



ANNALES

DE

L'INSTITUT FOURIER

Benoît SALEUR

Un théorème de Bloch presque complexe

Tome 64, n° 2 (2014), p. 401-428.

http://aif.cedram.org/item?id=AIF_2014__64_2_401_0

© Association des Annales de l'institut Fourier, 2014, tous droits réservés.

L'accès aux articles de la revue « Annales de l'institut Fourier » (<http://aif.cedram.org/>), implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://aif.cedram.org/legal/>). Toute reproduction en tout ou partie de cet article sous quelque forme que ce soit pour tout usage autre que l'utilisation à fin strictement personnelle du copiste est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

cedram

*Article mis en ligne dans le cadre du
Centre de diffusion des revues académiques de mathématiques
<http://www.cedram.org/>*

UN THÉORÈME DE BLOCH PRESQUE COMPLEXE

par Benoît SALEUR

RÉSUMÉ. — Cet article est consacré à la démonstration d'une version presque complexe du théorème de Bloch. Considérons la réunion C de quatre J -droites en position générale dans un plan projectif presque complexe. Nous démontrons que toute suite non normale de J -disques évitant évitant la configuration C admet une sous-suite convergente, au sens de Hausdorff, vers une partie la réunion des diagonales de C . En particulier, le complémentaire de la configuration C est hyperbolicquement plongé dans le plan projectif presque complexe modulo la réunion des diagonales de la configuration C .

ABSTRACT. — This article is devoted to the proof of an almost complex version of Bloch's theorem. Let C be the reunion of four J -lines in general position in an almost complex projective plane. We prove that any sequence of J -disks which is not normal has a subsequence that converges in Hausdorff's sense to a subset of the reunion of the diagonals of the configuration C . In particular, the complement of the configuration C is hyperbolically embedded in the almost complex projective plane modulo the reunion of the diagonals of the configuration C .

1. Introduction

Cet article est consacré à la démonstration d'un résultat d'hyperbolicité dans le plan projectif presque complexe faisant suite à ceux déjà obtenus par R. Debalme et S. Ivashkovich d'une part et J. Duval d'autre part. Il s'agit du théorème de Bloch, partiellement démontré par A. Bloch en 1926 (voir [2]) avant d'être définitivement établi par H. Cartan en 1928 (voir [5]) :

THÉORÈME 1.1 (Théorème de Bloch). — *Soient L_1, L_2, L_3 et L_4 quatre droites projectives de $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ en position générale, c'est-à-dire telles que la*

Mots-clés : Hyperbolicité complexe, théorie de Nevanlinna, courbes pseudoholomorphes, courants positifs.

Classification math. : 32A18, 32H30, 32Q45, 32Q65, 32U40.

configuration $C = L_1 \cup L_2 \cup L_3 \cup L_4$ ne possède pas de point triple. Notons Δ la réunion des trois diagonales $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_4$ de la configuration C , c'est-à-dire des droites projectives passant par les points doubles de C . Toute suite de disques holomorphes $f_n : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{P}^2(\mathbb{C}) \setminus C$ vérifie l'une des deux propositions suivantes :

- (1) La suite (f_n) est normale.
- (2) Pour tout $r \in]0, 1[$, la suite (f_n) possède une sous-suite (f_{n_p}) telle pour tout voisinage U de Δ , il existe un entier p_0 tel que $f_{n_p}(D(0, r)) \subset U$ pour tout $p \geq p_0$.

Ce théorème contient strictement le théorème de Borel, énoncé par Cartan sous la la forme suivante (voir [5]) :

THÉOREME 1.2 (Théorème de Borel). — *Avec les notations du théorème 1, toute courbe entière non constante à valeurs dans $\mathbb{P}^2(\mathbb{C}) \setminus C$ dégénère sur Δ .*

En particulier, toute courbe entière dans $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ évitant cinq droites projectives en position générale est constante.

Depuis Bloch et Cartan, l'hyperbolicité du complémentaire de droites projectives dans le plan projectif complexe a fait l'objet de nombreuses études. Ainsi, via le théorème de reparamétrisation de R. Brody (voir [3]), M. Green a pu déduire du théorème de Borel le caractère hyperboliquement plongé du complémentaire de cinq droites en position générale dans le plan projectif. De la même manière, le théorème de Bloch suffit à montrer que le complémentaire dans le plan projectif d'une configuration C quatre droites en position générale est hyperboliquement plongé dans $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ modulo le diviseur diagonal Δ (nous renvoyons à [14] pour la définition de l'hyperbolicité complexe et de la pseudo-métrique de Kobayashi-Royden). Plus récemment, M. Cowen a donné une démonstration de type géométrique du théorème de Bloch (voir [6]), reposant sur la construction d'une métrique de courbure négative sur le complémentaire de la configuration C . Sa méthode a l'avantage de fournir un minorant de la pseudo-métrique de Kobayashi-Royden du complémentaire de quatre droites en position générale.

Enfin, dans [17], M. McQuillan démontre un théorème de type Bloch valable dans des surfaces plus générales que le plan projectif. L'argument utilisé dans la dernière partie de cet article est inspiré de son travail.

Dernièrement, J. Duval, à la suite de R. Debalme et S. Ivashkovich, a obtenu une version presque complexe du théorème de Green, réduisant l'hyperbolicité du complémentaire de cinq droites dans $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ à des propriétés

géométriques globales du plan projectif. Pour pouvoir énoncer son résultat, nous aurons besoin de quelques éléments de géométrie presque complexe.

Soit X une variété lisse de dimension paire munie d'une structure presque complexe, c'est-à-dire d'un automorphisme lisse J de TX tel que $J^2 = -Id$. Étant donnée une surface de Riemann Σ de structure complexe j , une application différentiable $f : \Sigma \rightarrow X$ est dite J -holomorphe si pour tout $z \in \Sigma$:

$$df_z \circ j = J_{f(z)} \circ df_z.$$

On parle aussi de J -courbe, et en particulier de J -courbe entière si $\Sigma = \mathbb{C}$ ou de J -disque si Σ est un disque topologique. Rappelons qu'une J -courbe est de classe \mathcal{C}^∞ , et que la limite uniforme locale d'une suite de J -courbes est encore une J -courbe (voir l'article de J.-C. Sikorav dans [1]). Une suite (f_n) de J -courbes est dite normale si elle admet un sous-suite convergeant localement uniformément.

L'existence, pour tout point $P \in X$ et tout vecteur $v \in T_P X$, d'un J -disque f non constant passant par P tangentiellement à v (voir l'article de J.-C. Sikorav dans [1]), motive la définition d'une pseudométrie de Kobayashi-Royden presque complexe K_X (voir [15]) :

$$K_X(P, v) = \inf \left\{ \frac{1}{|\lambda|} > 0 \mid \text{il existe } f : \mathbb{D} \rightarrow X \text{ } J\text{-holomorphe} \right. \\ \left. \text{avec } f(0) = P, df_0 \left(\frac{\partial}{\partial z} \right) = \lambda v \right\}.$$

La variété X est dite hyperbolique au sens de Kobayashi lorsque K_X est non dégénérée. Dans le cas contraire, il existe un point par lequel passent des J -disques arbitrairement grands dans une direction donnée. Si la variété X est compacte, cela équivaut à l'existence d'une J -courbe entière, c'est-à-dire à dire d'une application J -holomorphe $f : (\mathbb{C}, i) \rightarrow (X, J)$ non constante. Ce critère, dû à Brody dans le cas complexe, découle du théorème de reparamétrisation suivant (voir [3] dans le cas complexe et [15] dans le cas presque complexe) :

THÉOREME 1.3 (Théorème de reparamétrisation de Brody). — *Soit $f_n : \mathbb{D} \rightarrow X$ une suite non normale de J -disques. Il existe une suite de contractions affines ρ_n de \mathbb{C} convergeant vers un point du disque unité, appelé point d'explosion, telle que $f_n \circ \rho_n$ converge uniformément sur tout compact de \mathbb{C} vers une courbe de Brody, c'est-à-dire une courbe entière non constante à dérivée bornée.*

Ainsi, la notion d'hyperbolicité se généralise au cas presque complexe. On peut de même généraliser la notion de partie hyperboliquement plongée dans une variété presque complexe. Pour pouvoir donner un énoncé presque complexe du théorème de Bloch, nous devons d'abord définir le plan projectif presque complexe.

Soit J une structure presque complexe de classe C^∞ sur $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ positive par rapport à la métrique de Fubini-Study ω , i.e. $\omega_P(v, Jv) > 0$ pour tout point P et tout vecteur $v \in T_P\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ non nul. Une J -droite du plan projectif presque complexe $(\mathbb{P}^2(\mathbb{C}), J)$ est une courbe J -holomorphe plongée dans $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$, difféomorphe à $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ et de degré 1 en homologie. D'après M. Gromov [13] (voir aussi J.-C. Sikorav [20]), l'espace des J -droites est difféomorphe à $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$. En outre, par deux points distincts passe une unique J -droite, deux J -droites distinctes se coupent transversalement en un unique point, et les J -droites passant par un point P forment un pinceau difféomorphe à $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$, donnant une projection centrale $\pi_P : \mathbb{P}^2(\mathbb{C}) \setminus \{P\} \rightarrow \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$.

Lorsque J coïncide avec la structure complexe standard J_0 , les J -droites sont exactement les droites projectives. Ainsi, la notion de J -droite prolonge naturellement celle de droite projective dans le plan projectif presque complexe $(\mathbb{P}^2(\mathbb{C}), J)$. La version presque complexe du théorème de Green obtenue par J. Duval s'énonce alors ainsi :

THÉORÈME 1.4. — *Soit C une configuration de cinq J -droites en position générale (c'est-à-dire ne possédant pas de point triple) dans un plan projectif presque complexe $(\mathbb{P}^2(\mathbb{C}), J)$. Son complémentaire $\mathbb{P}^2(\mathbb{C}) \setminus J$ est hyperboliquement plongé dans $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$.*

Auparavant, R. Debalme et S. Ivashkovich avaient fait un pas en direction d'un théorème de Green presque complexe en démontrant que le fait pour $\mathbb{P}^2(\mathbb{C}) \setminus C$ d'être hyperbolique au sens de Kobayashi est une propriété ouverte dans l'ensemble des configurations (C, J) .

Il est naturel de poursuivre l'étude et de s'intéresser au complémentaire de quatre J -droites en position générale. Nous allons démontrer la généralisation suivante du théorème de Bloch :

THÉORÈME 1.5 (Théorème de Bloch presque complexe). — *Soient L_1, L_2, L_3 et L_4 quatre J -droites de $(\mathbb{P}^2(\mathbb{C}), J)$ en position générale, c'est-à-dire telles que la configuration $C = L_1 \cup L_2 \cup L_3 \cup L_4$ ne possède pas de point triple. Notons Δ la réunion des trois diagonales $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_4$ de la configuration C , c'est-à-dire des J -droites passant par les points doubles*

de C . Toute suite de J -disques $f_n : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{P}^2(\mathbb{C}) \setminus C$ vérifie l'une des deux propositions suivantes :

- (1) La suite (f_n) est normale.
- (2) Pour tout $r \in]0, 1[$, la suite (f_n) possède une sous-suite (f_{n_p}) telle pour tout voisinage U de Δ , il existe un entier p_0 tel que $f_{n_p}(D(0, r)) \subset U$ pour tout $p \geq p_0$.

Comme dans le cas où J coïncide avec la structure complexe standard sur $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$, le théorème de Bloch presque complexe implique que la pseudo-métrique de Kobayashi-Royden $K_{\mathbb{P}^2(\mathbb{C}) \setminus C}$ du complémentaire de C ne dégénère pas hors de Δ . Ainsi, $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ est hyperboliquement plongé dans $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ modulo Δ . On dispose en particulier d'un théorème de Borel presque complexe : toute J -courbe entière $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{P}^2(\mathbb{C}) \setminus C$ non constante vérifie $f(\mathbb{C}) \setminus \Delta$.

La démonstration du théorème de Bloch presque complexe est purement géométrique, et repose presque exclusivement sur l'utilisation de projections centrales. Elle reste intéressante lorsque J est la structure complexe standard J_0 car elle réduit le théorème de Bloch à la géométrie globale de $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$. Notons que la méthode de M. Cowen n'est pas utilisable ici puisqu'elle repose sur des calculs explicites que l'on ne peut pas reproduire dans un contexte presque complexe.

Nous allons démontrer le théorème 5 par l'absurde : supposons donnée une suite non normale de J -disques évitant C , un réel $r \in]0, 1[$ et une sous-suite (f_{n_p}) de (f_n) tels que $(f_{n_p}(D(0, r)))$ ne vérifie pas la seconde alternative du théorème de Bloch. Nous construirons un courant positif fermé numériquement effectif relativement à Δ . Dans un premier temps, nous montrerons que ce courant est porté par le diviseur diagonal, à l'aide d'un lemme de feuilletage de son support similaire à celui établi par J. Duval dans [9]. Dans un second temps, nous obtiendrons une contradiction aux points doubles par un argument d'homologie inspiré de M.L. McQuillan [17]. Les deux étapes de la preuve feront abondamment appel à la théorie de recouvrement des surfaces d'Ahlfors pour les applications quasiconformes.

Remerciements : Cet article doit énormément aux idées et aux nombreux conseils de Julien Duval. Qu'il en soit chaleureusement remercié.

2. Préliminaires

Ce chapitre énumère des définitions et des résultats généraux à propos de la géométrie du plan projectif presque complexe, des applications

quasiconformes et plus particulièrement de la théorie d'Ahlfors. Il s'agit principalement de rappels.

2.1. Rappels de théorie d'Ahlfors

Ce paragraphe rappelle un résultat essentiel de la théorie d'Ahlfors, le *théorème des îles*. Nous renvoyons à l'ouvrage de R. Nevanlinna [18] pour plus de détails.

Soit $f : \Sigma \rightarrow \Sigma_0$ une application holomorphe entre deux surfaces de Riemann compactes à bord. Munissons Σ_0 d'une métrique riemannienne, induisant via f une pseudo-métrique sur Σ . L'aire de Σ pour cette pseudo-métrique est égale à l'aire de l'image de Σ par f , calculée en prenant en compte les multiplicités. Notons-la $\text{Aire } f(\Sigma)$. Le réel $S = \frac{\text{Aire } f(\Sigma)}{\text{Aire}(\Sigma_0)}$ est appelé *nombre moyen de feuilletés* au-dessus de Σ_0 , et correspond au degré topologique de f lorsque les surfaces de Riemann sont compactes. Le théorème de Riemann-Hurwitz relie alors ce degré topologique avec les caractéristiques d'Euler-Poincaré $\chi(\Sigma)$ et $\chi(\Sigma_0)$ des surfaces Σ et Σ_0 .

L'inégalité d'Ahlfors joue le rôle d'une formule de Riemann-Hurwitz à bord. Elle s'énonce ainsi :

THÉORÈME 2.1. — *Notons $\chi^-(\Sigma) = \sum_j \min(\chi(\Sigma_j), 0)$, où les Σ_j sont les composantes connexes de Σ . Il existe une constante $h > 0$ indépendante de Σ et de f telle que :*

$$\chi^-(\Sigma) \leq S\chi(\Sigma_0) + hL$$

où $L = \text{Longueur}(f(\Sigma) \setminus \partial\Sigma_0)$ désigne la longueur de l'image du bord relatif de $f(\Sigma)$.

Soit δ un disque ouvert de Σ_0 . Les composantes connexes de $f^{-1}(\delta)$ n'intersectant pas le bord $\partial\Sigma$ de Σ sont appelées *îles au-dessus de δ* . Les autres composantes sont généralement appelées *péninsules*. Le degré d'un île d au-dessus de δ est le degré topologique de l'application $f|_d : d \rightarrow \delta$. Le *théorème des îles*, conséquence de l'inégalité d'Ahlfors, est une version géométrique du second théorème principal de Nevanlinna :

THÉORÈME 2.2. — *Soit $f : \Sigma \rightarrow \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ une application holomorphe entre une surface de Riemann Σ et $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$. Fixons trois disques ouverts $\delta_1, \delta_2, \delta_3$ de $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$, deux-à-deux disjoints. Notons $i(\delta_j)$ le nombre d'îles au-dessus du disque δ_j . Il existe alors une constante indépendante de Σ et de f , encore notée h , telle que :*

$$S \leq i(\delta_1) + i(\delta_2) + i(\delta_3) - \chi^-(\Sigma) + hL.$$

Supposons que f évite deux points de $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$, un point de δ_2 et un point de δ_3 . Il ne peut donc y avoir d'îles au-dessus des disques δ_2 et δ_3 . Plus précisément, le théorème des îles permet de montrer que le nombre moyen de feuilletés au-dessus de Σ_0 est majoré, au terme de longueur près, par le nombre $i'(\delta_1)$ d'îles de degré 1 au-dessus de δ_1 :

COROLLAIRE 2.3. — *Si l'image de f évite un point de δ_2 et un point de δ_3 , alors :*

$$S \leq i'(\delta_1) + hL.$$

Voyons ce que donne ce résultat pour une courbe entière $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \setminus \{0, \infty\}$. Notons $i'_r(\delta_1)$ le nombre d'îles de degré 1 au-dessus de δ_1 lorsque la surface Σ est le disque $D(0, r)$. D'après ce qui précède :

$$\text{Aire } f(D(0, r)) \leq i'_r(\delta_1) + h \text{Longueur}(f(\partial D(0, r))) \tag{2.1}$$

les aires et les longueurs étant calculées pour la métrique de Fubini-Study sur $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$. D'après le *lemme d'Ahlfors*, le terme de longueur est, en un certain sens, négligeable devant le terme d'aire (voir aussi le paragraphe 3.2); cette inégalité montre donc que f se comporte asymptotiquement (quand r est grand) comme un revêtement.

2.2. Rappels concernant les J -courbes

Fixons une structure presque complexe J sur $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ positive par rapport à la forme de Fubini-Study, ie. telle que $\omega(v, Jv) > 0$ pour tout vecteur v non nul tangent au plan projectif. Nous rappelons deux propriétés des J -courbes dans $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ valables dans un contexte plus général.

2.2.1. Positivité d'intersection

Sans entrer dans les détails, il est connu depuis M. Gromov [13] que les points d'intersection de deux J -courbes d'images C et C' distinctes sont isolés. De plus, l'intersection homologique de C et C' en un point $P \in C \cap C'$ est strictement positive. De énoncés précis sont donnés dans les articles de D. McDuff et de J.-C. Sikorav dans [1]. Nous nous contenterons de l'énoncé suivant :

THÉORÈME 2.4. — *Soient deux J -disques $f, g : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ d'images distinctes. Supposons que $f(\mathbb{D})$ et $g(\mathbb{D})$ s'intersectent en un point $P = f(0) = g(0)$. Alors cette intersection est isolée, et l'intersection homologique de $f(\mathbb{D})$ et de $g(\mathbb{D})$ en p est strictement positive.*

Ce résultat nous sera moins utile que le corollaire suivant (voir [9]), qui généralise au cas presque complexe le théorème d'Hurwitz.

COROLLAIRE 2.5. — *Soit L une J -droite, et soit une suite de J -disques $f_n : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ évitant L , ie. tels que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n(\mathbb{D})$ n'intersecte pas L . Si la suite (f_n) converge uniformément sur tout compact vers un J -disque $f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$, alors soit $f(\mathbb{D})$ évite L , soit $f(\mathbb{D})$ est contenu dans L .*

2.2.2. Théorème de Lelong

Soient (Σ, j) une surface de Riemann et $f : (\Sigma, j) \rightarrow (\mathbb{P}^2(\mathbb{C}), J)$ une J -courbe non constante. Notons $\text{Aire}(f(\Sigma)) = \int_{\Sigma} f^* \omega$ l'aire de l'image de Σ . Le théorème suivant est une version presque complexe du théorème de Lelong, qui sera utilisée à plusieurs reprises par la suite. Il découle de l'existence d'une inégalité isopérimétrique quadratique pour les petits J -disques (voir l'article de J.C. Sikorav dans [1]).

THÉORÈME 2.6 (Théorème de Lelong). — *Supposons que $f(\Sigma)$ soit contenue dans une boule fermée $\overline{B}(P, r)$ de centre P et de rayon r , et que l'image $f(\partial\Sigma)$ de la frontière de Σ soit contenue dans la frontière $\partial B(P, r)$ de la boule. Il existe alors deux constantes strictement positives r_0 et C , ne dépendant que de ω et de J , telles que si $r \leq r_0$, on ait :*

$$\text{Aire}(f(\Sigma)) \geq Cr^2.$$

2.3. Géométrie plan projectif presque complexe

Rappelons que J désigne une structure presque complexe sur $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ positive par rapport à la 2-forme de Fubini-Study. Comme nous l'avons dit dans l'introduction, par tout point P de $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ passe un pinceau de J -droites diffeomorphe à $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$, induisant une projection centrale $\pi_P : \mathbb{P}^2(\mathbb{C}) \setminus \{P\} \rightarrow \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$. L'existence de ce pinceau permet de définir l'éclaté presque complexe du plan projectif en P (voir [9]).

2.3.1. Éclaté presque complexe

Étant donné un point P , il existe un difféomorphisme Ψ d'un voisinage de P vers la boule unité B de \mathbb{C}^2 , envoyant P sur 0 et redressant localement toute J -droite passant par P en une droite complexe passant par 0. Ce

difféomorphisme est de classe \mathcal{C}^{1+lip} et lisse hors de P , et peut être choisi de telle sorte que Ψ_*J coïncide avec J_0 en 0 . L'éclaté presque complexe \tilde{X} de $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ en P est obtenu en recollant l'éclaté standard \tilde{B} de B en 0 via Ψ . Nous disposons d'une application naturelle $\Pi : \tilde{X} \rightarrow \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$. Le diviseur exceptionnel E_P au-dessus de P est l'image réciproque $\Pi^{-1}(\{P\})$ de P par Π . Par construction, il s'agit d'une sous-variété compacte difféomorphe à $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$, d'auto-intersection -1 . La restriction de Π à $\tilde{X} \setminus E_P$ est un difféomorphisme vers $\mathbb{P}^2(\mathbb{C}) \setminus \{P\}$.

La structure presque complexe J se relève en une structure presque complexe dans $\tilde{X} \setminus E_P$, admettant un prolongement lipschitzien \tilde{J} à tout l'éclaté (voir [9]). La 2-forme $\Pi^*\omega$ est définie sur tout l'éclaté, mais dégénère le long du diviseur exceptionnel. Il est possible de la modifier de façon à obtenir une 2-forme non dégénérée par rapport à laquelle \tilde{J} est positive (i.e. $\tilde{\omega}(v, \tilde{J}v) > 0$ si $v \neq 0$).

PROPOSITION 2.7. — *Il existe une 2-forme λ à support dans un voisinage de E_P telle que \tilde{J} soit positive par rapport à $\tilde{\omega} = \Pi^*\omega + \lambda$.*

Démonstration. — Le difféomorphisme Ψ induit un difféomorphisme $\tilde{\Psi}$ d'un voisinage de E_P vers \tilde{B} . Si λ_0 désigne une 2-forme de \tilde{B} à support dans un petit voisinage du diviseur exceptionnel et positive le long du diviseur exceptionnel, alors $\lambda = \tilde{\Psi}^*\lambda_0$ est positive le long de E_P . Il suffit alors de poser $\tilde{\omega} = \Pi^*\omega + c\lambda$ pour un réel $c > 0$ assez petit. □

À cause de la perte de régularité pour la structure presque complexe, il n'est pas possible de définir des tours d'éclatements. Il est cependant tout-à-fait possible d'éclater le plan projectif presque complexe en plusieurs points distincts.

2.3.2. Projections quasiconformes

Étant donné un J -disque $f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ évitant le point P , l'application $\pi_P \circ f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ n'est pas nécessairement holomorphe, mais simplement quasiconforme. Rappelons de quoi il s'agit (nous renvoyons à [16] pour plus de détails).

Une application $g : \Omega \rightarrow \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ définie sur un ouvert Ω de \mathbb{C} est dite *absolument continue sur les droites* si sa restriction à presque tout segment horizontal ou vertical contenu dans Ω est absolument continue. Les distributions $\frac{\partial g}{\partial \bar{z}}$ et $\frac{\partial g}{\partial z}$ peuvent alors être considérées comme des fonctions localement intégrables.

Une application g absolument continue sur les droites est dite α -quasi-conforme pour un certain réel $\alpha \in]0, 1[$ si elle vérifie presque partout :

$$\left| \frac{\partial g}{\partial \bar{z}} \right| \leq \alpha \left| \frac{\partial g}{\partial z} \right|.$$

Le théorème d'Ahlfors-Bers montre qu'en reparamétrant une application quasiconforme par un homéomorphisme convenable on obtient une fonction holomorphe :

THÉORÈME 2.8. — *Soit $g : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ une application α -quasiconforme définie sur le disque unité de \mathbb{C} . Il existe un homéomorphisme α -quasi-conforme $\phi : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ et une application holomorphe $h : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ tels que $g = h \circ \phi$.*

Les fonctions α -quasiconformes ont donc des propriétés topologiques identiques à celles des fonctions holomorphes : elles vérifient le principe du maximum (en d'autres termes, une fonction α -quasiconforme non constante est ouverte) et le principe des zéros isolés (l'ensemble des antécédents d'un point par une fonction α -quasiconforme non constante est discret). Par ailleurs, les homéomorphismes α -quasiconformes vérifient un critère intéressant de normalité :

THÉORÈME 2.9. — *À extraction d'une sous-suite près, une suite d'homéomorphismes α -quasiconformes $\phi_n : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ du disque unité converge uniformément sur tout compact vers un homéomorphisme α -quasiconforme ou vers une application constante.*

La théorie d'Ahlfors se généralise aux applications applications quasiconformes : en particulier, l'inégalité d'Ahlfors, le théorème des îles et leurs corollaires restent vrais pour les applications quasiconformes. L'intérêt de ces rappels dans le contexte provient du résultat suivant (voir [9]) :

PROPOSITION 2.10. — *Soit $P \in \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$. Il existe un réel $\alpha \in]0, 1[$ tel que pour tout J -disque $f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{P}^2(\mathbb{C}) \setminus \{P\}$, l'application $\pi_P \circ f$ soit α -quasiconforme.*

2.3.3. Forme normale de J le long d'une J -droite

Soit L une J -droite. La structure presque complexe J admet une forme normale le long de J :

PROPOSITION 2.11. — *Soit L_0 une droite projective de $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$. Il existe un difféomorphisme Φ d'un voisinage de L vers un voisinage de L_0 , envoyant L sur L_0 , et tel que $(\Phi_* J)$ et J_0 coïncident le long de L_0 .*

Démonstration. — Rappelons d’abord (voir J.-C. Sikorav [20]) qu’il existe un difféomorphisme de $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ envoyant L sur L_0 et J sur une structure presque complexe coïncidant tangentiellement avec J_0 le long de L_0 . Nous pouvons donc supposer que $L = L_0$ et que $J|_{TL} = (J_0)|_{TL}$. Il reste à redresser J sur J_0 normalement à L .

Fixons un point P de L . L’existence de coordonnées normales près de P (voir l’article de J.-C. Sikorav dans [1]) permet de redresser J en une structure presque complexe (encore notée J) coïncidant avec J_0 sur un voisinage δ de P dans L .

Fixons alors un point P' hors de L . Soient L' et L'_0 une J -droite et une droite complexe passant par P' , et s’intersectant en un point de $L \setminus \delta$. Une J -droite L'' du pinceau centré en P suffisamment proche de L rencontre respectivement L' et L'_0 en un unique point (puisque L'' est une petite déformation de L , qui est à la fois une droite complexe et une J -droite). Nous pouvons donc projeter L' sur L'_0 près de L , et par ce procédé, redresser près de L les J -droites du pinceau centré en P' et coupant L hors de δ en des droites complexes du pinceau centré en P' .

Après ce redressement, par tout point Q de $L \setminus \delta$ passe un J -disque d_Q non contenu dans L , qui est aussi un disque d’une droite complexe standard. Il existe alors un difféomorphisme de d_Q , variant de manière lisse avec Q , envoyant $J(Q)$ sur $J_0(Q)$. Ceci conclut la démonstration puisque tout point suffisamment proche de $L \setminus \delta$ est contenu dans un tel disque d_Q . \square

2.4. Courants positifs et fonctions plurisousharmoniques

Nous renvoyons à [19] pour les résultats énoncés dans ce paragraphe, excepté pour le théorème de restriction des courants positifs fermés à une J -droite, que l’on trouvera dans [10].

2.4.1. Courants positifs

L’automorphisme J se prolonge en un automorphisme \mathbb{C} -linéaire, encore noté J , du complexifié $\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} T_{\mathbb{R}}\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ du fibré tangent réel $T_{\mathbb{R}}\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ du plan projectif. Notons respectivement $T_J^{1,0}$ et $T_J^{0,1}$ les sous-fibrés de $\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} T_{\mathbb{R}}\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ dont les fibres sont les sous-espaces propres de J associés aux valeurs propres i et $-i$, et $T_{J,1,0}^*, T_{J,0,1}^*$ leurs duaux. Notons enfin $\bigwedge_J^{1,1}$ l’espace des formes différentielles de classe \mathcal{C}^∞ , de bidegré $(1, 1)$.

Un courant T est dit de type $(1, 1)$ s’il s’écrit localement comme une forme différentielle de bidegré $(1, 1)$ dont les coefficients sont des distributions.

Une forme θ de bidegré $(1, 1)$ est dite positive si pour tout champ de vecteur ζ , $\theta(\zeta, J\zeta) \geq 0$. Comme nous sommes en bidegré $(1, 1)$, une telle forme différentielle s'écrit localement comme une somme de formes du type $i\alpha \wedge \bar{\alpha}$, où $\alpha \in T_{J,1,0}^*$.

Un courant T de bidegré $(1, 1)$ est positif si pour tout $(1, 1)$ -forme θ positive, $T(\theta) \geq 0$. Si (ζ_1, ζ_2) est un repère local du fibré $T_J^{1,0}$, d'après [19], T s'écrit dans le repère dual (ζ_1^*, ζ_2^*) :

$$T = iT_{1,1}\zeta_1^* \wedge \bar{\zeta}_1^* + iT_{1,2}\zeta_1^* \wedge \bar{\zeta}_2^* + iT_{2,1}\zeta_2^* \wedge \bar{\zeta}_1^* + iT_{2,2}\zeta_2^* \wedge \bar{\zeta}_2^*$$

où les $T_{r,s}$ sont des distributions d'ordre zéro, donc des mesures de Radon complexes, avec $T_{1,1}$ et $T_{2,2}$ positives. De plus, $\|T_{1,2}\|, \|T_{2,1}\| \leq 2T_{1,1} + 2T_{2,2}$. En particulier, en écrivant la forme locale du courant dans le repère $(\lambda_1\zeta_1, \lambda_2\zeta_2)$, avec $\lambda_2 \gg \lambda_1 > 0$, on montre que si $T_{2,2} = 0$, alors $T_{1,2} = T_{2,1} = 0$.

Les courants positifs sont d'ordre zéro, et une suite de courants positifs de masse uniformément bornée admet donc une valeur d'adhérence pour la topologie faible, qui est encore un courant positif. Si c est une courbe J -holomorphe, le courant $[c]$ d'intégration sur c est positif.

Bien que ne disposant pas d'un théorème de Siu pour les courants positifs fermés, nous pouvons malgré tout isoler leur composante singulière portée par une J -droite donnée : si T est un courant positif fermé du plan projectif presque complexe, pour toute J -droite L , le courant $\mathbb{1}_L T$ est positif fermé (voir [10]), et s'écrit donc $\mathbb{1}_L T = \alpha[L]$, où α est un réel positif. En particulier, T admet la décomposition suivante :

$$T = T' + \alpha_1[\Delta_1] + \alpha_2[\Delta_2] + \alpha_3[\Delta_3]$$

où les α_k sont positifs et T' n'admet aucune diagonale comme composante singulière.

2.4.2. Fonctions plurisousharmoniques et voisinages pseudoconvexes

Rappelons brièvement ce qu'est une fonction plurisousharmonique dans le contexte presque complexe.

Si U est un ouvert de $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$, une application $u : U \rightarrow \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ est dite plurisousharmonique si pour tout J -disque $f : \mathbb{D} \rightarrow U$, l'application $u \circ f$ est sous-harmonique.

Si P est un point du plan projectif presque complexe, il existe une difféomorphisme u d'un voisinage de P dans un ouvert de \mathbb{C}^2 envoyant J_P sur i . D'après [19], $P \mapsto \|u(P)\|^2$ ($\|\cdot\|$ désignant ici la norme hermitienne de \mathbb{C}^2)

est plurisousharmonique. Tout point P possède donc une base $(U_t)_{0 \leq t \leq \varepsilon}$ de voisinages pseudo-convexes, donnés par : $U_t = u^{-1}([0, t])$. Ainsi, le diviseur exceptionnel E_P au-dessus de P dans l'éclaté presque complexe de \tilde{X}_P de V en P possède lui aussi une base de voisinages pseudo-convexes $(\tilde{U}_t = \tilde{\pi}_P^{-1}(U_t))_{0 \leq t \leq \varepsilon}$.

Si $f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ est un J -disque évitant P et dont le relevé \tilde{f}_P dans \tilde{X}_P vérifie : $\tilde{f}_P(\partial\mathbb{D}) \subset \partial\tilde{U}_t$ pour un certain $0 < t < \varepsilon$, le principe du maximum pour les fonctions sous-harmoniques interdit que $\tilde{f}_P(\mathbb{D})$ soit contenu dans $\tilde{U}_{t'} \setminus \tilde{U}_t$, pour un certain $t < t' < \varepsilon$. Cette remarque nous sera utile au dernier paragraphe.

Venons-en à la démonstration proprement dite du théorème de Bloch.

3. Construction de courants de Nevanlinna

Donnons-nous une suite (f_n) non normale de J -disques. Raisonnons par l'absurde, et supposons que la suite $f_n(\mathbb{D})$ ne converge pas vers Δ au sens de Hausdorff. Il est toujours possible de supposer que $f_n(0)$ reste loin de Δ : quitte à reparamétriser les J -disques par un automorphisme du disque unité et à extraire une sous-suite de (f_n) , nous pouvons supposer que pour un certain $\varepsilon_0 > 0$, $d(f_n(0), \Delta_0) \geq \varepsilon_0$. Notons que malgré cette supposition, les courbes entières issues des explosions de la suite des J -disques peuvent quand-même être portées par les diagonales (voir la remarque sur le théorème de Brody dans l'introduction).

Ce paragraphe est dédié à la construction, à partir des suites (f_n) et (\tilde{f}_n) , de courants T et \tilde{T} de bidegré $(1, 1)$, positifs, fermés et numériquement effectifs (nef). Classiquement, nous allons les construire à partir des fonctions caractéristiques de Nevanlinna (paragraphe 3.1). L'effectivité numérique se déduit d'un Lemme de Brunella presque complexe (paragraphe 3.2), ce qui justifie l'utilisation de courants de Nevanlinna et non de courants d'Ahlfors.

3.1. Construction de courants fermés

Rappelons les définitions des fonctions caractéristiques de Nevanlinna. Soit (M, J, Θ) une variété presque complexe de dimension réelle 4 munie d'une $(1, 1)$ -forme positive Θ induisant une métrique hermitienne $\|\cdot\|_\Theta$ (Dans le contexte, $(M, J, \Theta) = (\mathbb{P}^2(\mathbb{C}), J, \omega)$ ou $(\tilde{X}, \tilde{J}, \tilde{\omega})$). Si R est une

réel strictement positif et $g : D(0, R) \rightarrow M$ une application J-holomorphe, notons pour $0 < r < R$:

$$T_{g,r} = \int_0^r [g(D(0, t))] \frac{dt}{t} \quad \text{le courant caractéristique de } g$$

$$T_{g,r}(\Theta) = \int_0^r \left(\int_{D(0,t)} g^* \Theta \right) \frac{dt}{t} \quad \text{la caractéristique d'aire de } g$$

$$L_{g,r} = \int_0^r \int_{\partial D(0,t)} \|dg\|_{\Theta} \frac{dt}{t} \quad \text{la caractéristique de longueur de } g.$$

Le courant $T_{g,r}$ est positif (voir 2.3.1). Nous recherchons une suite (r_n) telle que : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{L_{f_n, r_n}}{T_{f_n, r_n}(\omega)} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{L_{\tilde{f}_n, r_n}}{T_{\tilde{f}_n, r_n}(\tilde{\omega})}$; les suites de courants positifs $\left(\frac{T_{f_n, r_n}}{T_{f_n, r_n}(\omega)} \right)$ et $\left(\frac{T_{\tilde{f}_n, r_n}}{T_{\tilde{f}_n, r_n}(\tilde{\omega})} \right)$ convergeront alors, après extraction d'une sous-suite, vers des courants fermés.

Les caractéristique d'aire $T_{\varphi, r}(\omega') = \int_0^r \left(\int_{D(0,t)} \varphi^* \omega' \right) \frac{dt}{t}$ et de longueur $L_{\varphi, r} = \int_0^r \int_{\partial D(0,t)} \|d\varphi\|_{\omega'} \frac{dt}{t}$ d'une application quasiconforme $\varphi : D(0, R) \rightarrow \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ relativement à la forme de Fubini-Study normalisée ω' sont bien définies; en vue du paragraphe 3, la suite (r_n) recherchée devra en outre vérifier : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{L_{\varphi_{k,n}, r_n}}{T_{\varphi_{k,n}, r_n}(\omega')} = 0$.

Classiquement, l'existence d'une telle suite (r_n) repose sur l'inégalité longueur-aire suivante (voir par exemple [4]) :

$$\forall 0 < \eta < r < R, \quad \frac{L_{g,r} - L_{g,\eta}}{T_{g,r}(\Theta)} \leq \sqrt{2\pi r \log\left(\frac{r}{\eta}\right) \frac{1}{T_{g,r}(\Theta)^2} \frac{dT_{g,r}(\Theta)}{dr}}. \tag{3.1}$$

Pour une courbe entière $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ non constante, cette inégalité permet immédiatement de trouver une suite (R_n) croissant vers l'infini telle que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{L_{f, R_n}}{T_{f, R_n}(\omega)} = 0$. En effet, la fonction positive $\frac{2\pi r \log(r)}{T_{f,r}(\omega)^2} \frac{dT_{f,r}(\omega)}{dr}$ est intégrable sur $[2, +\infty[$ par rapport à la mesure de masse infinie $\frac{dr}{r \log(r)}$:

$$\int_2^R \frac{2\pi r \log(r)}{T_{f,r}(\omega)^2} \frac{dT_{f,r}(\omega)}{dr} \frac{dr}{2\pi \log(r)} = \frac{1}{T_{f,2}(\omega)} - \frac{1}{T_{f,R}(\omega)} < +\infty.$$

Pour tout $\delta > 0$, l'ensemble des $r \geq 2$ tels que $\frac{L_{f,r} - L_{f,2}}{T_{f,r}(\omega)} > \delta$ est donc de mesure de Lebesgue finie. Comme par ailleurs $\lim_{r \rightarrow +\infty} T_{f,r}(\omega) = +\infty$, la suite (R_n) est aisément construite.

Le cas de la suite de J -disques $(f_n(\mathbb{D}))$ est moins immédiat. Remarquons d'abord que la suite $\text{Aire}(f_n(D(0, r)))$ est non bornée pour un certain $0 < r < 1$. Il suffit pour cela de voir que les explosions de (f_n) sont d'aire infinie : soit $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ une J -courbe de Brody obtenue par reparamétrisation en un point d'explosion e de la suite (f_n) . Si $f(\mathbb{C})$ était d'aire finie, f se prolongerait en une J -courbe rationnelle $\bar{f} : \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ appelée bulle (voir l'article de J.-C. Sikorav dans [1]). Comme l'intersection d'une J -droite et d'une J -courbe rationnelle non constante n'est jamais vide (voir par exemple [9] pour la démonstration d'un théorème de Liouville presque complexe), cette bulle rencontrerait C en au moins deux points distincts. La J -courbe entière $f(\mathbb{C}) = \bar{f}(\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \setminus \{\infty\})$, couperait donc C en au moins un point, et par positivité d'intersection, serait contenue dans l'une des quatre J -droites L_j tout en évitant les trois autres, contredisant le petit théorème de Picard.

Ainsi, pour un certain $0 < r_0 < 1$, $\limsup_{n \rightarrow +\infty} T_{f_n, r_0}(\omega) = +\infty$. Si η est compris strictement entre 0 et r_0 , pour tout $r > r_0$ on a :

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{r_0}^r \frac{2\pi t \log(t/\eta)}{T_{f_n, t}(\omega)^2} \frac{dT_{f_n, t}(\omega)}{dt} \frac{dt}{2\pi \log(t/\eta)} \\ = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{T_{f_n, r_0}(\omega)} - \frac{1}{T_{f_n, r}(\omega)} \right) = 0 \end{aligned}$$

donc pour presque tout $r > r_0$, $\liminf_{n \rightarrow +\infty} \frac{L_{f_n, r} - L_{f_n, \eta}}{T_{f_n, r}(\omega)} = 0$. Ce n'est pas suffisant pour conclure, car rien n'indique a priori que $\liminf_{n \rightarrow +\infty} \frac{L_{f_n, \eta}}{T_{f_n, r}(\omega)} = 0$.

Notons alors $D(0, \eta_n)$ le disque centré en 0 dont l'image par f_n est d'aire 1. La suite des J -disques $f_n(\overline{D(0, \eta_n)})$ est normale, puisqu'elle est d'aire bornée et évite C , donc la suite (L_{f_n, η_n}) est bornée. Pour tout $r > r_0$, $\frac{L_{f_n, \eta_n}}{T_{f_n, r}(\omega)}$ a donc pour limite inférieure 0. Distinguons deux cas :

- Si (η_n) est minorée par un réel strictement positif η , alors pour presque tout $r > r_0$, $\frac{L_{f_n, r}}{T_{f_n, r}(\omega)}$ converge vers 0, et la suite constante $r_n = r$ convient.
- Si la suite (η_n) tend vers 0, il est tentant de reparamétriser l'anneau de grand module $\overline{D(0, r)} \setminus D(0, \eta_n)$ par l'anneau $\overline{D(0, r/\eta_n)} \setminus D(0, 1)$, de façon à nous ramener à une situation similaire à celle d'une courbe entière. Cela équivaut à effectuer le changement de variable suivant :

$$\int_{2\eta_n}^r \frac{\varphi_n(t) dt}{t \log(t/\eta_n)} = \int_2^{r/\eta_n} \frac{\varphi_n(\eta_n u) du}{u \log(u)} \quad \text{avec } \varphi_n(t) = \frac{t \log(t/\eta_n)}{T_{f_n, t}(\omega)^2} \frac{dT_{f_n, t}(\omega)}{dt}.$$

Cette intégrale vaut $1/T_{f_n, 2\eta_n}(\omega) - 1/T_{f_n, r}(\omega)$, et est donc majorée par $\frac{1}{T_{f_n, 2\eta_n}(\omega)} \leq 1/\log(2)$. Comme la fonction $\frac{1}{u \log u}$ n'est pas intégrable sur $[2, +\infty[$, pour tout $\delta > 0$, l'ensemble $\{u \in [2, r/\eta_n] \mid \varphi_n(\eta_n u) \geq \delta\}$ est de mesure de Lebesgue majorée uniformément en n par une constante M_δ . Nous en déduisons que l'ensemble $\{t \in]2\eta_n, r] \mid \varphi_n(t) \geq \delta\}$ est de mesure de Lebesgue inférieure à $\eta_n M_\delta$. Pour presque tout $0 < r < 1$, la suite $\frac{L_{f_n, r}}{T_{f_n, r}(\omega)}$ a donc pour limite inférieure 0.

Dans tous les cas, pour presque tout $r \in]r_0, 1]$, $\liminf_{n \rightarrow +\infty} \frac{L_{f_n, r}}{T_{f_n, r}(\omega)} = 0$.

Voyons les cas des suites (\tilde{f}_n) et $(\varphi_{k, n})$.

La suite $(\text{Aire}(\tilde{f}_n(\mathbb{D})))$ n'est évidemment pas bornée, donc ce qui précède reste valable, et pour presque tout r suffisamment proche de 1 :

$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} \frac{L_{\tilde{f}_n, r}}{T_{\tilde{f}_n, r}(\tilde{\omega})} = 0.$$

D'après le paragraphe 2.2.2, les suites $(\varphi_{k, n})$ ne sont pas normales non-plus. Comme elles évitent deux points de $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$, les suites $T_{\varphi_{k, n}, r}(\omega')$ ne sont pas bornées pour r suffisamment proche de 1 (l'argument de prolongement des courbes entières d'aire finie utilisé plus haut s'adapte sans problèmes aux applications quasiconformes). Le raisonnement précédent s'applique encore, et pour presque tout r assez proche de 1 : $\liminf_{n \rightarrow +\infty} \frac{L_{\varphi_{k, n}, r}}{T_{\varphi_{k, n}, r}(\omega_1)} = 0$.

Choisissons alors un rayon r tel que $\liminf_{n \rightarrow +\infty} \frac{L_{f_n, r}}{T_{f_n, r}(\omega)} = \liminf_{n \rightarrow +\infty} \frac{L_{\tilde{f}_n, r}}{T_{\tilde{f}_n, r}(\tilde{\omega})} = \liminf_{n \rightarrow +\infty} \frac{L_{\varphi_{k, n}, r}}{T_{\varphi_{k, n}, r}(\omega')}$ (pour $1 \leq k \leq 6$). Les suites de courants $\frac{T_{f_n, r}}{T_{f_n, r}(\omega)}$ et $\frac{T_{\tilde{f}_n, r}}{T_{\tilde{f}_n, r}(\tilde{\omega})}$ convergent faiblement (après éventuelle extraction d'une sous-suite) vers des courants fermés T et \tilde{T} . Quitte à reparamétriser le disque $D(0, r)$ par le disque unité, nous pouvons supposer que $r = 1$. Les suites $T_{f_n, r}$, $T_{\tilde{f}_n, r}$ et $T_{\varphi_{k, n}, r}(\omega')$ ainsi que $L_{f_n, r}$, $L_{\tilde{f}_n, r}$ et $L_{\varphi_{k, n}, r}$ seront notées T_{f_n} , $T_{\tilde{f}_n}$ et $T_{\varphi_{k, n}}(\omega')$ ainsi que L_{f_n} , $L_{\tilde{f}_n}$ et $L_{\varphi_{k, n}}$.

3.2. Intersection homologique et intersection géométrique

L'objet de ce paragraphe est double : d'une part, rappeler que la caractéristique d'aire de f_n domine asymptotiquement celle de $\varphi_{k, n}$ ($1 \leq k \leq 6$), ce qui peut s'interpréter comme un premier théorème principal de Nevanlinna,

et d'autre part, minorer l'intersection homologique $[\widetilde{T}].[\widetilde{\Delta}_l]$ ($1 \leq l \leq 3$) par un terme d'intersection géométrique asymptotique. Les deux inégalités reposent sur la formule de Jensen, et s'obtiennent en mimant les techniques classiquement utilisées dans le contexte holomorphe.

Notons $\#[C].[C']$ le nombre de points d'intersections de deux J -courbes distinctes C et C' , comptés avec multiplicité. Pour tout $n \geq 1$ et tout $1 \leq l \leq 6$ posons :

$$I_{f_n}(\Delta_l) = \int_0^1 \#[f_n(D(0, t))].[\Delta_l] \frac{dt}{t}$$

et

$$I_{\widetilde{f}_n}(\widetilde{\Delta}_l) = \int_0^1 \#[\widetilde{f}_n(D(0, t))].[\widetilde{\Delta}_l] \frac{dt}{t}.$$

Les intersections géométriques asymptotiques $I(T, \Delta_l)$ et $I(\widetilde{T}, \widetilde{\Delta}_l)$ sont définies ainsi :

$$I(T, \Delta_l) = \limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{I_{f_n}(\Delta_l)}{T_{f_n}(\omega)} \quad \text{et} \quad I(\widetilde{T}, \widetilde{\Delta}_l) = \limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{I_{\widetilde{f}_n}(\widetilde{\Delta}_l)}{T_{\widetilde{f}_n}(\widetilde{\omega})}.$$

La première inégalité a déjà été établie et utilisée par Julien Duval dans [9]. Elle nous sera utile au paragraphe suivant.

PROPOSITION 3.1. — Pour tout $1 \leq k \leq 6$:

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{T_{\varphi_{k,n}}(\omega')}{T_{f_n}(\omega)} \leq 1.$$

Démonstration. — L'inégalité est une conséquence de l'existence d'une fonction u négative à singularité logarithmique en S_k et d'une 1-forme bornée α définie sur $\mathbb{P}^2(\mathbb{C}) \setminus \{S_k\}$ telles que :

$$\pi_{S_k}^* \omega' = \omega + dd^c_j u + d\alpha. \tag{3.2}$$

En appliquant T_{f_n} à cette égalité, nous obtenons, grâce au théorème de Stokes et à la formule de Jensen :

$$\begin{aligned} T_{\varphi_{k,n}}(\omega') &= T_{f_n}(\omega) + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u \circ f_n(e^{i\theta}) d\theta - u \circ f_n(0) + \int_0^1 \int_{\partial\mathbb{D}} f_n^* \alpha \frac{dt}{t} \\ &\leq T_{f_n}(\omega) - u \circ f_n(0) + O(L_{f_n}). \end{aligned}$$

Comme $f_n(0)$ reste loin de S_k pour tout n , $-u \circ f_n(0)$ est majoré. La proposition découle alors du caractère fermé de T .

Rappelons brièvement d'où provient l'identité (3.2) : les 2-formes $\pi_{S_k}^* \omega'$ et ω étant cohomologues sur $\mathbb{P}^2(\mathbb{C}) \setminus \{S_k\}$, il s'agit d'un problème local en S_k . Après redressement du pinceau de J -droites en S_k par Ψ_{S_k} , $\pi_{S_k}^* \omega'$ s'écrit : $\pi_{S_k}^* \omega' = \omega + dd^c \log \|Z\| = \omega + dd^c_j \log \|Z\| + d(d \log \|Z\|) \circ (J - i)$ où

Z est une coordonnée locale près de S_k et $\|\cdot\|$ la norme hermitienne de \mathbb{C}^2 . Comme Ψ_{S_k} est de classe \mathcal{C}^{1+lip} , $J(Z) - i = O(\|Z\|)$ et la 1-forme $\alpha = d(\log \|Z\|) \circ (J - i)$ est bornée. \square

La seconde inégalité recherchée est un Lemme de Brunella presque complexe relatif au courant \tilde{T} et à $\tilde{\Delta}_l$ ($1 \leq l \leq 3$) :

PROPOSITION 3.2. — $[\tilde{T}].[\tilde{\Delta}_l] \geq I(\tilde{T}, \tilde{\Delta}_l)$.

Démonstration. — Le procédé est similaire à celui utilisé pour démontrer la proposition 3.1 : nous allons nous ramener à une situation proche du cas holomorphe. L'inégalité proviendra alors du théorème de Lelong-Poincaré et de l'inégalité de Jensen, comme pour le lemme de Brunella (voir [4]).

Le problème est localisé au voisinage de $\tilde{\Delta}_l$. D'après le paragraphe 2.3.3, nous pouvons supposer que Δ_l est une droite complexe le long de laquelle J coïncide avec i . La structure relevée \tilde{J} coïncide alors avec i le long de $\tilde{\Delta}_l$.

Fixons une métrique hermitienne $|\cdot|$ sur le fibré en droites associé au diviseur $\tilde{\Delta}_l$, qui soit plate hors d'un petit voisinage de $\tilde{\Delta}_l$. Si s est une section de ce fibré s'annulant le long de $\tilde{\Delta}_l$, d'après le théorème de Lelong-Poincaré, la 2-forme $\omega_{\tilde{\Delta}_l}$ définie au sens des courants par :

$$\omega_{\tilde{\Delta}_l} = [\tilde{\Delta}_l] - dd^c \log |s| = [\tilde{\Delta}_l] - dd_{\tilde{J}}^c \log |s| + d(d^c \log |s|) \circ (\tilde{J} - i) \tag{3.3}$$

est dans la classe de cohomologie duale à la classe d'homologie de $\tilde{\Delta}_l$. Comme $\tilde{J} = i$ le long de $\tilde{\Delta}_l$, la 1-forme $\beta = d^c(\log |s|) \circ (\tilde{J} - i)$ est bornée. En appliquant $T_{\tilde{f}_n}$ à l'identité (3.3), nous obtenons, grâce aux formules de Jensen et de Stokes :

$$T_{\tilde{f}_n}(\omega_{\tilde{\Delta}_l}) = I_{\tilde{f}_n}(\tilde{\Delta}_l) - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |s \circ \tilde{f}_n(e^{i\theta})| d\theta + \log |s \circ \tilde{f}_n(0)| + O(L_{\tilde{f}_n}).$$

Comme $\tilde{f}_n(0)$ reste loin de $\tilde{\Delta}_l$, $\log |s \circ \tilde{f}_n(0)|$ est minoré, ce qui conclut la démonstration. \square

Remarquons enfin, en vue du paragraphe 4, que pour $0 \leq k \leq 6$, $[\tilde{T}].[E_{S_k}] \geq 0$, puisque \tilde{J} coïncide avec i le long des diviseurs exceptionnels.

4. Le courant T est diagonal

Le courant T admet la décomposition suivante : $T = T_{diag} + T'$, où $T_{diag} = \alpha_1[\Delta_1] + \alpha_2[\Delta_2] + \alpha_3[\Delta_3]$ est la composante diagonale singulière de T . L'objet de ce paragraphe est de montrer que T' est nul. Raisonnons par

l'absurde et supposons $T' \neq 0$. L'ingrédient principal de la démonstration est le lemme suivant, analogue pour le support de T' du "lemme géométrique" de Julien Duval relatif à l'adhérence d'une courbe entière évitant cinq droites (c.f. [9]) :

LEMME (Lemme géométrique). — *Par tout point du support de T' passe un J -disque non trivial contenu dans le support de T' et obtenu comme limite d'une suite de J -disques $d_n \subset f_n(\mathbb{D})$.*

Nous démontrons ce lemme en nous ramenant à la dimension 1 à l'aide des projections centrales π_{S_k} .

4.1. Notations

Soit $P \in \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ un point appartenant au support de T' . Les droites L_k étant en position générale, il existe au moins deux droites distinctes de la configuration C , disons L_1 et L_2 , telles que $P \notin L_1 \cup L_2$. Notons S_1 leur point d'intersection, et L_3, L_4 les deux autres droites de C . Soient alors δ, δ_1 et δ_2 des disques ouverts de $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ d'adhérences deux à deux disjointes, contenant respectivement les points $\pi_{S_1}(P), \pi_{S_1}(L_1 \setminus \{S_1\})$ (que nous noterons 0) et $\pi_{S_1}(L_2 \setminus \{S_1\})$ (que nous noterons ∞).

Comme les J -disques $f_n(\mathbb{D})$ évitent les droites L_1 et L_2 , pour tout $n, \varphi_{1,n}(\mathbb{D})$ évite les points 0 et ∞ . Ainsi, d'après l'inégalité (2.1), le nombre moyen de feuillettes du disque $\varphi_{1,n}(\mathbb{D})$ au-dessus de $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ est équivalent au nombre d'îles de degré 1 au-dessus de δ quand n tend vers l'infini. Plus précisément, si l'on note $I_{n,t}$ l'ensemble des îles de degré 1 au-dessus de δ pour la fonction $\varphi_{1,n}$ contenues dans le disque fermé $\overline{D(0,t)}$, on a alors :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{T_{\varphi_{1,n}}(\omega')}{\int_0^1 \#I_{n,t} \frac{dt}{t}} = 1. \tag{4.1}$$

Si d est une île de degré 1 au-dessus de δ , la restriction de la projection π_{S_1} à $f_n(d)$ est un homéomorphisme sur δ (voir Figure 1).

Si $T_{\varphi_{1,n}}(\omega')$ n'est pas négligeable devant $T_{f_n}(\omega)$, alors de telles îles sont nombreuses relativement à $T_{f_n}(\omega)$, et nous pourrions définir le disque recherché comme une limite de sous-disques de la famille $(f_n(\mathbb{D}))$ de degré 1 au-dessus de δ . Sinon, nous verrons que le courant T' est localement vertical relativement à π_{S_1} , et nous conclurons à l'aide d'une projection depuis un autre point double.

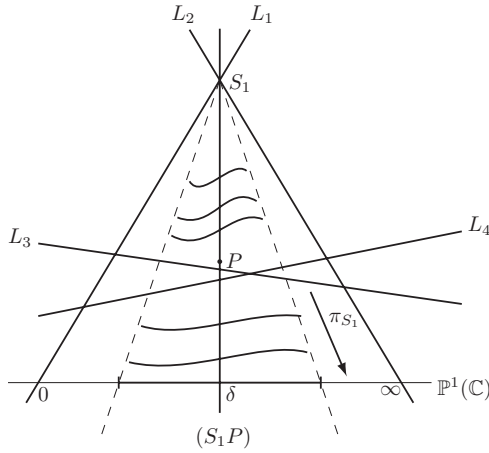


Figure 1

La suite des courants :

$$\frac{1}{T_{f_n}(\omega)} \int_0^1 \left(\sum_{d \in I_{n,t}} [f_n(d)] \right) \frac{dt}{t}$$

étant de masse uniformément bornée, elle converge, après une éventuelle extraction que nous ignorerons, vers un courant positif T_1 . Distinguons deux cas, selon que P appartienne ou non au support de T_1 .

4.2. Cas où $P \in \text{Supp}T_1$

Nous allons construire le disque recherché comme limite de J -disques $(f_n(d_n))$, où les d_n sont des îles de degré 1 au-dessus de δ . Notons :

$$\mathcal{G} = \{J\text{-disques } \gamma \in \mathbb{P}^2(\mathbb{C}) \mid (\pi_{S_1})|_\gamma : \gamma \rightarrow \delta \text{ est de degré 1 et } \gamma \cap C = \emptyset\}.$$

FAIT 1. — *L'ensemble \mathcal{G} est relativement compact pour la distance de Hausdorff, et son adhérence $\overline{\mathcal{G}}$ vaut :*

$$\overline{\mathcal{G}} = \mathcal{G} \cup (\pi_{S_1}^{-1}(\delta) \cap L_3) \cup (\pi_1^{-1}(\delta) \cap L_4) \cup \{S_1\}.$$

En effet, par projection centrale en S_1 des J -disques de \mathcal{G} , nous obtenons une famille d'homéomorphismes α -quasiconformes $(\varphi_\gamma)_{\gamma \in \mathcal{G}}$ à valeurs dans δ , donc normale (voir le paragraphe 2.2.1). Le paragraphe 2.2.2 montre alors que \mathcal{G} est une famille normale. Par positivité d'intersecion, son adhérence

s'obtient en ajoutant simplement les disques $\pi_{S_1}^{-1}(\delta) \cap L_3$ et $\pi_{S_1}^{-1}(\delta) \cap L_4$ ainsi que le point S_1 .

Montrons qu'il existe un disque holomorphe $\gamma \in \bar{\mathcal{G}} \setminus \{S_1\}$ passant par P et contenu dans le support de T_1 . Pour cela, considérons l'ensemble $\mathcal{M}(\bar{\mathcal{G}} \setminus \{S_1\})$ des mesures localement finies sur $\bar{\mathcal{G}} \setminus \{S_1\}$, qui est un espace compact pour la topologie de la convergence faible sur tout compact de $\bar{\mathcal{G}} \setminus \{S_1\}$. Pour un disque $\gamma \in \bar{\mathcal{G}} \setminus \{S_1\}$, δ_γ désignera la masse de Dirac au point γ . Pour tout $n \geq 0$, la mesure μ_n définie par :

$$\mu_n = \frac{1}{T_{f_n}(\omega)} \int_0^1 \left(\sum_{d \in I_{n,t}} \delta_{f_n(d)} \right) \frac{dt}{t}$$

est bien localement finie, car pour tout compact K de $\bar{\mathcal{G}} \setminus \{S_1\}$, les J -disques $\gamma \in K$ sont d'aire minorée en vertu du théorème de Lelong pour les J -disques (voir l'article de J.C. Sikorav dans [1]). La suite (μ_n) converge donc, quitte à en extraire une sous-suite, vers une mesure μ de $\mathcal{M}(\bar{\mathcal{G}} \setminus \{S_1\})$. On vérifie alors aisément le fait suivant :

FAIT 2. — $T_1 = \int_{\bar{\mathcal{G}} \setminus \{S_1\}} [\gamma] d\mu(\gamma)$. En particulier, $\text{Supp } T_1 = \bigcup_{\gamma \in \text{Supp } \mu} \gamma$.

Ainsi, comme P est dans le support de T_1 , il existe un disque γ appartenant au support de μ passant par P . Comme $\text{Supp } \mu \subset \bigcup_n \text{Supp } \mu_n$, γ est bien limite de J -disques de $(f_n(\mathbb{D}))$.

4.3. Cas où $P \notin \text{Supp } T_1$

Nous allons démontrer que le courant T' est vertical relativement à la projection π_{S_1} . Commençons par vérifier que T_1 est localement la partie horizontale de T relativement à π_{S_1} :

FAIT 3. — $(\pi_{S_1})_*(T|_{\pi_{S_1}^{-1}(\delta)}) = (\pi_{S_1})_*T_1$.

Démonstration. — D'après (4.1) et la proposition 3.1, on a :

$$\frac{1}{T_{f_n}(\omega)} \left(\int_0^1 \int_{D(0,t) \setminus \bigcup_{d \in I_{n,t}} (\varphi_{1,n})^* \omega'} \right) \frac{dt}{t} = \frac{o(T_{\varphi_{1,n}}(\omega'))}{T_{f_n}(\omega)} = o(1).$$

On en déduit :

$$\begin{aligned}
 (\pi_{S_1})_*(T|_{\pi_{S_1}^{-1}(\delta)}) &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{T_{f_n}(\omega)} \int_0^1 [\varphi_{1,n}(D(0,t))] \frac{dt}{t} \\
 &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{T_{f_n}(\omega)} \int_0^1 \left(\sum_{d \in I_{n,t}} \int_d [\varphi_{1,n}(d)] \right) \frac{dt}{t} \\
 &= (\pi_{S_1})_* T_1. \quad \square
 \end{aligned}$$

Ainsi, comme P n'est pas dans le support de T_1 , $\mathbb{1}_{B(P,\varepsilon)} T_1 = 0$ pour un certain $\varepsilon > 0$, et donc : $(\pi_{S_1})_*(\mathbb{1}_{B(P,\varepsilon)} T') = (\pi_{S_1})_*(\mathbb{1}_{B(P,\varepsilon)} T) = 0$. Quitte à réduire ε , on peut trouver dans $B(P,\varepsilon)$ un repère local (ζ_1, ζ_2) du fibré $T_J^{1,0}$ tel que ζ_1 soit tangent aux J -droites du pinceau en S_1 . Dans le repère dual, $\mathbb{1}_{B(P,\varepsilon)} T'$ s'écrit :

$$\mathbb{1}_{B(P,\varepsilon)} T' = iT_{1,1} \zeta_1^* \wedge \bar{\zeta}_1^* + iT_{1,2} \zeta_1^* \wedge \bar{\zeta}_2^* + iT_{2,1} \zeta_2^* \wedge \bar{\zeta}_1^* + iT_{2,2} \zeta_2^* \wedge \bar{\zeta}_2^*.$$

Comme $(\pi_{S_1})_*(\mathbb{1}_{B(P,\varepsilon)} T') = 0$, alors $T_{2,2} = 0$, puis $T_{1,2} = T_{2,1} = 0$ (voir paragraphe 2.3.2). Comme de plus T' est fermé, la fonction $T_{1,1}$ est constante le long des J -droites du pinceau en S_1 , donnant une mesure positive $dT_{1,1}$ sur δ . Le courant $\mathbb{1}_{B(P,\varepsilon)} T'$ est donc de la forme :

$$\mathbb{1}_{B(P,\varepsilon)} T' = \int_{\pi_{S_k}^{-1}(B(P,\varepsilon))} [\pi_{S_k}^{-1}(z) \cap B(P,\varepsilon)] dT_{1,1}(z). \quad (4.2)$$

Achevons la démonstration du lemme géométrique. Supposons pour commencer que P n'appartienne pas à L_3 . Notons S_3 le point double $L_1 \cap L_3$. Comme $(\pi_{S_3})_*([\pi_{S_1}^{-1}(z)])$ est non nul pour tout $z \in \delta$, l'égalité (4.2) implique que le point P est dans le support du courant $(\pi_{S_3})_* T'$. Comme dans le paragraphe 4.1, nous pouvons définir, à partir des îles de degré 1 au-dessus d'un petit disque contenant $\pi_{S_3}(P)$ pour l'application quasi-conforme $\varphi_{3,n}$, un courant T_3 de support inclus dans celui de T' . Le fait 3 s'applique, et P est dans le support de T_3 : le J -disque γ recherché est alors construit comme dans le paragraphe 4.2. La situation est identique si P n'appartient pas à L_4 .

Il reste à traiter le cas où P est le point double $S_2 = L_3 \cap L_4$ situé en vis-à-vis de S_1 . Nous allons voir que ce point appartient forcément au support de T_1 , et le paragraphe 4.2 permettra alors de conclure la démonstration du lemme géométrique.

Supposons que ce ne soit pas le cas ; l'équation (4.2) est alors vérifiée. La diagonale Δ_1 reliant les points S_1 et S_2 n'est pas une composante singulière de T' , donc le point $\pi_{S_1}(S_2)$ ne peut être un atome pour la mesure $dT_{1,1}$. Soit $z \in \text{Supp}(dT_{1,1}) \setminus \{\pi_{S_1}(S_2)\}$ un point proche de $\pi_{S_1}(S_2)$.

Comme nous l'avons vu plus haut, $(\pi_{S_3})_*[\overline{\pi_{S_1}^{-1}(z)}] \neq 0$, donc le point $P_z = \pi_{S_1}^{-1}(z) \cap L_4$ est dans le support de T_3 : il existe un J -disque γ_z contenu dans le support de T_3 , issu de la suite $(f_n(\mathbb{D}))$, passant par P_z . Par positivité d'intersection, $\gamma_z \subset L_4$, donc comme $(\pi_{S_1})_*[L_4] \neq 0$, le courant T_1 a de la masse près de P_z : le point z pouvant être pris arbitrairement proche de $\pi_{S_1}(S_2)$, le point S_2 est dans le support de T_1 , contrairement à ce qui a été supposé.

4.4. Conclusion à l'aide du lemme géométrique

Rappelons que nous avons supposé T' non nul. Nous allons obtenir une contradiction à l'aide du lemme géométrique et du fait suivant, analogue du théorème de Liouville pour le courant T' :

FAIT 4. — *Toute J -droite de $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ rencontre le support de T' .*

Démonstration. — Soit L_0 une J -droite de $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ non entièrement contenue dans le support de T' . Notons $(L_z)_{z \in \mathbb{P}^1(\mathbb{C})}$ le pinceau de J -droites centré en un point de $L_0 \setminus \text{Supp}(T')$. Le support de T' rencontre forcément une J -droite L_z du pinceau, et par tout point de $L_z \cap \text{Supp}(T')$ passe un J -disque contenu dans $\text{Supp}(T')$. Au moins un J -disque $\gamma \subset \text{Supp}(T')$ rencontre L_z sans y être contenu (sinon, le fait pour un point de L_z d'être contenu dans un J -disque inclus dans $\text{Supp}(T') \cap L_z$ serait une propriété ouverte, et L_z serait contenue dans le support de T' , ainsi que le centre du pinceau). Par positivité d'intersection, les droites proches de L_z coupent aussi γ , et finalement toutes les droites du pinceau, et en particulier L_0 , rencontrent le support de T' . □

L'ensemble $L_1 \cap \text{Supp } T'$ est donc un ensemble fermé non vide. C'est aussi un ouvert de L_1 , car par tout point P de $L_1 \cap \text{Supp } T'$ passe un disque holomorphe γ non trivial contenu dans $\text{Supp } T'$ et issu de $(f_n(\mathbb{D}))$, donc contenu dans L_1 par positivité d'intersection. Ainsi, $L_1 \subset \text{Supp } T'$, et de même $L_2 \subset \text{Supp } T'$. Par le point $L_1 \cap L_2$ passe donc un J -disque non trivial issu de $(f_n(\mathbb{D}))$. Toujours par positivité d'intersection, ce J -disque doit être contenu à la fois dans L_1 et dans L_2 , ce qui est impossible.

5. Obtention d'une contradiction aux points doubles

Le paragraphe précédent montre que le courant T est porté par Δ . Suivant une idée de M.L. McQuillan (c.f. [17]), nous allons examiner le comportement des J -disques f_n au voisinage des points doubles de la configuration C à l'aide d'éclatements. Rappelons que (\tilde{X}, \tilde{J}) désigne l'éclaté

du plan projectif presque complexe $(\mathbb{P}^2(\mathbb{C}), J)$ en les S_k , que les E_{S_k} ($1 \leq k \leq 6$) désignent les diviseurs exceptionnels au-dessus des points S_k , et que $\Pi : \tilde{X} \rightarrow \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ est la projection canonique. Les longueurs et les aires seront calculées pour la métrique hermitienne associée à la $(1, 1)$ -forme $\tilde{\omega}$ définie au paragraphe 2.3.1.

Le courant \tilde{T} est porté par la réunion de \tilde{J} -courbes $D = (\bigcup \tilde{\Delta}_l) \cup (\bigcup E_{S_k})$. Comme il est fermé et d'ordre zéro, il est de la forme :

$$\tilde{T} = \tilde{\alpha}_1[\tilde{\Delta}_1] + \tilde{\alpha}_2[\tilde{\Delta}_2] + \tilde{\alpha}_3[\tilde{\Delta}_3] + \sum_{1 \leq k \leq 6} \lambda_k[E_{S_k}]. \quad (5.1)$$

Pour tout $1 \leq k \leq 6$, $[\tilde{T}].[E_{S_k}] \geq 0$ (voir paragraphe 3.2), donc \tilde{T} ne peut être porté par les diviseurs exceptionnels, qui sont d'autointersection -1 . Rappelons que S_1 est le point d'intersection de L_1 et L_2 . La forme particulière de \tilde{T} (voir 5.1) permet de calculer $[\tilde{T}].[\tilde{\Delta}_1]$:

$$[\tilde{T}].[\tilde{\Delta}_1] = -\tilde{\alpha}_1 + \tilde{\alpha}_2 + \tilde{\alpha}_3 + \lambda_1 + \lambda_2 \geq I(\tilde{T}, \tilde{\Delta}_1).$$

La contradiction recherchée découle du lemme suivant :

LEMME. — $\tilde{\alpha}_2 + \tilde{\alpha}_3 + \lambda_1 + \lambda_2 \leq I(\tilde{T}, \tilde{\Delta}_1)$.

Démonstration. — Nous allons établir que λ_1 est majoré par l'intersection géométrique asymptotique près de E_{S_1} du courant \tilde{T} et de $\tilde{\Delta}_1$ (le raisonnement se transposera aisément aux cas des diviseurs E_{S_2} , $\tilde{\Delta}_2$ et $\tilde{\Delta}_3$). Nous allons pour cela projeter sur E_{S_1} les morceaux de $\tilde{f}_n(\mathbb{D})$ situés près du diviseur exceptionnel, de façon à pouvoir appliquer la théorie d'Ahlfors. L'inégalité recherchée découlera alors de l'inégalité 2.1 et du fait que les \tilde{J} -disques \tilde{f}_n évitent \tilde{L}_1 et \tilde{L}_2 : le nombre d'îles au-dessus du point $\tilde{\Delta}_1 \cap E_{S_1}$ majore asymptotiquement la masse près de E_{S_1} , soit environ, après intégration à la Nevanlinna, $\lambda_1 T_{\tilde{f}_n}(\tilde{\omega})$.

Commençons par localiser l'étude au voisinage de E_{S_1} . Il existe une famille $(U_t)_{0 < t < \eta}$ de voisinages pseudoconvexes de E_{S_1} , le voisinage U_η étant pris suffisamment petit. En identifiant E_{S_1} avec $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$, la projection qui à tout point \tilde{P} de U_η associe le point d'intersection de la transformée stricte de la J -droite passant par $\Pi(\tilde{P})$ et S_1 avec E_{S_1} s'identifie à la projection $\tilde{\pi}_{S_1}$.

Les longueurs et les aires sur le diviseur exceptionnel E_{S_1} seront calculées pour la métrique associée à la forme de Fubini-Study ω' .

Fixons un $0 < \varepsilon < \eta$. Posons $\Sigma_n = \tilde{f}_n^{-1}(U_\varepsilon)$. Les applications $\tilde{\pi}_{E_{S_1}} \circ \tilde{f}_n : \Sigma_n \rightarrow E_{S_1}$ s'identifient aux applications $\varphi_{1,n}$ et sont α -quasiconformes.

Posons, pour tout $0 < t < 1$, $\Sigma_{n,t} = \Sigma_n \cap D(0, t)$. Nous allons, grâce à la théorie d’Ahlfors, établir l’inégalité :

$$\int_0^1 \text{Aire}(\varphi_{1,n}(\Sigma_{n,t})) \frac{dt}{t} + o(T_{\tilde{f}_n}(\tilde{\omega})) \leq \int_0^1 \#[\tilde{f}_n(D(0, t))] \cdot [\tilde{\Delta}_1 \cap U_\varepsilon] \frac{dt}{t}. \tag{5.2}$$

Comme $(\tilde{\pi}_{S_1})_*(\mathbb{1}_{U_\varepsilon} \tilde{T}) = \lambda_1[E_1]$, nous obtiendrons, après division par $T_{\tilde{f}_n}(\tilde{\omega})$:

$$\lambda_1 \leq \limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{T_{\tilde{f}_n}(\tilde{\omega})} \int_0^1 \#[\tilde{f}_n(D(0, t))] \cdot [\tilde{\Delta}_1 \cap U_\varepsilon] \frac{dt}{t}$$

ce qui est l’inégalité recherchée.

Supposons dans un premier temps que $\Sigma_{n,t}$ soit connexe. Commençons par montrer que $\int_0^1 -\min(0, \chi(\Sigma_{n,t})) \frac{dt}{t}$ est faible devant $T_{\tilde{f}_n}(\tilde{\omega})$. Le domaine $\Sigma_{n,t}$ est de la forme $\Omega_n \setminus \bigcup_{j \leq j_{n,t}} \overline{\Omega_{n,j}}$, où $j_{n,t}$ est un entier positif, Ω_n ainsi que les $\Omega_{n,j}$ sont des disques topologiques ouverts, et où pour tout j : $\tilde{f}_n(\overline{\Omega_{n,j}}) \cap \overline{U_\varepsilon} = \tilde{f}_n(\partial\Omega_{n,j})$ (voir Figure 2).

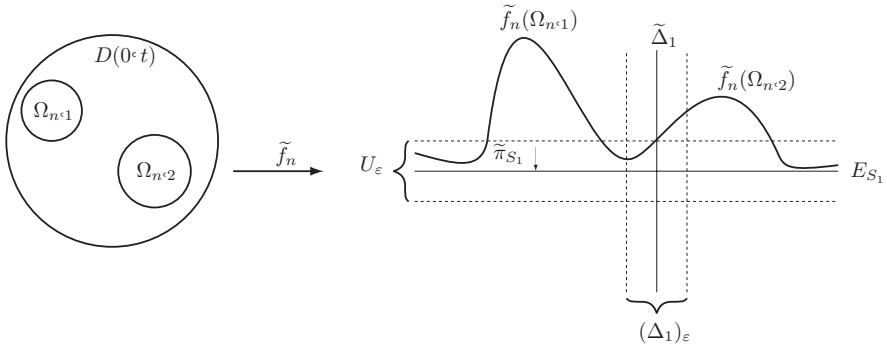


Figure 2

Comme nous l’avons vu au paragraphe 2.3.2, pour tout $1 \leq j \leq j_{n,t}$, le disque $\Omega_{n,j}$ ne peut avoir son image $\tilde{f}_n(\Omega_{n,j})$ entièrement contenue dans U_η , puisque les ouverts U_t sont tous pseudo-convexes. Le \tilde{J} -disque $\tilde{f}_n(\Omega_{n,j})$ ne peut non plus rester près du diviseur D . En effet, si $\tilde{f}_n(\Omega_{n,j})$ était contenu dans le 2ε -voisinage $(D)_{2\varepsilon}$ de D , l’image du J -disque $f_n(\Omega_{n,j})$ par une projection centrale sur Δ_1 depuis un point P situé hors de Δ_1 contiendrait forcément le point S_2 , en vertu du principe du maximum pour les applications quasiconformes. Le J -disque $f_n(\Omega_{n,j})$ passerait donc près du diviseur exceptionnel E_{S_2} , coupant ainsi les droites L_3 et L_4 , ce qui est impossible.

Ainsi, pour tout j , le \tilde{J} -disque $\tilde{f}_n(\Omega_{n,j})$ sort de $(D)_{2\varepsilon}$, et d'après le théorème de Lelong, il existe une constante $c_\varepsilon > 0$ telle que l'aire de la portion de $\tilde{f}_n(\Omega_{n,j})$ contenue dans $(D)_{2\varepsilon} \setminus (D)_\varepsilon$ soit minorée par c_ε . Comme \tilde{T} ne charge pas $(D)_{2\varepsilon} \setminus (D)_\varepsilon$, de tels disques sont peu nombreux et $\int_0^1 -\min(0, \chi(\Sigma_{n,t})) \frac{dt}{t}$ est bien négligeable devant $T_{f_n}(\tilde{\omega})$.

Vérifions également que la longueur de l'image du bord de $\Sigma_{n,t}$ est négligeable devant le terme d'aire. Plus précisément, nous n'aurons besoin de nous intéresser qu'à la partie de $\partial\Sigma_{n,t}$ dont l'image par \tilde{f}_n est loin de $\tilde{\Delta}_1$: posons $C_{n,t} = \partial\Sigma_{n,t} \setminus \tilde{f}_n^{-1}\left((\tilde{\Delta}_1)_\varepsilon\right)$, $(\tilde{\Delta}_1)_\varepsilon$ désignant le ε -voisinage de $\tilde{\Delta}_1$. D'une part, rappelons que $L_{\tilde{f}_n}$ est négligeable devant $T_{\tilde{f}_n}(\tilde{\omega})$. D'autre part, comme \tilde{T} ne charge pas $U_\eta \cup U_\varepsilon \cup (\tilde{\Delta}_1)_\varepsilon$, la formule de coaire permet d'affirmer, quitte à modifier légèrement ε , que $\int_0^1 \text{Longueur}(\tilde{f}_n(C_{n,t})) \frac{dt}{t}$ est négligeable devant $T_{\tilde{f}_n}(\tilde{\omega})$.

En vue d'appliquer la théorie d'Ahlfors, considérons le disque ouvert $\delta = \tilde{\pi}_{S_1}((\tilde{\Delta}_1)_\varepsilon \cap U_\varepsilon)$ de E_{S_1} , contenant le point $\tilde{\pi}_{S_1}(\tilde{\Delta}_1 \cap U_\varepsilon)$, et posons $\Sigma'_{n,t} = \Sigma_{n,t} \setminus \varphi_{1,n}^{-1}(\delta)$. Comme les disques $\tilde{f}_n(\mathbb{D})$ évitent les droites \tilde{L}_1 et \tilde{L}_2 , les fonctions $\varphi_{1,n}$ évitent deux points distincts, que nous noterons 0 et ∞ . Nous disposons d'un recouvrement quasiconforme $\varphi_{1,n} : \Sigma_{n,t} \rightarrow E_{S_1} \setminus (\delta \cup \{0, \infty\})$. L'inégalité (2.1) est vérifiée : il existe une constante $h > 0$ telle que si $I(n, t)$ désigne le nombre d'îles au-dessus de δ dans $\Sigma_{n,t}$:

$$\text{Aire}(\varphi_{1,n}(\Sigma_{n,t})) \leq I(n, t) - \min(0, \chi(\Sigma_{n,t})) + h \text{Longueur}(\varphi_{1,n}(\partial\Sigma'_{n,t}) \setminus \partial\delta). \tag{5.3}$$

Comme d'une part, l'image par \tilde{f}_n de toute île au-dessus de δ coupe $\tilde{\Delta}_1$, et d'autre part, $\text{Longueur}(\varphi_{1,n}(\partial\Sigma'_{n,t}) \setminus \partial\delta)$ est majorée (à une constante multiplicative près dépendant de $\tilde{\omega}$) par $\text{Longueur}(\tilde{f}_n(C_{n,t}))$, on obtient l'inégalité :

$$\begin{aligned} \text{Aire}(\varphi_{1,n}(\Sigma_{n,t})) &\leq \#[\tilde{f}_n(D(0, t))].[\tilde{\Delta}_1 \cap U_\varepsilon] \\ &\quad - \min(0, \chi(\Sigma_{n,t})) + \text{Longueur}(\tilde{f}_n(C_{n,t})) \end{aligned}$$

qui, après intégration par rapport à $\frac{dt}{t}$, donne l'inégalité (5.2) recherchée.

Si l'on ne suppose plus $\Sigma_{n,t}$ connexe, il existe une inégalité du type (5.3) pour chacune de ses composantes connexes ; il suffit alors de sommer ces inégalités.

Nous pouvons reproduire ce raisonnement à l'identique au voisinage du diviseur E_2 , puisque les disques \tilde{f}_n évitent \tilde{L}_3 et \tilde{L}_4 , ainsi qu'au voisinage des diviseurs $\tilde{\Delta}_2$ et $\tilde{\Delta}_3$, puisque les diviseurs exceptionnels E_3, E_4, E_5 et E_6

sont aussi évités. Ceci achève la démonstration du lemme, puis du théorème de Bloch. \square

BIBLIOGRAPHIE

- [1] J. AUDIN, M. ET LAFONTAINE ED., *Holomorphic curves in symplectic geometry*, Progress in Math., vol. 117, Birkhäuser, Basel, 1994.
- [2] A. BLOCH, « Sur les systèmes de fonctions holomorphes à variétés linéaires lacunaires », *Ann. Sci. Ecole Norm. Sup.* **43** (1926), p. 309-362.
- [3] R. BRODY, « Compact manifolds and hyperbolicity », *Trans. Amer. Math. Soc.* **235** (1978), p. 213-219.
- [4] M. BRUNELLA, « Courbes entières et feuilletages holomorphes », *L'enseignement mathématique* (1999), n° 45, p. 195-216.
- [5] H. CARTAN, « Sur les systèmes de fonctions holomorphes à variétés lacunaires et leurs applications », *Ann. Sci. École Norm. Sup.* **45** (1928), p. 255-346.
- [6] M. J. COWEN, « The method of negative curvature : the Kobayashi metric on P_2 minus 4 lines », *Trans. Amer. Math. Soc.* **319** (1990), p. 729-745.
- [7] H. DE THÉLIN, « Une démonstration du théorème de recouvrement de surfaces d'Ahlfors », *Ens. Math.* **51** (2005), p. 203-209.
- [8] R. DEBALME & S. IVASHKOVICH, « Complete hyperbolic neighbourhood in almost complex surfaces », *Int. J. of Math.* (2001), n° 12, p. 211-221.
- [9] J. DUVAL, « Un théorème de Green presque complexe », *Annales de l'institut Fourier* **54** (2004), n° 7, p. 2357-2367.
- [10] F. ELKHADHRA, « J-pluripolar subsets and currents on almost complex manifolds », *Math. Zeit.* **264** (2010), n° 2, p. 399-422.
- [11] A. EREMENKO & M. SODIN, « The value distribution of meromorphic functions and meromorphic curves from the point of view of potential theory », *St. Petersburg Math. J.* **3** (1992), p. 109-136.
- [12] M. GREEN, « Some Picard theorems for holomorphic maps to algebraic varieties », *Amer. J. Math.* **97** (1975), p. 43-75.
- [13] M. GROMOV, « Pseudo holomorphic curves in symplectic manifolds », *Invent. Math.* **83** (1985), p. 307-347.
- [14] S. KOBAYASHI, *Hyperbolic complex spaces*, Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, vol. 318, Springer, 1998.
- [15] B. KRUGLIKOV & M. OVERHOLT, « Pseudoholomorphic mappings and Kobayashi hyperbolicity », *Diff. Geom. Appl.* **11** (1999), p. 265-277.
- [16] O. LEHTO & K. I. VIRTANEN, *Quasiconformal mappings in the plane*, Grund. der. math. Wiss, vol. 126, Springer, Berlin, 1973.
- [17] M. MCQUILLAN, « Bloch hyperbolicity », 1970, preprint IHES.
- [18] R. NEVANLINNA, *Analytic functions*, Springer, 1970.
- [19] N. PALI, « Fonctions plurisousharmoniques et courants de type (1,1) sur les variétés presque complexes », *Manuscripta Math.* **118** (2005), p. 311-337.
- [20] J.-C. SIKORAV, « Dual elliptic planes », in *Actes des Journées Mathématiques à la Mémoire de Jean Leray*, Sémin. Congr., vol. 9, Soc. Math. France, Paris, 2004, p. 185-207.

Manuscrit reçu le 28 juin 2010,
accepté le 13 juin 2014.

Benoît SALEUR
Département de Mathématiques
de la faculté des sciences d'Orsay,
Université Paris-Sud 11,
91405 Orsay Cedex
benoit.saleur@math.u-psud.fr