ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

ÉMILE COTTON

Sur la représentation asymptotique du potentiel newtonien

Annales de l'institut Fourier, tome 1 (1949), p. 13-25

<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1949__1__13_0>

SUR LA REPRÉSENTATION ASYMPTOTIQUE DU POTENTIEL NEWTONIEN

par Émile COTTON †.

Introduction [1]. — Le terme de rang l, V_l, de la série donnant la représentation asymptotique d'un potentiel newtonien est une somme de produits de deux facteurs ; l'un de ces facteurs dépend uniquement du point potentié ; le second ne dépend que du système agissant, c'est un moment supérieur d'ordre l de la géométrie des masses. On appelle ainsi toute expression analogue aux moments et produits d'inertie d'un système matériel, mais où une forme (polynome homogène) de degré l remplace les formes du second degré des coordonnées d'un point agissant.

Dans les pages suivantes, nous montrons d'abord que si l'on réduit au minimum le nombre des termes de la somme donnant V_l, les moments supérieurs en question appartiennent à une classe particulière, (*moments harmoniques*), celle où les formes intervenant dans le calcul satisfont à l'équation de Laplace.

[1] Les numéros entre crochets dans le texte indiquent les renvois suivants :

1. Appell, *Traité de Mécanique rationnelle*, t. III.
2. Goursat, *Cours d'Analyse*, t. III.
3. Maxwell, *Traité d'Electricité et de Magnétisme* (traduction française de Seligmann-Lui).
4. Poincaré, *Théorie du potentiel newtonien*.
5. Sylvester, *Note on Spherical Harmonics. Philosophical Magazine 5e série* vol, II p. 251.
6. Reye, *Trägheits und höhere Momente*... Journal de Crelle, t. 72, p. 293 ; t. 78, p. 97. Le résumé de l'*Encyclopédie des Sciences Mathématiques éd. française*, t. IV, vol. II. fasc. I, peut suffire.
7. Wavre, *Figures planétaires et géodésie. Cahiers scientifiques, fasc.* XII.
8. E. Cotton, *Système de bivecteurs associé à un cycle. Comptes rendus*, t. 226, 1948, p. 1564.
9. Guillaumin, *Sur la géométrie intégrale du contour gauche* (*Comptes rendus*, t. 227, 1948, p. 39 et 109).

Le cas particulier, important en Electromagnétisme, de l'angle solide sous lequel on voit d'un point M une courbe fermée, C, est ensuite étudié. Le calcul des intégrales doubles donnant les moments harmoniques se ramène alors à celui d'intégrales curvilignes prises le long de C ; dans les expressions de Pfaff figurant sous le signe intégral les coefficients des différentielles des coordonnées sont encore des formes d'ordre l.

La fin de cette article concerne la représentation géométrique si élégante que Maxwell a donnée des harmoniques solides.

1. **Préliminaires. Formes symboliques.** — Le potentiel en un point M (point potentié) correspondant à des éléments agissants situés tous à distance finie de l'origine O des axes rectangulaires, est une fonction harmonique V des coordonnées a, b, c, de ce point supposé extérieur au système agissant. Lorsque la distance $OM = \rho$ est assez grande, V est développable en une série triple dont le terme général V_{mnp} est le produit de $\dfrac{\partial^{m+n+p}\frac{1}{\rho}}{\partial a^m \partial b^n \partial c^p}$ par un facteur indépendant de a, b, c, [4, ch. I ; 2, ch. XXVIII]. En groupant dans cette série les termes correspondant aux dérivées du même ordre $l = m + n + p$, on la tranforme en une série simple ΣV_l que nous appelons le *développement asymptotique du potentiel*. Si, comme nous le supposons, V s'annule à l'infini, le premier terme V_0 est le produit de $\dfrac{1}{\rho}$ par un facteur M (la masse totale) indépendant de a, b, c. Pour $l > 0$, V_l est un *polynome harmonique inverse d'ordre* $-(l+1)$, en appelant ainsi, avec M. Wavre [7], tout polynome se déduisant par inversion, de centre O, d'un polynome harmonique d'ordre l.

Soit $F(\xi, \eta, \zeta)$ un polynome homogène (une forme) de degré l en ξ, η, ζ et f une fonction des variables a, b, c, nous donnerons au produit Ff le sens symbolique suivant, d'un usage courant en Analyse.

Le produit étant effectué suivant les règles de l'Algèbre élémentaire, on remplace chaque monome $\xi^m \eta^n \zeta^p f$ par $\dfrac{\partial^l f}{\partial a^m \partial b^n \partial c^p}$; nous dirons que F est une *forme symbolique* de degré l. Les coefficients de cette forme peuvent dépendre d'autres variables x, y, z indépendantes de a, b, c.

Deux formes symboliques de même degré F, G seront dites *harmoniquement équivalentes* (ou, plus brièvement, *équivalentes* (H) si pour toute fonction f satisfaisant à l'équation de Laplace $(\xi^2+\eta^2+\zeta^2)f=0$, on a $\mathrm{F}f=\mathrm{G}f$.

Le produit $(\alpha\xi+\beta\eta+\gamma\zeta)f$ où α, β, γ sont les cosinus directeurs d'un axe δ est la dérivée de f suivant δ. Nous verrons plus loin que toute forme symbolique F d'ordre l est équivalente (H) au produit par une constante de l formes linéaires symboliques telles que la précédente.

Soit $\mathrm{F}_l(\xi, \eta, \zeta)$ une forme de degré l, et $\mathrm{G}_l(\xi, \eta)+\zeta\mathrm{G}_{l-1}(\xi, \eta)$ le reste de la division de F_l considérée comme polynome en ζ par $\zeta^2+\xi^2+\eta^2$; ce reste peut s'obtenir en remplaçant ζ^2 par $-(\xi^2+\eta^2)$, ζ^3 par $-\zeta(\xi^2+\eta^2)$, ζ^4 par $(\xi^2+\eta^2)^2$, etc. G_l, G_{l-1} sont des formes symboliques de degrés respectifs l, $l-1$ et F_l est équivalent (H) a $\mathrm{G}_l+\zeta\mathrm{G}_{l-1}$.

D'après cela, toute forme symbolique de degré l équivaut (H) à une forme linéaire de $2l+1$ d'entre elles que nous appelerons les *formes symboliques fondamentales*,. Le choix le plus simple pour les applications qui vont suivre, consiste à prendre les monomes symboliques fondamentaux $\dfrac{(-1)^l}{m!\,n!}\xi^m\eta^n\zeta^p$, $(p=0,1 : m+n+p=l)$.

En effectuant sur la fonction harmonique $\dfrac{1}{\rho}$ les opérations correspondant à ces monomes symboliques, nous aurons les *polynomes harmoniques inverses fondamentaux d'ordre* $-(l+1)$

$$(1)\qquad \mathrm{A}_{mnp}=\frac{(-1)^l}{m!\,n!}\xi^m\eta^n\zeta^p\frac{1}{\rho}\qquad (p=0,1\,;\quad m+n+p=l).$$

Tout polynome harmonique inverse d'ordre $-(l+1)$ s'exprime d'une façon linéaire et homogène au moyen des A_{mnp}. Il en est ainsi notamment pour le terme général

$$\mathrm{U}_l=\frac{(-1)^l}{l!}(x\xi+y\eta+z\zeta)^l\frac{1}{\rho}$$

du développement asymptotique de $\dfrac{1}{r}$ où r désigne la distance MP du point potentié M au point agissant P (de coordonnées x, y, z). Nous poserons

$$(2)\qquad \mathrm{U}_l=\Sigma\mathrm{B}_{mnp}\mathrm{A}_{mnp}\qquad (p=0,1\,;\quad m+n+p=l)$$

Les coefficients B sont des polynomes homogènes de degré l en

x, y, z qui *interviennent constamment dans la suite :* nous dirons qu'ils sont *associés* aux polynomes harmoniques inverses fondamentaux. On a ainsi

$$U_1 = -(x\xi + y\eta + z\zeta)\frac{1}{\rho} = xA_{100} + yA_{010} + zA_{001};$$
$$B_{100} = x, \qquad B_{010} = y, \qquad B_{001} = z.$$

$$U_2 = \frac{1}{2}(x\xi + y\eta + z\zeta)^2\frac{1}{\rho}$$
$$= \left[\frac{1}{2}(x\xi + y\eta)^2 + (x\xi + y\eta)z\zeta - \frac{1}{2}(\xi^2 + \eta^2)z^2\right]\frac{1}{\rho}$$
$$= (x^2 - z^2)\frac{1}{2}\xi^2\frac{1}{\rho} + xy\xi\eta\frac{1}{\rho} + (y^2 - z^2)\frac{1}{2}\eta^2\frac{1}{\rho} + xz\xi\zeta\frac{1}{\rho} + yz\eta\zeta\frac{1}{\rho},$$

d'où

$$B_{200} = x^2 - z^2, \quad B_{020} = y^2 - z^2, \quad B_{110} = xy, \quad B_{101} = xz, \quad B_{011} = yz.$$

On obtient de même les expressions :

$$B_{300} = x^3 - 3xz^2, \qquad B_{210} = (x^2 - z^2)y, \qquad B_{120} = (y^2 - z^2)x,$$
$$B_{030} = y^3 - 3yz^2, \qquad B_{201} = \frac{3x^2z - z^2}{3},$$
$$B_{111} = xyz, \qquad B_{021} = \frac{3y^2z - z^3}{3}.$$

On pourrait écrire les expressions explicites des B pour l quelconque ; nous n'aurons pas à les utiliser. Mais nous allons démontrer que *tous les polynomes* B *sont harmoniques,* c'est-à-dire vérifient l'équation de Laplace $D_2B = 0$, D_2 désignant le symbole

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

On le vérifie immédiatement pour $l \leq 3$. Soit ensuite f une fonction harmonique de a, b, c ; il en est de même pour $(x\xi + y\eta + z\zeta)^l f$ quel que soit l ; d'autre part

$$D_2(x\xi + y\eta + z\zeta)^l f = l(l-1)(x\xi + y\eta + z\zeta)^{l-2}(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2)f = 0.$$

La division de $(x\xi + y\eta + z\zeta)^l$ par $\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2$ considérés tous deux comme des polynomes en ζ donne un quotient Q et un reste $R(x, y, z, \xi, \eta, \zeta)$ du premier degré en ζ, d'où, f étant harmonique

$$D_2(x\xi + y\eta + z\zeta)^l f = D_2Q(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2)f + D_2Rf = D_2Rf = 0.$$

D'ailleurs $\frac{(-1)^l}{l!}\,\mathrm{R}f = \Sigma \mathrm{B}_{mnp}\overline{\mathrm{A}}_{mnp}$ les B étant les mêmes polynomes que plus haut et les $\overline{\mathrm{A}}$ donnés par

$$\overline{\mathrm{A}}_{mnp} = \frac{(-1)^l}{l!}\,\xi^m \eta^n \zeta^p f \quad (p = 0, 1\ ;\ m+n+p = l)$$

on a $\Sigma\overline{\mathrm{A}}_{mnp}\mathrm{D}_2\mathrm{B}_{mnp} = 0$, quelle que soit la fonction harmonique $f(a, b, c)$. Prenons pour f un polynome harmonique homogène de degré l ; comme il en existe $2l+1$ linéairement indépendants, les coefficients $\mathrm{D}_2\mathrm{B}_{mnp}$ sont nuls comme nous l'avons annoncé.

2. **Moments harmoniques. — Changement des axes de coordonnées.** — Passons au cas d'un système agissant composé de points P discrets, chacun d'eux étant affecté d'une masse μ (positive ou négative), le potentiel est donné par

$$\mathrm{V} = \Sigma \mathrm{V}_l, \qquad \mathrm{V}_l = \Sigma \mathrm{A}_{mnp}\mathrm{S}\mu \mathrm{B}_{mnp} \qquad (p = 0, 1\ ;\ m+n+p = l)$$

S désignant une addition étendue à tous les points P.

Si le système agissant est constitué par des *masses réparties* soit dans un volume, soit sur une surface ou sur une ligne, on a pour le potentiel une expression analogue à la précédente en remplaçant les sommes S par des intégrales $\int \mathrm{B}(x, y, z)\, d\mu$ où $d\mu$ est le produit de la mesure de l'élément infiniment petit de volume, de surface ou de ligne, où est situé P, par la densité en ce point.

On trouve dans les ouvrages classiques [4, n° 25 ; 2, Ch. XXVIII] l'énoncé d'une condition à laquelle il suffit que ρ satisfasse pour que l'expression asymptotique $\Sigma \mathrm{V}_l$ soit valable.

Dans la géométrie des masses, on appelle moments supérieurs d'ordre l les expressions $\mathrm{S}\mu \mathrm{C}(x, y, z)$, $\int \mathrm{C}(x, y, z)d\mu$, ou C désigne un polynome homogène quelconque de degré l. Ils ont été introduits par Reye[6]. Ceux que nous venons de rencontrer constituent une classe particulière, puisque les C satisfont à l'équation de Laplace ; nous les appellerons *moments harmoniques* d'ordre l ; la masse totale correspondant à $l = 0$ sera appelée le moment d'ordre zéro.

Le *développement asymptotique d'un potentiel dépend* non seulement du milieu agissant, mais aussi *des axes de coordonnées choisis*. Quand on prend de nouveaux axes, $\mathrm{O}'x'y'z'$, les nouvelles coordonnées du point potentié M étant a', b', c', les nouveaux polynomes inverses fondamentaux d'ordre l sont

$$A'_{mnp} = \frac{(-1)^l}{m!\ n!} \frac{\partial^l \frac{1}{\rho'}}{\partial a'^m \partial b'^n \partial c'^p} \qquad (p = 0, 1\ ;\ m+n+p = l).$$

Les nouveaux moments harmoniques fondamentaux

$$S\mu B(x', y', z'), \quad \int B(x', y', z') d\mu$$

se calculent en fonction des anciens en appliquant les formules du changement de coordonnées.

Si l'on change d'abord la direction des axes, sans changer l'origine, les nouveaux moments fondamentaux d'ordre l sont des fonctions linéaires et homogènes des anciens moments d'ordre l.

Quand on passe des axes Ox, Oy, Oz à des axes parallèles $O'x'$, $O'y'$, $O'x'$, issus d'une origine différente, O', de coordonnées x_0, y_0, z_0 on calcule $B(x', y', z') = B(x - x_0, y - y_0, z - z_0)$ par la formule de Taylor ; comme les dérivées d'une fonction harmonique sont encore harmoniques, les nouveaux moments harmoniques d'ordre l s'expriment linéairement en fonction des anciens moments harmoniques d'ordres 0, 1, 2, ..., l ; de plus le coefficient de $S\mu B(x, y, z)$ est égal à l'unité.

$$S\mu B(x', y', z') = S\mu B(x, y, z) - x_0 S\mu \frac{\partial B(x, y, z)}{\partial x} \\ - y_0 S\mu \frac{\partial B(x, y, z)}{\partial y} - z_0 S\mu \frac{\partial B(x, y, z)}{\partial z} + \cdots.$$

On a utilisé le changement d'axes pour donner aux premiers termes du développement asymptotique une forme réduite simple ; dans la théorie de la gravitation (masses toutes positives) on prend comme axes de coordonnées les axes de l'ellipsoïde d'inertie relatif au centre de gravité [1, Ch. XXIX]. Pareil choix n'est plus possible si la masse totale est nulle, mais on peut alors en général utiliser la forme réduite de Maxwell [3, t. II, n° 392]. Elle cesse d'être applicable si les moments du premier ordre $S\mu x$, $S\mu y$, $S\mu z$ sont nuls eux aussi (système indifférent d'ordre I).

On peut imaginer des systèmes où les moments harmoniques d'ordre inférieur à l sont nuls, ceux d'ordre l ne l'étant pas tous. Un tel système sera dit *harmoniquement indifférent d'ordre* $l - 1$; on remarquera que *ses moments harmoniques d'ordre l ne changent pas lors d'une translation des axes de coordonnées.*

Pour un système agissant indifférent d'ordre $l-1$, le potentiel en M est, lorsque M s'éloigne à l'infini sur une droite passant par O, infiniment petit d'ordre l par rapport à $\frac{1}{\rho}$; ($\rho = \mathrm{OM}$).

Cette indifférence harmonique est analogue à celle de Reye [6], mais moins restrictive. Par exemple pour $l=3$, l'indifférence harmonique se traduit par

$$S\mu = S\mu x = S\mu y = S\mu z = S\mu yz = S\mu zx = S\mu xy = 0\,;$$
$$S\mu(x^2 - z^2) = S\mu(y^2 - z^2)\ 0$$

et pour exprimer l'indifférence de Reye, il faut 10 équations qu'on écrit en remplaçant les deux équations du second groupe par

$$S\mu x^2 = S\mu y^2 = S\mu z^2 = 0.$$

Étant donné un système S harmoniquement indifférent d'ordre $l-1$, on en déduit d'abord un système S' en multipliant toutes les masses par -1, puis un système S'' par translation de S'. Le système S formé par la réunion de S et de S'' est harmoniquement indifférent d'ordre l (au moins).

3. **Potentiel d'un ensemble de doublets.** — Le potentiel en M d'un doublet (on dit aussi dipol ou aimant élémentaire), placé en P de mesure ν, d'axe δ, est

$$W = \nu\frac{d\frac{1}{r}}{d\delta} = \alpha\nu\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x} + \beta\nu\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial y} + \gamma\nu\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial z},$$

x, y, z désignent toujours les coordonnées de P; α, β, γ sont les cosinus directeurs de δ.

Le développement asymptotique de W se déduit de celui de $\frac{1}{r}$ par dérivation terme à terme

$$W = \sum_{l=1}^{\infty} W_l, \qquad W_l = \alpha\nu\frac{\partial U_l}{\partial x} + \beta\nu\frac{\partial U_l}{\partial y} + \gamma\nu\frac{\partial U_l}{\partial z},$$

ou en remplaçant U_l par son expression (2)

$$W_l = \Sigma\left(\alpha\nu\frac{\partial B_{mnp}}{\partial x} + \beta\nu\frac{\partial B_{mnp}}{\partial y} + \gamma\nu\frac{\partial B_{mnp}}{\partial z}\right), \quad (p = 0, 1\,;\ m+n+p = l).$$

Le développement asymptotique du *potentiel* V *d'un système de doublets* placés en des points discrets ou répartis d'une façon continue, se déduit de là par des additions ou des intégrations.

Posons

$$V = \sum_{l=1}^{\infty} V_l, \qquad V_l = \Sigma C_{mnp} A_{mnp} \qquad (p = 0, 1\,; \quad m + n + p = l)\,;$$

on a dans le premier cas

$$C_{mnp} = S\left(\frac{\partial B_{mnp}}{\partial x}\mathbf{x} + \frac{\partial B_{mnp}}{\partial y}\mathbf{y} + \frac{\partial B_{mnp}}{\partial z}\mathbf{z}\right) \quad (\mathbf{x} = \alpha\nu, \quad \mathbf{y} = \beta\nu, \quad \mathbf{z} = \gamma\nu)$$

et dans le second

$$C_{mnp} = \int \frac{\partial B_{mnp}}{\partial x} d\mathbf{x} + \int \frac{\partial B_{mnp}}{\partial y} d\mathbf{y} + \int \frac{\partial B_{mnp}}{\partial z} d\mathbf{z}$$

$$(d\mathbf{x} = \alpha d\nu, \quad d\mathbf{y} = \beta d\nu, \quad d\mathbf{z} = \gamma d\nu)$$

$d\nu$ est le produit par une densité de la mesure l'élément de volume, de surface ou de ligne.

On a encore des moments harmoniques, mais leur ordre est $l - 1$ et pour avoir le coefficient de A_{mnp}, il faut calculer trois de ces moments au lieu d'un seul.

4. **Angle solide. Champ magnétique de courants fermés.** — Dans le cas d'une double couche, α, β, γ sont les cosinus directeurs de la normale à la surface σ sur laquelle est placée la double couche. Soit C le contour fermé (ou cycle) constituant la frontière de σ. *Si la densité est constante*, le potentiel ne change pas quand on modifie σ sans changer C ; il en est de même des moments harmoniques C_{mnp} et l'on prévoit que leur calcul se ramène à celui d'intégrales curvilignes prises le long de C. Nous allons le montrer, en prenant la densité égale à l'unité ; le potentiel étudié $\Omega = \Sigma\Omega_l$ est alors l'*angle solide* sous lequel on voit du point potentié M le cycle C.

Nous prendrons pour support σ de la double couche la surface conique engendrée par les vecteurs OP_1 ayant leur origine en O et leurs extrémités P_1 sur C. Les intégrales à calculer sont de la forme

$$\int_\sigma [\alpha f(x, y, z) + \beta g(x, y, z) + \gamma h(x, y, z)]\, d\sigma\,;$$

f, g, h sont des polynômes homogènes en x, y, z de degré $l - 1$ et

α, β, γ ne changent pas quand P décrit le vecteur OP_1. Soient x_1, y_1, z_1 les coordonnées de P_1, on a

$$\frac{f}{f_1}=\frac{g}{g_1}=\frac{h}{h_1}=u^{l-1}, \qquad u=\frac{OP}{OP_1}, \qquad f_1=f(x_1, y_1, z_1)\ldots$$

Évaluons la partie de l'intégrale correspondant à la partie de la surface conique comprise entre deux génératrices infiniment voisines OP_1, OP'_1; nous la décomposons en petits quadrilatères $PQQ'P'$; PP' est homothétique du petit arc P_1P_1 par rapport à O et dans le rapport u, QQ' s'en déduit de la même façon avec le rapport $u+du$. L'expression à intégrer est sensiblement (c'est-à-dire à des infiniment petits près négligeables dans l'intégration) $(\alpha f_1+\beta g_1+\gamma h_1)\lambda^2 u^l du\, d\omega$, $\lambda=OP_1$, $d\omega$ est l'angle $P_1OP'_1$. Intégrant d'abord par rapport à u, entre les limites $0, 1$, on trouve $(\alpha f_1+\beta g_1+\gamma h_1)\dfrac{\lambda^2}{l+1}d\omega$. Mais $\lambda^2 d\omega$ est sensiblement la mesure des produits vectoriels $OP_1 \wedge OP'_1=OP_1 \wedge P_1P'_1$, les sens de parcours de C et de la normale étant convenablement associés; tout revient à intégrer

$$\frac{1}{l+1}(\alpha f_1+\beta g_1+\gamma h_1)OP_1 \wedge P_1P'_1=\frac{1}{l+1}\begin{vmatrix} f_1 & g_1 & h_1 \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ dx_1 & dy_1 & dz_1 \end{vmatrix}$$

le long de C.

Appliquons ceci à l'angle solide; x, y, z étant maintenant les coordonnées d'un point courant de C, nous arrivons au résultat suivant:

Dans le développement asymptotique de l'angle solide Ω, le coefficient C_{mnp} du polynôme harmonique inverse A_{mnp} est

$$C_{mnp}=\frac{1}{l+1}\int_C \begin{vmatrix} \dfrac{\partial B_{mnp}}{\partial x} & \dfrac{\partial B_{mnp}}{\partial y} & \dfrac{\partial B_{mnp}}{\partial z} \\ x & y & z \\ dx & dy & dz \end{vmatrix} \qquad (p=0, 1;\ m+n+p=l).$$

On peut, sans changer la valeur d'une intégrale prise le long d'un cycle, ajouter à l'expression à intégrer la différentielle totale d'une fonction uniforme, et prendre dans le cas actuel la différentielle d'un polynôme homogène en x, y, z de degré $l+1$. Il est possible dans certains cas de simplifier ainsi l'expression de Pfaff à intégrer, nous l'avons fait dans ce qui suit.

On trouve ainsi, pour $l=1$

$$C_{100}=\frac{1}{2}\int_C (ydz - zdy) \qquad C_{010}=\frac{1}{2}\int_C (zdx - xdz)$$
$$C_{001}=\frac{1}{2}\int_C (xdy - ydx),$$

ce sont les projections du *vecteur aréolaire* du cycle C [8, 9].

Pour $l=2$

$$C_{200}\equiv -2\int zxdy, \quad C_{110}=\frac{1}{2}\int (y^2-x^2)dz, \quad C_{020}=2\int yzdx,$$
$$C_{101}=\frac{1}{2}\int (x^2-z^2)dy, \quad C_{011}=\frac{1}{2}\int (y^2-z^2)dx.$$

Remarques. 1. — *Si le cycle C est un polygone, les intégrales sont faciles à calculer* : soit AB l'un des côtés, pour intégrer le long de AB on exprime les coordonnées x, y, z d'un point P de AB en fonction linéaire d'un paramètre, par exemple $s=\mathrm{AM}$, on est ramené à l'intégration d'un polynôme en s.

2. — Les résultats précédents donnent le *développement asymptotique du potentiel* V *du champ magnétique d'un ensemble de courants électriques fermés*. Ce potentiel $V=kSi\Omega$; k est une constante dépendant seulement des unités choisies, i l'intensité du courant correspondant au cycle C, Ω l'angle solide sous lequel on voit ce cycle du point potentié M ; S est une sommation étendue à tous ces courants ; V_l terme général du développement asymptotique de V est

$$V_l=k\Sigma E_{mnp}A_{mnp} \qquad E_{mnp}=SiC_{mnp} \qquad (p=0,1\ ;\ m+n+p=l).$$

Un tel ensemble est harmoniquement indifférent d'ordre $l\geq 1$; en choisissant convenablement les cycles C et les intensités i, on peut (n° 2) obtenir une indifférence harmonique d'ordre quelconque.

5. Représentation géométrique de Maxwell. — Nous appellerons *faisceau* la figure formée par l axes réels $h_1, h_2, \ldots, h_l$ issus de l'origine ; soit k un *coefficient* affecté à ce faisceau, l'expression

$$k\frac{(-1)^l}{l!}\frac{d}{dh_1}\frac{d}{dh_2}\cdots\frac{d}{dh_l}\frac{1}{\rho}, \qquad \rho=\sqrt{a^2+b^2+c^2},$$

où le produit des dérivés $\dfrac{d}{dh_s}=\alpha_s\xi+\beta_s\eta+\gamma_s\zeta$ (α_s, β_s, γ_s étant les cosinus directeurs de h_s) a le sens symbolique du n° 1, est un polynôme harmonique inverse que Maxwell appelle harmonique solide d'ordre $-(l+1)$. Réciproquement *tout polynôme harmonique inverse peut être obtenu ainsi et d'une seule façon* en considérant toutefois comme identiques deux faisceaux se déduisant l'un de l'autre en changeant les sens d'un nombre pair d'axes.

Cette proposition de Maxwell et de Sylvester est une conséquence immédiate du lemme suivant, que nous établirons en ajoutant quelques compléments à l'article de Sylvester [5].

LEMME. — *Toute forme symbolique d'ordre l, à coefficients réels, est harmoniquement équivalente à un produit de l facteurs linéaires symboliques $u_s\xi+v_s\eta+w_s\zeta$ à coefficients réels.*

Soit $\Lambda=Aa+Bb+Cc$ une forme linéaire des coordonnées a, b, c du point potentié M, les coefficients A, B, C pouvant être imaginaires, appliquons à Λ^t (t entier $\geqq l$) l'opération symbolique $\xi^m\eta^n\zeta^p$ il vient

$$\xi^m\eta^n\zeta^p\Lambda^t=t(t-1)\dots(t-l+1)\Lambda^{t-l}A^mB^nC^p,\quad (m+n+p=l).$$

On en conclut que si $A^2+B^2+C^2=0$, (le point de coordonnées A, B, C appartient alors au cône isotrope de sommet O) Λ^t est harmonique. Plus généralement, si $F(A, B, C)=0$, $F(\xi, \eta, \zeta)$ étant une forme de degré l à coefficients réels, Λ^t vérifie l'équation $F(\xi, \eta, \zeta)\Lambda^t=0$, et aussi toute équation $F_1(\xi, \eta, \zeta)\Lambda^t=0$, où F_1 est une forme symbolique harmoniquement équivalente à F.

Le lemme étant supposé exact, prenons pour F_1 le produit symbolique de l facteurs linéaires, $F_1(A, B, C)$ devant être nul, et étant un produit de l facteurs linéaires de A, B, C, l'un de ces facteurs $u_sA+v_sB+w_sC$ est nul ; puisque u_s, v_s, w_s sont réels, il en sera de même de $u_sA'+v_sB'+w_sC'$, A', B', C' étant imaginaires conjugués de A, B, C. En d'autres termes, le plan $u_sX+v_sY+w_sZ=0$ contient deux génératrices isotropes imaginaires conjuguées du cône $F(X, Y, Z)=0$, qui appartiennent aussi à tous les cônes $F_1(X, Y, Z)=0$, en particulier à celui dont l'équation est du premier degré en Z (voir n° 1) $G_l(X, Y)+ZG_{l-1}(X, Y)=0$.

Les projections de ces génératrices sur le plan XOY sont données par l'équation homogène de degré $2l$

$$G_l^2(X, Y)+(X^2+Y^2)G_{l-1}^2(X, Y)=0,$$

et leurs coefficients angulaires μ par

$$G_l^2(1, \mu)+(1+\mu^2)G_{l-1}^2(1, \mu)=0. \tag{3}$$

A une racine μ de cette équation, correspond un système $1,\ \mu,\ -\dfrac{G_l(1,\ \mu)}{G_{l-1}(1,\ \mu)}$ de paramètres directeurs de la génératrice : en remplaçant μ par l'imaginaire conjuguée μ', on a des paramètres directeurs de la génératrice isotrope conjuguée. Il est facile d'écrire l'équation du plan contenant ces deux génératrices et de la ramener à avoir ses coefficients u_s, v_s, w_s réels. En définitive, si le lemme est exact, la résolution d'une équation algébrique (3) de degré $2l$ permet d'obtenir très facilement les l facteurs symboliques $u_s\xi + v_s\eta + w_s\zeta$.

D'ailleurs, le *lemme est évidemment exact pour* $l = 1$; *admettons qu'il le soit aussi pour* $l = 2,\ 3,\ \ldots,\ L - 1$, *nous allons vérifier qu'il est encore exact pour la valeur* L.

Supposons trouvé un plan Π contenant deux génératrices isotropes conjuguées du cône $F(X,\ Y,\ Z) = 0$, on peut choisir les axes de coordonnées de façon que l'équation de ce plan soit $Z = 0$, et prendre pour paramètres directeurs les génératrices isotropes contenues dans ce plan $1,\ i,\ 0$ et $1,\ -i,\ 0$. L'équation (3) donne $G_L(s,\ i) = G_L(1,\ -i) = 0$; si $G_L(X,\ Y)$ n'est pas identiquement nul, il est divisible par $X^2 + Y^2$; écrivons

$$G_L(X,\ Y) = (X^2 + Y^2)G_{L-2}(X,\ Y) ;$$

alors $F(\xi,\ \eta,\ \zeta)$ est harmoniquement équivalent à

$$\zeta[G_{L-1}(\xi,\ \eta) - \zeta\, G_{L-2}(\xi,\ \eta)],$$

le crochet étant une forme symbolique de degré $L - 1$ est équivalent au produit de $L - 1$ facteurs linéaires ; la démonstration du lemme est ainsi achevée.

Remarques. 1. — Les axes du faisceau de Mavwell relatif aux fonctions A_{mnp} sont Ox, Oy, Oz comptés respectivement avec les ordres de multiplicité m, n, p.

2. — On peut utiliser pour représenter, les harmoniques solides de degré $-(l + 1)$ des polynomes inverses fondamentaux différents de ceux dont nous avons fait usage, et notamment ceux qui correspondent aux *fonctions sphériques fondamentales* [3, 1re partie, ch. IX]. Les faisceaux d'axes correspondant à ceux-ci comprennent d'abord q axes situés dans le plan xOy disposés soit suivant les rayons d'un polygone régulier de $2q$ côtés ayant son centre eu O, l'un de ses sommets sur Ox, soit suivant les apothèmes. Les $l - q$ axes restants sont confondus avec Oz.

Il est d'ailleurs facile d'exprimer ces harmoniques solides fondamentaux en fonction des nôtres, A_{mnp}, en utilisant les formules données par Maxwell. Nous ne ferons pas ce calcul ; l'emploi des coordonnées polaires étant moins pratique pour l'étude faite plus haut que celui des coordonnées cartésiennes, nous n'avons pas eu à utiliser les fonctions sphériques.

3. — Désignons par C_{mnp} les coefficients des A_{mnp} dans le terme V_l du potentiel V d'un système agissant, par exemple un ensemble E de courants fermés. Regardons ces $2l+1$ coefficients comme les composantes d'un vecteur $v(E)$ d'un espace (euclidien ou affine) à $2l+1$ dimensions. Le vecteur $v(E)$ correspondant à un ensemble E obtenu par réunion de deux autres E′, E″, est la somme géométrique des vecteurs correspondants $v(E')$, $v(E'')$. De même si E_1, se déduit de E en multipliant les intensités de tous les courants par un même nombre θ, le vecteur $v(E_1)$ est le produit par θ du vecteur $v(E)$. La représentation si élégante de Maxwell n'utilise que l'espace ordinaire, mais ses éléments (faisceau d'axes et coefficient) ne pouvant s'obtenir que par la résolution d'une équation algébrique, elle ne donne pas une interprétation géométrique aussi simple des opérations précédentes.