1969, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'institut Fourier » (<http://annalif.ujf-grenoble.fr/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

LE PROBLÈME DE RIEMANN HILBERT
SUR UNE VARIÉTÉ ANALYTIQUE COMPLEXE
par Raymond GÉRARD

TABLE DES MATIÈRES

Notations et notions d'ordre général	3
Introduction	5
1. La notion de classe de Riemann sur une variété analytique complexe ..	6
2. Étude du problème I. Classe de Riemann et fibré vectoriel sur \hat{V}	9
3. Étude des ramifications d'une classe de Riemann	11
4. Famille cohérente de solutions locales du problème II	14
5. Étude des prolongements à V d'une classe de fibrés sur \hat{V}	18
6. Étude du problème II'. Classe de Riemann et fibré vectoriel sur V ..	24
7. Étude du problème II	28
8. Conclusions sur le problème de Riemann-Hilbert	31

Notations et notions d'ordre général.

Nous noterons :

$\mathcal{M}(p, q, \mathbf{C})$: l'espace vectoriel sur \mathbf{C} des matrices à p lignes et q colonnes à coefficients complexes.

$\mathcal{M}(p, \mathbf{C}) = \mathcal{M}(p, p, \mathbf{C})$. $G(p, \mathbf{C})$: le groupe linéaire complexe.

Pour toute variété analytique complexe V , nous noterons :

$\mathcal{R}(V)$: le revêtement universel de V ,

ψ_V : la projection canonique de $\mathcal{R}(V)$ sur V ,

$\pi_1(V)$: le groupe fondamental de V ,

$\mathcal{H}^{p \times q}(V)$: l'espace vectoriel sur \mathbf{C} des applications holomorphes de V dans $\mathcal{M}(p, q, \mathbf{C})$.

$\mathcal{H}_i^{p \times p}(V)$: l'ensemble des éléments inversibles de $\mathcal{H}^{p \times p}(V)$.

$\mathcal{M}^{p \times q}(V)$: l'espace vectoriel sur \mathbf{C} des applications méromorphes de V dans $\mathcal{M}(p, q, \mathbf{C})$.

$\Omega^{p \times p}(V)$: l'ensemble des formes différentielles de degré 1 holomorphes sur V et à valeurs matricielles carrées d'ordre p .

$\mathcal{J}^{p \times p}(V)$: l'ensemble des systèmes de Pfaff complètement intégrale de la forme $df = \omega f$ où $\omega \in \Omega^{p \times p}(V)$.

Le groupe $\pi_1(V)$ opère à gauche sur $\mathcal{R}(V)$; pour tout $Q \in \mathcal{R}(V)$ et tout $g \in \pi_1(V)$, nous noterons $g.Q$, le résultat de l'action de g sur Q . On appellera représentation canonique de $\pi_1(V)$ dans le groupe

$$\text{Aut}(\mathcal{H}^{p \times p}(\mathcal{R}(V)))$$

des automorphismes de $\mathcal{H}^{p \times p}(\mathcal{R}(V))$, l'application qui, à tout $g \in \pi_1(V)$ associe l'élément g^* de $\text{Aut}(\mathcal{H}^{p \times p}(\mathcal{R}(V)))$ défini par :

$$(g^* \Phi)(Q) = \Phi(g^{-1}.Q)$$

pour tout $\Phi \in \mathcal{H}^{p \times p}(\mathcal{R}(V))$ et tout $Q \in \mathcal{R}(V)$.

Dans toute la suite D désignera un disque du plan complexe et :

$$\begin{aligned} \hat{D} &= D - \{0\} \\ \mathfrak{D} &= (\hat{D})^n \times D^{m-n}. \end{aligned}$$

(E^k désignant le produit cartésien de k exemplaires de l'ensemble E .)

Introduction.

Soient V une variété analytique complexe connexe de dimension finie m et A un sous-ensemble analytique de V de codimension 1 en chacun de ses points dont les composantes irréductibles sont sans singularité et posons

$$\hat{V} = V - A.$$

Nous désignerons par $\Omega^{p \times p}(V, A)$ le sous-ensemble de

$$\Omega^{p \times p}(V - A)$$

des formes différentielles coefficients des systèmes de Pfaff du type de Fuchs (cf. [1], chapitre II).

Soit $\chi_{\hat{V}} = \chi$ une représentation de $\pi_1(\hat{V})$ dans $Gl(p, \mathbf{C})$, nous dirons qu'une application $\Phi \in \mathcal{H}_i^{p \times p}(\mathcal{R}(\hat{V}))$ réalise la représentation χ si pour tout $g \in \pi_1(\hat{V})$,

$$g^* \Phi = \Phi \chi(g).$$

Nous nous proposons essentiellement dans la suite d'étudier les problèmes suivants :

PROBLÈME I. — Déterminer l'ensemble $S_I(\chi)$ des applications $\Phi \in \mathcal{H}_i^{p \times p}(\mathcal{R}(\hat{V}))$ réalisant la représentation χ .

Nous verrons (§ 2) que $S_I(\chi)$ s'identifie à l'ensemble des sections holomorphes d'un fibré analytique principal sur \hat{V} de groupe $Gl(p, \mathbf{C})$.

PROBLÈME II. — Déterminer l'ensemble $S_{II}(\chi)$ des applications $\Phi \in \mathcal{H}_i^{p \times p}(\mathcal{R}(\hat{V}))$ réalisant la représentation χ et vérifiant de plus $d\Phi \cdot \Phi^{-1} \in \Omega^{p \times p}(V, A)$.

Nous verrons (§ 6) qu'un certain sous-ensemble de $S_{II}(\chi)$ s'identifie aux sections holomorphes d'un fibré analytique principal \mathcal{F} sur V de groupe $Gl(p, \mathbf{C})$.

PROBLÈME III. — *Trouver un système de Pfaff du type de Fuchs appartenant à $\mathcal{J}^{p \times p}(V, A)$ et dont une matrice fondamentale réalise la représentation χ .*

Remarque 1. — Tout élément de $S_{11}(\chi)$ donne une solution du problème III et réciproquement toute solution du problème III donne des solutions du problème II.

Remarque 2. — Par une modification de Hopf on peut toujours se ramener au cas où les composantes irréductibles de A sont en position générale car une telle modification ne change ni le groupe fondamental ni le revêtement universel de \hat{V} .

Nous supposons dans la suite, sauf aux § 1 et 2, que les composantes irréductibles de A sont en position générale et sans singularité. Les problèmes analogues pour une variable sont connus sous le nom de Problème de Riemann-Hilbert et H. Rörhl en a donné la solution complète sur une surface de Riemann [3]. Nous monterons en particulier que le problème II a toujours une solution sur une variété de Stein contractile. Nous introduirons également dans la suite la notion de classe de Riemann, cette notion est intimement liée aux problèmes énoncés ci-dessus. Pour une surface de Riemann S , cette notion a été étudiée dans [4] par H. J. NASTOLD qui a obtenu des résultats analogues en ce qui concerne les relations entre classe de Riemann et sections de fibrés vectoriels holomorphes sur S . Dans ce cas, l'étude est plus facile du fait que les points de l'ensemble analytique A sont tous isolés.

Les résultats de ce mémoire ont été annoncés dans [2] et prépubliés dans les volumes de la R.C.P. 25.

1. La notion de classe de Riemann sur une variété analytique complexe.

Dans toute la suite \mathcal{M} désignera $\mathcal{M}(p, \mathbb{C})$ ou bien $Gl(p, \mathbb{C})$.

DÉFINITION 1. — *On appelle donnée de Riemann sur une variété analytique complexe V , à valeur dans \mathcal{M} , la donnée d'un sous-ensemble analytique A de V de co-dimension 1 en chacun de ses points et d'une représentation $\chi_{\hat{V}}$ de $\pi_1(\hat{V})$ dans \mathcal{M} .*

Une donnée de Riemann sera notée $R(\chi_{\wp}, A, \mathfrak{M})$ ou simplement $R(\chi_{\wp})$ lorsqu'aucune confusion n'est possible. La représentation χ_{\wp} et l'ensemble analytique A seront respectivement appelés *la monodromie et l'ensemble de ramification* de la donnée de Riemann $R(\chi_{\wp}, A, \mathfrak{M})$.

DÉFINITION 2. — Nous dirons qu'un élément $\Phi \in \mathcal{H}^{p \times p}(\mathcal{R}(\hat{V}))$ réalise la représentation χ_{\wp} , si pour tout $\alpha \in \pi_1(\hat{V})$

$$\alpha^* \Phi = \Phi \chi_{\wp}(\alpha).$$

DÉFINITION 3. — On appelle classe de Riemann associée à la donnée de Riemann $R(\chi_{\wp}, A, \mathfrak{M})$, l'ensemble des éléments $\Phi \in \mathcal{H}^{p \times p}(\mathcal{R}(\hat{V}))$ réalisant la monodromie χ_{\wp} de $R(\chi_{\wp}, A, \mathfrak{M})$.

Une telle classe de Riemann sera notée $\mathcal{C}(\chi_{\wp}, A, \mathfrak{M})$ ou plus simplement $\mathcal{C}(\chi_{\wp})$. On appellera également *monodromie* (resp. *ensemble de ramification*) de cette classe de Riemann la représentation χ_{\wp} (resp. l'ensemble analytique A).

DÉFINITION 4. — On appelle classe de Riemann d'ordre fini au point M (resp. sur A) associé à la donnée de Riemann $R(\chi_{\wp}, A, \mathfrak{M})$ le sous-ensemble $\mathcal{C}^M(\chi_{\wp}, A, \mathfrak{M})$ (ou $\mathcal{C}^M(\chi_{\wp})$) (resp. $\mathcal{C}^A(\chi_{\wp}, A, \mathfrak{M})$ (ou $\mathcal{C}^A(\chi_{\wp})$)) des éléments de $\mathcal{C}(\chi_{\wp}, A, \mathfrak{M})$ qui sont d'ordre fini au point M (resp. sur A). Pour la notion d'ordre fini voir [1].

PROPOSITION 1. — Les matrices d'une classe de Riemann d'ordre fini ou non forment un module sur l'anneau des fonctions holomorphes sur V . La vérification de cette proposition est immédiate.

DÉFINITION 5. — On appelle classe de Riemann inversible associée à la donnée de Riemann $R(\chi_{\wp}, A, \mathfrak{M})$, l'ensemble $\mathcal{C}_i(\chi_{\wp}, A, \mathfrak{M})$, (ou simplement $\mathcal{C}_i(\chi_{\wp})$) des éléments $\Phi \in \mathcal{H}_i^{p \times p}(\mathcal{R}(\hat{V}))$ réalisant la monodromie χ_{\wp} .

La notation $\mathcal{C}_i^A(\chi_{\wp}, A, \mathfrak{M})$ (ou $\mathcal{C}_i^A(\chi_{\wp})$) désigne donc la classe de Riemann des éléments inversibles et d'ordre fini sur A . On a évidemment les inclusions

$$\mathcal{C}_i^A(\chi_{\wp}) \subset \mathcal{C}_i(\chi_{\wp}) \subset \mathcal{C}(\chi_{\wp}).$$

On vérifie facilement la :

PROPOSITION 2. — Si Φ et Φ' sont deux éléments de

$$\mathcal{C}_i(\chi_{\mathfrak{F}}, A, \text{Gl}(p, \mathbf{C})),$$

il existe $\varphi \in \mathcal{H}_i^{p \times p}(\hat{V})$ tel que :

$$\Phi \cdot \Phi'^{-1} = \varphi \circ \psi_{\mathfrak{F}}.$$

COROLLAIRE 1. — Si $\Phi_0 \in \mathcal{C}_i(\chi_{\mathfrak{F}}, A, \mathbb{M})$ alors pour tout $\Phi \in \mathcal{C}(\chi_{\mathfrak{F}}, A, \mathbb{M})$, il existe $\varphi \in \mathcal{H}^{p \times p}(\hat{V})$ tel que :

$$\Phi = (\varphi \circ \psi_{\mathfrak{F}})\Phi_0.$$

En effet $\Phi_0 \in \mathcal{C}_i(\chi_{\mathfrak{F}})$ entraîne que $\chi_{\mathfrak{F}}(g)$ est inversible.

DÉFINITION 6. — Deux classes de Riemann $\mathcal{C}(\chi_{\mathfrak{F}}, A, \mathbb{M})$ et $\mathcal{C}(\chi'_{\mathfrak{F}}, A, \mathbb{M})$ sont dites équivalentes si les deux représentations $\chi'_{\mathfrak{F}}$ et $\chi_{\mathfrak{F}}$ sont semblables.

Pour toute représentation $\chi_{\mathfrak{F}}$ de $\pi_1(\hat{V})$ dans \mathbb{M} , notons $\tilde{\chi}_{\mathfrak{F}}$ la classe d'équivalence de cette représentation pour la relation d'équivalence qu'est la similitude. Enfin notons $\tilde{\mathcal{C}}(\tilde{\chi}_{\mathfrak{F}}, A, \mathbb{M})$ l'ensemble des classes de Riemann équivalente à la classe $\mathcal{C}(\chi_{\mathfrak{F}}, A, \mathbb{M})$.

THÉORÈME 1. — Tout système de Pfaff

$$df = \omega f \quad (s)$$

appartenant à $\mathcal{J}^{p \times p}(V - A)$ définit une classe de représentation $\chi_{\mathfrak{F}}^{\omega}$ donc une classe $\tilde{\mathcal{C}}_i(\chi_{\mathfrak{F}}^{\omega}, A, \text{Gl}(p, \mathbf{C}))$.

Ce théorème est une conséquence immédiate de la :

PROPOSITION 3. — Toute matrice fondamentale Φ du système de Pfaff (s) définit une classe de Riemann $\mathcal{C}_i(\chi_{\mathfrak{F}}^{\Phi}, A, \text{Gl}(p, \mathbf{C}))$ et deux classes de Riemann associées à deux matrices fondamentales de (s) sont équivalentes.

Cette proposition résulte du fait suivant : si Φ est une matrice fondamentale de (s) , $g^*\Phi$ en est une également pour tout $g \in \pi_1(\hat{V})$.

DÉFINITION 7. — La classe de la représentation $\tilde{\chi}_{\mathfrak{F}}^{\omega}$ associée à (s) est appelée la monodromie du système (s) .

PROPOSITION 4. — *Tout élément $\Phi \in \mathcal{C}_i(\chi_{\mathfrak{V}}, A, \mathfrak{M})$ définit un système de Pfaff $df = \omega f$ appartenant à $\mathbb{J}^{p \times p}(\hat{V})$ et*

$$\tilde{\mathcal{C}}_i(\tilde{\chi}_{\mathfrak{V}}^{\omega}, A, \text{Gl}(p, \mathbf{C})) = \tilde{\mathcal{C}}_i(\tilde{\chi}_{\mathfrak{V}}^{\Phi}, A, \text{Gl}(p, \mathbf{C})).$$

La vérification de cette proposition est immédiate.

$$\omega = d\Phi \cdot \Phi^{-1} \quad \text{et} \quad \omega \in \Omega^{p \times p}(\hat{V}).$$

PROPOSITION 5. — *Étant donnée une classe de Riemann $\mathcal{C}_i(\chi_{\mathfrak{V}}, A, \text{Gl}(p, \mathbf{C}))$, alors chaque élément $\Phi \in \mathcal{C}_i(\chi_{\mathfrak{V}}, A, \text{Gl}(p, \mathbf{C}))$ possédant la propriété :*

« Les colonnes de Φ engendrent un espace vectoriel faiblement singulier sur V » est la matrice fondamentale d'un système de Pfaff du type de Fuchs.

Ce théorème est une conséquence immédiate de la proposition 4 et de la définition des systèmes de Pfaff du type de Fuchs [1].

2. Étude du problème I.

Concernant le problème I nous démontrons les résultats suivants :

THÉORÈME A_I. — *Il existe un fibré analytique principal $\hat{\mathfrak{F}}$ sur \hat{V} de groupe $\text{Gl}(p, \mathbf{C})$ et une bijection naturelle entre $S_I(\chi)$ et l'ensemble des sections holomorphes de $\hat{\mathfrak{F}}$.*

THÉORÈME B_I. — *Le module $\mathcal{C}(\chi_{\mathfrak{V}}, A, \mathfrak{M}(p, \mathbf{C}))$ est isomorphe à celui des sections holomorphes d'un fibré vectoriel analytique $\hat{\mathfrak{F}}$ sur \hat{V} de fibre $\mathfrak{M}(p, \mathbf{C})$ et de groupe $\text{Gl}(p, \mathbf{C})$.*

En langage de classe de Riemann le théorème A_I peut s'énoncer sous la forme :

THÉORÈME C_I. — *Il existe un fibré analytique principal $\hat{\mathfrak{F}}$ sur \hat{V} de groupe $\text{Gl}(p, \mathbf{C})$ et une bijection naturelle entre $\mathcal{C}_i(\chi_{\mathfrak{V}}, A, \text{Gl}(p, \mathbf{C}))$ et l'ensemble des sections holomorphes de $\hat{\mathfrak{F}}$.*

Démonstration du théorème A_I. — C'est une démonstration classique de la théorie des fibrés [5] et [6], rappelons rapi-

dement son déroulement. Le groupe $\pi_1(\hat{V})$ opère à gauche sur $\mathcal{R}(\hat{V})$ par

$$g : \tilde{x} \rightarrow g.\tilde{x}$$

($g.\tilde{x}$ désignant la composition des chemins).

A l'aide de cette opération le revêtement universel $\mathcal{R}(\hat{V})$ de \hat{V} peut être considéré comme fibré analytique principal de groupe $\pi_1(\hat{V})$. De l'opération ci-dessus on déduit une opération à gauche sur les applications holomorphes de $\mathcal{R}(\hat{V})$ dans $\text{Gl}(p, \mathbf{C})$ par

$$g.\Phi(\tilde{x}) = \Phi(g.^{-1}\tilde{x}) \quad \text{pour tout } \tilde{x} \in \mathcal{R}(\hat{V}) \\ \text{et } g \in \pi_1(\hat{V}).$$

D'autre part, par l'intermédiaire de la représentation $\chi_{\mathfrak{g}}$, $\pi_1(\hat{V})$ opère à droite sur $\text{Gl}(p, \mathbf{C})$, en effet nous posons pour tout $A \in \text{Gl}(p, \mathbf{C})$ et tout $g \in \pi_1(\hat{V}) : A.g = A.\chi_{\mathfrak{g}}(g)$.

Ces opérations permettent de faire opérer le groupe $\pi_1(\hat{V})$ à gauche sur le produit $\mathcal{R}(\hat{V}) \times \text{Gl}(p, \mathbf{C})$ par :

$$g.(x, A) = (g.x, A.\chi(g)^{-1}).$$

Nous savons alors d'après des résultats classiques de la théorie des fibrés [6] que le quotient de ce produit par les opérations de $\pi_1(\hat{V})$ nous donne, un fibré $\hat{\mathcal{F}}$ de fibre $\text{Gl}(p, \mathbf{C})$ et de groupe $\pi_1(\hat{V})$ que l'on peut considérer comme fibré principal de groupe $\text{Gl}(p, \mathbf{C})$. Comme le fibré $\hat{\mathcal{F}}$ est associé à $\mathcal{R}(\hat{V})$ considéré comme fibré principal de groupe $\pi_1(\hat{V})$, il résulte que le fibré $\hat{\mathcal{F}}$ est à transformations coordonnées localement constantes. Le théorème suivant, classique dans la théorie des fibrés [6] nous donne immédiatement le théorème A_I.

THÉORÈME F. — Soit H un fibré analytique principal de groupe G et \mathcal{F} un fibré associé à H tel que G opère à droite sur la fibre F de \mathcal{F} , alors les sections holomorphes de \mathcal{F} sont en correspondance bijective avec les applications holomorphes Φ de H dans F vérifiant :

$$\Phi(s.x) = \Phi(x).s^{-1} \quad \text{pour tout } x \in H \text{ et } s \in G.$$

Pour obtenir le théorème B_I , il suffit dans ce qui précède de considérer le fibré associé à $\mathfrak{R}(\hat{V})$ de fibre $\mathfrak{A}(p, \mathbf{C})$, au lieu de prendre le fibré associé de fibre $\text{Gl}(p, \mathbf{C})$.

Soient a un point de l'ensemble analytique A et $U(a)$ un voisinage de coordonnée de a pour A . (Cf. [1], chap. III, § 1.). Notons $\hat{\mathfrak{F}}_a$ la restriction de $\hat{\mathfrak{F}}$ à $\hat{U}(a) = \hat{V} \cap U(a)$. La représentation

$$\chi : \pi_1(\hat{V}) \rightarrow \text{Gl}(p, \mathbf{C})$$

induit une représentation

$$\chi_a : \pi_1(\hat{U}(a)) \rightarrow \text{Gl}(p, \mathbf{C}),$$

par l'intermédiaire de l'application

$$j : \pi_1(\hat{U}(a)) \rightarrow \pi_1(\hat{V})$$

induite par l'injection de $\hat{U}(a)$ dans \hat{V} .

Désignons par $\hat{\mathfrak{F}}'_a$ le fibré construit à l'aide du théorème A_1 , à partir de $\mathfrak{R}(\hat{U}(a))$ et χ_a .

Nous avons :

PROPOSITION 6. — *Les fibrés $\hat{\mathfrak{F}}_a$ et $\hat{\mathfrak{F}}'_a$ sont analytiquement isomorphes.*

3. Étude des ramifications d'une classe de Riemann.

Dans ce paragraphe, les composantes irréductibles de A sont supposées en position générale. Soit $\mathcal{C}(\chi_{\hat{V}}, A, \mathfrak{A})$ une classe de Riemann associée à la donnée de Riemann $R(\chi_{\hat{V}}, A, \mathfrak{A})$. Nous allons étudier le comportement des éléments de $\mathcal{C}(\chi_{\hat{V}}, A, \mathfrak{A})$ au voisinage de A . Soient M un point de A (par exemple $M \in \bigcap_{k=1}^n A_k (n \leq m)$) et $W(M)$ un voisinage de coordonnée de M pour A , c'est-à-dire qu'il existe un isomorphisme analytique ρ de D^m sur $W(M)$ tel que :

$$\begin{aligned} \rho^{-1}(M) &= (0, 0, \dots, 0) \in D^m \\ \rho^{-1}(A_k \cap W(M)) &= \{(x_1, x_2, \dots, x_m) \in D^m \mid x_k = 0\} \end{aligned}$$

pour tout $k = 1, 2, \dots, n$.

Pour toute composante connexe c de $\psi^{-1}(\hat{W}(M)) \subset \mathcal{R}(\hat{V})$, il existe une application ρ_c de $\mathcal{R}(\mathcal{D})$ sur c réalisant $\mathcal{R}(\mathcal{D})$ comme revêtement de c . Comme $\pi_1(\hat{V})$ opère transitivement sur les feuilles de $\mathcal{R}(\hat{V})$, il suffit d'étudier la restriction de chaque élément $\Phi \in \mathcal{C}(\chi_{\hat{V}}, A, \mathcal{M})$ à une seule composante connexe c de $\psi^{-1}(\hat{W}(M))$. Notons j l'application de $\pi_1(\hat{W}(M))$ dans $\pi_1(\hat{V})$ induite par l'injection canonique de $\hat{W}(M)$ dans \hat{V} ; remarquons que cette application n'est en général ni injective ni surjective. La représentation $\chi_{\hat{V}} : \pi_1(\hat{V}) \rightarrow \mathcal{M}$ induit une représentation $\chi_{\hat{W}}$ de $\pi_1(\hat{W}(M))$ dans \mathcal{M} de la manière suivante :

$$\chi_{\hat{W}}(\alpha_{\hat{W}}) = \chi_{\hat{V}}(j(\alpha_{\hat{W}})) \quad \text{pour tout} \quad \alpha_{\hat{W}} \in \pi_1(\hat{W}(M)).$$

Le groupe fondamental de $\hat{W}(M)$ est isomorphe à celui de \mathcal{D} qui lui est abélien libre de type fini. Soient g_1, g_2, \dots, g_n des générateurs de $\pi_1(\mathcal{D})$ possédant les propriétés suivantes :

$$g_k^*(\log \cdot Q_j) = \log \cdot Q_j \quad \text{pour tout} \quad j \neq k$$

avec $j = 1, 2, \dots, n$ et $k = 1, 2, \dots, n$.

$$g_k^*(\log \cdot Q_k) = \log \cdot Q_k + 2\pi i \quad \text{pour tout} \quad k = 1, 2, \dots, n,$$

où $Q = (Q_1, Q_2, \dots, Q_m) \in \mathcal{R}(\mathcal{D})$.

Il en résulte que la représentation $\chi_{\hat{W}}$ est entièrement déterminée par la donnée de n matrices deux à deux permutable,

$$G_1^M, G_2^M, \dots, G_n^M$$

appartenant à \mathcal{M} . Résumons la situation ainsi décrite dans la

PROPOSITION 7. — *Pour tout $M \in A$, il existe un voisinage $W(M)$ tel que pour tout $\Phi \in \mathcal{C}(\chi_{\hat{V}}, A, \mathcal{M})$ et toute composante connexe c de $\psi^{-1}(W(M))$ on ait :*

$$\Phi_c^M = \Phi \circ \rho_c \in \mathcal{H}^{p \times p}(\mathcal{R}(\mathcal{D}))$$

et

$$g_k^* \Phi_c^M = \Phi_c^M G_k^M \quad \text{pour tout} \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

DÉFINITION 8. — *Le sous-ensemble des éléments Φ_c de $\mathcal{C}(\chi_{\hat{W}}, A \cap W, \mathcal{M})$ pour lesquels, il existe $\Phi \in \mathcal{C}(\chi_{\hat{V}}, A, \mathcal{M})$ tel que*

$$\Phi|_c = \Phi_c$$

est appelé classe de Riemann locale au point M relative à c associée à $\mathcal{C}(\chi_{\mathfrak{A}}, A, \mathfrak{M})$.

Entreprenons maintenant l'étude d'une classe de Riemann locale associée à $\mathcal{C}(\chi_{\mathfrak{A}}, A, \mathfrak{M})$; pour ce faire, nous allons étudier la classe de Riemann $\mathcal{C}(\chi_{\mathfrak{A}}, A \cap W(M), \mathfrak{M})$ qui contient toute classe de Riemann locale au point M associée à $\mathcal{C}(\chi_{\mathfrak{A}}, A, \mathfrak{M})$. En d'autres termes, il suffit d'étudier la classe $\mathcal{C}(\chi_{\mathfrak{D}}, \rho^{-1}(A), \mathfrak{M})$ où $\chi_{\mathfrak{D}}$ est la représentation déduite de $\chi_{\mathfrak{A}}$ par l'isomorphisme ρ . Pour simplifier l'écriture cette classe de Riemann sera notée $\mathcal{C}(\mathfrak{D})$.

La représentation $\chi_{\mathfrak{D}}$ est définie par les images G_k ($k = 1, 2, \dots, n$) des n générateurs de $\pi_1(\mathfrak{D})$ choisis comme nous l'avons indiqué ci-dessus.

PROPOSITION 8. — L'ensemble $\mathcal{C}_i^0(\mathfrak{D})$ n'est pas vide car il contient l'élément

$$\Phi_0 = \prod_{k=1}^n (Q_k)^{\frac{1}{2\pi i} \log \cdot G_k}$$

Démonstration. — Analogue à celle de la proposition 3 du § 6 chapitre 1 de [1].

PROPOSITION 9. — Si $\Phi \in \mathcal{C}_i(\mathfrak{D})$ et $\Phi' \in \mathcal{C}_i(\mathfrak{D})$, alors il existe $\varphi' \in \mathcal{H}^{p \times p}(\mathfrak{D})$ telle que

$$(1) \quad \Phi' \cdot \Phi^{-1} = \varphi' \circ \psi \quad \text{où} \quad \psi = \psi_{\mathfrak{D}}.$$

Cette proposition est la proposition 2 du § 1 appliquée à la classe locale considérée.

COROLLAIRE 2. — Étant donnée $\Phi \in \mathcal{C}_i(\mathfrak{D})$, l'application $\tilde{\Phi}$ de $\mathcal{C}_i(\mathfrak{D})$ dans $\mathcal{H}^{p \times p}(\mathfrak{D})$ qui à $\Phi' \in \mathcal{C}_i(\mathfrak{D})$ associe la matrice $\varphi' \in \mathcal{H}^{p \times p}(P)$ définie par (1) est une bijection.

PROPOSITION 10. — Pour qu'un élément $\Phi \in \mathcal{C}_i(\mathfrak{D})$ appartienne à $\mathcal{C}_i^0(\mathfrak{D})$ il faut et il suffit que la restriction de l'application $\tilde{\Phi}$ à $\mathcal{C}^0(\mathfrak{D})$ soit à valeurs dans $\mathfrak{M}^{p \times p}(\mathfrak{D})$.

Cette proposition résulte du fait qu'une matrice holomorphe sur \mathfrak{D} et d'ordre fini à l'origine a au plus une singularité polaire sur A et réciproquement.

Remarque 3. — Si $\Phi \in \mathcal{C}_i^0(\mathcal{P})$ alors $\tilde{\Phi}$ est un isomorphisme de $\mathcal{C}_0(\mathcal{D})$ sur $\mathcal{M}^{p \times p}(\mathcal{D})$.

COROLLAIRE 3. — *Pour qu'une matrice $\Phi \in \mathcal{C}(\mathcal{D})$ appartienne à $\mathcal{C}^0(\mathcal{D})$, il faut et il suffit qu'il existe $\varphi \in \mathcal{M}^{p \times p}(\mathcal{D})$ telle que :*

$$\Phi = (\varphi \circ \psi) \cdot \Phi_0.$$

DÉFINITION 9. — *Deux matrices Φ_1 et Φ_2 appartenant à $\mathcal{C}_i(\mathcal{D})$ sont dites équivalentes si $\tilde{\Phi}_1(\Phi_2)$ (donc également $\tilde{\Phi}_2(\Phi_1)$) est holomorphe inversible dans \mathcal{D}^m .*

DÉFINITION 10. — *Soit $\Phi \in \mathcal{C}_i(\mathcal{D})$, nous dirons qu'un élément $\Phi' \in \mathcal{C}_i(\mathcal{D})$ est Φ -holomorphe (resp. Φ -holomorphe inversible) au point $Q_0 \in \mathcal{R}'(\mathcal{D})$, s'il existe $\varphi' \in \mathcal{H}^{p \times p}(\mathcal{D}^m)$ (resp. $\mathcal{H}_i^{p \times p}(\mathcal{D}^m)$) telle que*

$$\Phi' = (\varphi' \circ \psi)\Phi.$$

On vérifie facilement la :

PROPOSITION 11. — *Si Φ_1 et Φ_2 sont deux éléments équivalents alors toute matrice $\Phi \in \mathcal{C}(\mathcal{D})$ qui est Φ_1 -holomorphe (resp. Φ_1 -holomorphe inversible) au point Q_0 est également Φ_2 -holomorphe (resp. Φ_2 -holomorphe inversible) au point Q_0 et inversement.*

Donc : pour tout $\Phi \in \mathcal{C}_i(\mathcal{D})$ la notion de Φ -holomorphie ne dépend que de la classe d'équivalence de Φ .

PROPOSITION 12. — *Si Φ_1 et Φ_2 sont deux éléments de $\mathcal{C}_i(\mathcal{D})$ et s'il existe un élément $\Phi \in \mathcal{C}(\mathcal{D})$ holomorphe inversible par rapport à Φ_1 et Φ_2 alors Φ_1 et Φ_2 sont équivalentes.*

La vérification de cette proposition est immédiate.

4. Famille cohérente de solutions locales du problème II.

Soit a un point de A et $U(a)$ un voisinage coordonnée de a pour A ; la représentation χ induit une représentation $\chi_{\hat{U}(a)}$ de $\pi_1(\hat{U}(a))$ dans $\text{Gl}(p, \mathbf{C})$ par l'intermédiaire de l'application naturelle

$$j : \pi_1(\hat{U}(a)) \rightarrow \pi_1(\hat{V}).$$

LEMME 1. — *Pour tout $a \in A$, il existe un voisinage $U(a)$ de a dans V tel que $S_{\text{II}}(\chi_{\hat{U}(a)}) \neq \emptyset$.*

En effet la matrice Φ_0 définie dans la proposition 8 du § 3 est un élément de $S_{\text{II}}(\chi_{\hat{U}(a)})$.

Remarque 4. — Comme $S_{\text{I}}(\chi_{\hat{U}}) \subset S_{\text{II}}(\chi_{\hat{U}})$ nous avons également $S_{\text{I}}(\chi_{\hat{U}}) \neq \emptyset$.

DÉFINITION 11. — *Tout couple formé par un ouvert $U(a)$ et un élément de $S_{\text{II}}(\chi_{\hat{U}(a)})$ est appelé une solution locale au point a du problème II.*

Nous parlerons également de solutions locales au point a du problème I.

Soit alors $c_{\hat{U}(a)}$ une composante connexe de $\psi_{\hat{\varphi}}^{-1}(\hat{U}) \subset \mathcal{R}(\hat{V})$, il existe une application $p_{c_{\hat{U}}}$ de $\mathcal{R}(\hat{U})$ sur $c_{\hat{U}}$ telle que si $\psi_{\hat{U}}$ désigne la projection canonique de $\mathcal{R}(\hat{U})$ sur \hat{U} , l'on ait :

$$\psi_{\hat{U}} = \psi_{\hat{\varphi}} \circ p_{c_{\hat{U}}}.$$

De plus, si $\mathcal{A}_{c_{\hat{U}}} \in S_{\text{II}}(\chi_{\hat{U}})$, il existe une application $\mathcal{A}_{c_{\hat{U}}}$ de $c_{\hat{U}}$ dans $\text{Gl}(p, \mathbf{C})$ telle que :

$$\mathcal{A}_{c_{\hat{U}}} = \mathcal{A}_{c_{\hat{U}}} \circ p_{c_{\hat{U}}}$$

Les résultats du § 3 entraînent immédiatement les résultats suivants :

PROPOSITION 13. — *Si $\Phi \in S_{\text{I}}(\chi)$ et si $\mathcal{A}_{c_{\hat{U}}} \in S_{\text{II}}(\chi_{\hat{U}})$ alors*

$$\Phi \cdot (\mathcal{A}_{c_{\hat{U}}})^{-1} \in \mathcal{H}_i^{p \times p}(\hat{U})$$

pour toute composante connexe $c_{\hat{U}}$ de $\psi_{\hat{\varphi}}^{-1}(\hat{U}) \subset \mathcal{R}(\hat{V})$. Si $\Phi \in S_{\text{II}}(\chi)$ alors $\Phi \cdot (\mathcal{A}_{c_{\hat{U}}})^{-1}$ admet au plus une singularité polaire au point a .

Si $\mathcal{A}_{c_{\hat{U}}}$ et $\mathcal{A}'_{c_{\hat{U}}}$ sont deux éléments de $S_{\text{II}}(\chi_{\hat{U}})$, il existe $W_{\hat{U}} \in \mathcal{H}_i^{p \times p}(\hat{U})$ telle que :

$$\mathcal{A}_{c_{\hat{U}}} = W_{\hat{U}} \mathcal{A}'_{c_{\hat{U}}}$$

DÉFINITION 12. — *Nous dirons que $\mathcal{A}_{c_{\hat{U}}} \in S_{\text{II}}(\chi_{\hat{U}})$ (resp. $S_{\text{I}}(\chi_{\hat{U}})$) et $\mathcal{A}_{\hat{U}} \in S_{\text{II}}(\chi_{\hat{U}})$ (resp. $S_{\text{I}}(\chi_{\hat{U}})$) sont équivalents si $W_{\hat{U}}$ est la restriction à \hat{U} d'un élément de $\mathcal{H}_i^{p \times p}(U)$.*

DÉFINITION 13. — On appelle famille cohérente de solutions locales du problème II, la donnée d'un recouvrement $\mathcal{U} = \{U_a\}_{a \in A}$ de A par des ouverts de V et d'une famille $\{\mathfrak{A}_a\}_{a \in A}$ d'applications ayant les propriétés suivantes :

1° Pour tout $a \in A$, $\mathfrak{A}_a \in S_{II}(\chi_{\hat{U}_a})$.

2° Si $U_a \cap U_b \neq \emptyset$.

$$\mathfrak{A}_{c_a}(\mathfrak{A}_{c_b})^{-1} \in \mathcal{H}_i^{P \times P}(U_a \cap U_b)$$

pour toutes composantes connexes c_a et c_b respectivement de $\psi^{-1}(\hat{U}_a)$ et $\psi^{-1}(\hat{U}_b)$ vérifiant $c_a \cap c_b \neq \emptyset$.

DÉFINITION 14. — Deux familles cohérentes de solutions locales

$$\mathfrak{A} = \{\mathfrak{A}_a\}_{a \in A} \quad \text{et} \quad \mathfrak{A}' = \{\mathfrak{A}'_a\}_{a \in A}$$

sur le même recouvrement $\mathcal{U} = \{U_a\}_{a \in A}$ sont dites équivalentes si \mathfrak{A}_a est équivalente à \mathfrak{A}'_a pour tout $a \in A$.

LEMME 2. — Il existe une famille cohérente de solutions locales du problème II.

Démonstration. — Pour tout $a \in A$, désignons par $U(a)$ un voisinage coordonné de a pour A , nous savons (§ 3) que $\pi_1(\hat{U}_a)$ est abélien libre et qu'il existe un nombre fini de générateurs $g_1^a, g_2^a, \dots, g_{n_a}^a$ de $\pi_1(\hat{U}_a)$ tels que :

$$(g_k^a)^* \log. Q_j = \log. Q_j \quad \text{si} \quad j \neq k.$$

avec

$$k = 1, 2, \dots, n_a \quad \text{et} \quad j = 1, 2, \dots, n_a$$

$$(g_k^a)^* \log. Q_k = \log. Q_k + 2\pi i$$

où

$$k = 1, 2, \dots, n_a.$$

(Nous identifions implicitement \hat{U}_a avec \mathcal{D} .)

La représentation $\chi_{\hat{U}_a}$ est entièrement déterminée par la donnée des images $G_1^a, G_2^a, \dots, G_{n_a}^a$ des générateurs $g_1^a, g_2^a, \dots, g_{n_a}^a$ de $\pi_1(\hat{U}_a)$. Les matrices $G_1^a, G_2^a, \dots, G_{n_a}^a$ sont inversibles et deux à deux permutables.

On peut supposer que dans U_a les composantes irréductibles

$A_k^a (k = 1, 2, \dots, n_a)$ de $A \cap U_a$ sont définies respectivement par les équations :

$$f_k^a = 0,$$

où les $f_k^a (k = 1, 2, \dots, n_a)$ sont des fonctions holomorphes dans U_a , irréductibles et tel que pour tout k , le germe de f_k^a en tout point de A_k^a engendre l'idéal associé au germe d'ensemble analytique défini par A_k^a en ce point.

Pour tout $k = 1, 2, \dots, n_a$ la fonction matricielle

$$F_k^a = (f_k^a)^{\frac{1}{2\pi i} \log \cdot G_k^a}$$

est holomorphe inversible sur $\mathcal{R}(\hat{U}_a)$.

Pour tout $k = 1, 2, \dots, n_a$ et $j = 1, 2, \dots, n_a$, nous avons :

$$(g_j^a)^* F_k^a = F_k^a \quad \text{si} \quad j \neq k$$

et

$$(g_k^a)^* F_k^a = F_k^a G_k^a.$$

Il en résulte que :

$$\mathcal{A}_{c_a} = \prod_{k=1}^{n_a} F_k^a$$

réalise la représentation $\chi_{\hat{U}_a}$.

On vérifie alors facilement que

$$d(\mathcal{A}_{c_a}) \cdot \mathcal{A}_{c_a}^{-1} \in \Omega^{p \times p}(U_a, A \cap U_a),$$

c'est-à-dire que

$$\mathcal{A}_{c_a} \in S_{II}(\chi_{\hat{U}_a}).$$

Considérons maintenant une composante connexe c_a de $\psi^{-1}(\hat{U}_a) \subset \mathcal{R}(\hat{V})$. La variété $\mathcal{R}(\hat{U}_a)$ est un revêtement de c_a ; comme \mathcal{A}_{c_a} réalise $\chi_{\hat{U}_a}$, on voit facilement que \mathcal{A}_{c_a} se factorise par ψ_{c_a} (projection de $\mathcal{R}(\hat{U}_a)$ sur c_a). On peut donc considérer \mathcal{A}_{c_a} comme étant définie sur c_a , c'est ce que nous ferons dans la suite sans introduire d'inutiles complications de notations. On montre alors que la donnée :

1° du recouvrement $\mathcal{U} = \{U_a\}_{a \in A}$ de A par des ouverts de V choisis comme ci-dessus;

2° de la famille de solutions locales du problème II : $\mathcal{A} = \{\mathcal{A}_{c_a}\}_{a \in A}$ constitue une famille cohérente de solutions locales du problème II.

DÉFINITION 15. — Une solution Φ du problème I est dite holomorphe inversible sur A pour la famille cohérente

$$\mathcal{A} = \{\mathcal{A}_a\}_{a \in A}$$

de solutions locales du problème II sur le recouvrement

$$\mathcal{U} = (U_a)_{a \in A}$$

si pour tout $a \in A$ et toute composante connexe c_a de

$$\psi^{-1}(\hat{U}_a), \quad \Phi \cdot (\mathcal{A}_{c_a})^{-1}$$

est la restriction à \hat{U}_a d'une matrice holomorphe inversible sur U_a .

Remarque 5. — Si on a la propriété ci-dessus pour une composante connexe de $\psi^{-1}(\hat{U}_a)$, on l'a pour toutes les autres. Les propositions 11 et 12 du § 3 entraînent :

PROPOSITION 14. — S'il existe $\Phi \in S_I(\chi)$ holomorphe inversible par rapport à deux familles cohérentes de solutions locales du problème II : \mathcal{A} et \mathcal{A}' relatives au même recouvrement, alors \mathcal{A} et \mathcal{A}' sont équivalentes. Si \mathcal{A} et \mathcal{A}' sont équivalentes alors toute matrice $\Phi \in S_I(\chi)$ qui est holomorphe par rapport à l'une l'est par rapport à l'autre.

Les considérations ci-dessus nous conduisent à l'étude du :

Problème II. — Déterminer le sous-ensemble $S'_{II}(\chi, \mathcal{A})$ de $S_{II}(\chi)$ des applications holomorphes inversibles sur A pour une famille cohérente de solutions locales \mathcal{A} .

Nous verrons dans le paragraphe 6 que cet ensemble $S'_{II}(\chi, \mathcal{A})$ s'identifie aux sections holomorphes d'un certain fibré vectoriel sur V prolongeant $\hat{\mathcal{F}}$.

5. Étude des prolongements à V du fibré $\hat{\mathcal{F}}$.

Rappelons que les composantes irréductibles de A sont en position générale et sans singularité.

A. *Prolongement local de $\hat{\mathcal{F}}$ au voisinage de l'ensemble analytique A.*

Pour tout point M de A, nous appellerons *voisinage épointé de M* tout ensemble $\hat{U}(M)$ de la forme

$$U(M) - U(M) \cap A$$

où $U(M)$ est un voisinage de M dans V et nous noterons $\chi_{\hat{U}(M)}$ la représentation induite par χ sur $\hat{U}(M)$.

Soit a un point de A, $W(a)$ un voisinage de coordonnée de a pour A. Notons $\hat{\mathcal{F}}_{W(a)}$ le fibré induit par \mathcal{F} sur $\hat{W}(a)$. Ce fibré est analytique principal de groupe $Gl(p, \mathbf{C})$. Dans toute la suite nous noterons

$$\hat{U} = \{U_i\}_{i \in I} \quad \text{et} \quad \hat{h} = \{\hat{h}_{i,j}\}_{i \in I, j \in I}$$

respectivement le recouvrement de \hat{V} et le cocycle associé définissant $\mathcal{R}(V)$ comme fibré principal localement trivial. Enfin $\hat{g} = \{\hat{g}_{i,j}\}_{i \in I, j \in I}$ désignera l'image par χ du cocycle \hat{h} . Rappelons que c'est le cocycle \hat{g} qui définit $\hat{\mathcal{F}}$. Enfin pour simplifier l'écriture nous écrivons :

$$U_{i,j} \quad \text{à la place de} \quad U_i \cap U_j$$

et

$$U_{i,j,k} \quad \text{à la place de} \quad U_i \cap U_j \cap U_k.$$

LEMME 3. — *A toute section holomorphe du fibré principal de $\hat{\mathcal{F}}_a$ sur un voisinage épointé de a est associé un prolongement \mathcal{F}_a de $\hat{\mathcal{F}}_a$ au point a. Réciproquement tout prolongement \mathcal{F}_a de $\hat{\mathcal{F}}_a$ au point a s'obtient à partir d'une section holomorphe de $\hat{\mathcal{F}}_a$ sur un voisinage épointé $\hat{U}(a)$ du point a. De plus,*

1° si $\hat{\sigma}_a^1$ et $\hat{\sigma}_a^2$ sont deux sections holomorphes de $\hat{\mathcal{F}}_a$ sur $\hat{U}(a)$, il existe $\hat{\tau} \in \mathcal{H}_i^{p \times p}(\hat{U}(a))$ tel que

$$(1) \quad \hat{\sigma}_a^1 = \hat{\tau} \hat{\sigma}_a^2 \quad \text{sur} \quad \hat{U}(a);$$

2° s'il existe $\tau \in \mathcal{H}_i^{p \times p}(U(a))$ telle que

$$(2) \quad \hat{\tau} = \tau|_{\hat{U}(a)},$$

les deux prolongements de $\hat{\mathcal{F}}_a$ associés à σ_a^1 et σ_a^2 sont équivalents et réciproquement.

Démonstration. — Soit $\hat{\sigma}_a$ une section holomorphe de $\hat{\mathcal{F}}_a$ sur un voisinage épointé $\hat{U}(a)$ de a , cette section est définie dans le recouvrement $\hat{\mathcal{U}}$ par la donnée des matrices $(\hat{\sigma}_{a,i})_{i \in I}$ holomorphes inversibles sur $U_i \cap \hat{U}(a)$ vérifiant :

$$\hat{\sigma}_{a,j} = \hat{\sigma}_{a,i} \hat{g}_{i,j} \quad \text{sur} \quad U_{i,j} \cap \hat{U}(a).$$

Pour obtenir un prolongement de $\hat{\mathcal{F}}_a$ au voisinage de a , il suffit de prolonger l'atlas $\{\hat{\mathcal{U}}, \hat{g}_{i,j}\}$, ceci se fait de la manière suivante. Au recouvrement $\hat{\mathcal{U}}_a = \{U_i \cap \hat{U}(a)\}_{i \in I}$ de $\hat{U}(a)$, on ajoute l'ouvert $U_{(a)} = U(a)$ pour obtenir un recouvrement $\mathcal{U}_a = \{U_i \cap \hat{U}(a)\}_{i \in I \cup \{a\}}$ de $U(a)$. Aux transformations coordonnées $g_{i,j} = \hat{g}_{i,j}|_{U_{i,j} \cap \hat{U}(a)}$, on ajoute les matrices

$$g_{a,i} = \hat{\sigma}_{a,i} \quad \text{holomorphes inversibles sur} \quad \hat{U}(a) \cap U_i$$

et

$$g_{a,a} = \text{identité}; \quad g_{i,a} = (\sigma_{a,i})^{-1} \quad \text{sur} \quad U_{i,a}.$$

On vérifie alors facilement que pour tout i, j, k appartenant à $I \cup \{a\}$

$$g_{i,j} \cdot g_{j,k} = g_{i,k} \quad \text{sur} \quad U_{i,j,k}.$$

Ce qui prouve qu'à la section holomorphe $\hat{\sigma}_a$ de $\hat{\mathcal{F}}_a$ est associée un prolongement du fibré $\hat{\mathcal{F}}_a$ au voisinage du point a .

Réciproquement soit \mathcal{F}_a un prolongement de $\hat{\mathcal{F}}_a$ au voisinage du point a . Comme le fibré principal \mathcal{F}_a est localement trivial, il existe un voisinage $U(a)$ de a dans V tel que $p^{-1}(U(a)) \subset \mathcal{F}_a$ (p désignant la projection de \mathcal{F}_a sur $U(a)$) soit trivial c'est-à-dire qu'il existe une section holomorphe σ_a sur $U(a)$ du fibré principal \mathcal{F}_a . Mais alors $\hat{\sigma}_a = \sigma_a|_{\hat{U}(a)}$ est une section holomorphe de $\hat{\mathcal{F}}_a$ sur $\hat{U}(a)$.

Soient maintenant $\hat{\sigma}_a^1$ et $\hat{\sigma}_a^2$ deux sections holomorphes de $\hat{\mathcal{F}}_a$ sur le voisinage épointé $\hat{U}(a)$ de a . La section $\hat{\sigma}_a^1$ (resp. $\hat{\sigma}_a^2$) est définie par la donnée des matrices $\hat{\sigma}_{a,i}^1$. (resp. $\hat{\sigma}_{a,i}^2$)

holomorphes inversibles sur $U_i \cap \hat{U}(a)$ et nous avons : sur l'ouvert $U_{i,j}$ ($i \in I$ et $j \in I$)

$$\hat{\sigma}_{a,j}^1 = \hat{\sigma}_{a,i}^1 g_{i,j} \text{ (resp. } \hat{\sigma}_{a,i}^2 = \hat{\sigma}_{a,i}^2 g_{i,j} \text{)}.$$

Ce qui entraîne :

$$(\hat{\sigma}_{a,i}^2)^{-1} \cdot (\hat{\sigma}_{a,j}^2) = g_{i,j} = (\hat{\sigma}_{a,i}^1)^{-1} \cdot (\hat{\sigma}_{a,j}^1).$$

Nous avons donc pour tout i et tout j appartenant à I :

$$\sigma_{a,i}^1 \cdot (\sigma_{a,i}^2)^{-1} = \sigma_{a,j}^1 \cdot (\sigma_{a,j}^2)^{-1} = \hat{\tau}$$

où $\hat{\tau} \in \mathcal{H}_i^{p \times p}(\hat{U}(a))$.

Nous utiliserons le résultat suivant de la théorie des fibrés.

PROPOSITION F. — *Soient \mathcal{B}_1 et \mathcal{B}_2 deux fibrés holomorphes, de même base, de même fibre, de même groupe $\text{Gl}(p, \mathbf{C})$ et ayant de plus les mêmes ouverts de trivialisations locales et dont les transformations coordonnées sont respectivement $g_{i,j}^1$ et $g_{i,j}^2$. Alors ces deux fibrés sont équivalents si et seulement s'il existe pour tout $j \in I$ une application holomorphe $\lambda_j : U_j \rightarrow \text{Gl}(p, \mathbf{C})$ telle que pour tout $i \in I$ et $j \in I$*

$$(1) \quad \lambda_j g_{i,j}^2 = g_{j,i}^1 \lambda_i \quad \text{sur} \quad U_{i,j}.$$

Supposons qu'il existe $\tau \in \mathcal{H}_i^{p \times p}(U(a))$ tel que :

$$\tau|_{\hat{U}(a)} = \hat{\tau}.$$

Alors pour montrer l'équivalence des deux fibrés \mathcal{F}_a^1 et \mathcal{F}_a^2 associés aux sections $\hat{\sigma}_a^1$ et $\hat{\sigma}_a^2$ de $\hat{\mathcal{F}}_a$ nous utilisons la proposition F en posant : pour tout $i \in I$, $\lambda_i =$ identité et $\lambda_a = \tau$. Réciproquement supposons que les deux fibrés \mathcal{F}_a^1 et \mathcal{F}_a^2 soient équivalents, les sections $\hat{\sigma}_a^1$ et $\hat{\sigma}_a^2$ ayant servi à les définir vérifient

$$\hat{\sigma}_a^1 = \hat{\tau} \hat{\sigma}_a^2 \quad \text{où} \quad \hat{\tau} \in \mathcal{H}_i^{p \times p}(\hat{U}(a)).$$

Il reste à montrer qu'il existe $\tau \in \mathcal{H}_i^{p \times p}(U(a))$ tel que :

$$\tau|_{\hat{U}(a)} = \tau.$$

Nous savons que pour tout $i \in I$ il existe λ_i appartenant à $\mathcal{H}_i^{p \times p}(U(a))$ tel que pour tout $i \in I$ et $j \in I$ $\lambda_j g_{j,i}^2 = g_{j,i}^1 \lambda_i$ sur $U_{i,j}$. Mais si i et j appartiennent à I l'égalité

$$g_{j,i}^2 = g_{j,i}^1$$

entraîne que pour tout $i \in I$, $\lambda_i =$ identité. Sur $U_{i,a}$ nous avons :

$$\lambda_a g_{a,i}^2 = g_{a,i}^1 \lambda_i \quad \text{où} \quad \lambda_a \in \mathcal{H}_i^{p \times p}(U(a))$$

Comme

$$g_{a,i}^2 = \hat{\sigma}_{a,i}^2, \quad g_{a,i}^1 = \hat{\sigma}_{a,i}^1$$

nous avons sur $U_{a,i}$

$$\lambda_a \hat{\sigma}_{a,i}^2 = \hat{\sigma}_{a,i}^1$$

et vu la relation qui existe entre ces deux sections :

$$\lambda_a = \hat{\tau} \quad \text{sur} \quad U_{a,i}.$$

En d'autres termes, il existe $\tau \in \mathcal{H}_i^{p \times p}(U(a))$ tel que :

$$\tau|_{\hat{U}(a)} = \hat{\tau}.$$

Ce qui prouve le lemme 3.

LEMME 4. — *Pour tout voisinage épointé $\hat{U}(a)$ de a , il existe une bijonction entre $\mathcal{C}_i(\chi_{\hat{U}(a)}, A \cap U(a), \text{Gl}(p, \mathbf{C}))$ et l'ensemble des sections holomorphes de $\hat{\mathcal{F}}_a$.*

Ce lemme est une conséquence immédiate du théorème F et du fait que $\hat{\mathcal{F}}_a$ est isomorphe à

$$\mathcal{F}'_a = \frac{\mathcal{R}(\hat{U}(a)) \times \text{Gl}(p, \mathbf{C})}{\pi_1(\hat{U}(a))}.$$

COROLLAIRE 4. — *Comme $\mathcal{C}_i(\chi_{\hat{U}(a)}, A \cap U(a), \text{Gl}(p, \mathbf{C})) \neq \emptyset$, il existe en tout point $a \in A$ un prolongement local de $\hat{\mathcal{F}}$ en ce point.*

B. *Recollement des prolongements locaux.*

Pour assurer le recollement des prolongements locaux définis ci-dessus, il suffit de montrer que pour tout $a \in A$ et $b \in A$

tels que les voisinages associés vérifient $U_a \cap U_b \neq \emptyset$, il existe une matrice $g_{a,b}$ holomorphe inversible sur $U_a \cap U_b$ telle que

$$g_{i,j}g_{j,k} = g_{i,k} \quad \text{sur} \quad U_{i,j,k}$$

pour tout i, j, h appartenant à $I \cup A$.

LEMME 5. — Si $U_a \cap U_b \neq \emptyset$, alors pour que les deux prolongements locaux \mathcal{F}_a et \mathcal{F}_b se recollent il faut et il suffit qu'il existe une matrice $g_{a,b} \in \mathcal{H}_i^{p \times p}(U_{a,b})$ telle que pour tout $i \in I$

$$\hat{\sigma}_{a,i} = g_{a,b} \hat{\sigma}_{b,i} \quad \text{sur} \quad U_{a,b,i}$$

où $\hat{\sigma}_a$ (resp. $\hat{\sigma}_b$) désigne la section sur \hat{U}_a de $\hat{\mathcal{F}}_a$ (resp. sur \hat{U}_b de $\hat{\mathcal{F}}_b$) ayant permis de définir \mathcal{F}_a (resp. \mathcal{F}_b). Ce lemme est une simple vérification.

Désignons par \mathcal{A}_a (resp. \mathcal{A}_b) l'image de σ_a (resp. σ_b) par la bijection donnée dans le lemme 4.

LEMME 6. — Pour qu'il existe $g_{a,b} \in \mathcal{H}_i^{p \times p}(U_{a,b})$ vérifiant pour tout $i \in I$

$$\hat{\sigma}_{a,i} = g_{a,b} \hat{\sigma}_{b,i}$$

il faut et il suffit qu'il existe $g_{a,b} \in \mathcal{H}_i^{p \times p}(U_{a,b})$ tel que

$$\mathcal{A}_a = g_{a,b} \mathcal{A}_b$$

Ce lemme se vérifie facilement en utilisant la bijection du lemme 4 et le théorème F.

Mais alors l'existence d'une famille cohérente de solutions locales du problème II entraîne

THÉORÈME 2. — Il existe un fibré \mathcal{F} sur V tel que

$$\mathcal{F}|_{\hat{V}} = \hat{\mathcal{F}}.$$

Donc à toute famille cohérente \mathcal{A} de solutions locales du problème II est associé un fibré holomorphe $\mathcal{F}(\mathcal{A})$ sur V tel que

$$\mathcal{F}(\mathcal{A})|_{\hat{V}} = \hat{\mathcal{F}}.$$

D'autre part les considérations sur les familles cohérentes de solutions locales et les résultats ci-dessus entraînent :

COROLLAIRE 5. — *Si \mathcal{A} et \mathcal{A}' sont deux familles cohérentes de solutions locales équivalentes du problème II, les deux fibrés $\mathcal{F}(\mathcal{A})$ et $\mathcal{F}(\mathcal{A}')$ sont équivalents.*

Nous avons un résultat analogue concernant le fibré $\hat{\mathcal{F}}$.

THÉORÈME 2'. — *Il existe un fibré \mathcal{F}' sur V tel que*

$$\mathcal{F}'|_{\hat{V}} = \hat{\mathcal{F}}.$$

Ce théorème se démontre comme le théorème 2, en utilisant cette fois au voisinage de tout point a de A le fibré principal $\hat{\mathcal{F}}'_a$ associé à $\hat{\mathcal{F}}_a$. On a également le corollaire ci-dessus pour le fibré $\hat{\mathcal{F}}$ et ses prolongements.

6. Étude du problème II'.

Les notations de ce paragraphe sont celles des deux paragraphes précédents. On se propose ici d'étudier le :

PROBLÈME II'. — *Déterminer le sous-ensemble $S'_{II}(\chi, \mathcal{A})$ de $S_I(\chi)$ des applications holomorphes inversibles sur A pour la famille cohérente de solutions locales \mathcal{A} .*

Remarque 6. — Comme la notion d'holomorphie pour un élément de $S_I(\chi)$ par rapport à une famille cohérente de solutions locales \mathcal{A} ne dépend pas que de sa classe d'équivalence $\tilde{\mathcal{A}}$, l'ensemble $S'_{II}(\chi, \mathcal{A})$ ne dépend que de $\tilde{\mathcal{A}}$ et pour cette raison il sera noté $S'_{II}(\chi, \tilde{\mathcal{A}})$. Nous avons :

THÉORÈME A_{II'}. — *Il existe un fibré $\mathcal{F}(\tilde{\mathcal{A}})$ sur V et un seul à une isomorphie près tel que :*

$$1^\circ \mathcal{F}(\tilde{\mathcal{A}})|_{\hat{V}} = \hat{\mathcal{F}};$$

2° *il existe une bijection naturelle entre $S'_{II}(\chi, \tilde{\mathcal{A}})$ et l'ensemble des sections holomorphes du fibré $\hat{\mathcal{F}}$.*

Existence. — A l'élément $\mathcal{A} \in \tilde{\mathcal{A}}$ est associé un fibré $\mathcal{F}(\mathcal{A})$ sur V tel que $\mathcal{F}(\mathcal{A})|_{\hat{V}} = \hat{\mathcal{F}}$.

Montrons que ce fibré possède la propriété 2 du théorème A_{II}.

Soit Φ un élément de $S'_{II}(\chi, \tilde{\mathcal{A}})$. Pour tout $a \in A$ et toute composante connexe c_a de $\psi^{-1}(\hat{U}_a)$, nous avons :

$$\Phi|_{c_a} = W_a \mathcal{A}_a \quad \text{où} \quad W_a \in \mathcal{H}_i^{p \times p}(U_a).$$

Comme Φ est solution du problème I, il lui est associé une section $\hat{\sigma}$ de $\hat{\mathcal{F}}$ définie par la collection $(\hat{\sigma}_i)_{i \in I}$ où pour tout i , $\hat{\sigma}_i$ est une application holomorphe de U_i dans $Gl(p, \mathbf{C})$ telle que pour tout $i \in I$ et $j \in I$ l'on ait :

$$\hat{\sigma}_j = \hat{\sigma}_i g_{i,j}.$$

Montrons maintenant que l'hypothèse $\Phi \in S'_{II}(\chi, \tilde{\mathcal{A}})$ entraîne que $\hat{\sigma}$ se prolonge en une section holomorphe de $\mathcal{F}(\mathcal{A})$. La section $\hat{\sigma}$ définit une section $\hat{\sigma}_a$ de $\hat{\mathcal{F}}_a$ sur \hat{U}_a ; celle-ci est bien définie par la restriction de Φ à c_a car on passe d'une composante connexe de $\psi^{-1}(\hat{U}_a)$ à une autre par une opération de $\pi_1(\hat{V})$. Posons, pour tout $i \in I$ et $a \in A$

$$\begin{array}{l} \sigma_a^i = \sigma_i \quad \text{sur} \quad U_{i,a} \\ \sigma_a^a = W_a \quad \text{sur} \quad U_a. \end{array}$$

Ces matrices définissent une section σ_a de \mathcal{F}_a sur U_a , en effet pour tout i et j appartenant à $I \cup \{a\}$ nous avons :

$$(1) \quad \sigma_a^j = \sigma_a^i g_{i,j} \quad \text{sur} \quad U_{i,j,a}$$

car

1° si $i \in I$ et $j \in I$ la relation (1) est évidente;

2° si $i = a$ et $j \in I$, l'égalité (1) se réduit à

$$\sigma_a^j = \sigma_a^a g_{a,j} = W_a g_{a,j} = W_a \tau_a^j$$

où τ_a^j est la section définie par \mathcal{A}_a (celle qui permet le prolongement local au point a cf. § 5). Mais alors comme

$$\Phi|_{c_a} = W_a \mathcal{A}_a$$

l'égalité ci-dessus est vérifiée.

3° Si $j = a \in A$ et $i \in I$ la vérification se fait comme dans le 2°.

4° Si $i = j = a \in A$ la relation (1) se réduit à

$$\sigma_a^a = \sigma_a^a \quad \text{car} \quad g_{a,a} = \text{identité.}$$

La donnée de la collection $\{\sigma_i\}_{i \in I \cup A}$ et du recouvrement $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in I \cup A}$ définit une section holomorphe du fibré $\mathcal{F}(\mathcal{A})$. En effet pour qu'il en soit ainsi, il suffit de vérifier que pour tout $i \in I \cup A$ et tout $j \in I \cup A$ nous avons :

$$\sigma_j = \sigma_i g_{i,j} \quad \text{sur} \quad U_{i,j}.$$

Mais vu les considérations ci-dessus, il suffit de vérifier cette relation pour $i = b \in A$ et $j = a \in A$.

Avec ces notations nous avons à vérifier que

$$\sigma_b = \sigma_a g_{a,b} \quad \text{sur} \quad U_{a,b}.$$

C'est-à-dire que l'on doit avoir

$$W_b = W_a g_{a,b} \quad \text{sur} \quad U_{a,b}$$

ou sur

$$\psi^{-1}(U_{a,b}) \cap c_a = \psi^{-1}(U_{a,b}) \cap c_b.$$

Or celle-ci est vérifiée vu la définition de $g_{a,b}$ (cf. § 5) et la relation

$$W_b = W_a \mathcal{A}_a(\mathcal{A}_b)^{-1}.$$

Donc toute solution du problème II' donne une section holomorphe du fibré $\mathcal{F}(\mathcal{A})$.

Réciproque. — Soit σ une section holomorphe de $\mathcal{F}(\mathcal{A})$, alors $\hat{\sigma} = \sigma|_{\hat{V}}$ est une section holomorphe de $\hat{\mathcal{F}}$, à cette section est associée une solution Φ du problème I. Il reste à vérifier que cette solution Φ est holomorphe inversible sur A pour la famille cohérente de solutions locales \mathcal{A} . Pour tout $a \in A$, la section σ est définie sur U_a par une matrice holomorphe inversible σ_a . Mais comme pour toute composante connexe c_a de $\psi^{-1}(\hat{U}_a) \subset \mathcal{R}(\hat{V})$. On a :

$$\Phi|_{c_a} = W_a \mathcal{A}_a \quad \text{où} \quad W_a \in \mathcal{H}_i^{p \times p}(\hat{U}_a).$$

Il résulte que $\hat{\sigma}_a = \sigma_a|_{\hat{U}_a}$ est la section de $\hat{\mathcal{F}}_a$ associée à l'application $W_a \mathcal{A}_a$ et cette section se prolonge au fibré \mathcal{F}_a à l'aide de la matrice holomorphe inversible σ_a sur U_a .

Nous avons pour tout $i \in I$ et $a \in A$:

$$\sigma_i = \sigma_a g_{a,i} \quad \text{sur} \quad U_{a,i}$$

c'est-à-dire que :

$$W_a \mathfrak{A}_a | \psi^{-1}(U_{a,i}) \cap c_a = \sigma_a \mathfrak{A}_a | \psi^{-1}(U_{a,i}) \cap c_a$$

En d'autres termes, pour tout $i \in I$

$$W_a = \sigma_a \quad \text{sur} \quad U_{a,i}$$

En particulier

$$W_a = \sigma_a \quad \text{sur} \quad \hat{U}_a.$$

Ce qui prouve que W_a est la restriction à \hat{U}_a d'une matrice holomorphe inversible sur U_a , ceci étant valable pour tout $a \in A$ l'application Φ est holomorphe inversible sur A pour la famille cohérente de solutions locales \mathfrak{A} .

L'unicité du fibré à une isomorphie près résulte du fait que deux familles cohérentes de solutions locales équivalentes donnent des fibrés isomorphes et que la notion d'holomorphie ne dépend que des classes d'équivalence de familles cohérentes de solutions locales.

À côté du théorème A_{III}, on peut également énoncer un théorème concernant le fibré $\hat{\mathfrak{F}}$. Notons \mathfrak{A}^0 la famille cohérente de solutions locales du problème II construite dans le lemme 2 du paragraphe 4.

THÉORÈME B_{III}. — *Il existe un fibré $\mathfrak{F}'(\tilde{\mathfrak{A}}^0)$ sur V et un seul à une isomorphie près tel que :*

1° $\mathfrak{F}'(\tilde{\mathfrak{A}}^0) | \hat{V} = \hat{\mathfrak{F}}'$.

2° *Il existe un isomorphisme entre le module $\mathcal{C}^A(\chi, A, \mathfrak{M}(p, \mathbf{C}))$ et le module des sections méromorphes de $\mathfrak{F}'(\tilde{\mathfrak{A}}^0)$ ayant au plus une singularité polaire sur A .*

3° *Il existe une bijection entre le sous-ensemble de $\mathcal{C}^A(\chi, A, \mathfrak{M}(p, \mathbf{C}))$ des éléments holomorphes inversibles sur A pour $\tilde{\mathfrak{A}}^0$ et les sections holomorphes de $\mathfrak{F}'(\tilde{\mathfrak{A}}^0)$.*

Ce théorème donne donc une interprétation très simple de la notion de classes de Riemann, il est bien entendu possible d'énoncer des résultats analogues concernant $\mathcal{C}(\chi, A, \mathfrak{M})$ et $\mathcal{C}_i^A(\chi, A, \mathfrak{M}(p, \mathbf{C}))$.

7. Étude du problème II.

Rappelons l'énoncé de ce problème :

Problème II. — Déterminer l'ensemble $S_{\Pi}(\chi)$ des applications $\Phi \in \mathcal{H}_i^{p \times p}(\mathcal{R}(V))$ réalisant la représentation χ et qui vérifie de plus $d\Phi\Phi^{-1} \in \Omega^{p \times p}(V, A)$.

La condition $\Phi\Phi^{-1} \in \Omega^{p \times p}(V, A)$ peut être remplacée par la suivante :

« Les colonnes de Φ engendrent un sous-espace vectoriel de dimension finie p de $\mathcal{H}^{p \times 1}(\mathcal{R}(V))$ faiblement singulier sur A . »

Notons \mathcal{A}^0 la famille cohérente de solutions locales du problème II construite dans le lemme 2 du § 4 et $\mathcal{F}(\mathcal{A}^0)$ le fibré sur V qui lui est associé. Nous avons :

THÉORÈME A_{II}. — *Il existe une injection de $S_{\Pi}(\chi)$ dans l'ensemble des sections méromorphes sans singularité sur \hat{V} du fibré $\mathcal{F}(\mathcal{A}^0)$.*

Ce théorème résulte du théorème B_{II}, du § 6 car toute matrice Φ vérifiant $d\Phi\Phi^{-1} \in \Omega^{p \times p}(V, A)$ est d'ordre fini sur A . Soit a un point de A et $U(a) = U_a$ le voisinage de a choisi comme nous l'avons indiqué dans le paragraphe 6. Nous noterons \mathcal{S}_{U_a} l'ensemble des applications holomorphes de U_a dans $Gl(p, \mathbf{C})$ de la forme :

$$W_a \prod_{j=1}^{n_a} Q_j^{A_j} K_a$$

où

$$W_a \in \mathcal{H}_i^{p \times p}(U(a)).$$

K_a est une matrice complexe régulière.

A_j^a est pour tout $j = 1, 2, \dots, n_a$ une matrice diagonale à coefficients entiers, telle que

$$\prod_{j=1}^{n_a} (f_j^a)^{A_j^a} K_a (\chi_{\hat{V}(a)}(g)_k) K_a^{-1} \prod_{j=1}^{n_a} (f_j^a)^{-A_j^a} \in \mathcal{H}^{p \times p}(U(a)).$$

Enfin notons \mathcal{C} l'ensemble des sections de \mathcal{F} telle que pour

tout $a \in A$, il existe un voisinage $U(a)$ de a dans V tel que

$$\sigma|_{\hat{U}(a)} \in \mathfrak{S}_{\hat{U}(a)}.$$

THÉORÈME B_{II}. — *Il existe une bijection entre $S_{II}(\chi)$ et l'ensemble des sections de $\mathfrak{F}(\mathcal{A}^0)$ appartenant à \mathfrak{S} .*

Démonstration. — Dans cette démonstration nous utiliserons les résultats de [1] (chap. I).

Soit Φ un élément de $S_{II}(\chi)$, nous savons que Φ est une solution du problème I, il lui est donc associée une section σ du fibré $\hat{\mathfrak{F}}$.

Comme Φ engendre un sous-espace vectoriel E de $\mathcal{H}^{p \times 1}(\mathcal{R}(V))$ de dimension finie p et faiblement singulier sur A , il existe pour tout $a \in A$ un voisinage $U(a)$ dans V tel que pour toute composante connexe c_a de $\psi^{-1}(\hat{U}(a))$ de $\mathcal{R}(\hat{V})$ l'on ait :

$$\Phi|_{c_a} = W_a \prod_{j=1}^{n_a} Q_j^{A^a} \prod_{j=1}^{n_a} Q_j^{F^a} K_a \quad \text{où} \quad K_a \in \text{Gl}(p, \mathbf{C})$$

(cf. [1], nous utilisons une base adaptée pour engendrer E). Nous supposons dans la suite que le voisinage $U(a)$ est choisi tel qu'il joue le rôle du voisinage U_a des paragraphes précédents. Pour simplifier l'écriture nous poserons dans la suite pour tout B_1, B_2, \dots, B_{n_a}

$$Q^B = \prod_{j=1}^{n_a} Q_j^{B_j}.$$

Nous savons que la matrice

$$Q^{A^a} \cdot Q^{F^a}$$

réalise la représentation $\chi_{\hat{U}(a)}$.

D'autre part, pour tout $i = 1, 2, \dots, n_a$, nous avons :

$$A_j^a = \tilde{A}_j^a + \bar{A}_j^a$$

où \bar{A}_j^a est une matrice diagonale décomposée en blocs dont chacun est un multiple de l'identité.

A_j^a est une matrice diagonale à coefficients entiers ayant

certaines propriétés (cf. [1], chap. 1). Nous savons que :

$$\bar{A}_j^a + F_j^a = \frac{1}{2\pi i} \log . D_j^a$$

donc

$$\Phi|_{c_a} = W_a Q^{\tilde{A}^a} \times Q^{\frac{1}{2\pi i} \log . D_j^a}$$

Du fait que Φ réalise $\chi_{\hat{\sigma}(a)}$, on en déduit que pour tout $j = 1, 2, \dots, n_a$

$$D_j^a K_a = K_a G_j^a.$$

D'autre part, comme Φ est solution du problème II en se référant à ce qui a été fait dans [1] (chap. 1), on voit que pour tout $j = 1, 2, \dots, n_a$

$$Q^{A^a} D_j^a Q^{-A^a}$$

est holomorphe sur $U(a)$.

Mais alors en revoyant la décomposition en blocs de ces matrices telle qu'elle a été utilisée dans [1] (chap. 1, § 3), on en déduit que

$$Q^{\tilde{A}^a} D_j^a Q^{-\tilde{A}^a}$$

est holomorphe sur $U(a)$.

Donc :

$$\begin{aligned} Q^{A^a} \times K_a \times G_j^a \times K_a^{-1} \times Q^{-A^a} \\ = Q^{A^a} \times K_a \times \chi_{\hat{\sigma}(a)}(g_j^a) \times K_a^{-1} \times Q^{-A^a} \end{aligned}$$

est holomorphe sur $U(a)$.

Nous avons donc :

$$\begin{aligned} \Phi|_{c_a} &= W_a \times Q^{\tilde{A}^a} \times Q^{\frac{1}{2\pi i} \log . D_j^a} \\ &= W_a Q^{\tilde{A}^a} K_a \mathfrak{b}_a^0 \end{aligned}$$

Mais, alors si on revoit comment on a prolongé à $\mathcal{F}(\mathfrak{b}^0)$ la section $\hat{\sigma}$, on constate que pour faire ce prolongement on prend :

$$\sigma_a = W_a Q^{\tilde{A}^a} K_a.$$

Ce qui prouve la partie directe du théorème B_{II}.

La réciproque est facile. Soit σ une section de $\mathcal{F}(\mathcal{A}^0)$ appartenant à \mathcal{C} , alors

$$(1) \quad \sigma_a = W_a Q \tilde{X}^a K_a \quad \text{sur} \quad U_a$$

et reprenant les calculs ci-dessus, on voit que si Φ est la solution du problème I associée à la section $\hat{\sigma} = \sigma|_{\hat{V}}$ de $\hat{\mathcal{F}}$, celle-ci vérifiée pour tout $a \in A$ et toute composante connexe c_a de $\psi^{-1}(\hat{U}_a) \subset \mathcal{R}(\hat{V})$.

$$d(\Phi|_{c_a})(\Phi|_{c_a})^{-1} \in \Omega^{p \times p}(U_a, A \cap U_a)$$

et donc :

$$d\Phi \cdot \Phi^{-1} \in \Omega^{p \times p}(V, A).$$

Remarquons que nous avons supposé implicitement que l'ouvert U_a est celui que l'on ajoute au recouvrement \hat{U} de \hat{V} pour faire le prolongement de $\hat{\mathcal{F}}$ au point a et que sur cet ouvert l'on a également (1), on peut toujours supposer qu'il en est ainsi.

8. Conclusions sur le problème de Riemann-Hilbert sur une variété analytique complexe.

Dans le cas où V est une surface de Riemann, H. Röhrl a donné une solution complète de ce problème.

Si V est une variété de Stein contractile alors chaque fibré $\mathcal{F}(\mathcal{A})$ admet une section continue et donc une section holomorphe d'après un théorème de H. Grauert [7]. Il en résulte que $S'_H(\chi) \neq \emptyset$, ce qui veut dire que le problème de Riemann Hilbert admet toujours une solution sur une variété de Stein contractile.

Il en est de même si V n'est plus contractile mais si un des fibrés $\mathcal{F}(\mathcal{A})$ admet une section continue.

Il reste un cas intéressant à étudier c'est celui où V est un espace projectif complexe; on a quelques résultats dans ce sens concernant le plan projectif complexe et le problème de Riemann Hilbert lié aux fonctions hypergéométriques [8].

BIBLIOGRAPHIE

- [1] R. GÉRARD, Théorie de Fuchs sur une variété analytique complexe (Thèse), *Journal de Math. pures et appliquées*, 47 (1968), 321 à 404.
- [2] R. GÉRARD, *C.R. Acad. Sci.*, Paris, t. 264, 1133-1136 (19 juin 1967).
- [3] H. ROHRL, Das Riemann Hilbert Problem der Theorie des linearen Differentialgleichungen, *Math. Ann.*, Bd. 133 (1957).
- [4] H. J. NASTOLD, Über meromorpher Schnitte complex-analytischer Vektorraumbündel und Anwendungen auf Riemannschen Klassen, *Math. Zeitschr.*, Bd 69 (1958).
- [5] N. STEENROD, The topology of fibre bundles, *Princeton University Press* (1951).
- [6] H. CARTAN, Séminaire E.N. 2^e année, 1949-1950, Espaces fibrés et homotopie.
- [7] H. GRAUERT, Analytischer Faserungen über holomorph-vollständigen Räumen, *Math. Ann.*, Bd 135 (1958).
- [8] E. PICARD, Sur une extension aux fonctions de deux variables du problème de Riemann relatif aux fonctions hypergéométriques, *Ann. de l'Ecole Normale Supérieure*, 2^e série, t. X (1881) et *C.R. Acad. Sci.*, t. X (1881) et *C.R. Acad. Sci.*, t. XC (1880), p. 1267.

Manuscrit reçu le 10 mars 1969.

R. GÉRARD,
Institut de Recherche Mathématique Avancée,
U.E.R. de Metz,
67-Strasbourg.
