ANNALES

DE

L'INSTITUT FOURIER

Corinne BLONDEL

**Représentation de Weil et $\beta$-extensions**

Tome 62, nº 4 (2012), p. 1319-1366.

<http://aif.cedram.org/item?id=AIF_2012__62_4_1319_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
**62**, 4 (2012) 1319-1366

# REPRÉSENTATION DE WEIL ET $\beta$-EXTENSIONS

**par Corinne BLONDEL (*)**

Résumé. — Nous étudions les $\beta$-extensions dans un groupe classique $p$-adique et obtenons une relation entre certaines $\beta$-extensions à l'aide d'une représentation de Weil. Nous en donnons une application à l'étude des points de réductibilité de certaines induites paraboliques.

Abstract. — We study $\beta$-extensions in a $p$-adic classical group and we produce a relation between some $\beta$-extensions by means of a Weil representation. We apply this to the study of reducibility points of some parabolically induced representations.

## Introduction

Soit $F$ un corps local non archimédien de caractéristique résiduelle impaire. Soit $G_0$ un groupe symplectique, spécial orthogonal ou unitaire sur $F$ (sur le corps des points fixes d'une involution sur $F$ dans le cas unitaire) et, pour $n \in \mathbb{N}$, soit $G_n$ le groupe classique de même nature que $G_0$ ayant un sous-groupe parabolique maximal $P_n$ de facteur de Levi $M_n$ isomorphe à $\mathrm{GL}(n, F) \times G_0$. Soit $\sigma$ une représentation supercuspidale irréductible de $G_0$ et $\pi$ une représentation supercuspidale irréductible de $\mathrm{GL}(n, F)$.

L'étude des points de réductibilité de la représentation induite $\mathrm{ind}_{P_n}^{G_n} \pi |\det|^s \otimes \sigma$, où traditionnellement le paramètre $s$ est réel, joue un rôle important en théorie des représentations, aussi bien, depuis plus de trente

*Mots-clés :* Corps local non archimédien, groupe classique, représentation de Weil, beta-extension, type semi-simple, caractère semi-simple, paire couvrante, algèbre de Hecke, points de réductibilité.
*Classification math. :* 22E50.
(*) J'aimerais remercier Shaun Stevens pour m'avoir expliqué certaines subtilités des caractères semi-simples et $\beta$-extensions et pour ses commentaires d'une première version de ce manuscrit, et Laure Blasco, Guy Henniart, Colette Mœglin et Shaun Stevens pour des discussions très stimulantes à différents stades de ce travail.

ans, dans la classification des représentations lisses irréductibles de $G_n$ et la détermination de son dual unitaire, que plus récemment dans l'étude de la correspondance de Langlands. La représentation induite ci-dessus, normalisée, est toujours irréductible si $\pi$ n'est pas autoduale (au sens approprié du paragraphe 3.2) ; si $\pi$ est autoduale, dans presque tous les cas ses points de réductibilité sont soit $s = 0$, soit $s = \pm\frac{1}{2}$. D'après les travaux de Mœglin, l'ensemble $\mathrm{Red}(\sigma)$ des paires $(\pi, s)$, formées d'une représentation supercuspidale autoduale irréductible $\pi$ d'un groupe $\mathrm{GL}(n, F)$ et d'un nombre réel $s \geqslant 1$, telles que la représentation induite $\mathrm{ind}_{P_n}^{G_n} \pi|\det|^s \otimes \sigma$ soit réductible détermine le $L$-paquet auquel appartient $\sigma$ et son image dans la correspondance de Langlands ; cet ensemble est fini et sa taille est connue.

Or la théorie des types et paires couvrantes est un outil puissant d'étude de telles induites, qui permet de traiter le cas, échappant aux méthodes traditionnelles, des représentations non génériques, et qui surtout devrait aboutir à une description explicite de $\mathrm{Red}(\sigma)$, donc du $L$-paquet de $\sigma$ et de son image dans la correspondance de Langlands, en fonction du type (ou d'un type) attaché à $\sigma$. Ce programme, initié dans l'article fondateur [4], est techniquement assez difficile puisque pour obtenir $\mathrm{Red}(\sigma)$ il faut partir d'un type $(J_\sigma, \lambda_\sigma)$ pour $\sigma$, d'un type $(\tilde{J}_\pi, \tilde{\lambda}_\pi)$ pour une représentation supercuspidale autoduale irréductible $\pi$ d'un groupe $\mathrm{GL}(n, F)$ et déterminer :

(i) une paire couvrante $(J, \lambda)$ de $(\tilde{J}_\pi \times J_\sigma, \tilde{\lambda}_\pi \otimes \lambda_\sigma)$ dans $G_n$ ;

(ii) la structure de l'algèbre de Hecke associée $\mathcal{H}(G_n, \lambda)$ ;

(iii) les points de réductibilité *complexes* de l'induite ci-dessus via des équivalences de catégories transformant l'induction parabolique en induction des $\mathcal{H}(M_n, \tilde{\lambda}_\pi \otimes \lambda_\sigma))$-modules en $\mathcal{H}(G_n, \lambda)$-modules (voir le paragraphe 3.2, essentiellement indépendant du reste de l'article). Un type pour $\pi$ est insensible à la torsion par un caractère non ramifié, c'est pourquoi le paramètre $s$ varie ici dans $\mathbb{C}$ ; cela revient à étudier ensemble deux représentations induites à paramètre réel (§3.2).

La faisabilité de ce programme est attestée par [1] qui le mène à son terme pour les sous-groupes de Levi $\mathrm{GL}(1, F) \times \mathrm{Sp}(2, F)$ et $\mathrm{GL}(2, F)$ de $\mathrm{Sp}(4, F)$. Dans un travail en cours avec Guy Henniart et Shaun Stevens, nous le mettons en œuvre pour déterminer explicitement les $L$-paquets de $\mathrm{Sp}(4, F)$ en termes de types, à partir de la liste des types de représentations supercuspidales génériques et non génériques de $\mathrm{Sp}(4, F)$ établie dans [6] (Gan et Takeda décrivent ces $L$-paquets dans [8] par une méthode différente ne permettant pas une telle explicitation).

Dans un groupe classique plus général et pour une représentation induite de la forme ci-dessus, la construction d'une paire couvrante (i) a été effectuée dans certains cas particuliers : le sous-groupe de Levi de Siegel d'un groupe symplectique dans [2], le sous-groupe de Levi de Siegel d'un groupe classique dans [10] où la structure théorique de l'algèbre de Hecke (ii) est déterminée, une représentation supercuspidale autoduale de niveau zéro du Levi de Siegel d'un groupe symplectique ou spécial orthogonal dans [13] qui donne en outre l'étude de réductibilité (iii). Plus généralement, des paires couvrantes accompagnées de la structure théorique de l'algèbre de Hecke associée sont fournies par [21], sous des hypothèses assez larges, en particulier celles du paragraphe 3.1 ci-dessous, que nous supposerons vérifiées dans la suite de cette introduction : il s'agit essentiellement de demander que $\pi$ et $\sigma$ soient attachées à des strates suffisamment "disjointes" du point de vue de la théorie des types et à des caractères semi-simples compatibles (cf. remarque 3.18).

Dans presque tous les cas qui nous intéressent ici, la structure théorique de l'algèbre de Hecke $\mathcal{H}(G_n, \lambda)$ obtenue est la même : il s'agit d'une algèbre de convolution à deux générateurs $T_0$ et $T_1$ sur un groupe de Weyl affine qui ne dépend que de $\pi$. Le générateur $T_i$, $i = 0, 1$, est l'image par une injection d'algèbres du générateur d'une algèbre de Hecke $\mathcal{L}_i = \mathcal{H}(\mathcal{G}_i, \rho_i)$ de dimension 2, l'algèbre d'entrelacements de l'induite parabolique d'une représentation cuspidale d'un sous-groupe de Levi maximal $\mathcal{M}_i$ dans un groupe réductif fini. La connaissance de $\mathcal{G}_i$ et $\rho_i$ doit permettre de calculer la relation quadratique satisfaite par $T_i$ à l'aide des travaux de Lusztig (voir [13]). Ces deux relations quadratiques suffisent à déterminer les parties réelles des points de réductibilité de la représentation induite considérée (§3.2) et donc à prédire s'il s'agit d'une situation "ordinaire" avec réductibilités de parties réelles 0 ou $\pm\frac{1}{2}$, ou d'une situation fournissant un élément de l'ensemble $\mathrm{Red}(\sigma)$ cherché.

Mais le diable est dans les détails : $\rho_i$ est "la partie de niveau zéro du type $\lambda$", notion à laquelle on ne peut donner un sens que "relativement à $\mathcal{G}_i$" (en prenant un peu de liberté avec le vocabulaire). En effet $\rho_i$ est déterminée par une écriture du type $\lambda$ sous la forme $\kappa_i \otimes \rho_i$ où $\kappa_i$ est une *$\beta$-extension relativement à $\mathcal{G}_i$* [21]. Il en résulte que $\rho_i$ n'est a priori connue qu'à un caractère (éventuellement muni de propriétés supplémentaires) près et la structure de $\mathcal{L}_i$ peut en dépendre (voir les exemples 2.16 et 3.16 et le paragraphe 3.4). C'est pourquoi la réalisation du programme ci-dessus doit passer par une analyse approfondie de la notion de $\beta$-extension, dont le présent article constitue une étape.

Une description plus précise des algèbres $\mathcal{L}_i$ qui, redisons-le, déterminent les parties réelles des points de réductibilité de $\mathrm{ind}_{P_n}^{G_n}\pi|\det|^s \otimes \sigma$, fait apparaître que leur dépendance en $\sigma$ réside exclusivement dans la détermination de $\rho_i$, c'est-à-dire dans la détermination des $\beta$-extensions attachées à la situation, l'effet de $\sigma$ étant simplement de modifier le choix de $\rho_i$ par torsion par un caractère. Il est naturel dans ces conditions de comparer les parties réelles des points de réductibilité des induites $\mathrm{ind}_{P_n}^{G_n}\pi|\det|^s \otimes \sigma$ et $\mathrm{ind}_{Q_n}^{H_n}\pi|\det|^s$, où $H_n$ est le groupe classique de même nature que $G_0$ ayant un sous-groupe parabolique maximal $Q_n$ de facteur de Levi isomorphe à $\mathrm{GL}(n, F)$. Comme on vient de le voir, cette comparaison se ramène à une comparaison entre représentations cuspidales d'un même groupe fini pouvant différer d'une torsion par un caractère.

C'est la détermination de ce caractère, intrinsèquement lié à la notion de $\beta$-extension, qui est l'enjeu du travail qui suit. Il s'agit en réalité de comparer $\beta$-extensions dans le groupe $G_n$ et $\beta$-extensions dans son sous-groupe $H_n \times G_0$. La solution est donnée dans le théorème 2.15, résultat principal de l'article. Elle est assez simple (si l'on omet d'énoncer les hypothèses et notations) : les $\beta$-extensions considérées dans $G_n$ et dans $H_n \times G_0$ diffèrent d'un caractère qui est la signature d'une permutation explicite, l'action par conjugaison sur un groupe fini attaché à la situation.

Revenons pour terminer à la motivation initiale : la description explicite de $\mathrm{Red}(\sigma)$. On s'attend à ce que les représentations autoduales $\pi$ intervenant dans $\mathrm{Red}(\sigma)$ présentent une forte affinité, du point de vue des types, avec $\sigma$ (comme dans l'exemple final de [3] où la paire couvrante relative à $\pi \otimes \sigma$ est attachée à une strate *simple* et où l'on obtient un point de réductibilité de partie réelle 1). Or nous nous sommes placés dans une situation où au contraire, les strates sous-jacentes à $\pi$ et $\sigma$ sont supposées "disjointes" (hypothèses du paragraphe 3.1, cf remarque 3.18). De fait c'est dans le cas où $\pi$ est un caractère autodual de $\mathrm{GL}(1, F)$ et où la strate semi-simple sous-jacente à $\sigma$ n'a pas de composante nulle que nos résultats trouvent leur première application. Dans le cas symplectique, chaque algèbre $\mathcal{L}_i$ est l'algèbre d'entrelacement d'un caractère quadratique ou trivial du sous-groupe de Borel de $\mathrm{SL}(2, k_F)$ et l'on sait à quel point sa structure dépend de ce caractère (§3.4) : la signature de la permutation du théorème 2.15 détermine ici la ramification du caractère autodual $\pi$ figurant dans $\mathrm{Red}(\sigma)$.

L'article est divisé en trois parties : mise en place des propriétés des $\beta$-extensions ; construction d'une représentation de Weil permettant d'obtenir le caractère cherché ; application à l'étude de réductibilité.

La première partie est technique, centrée sur les notions fondamentales de bijection canonique et de $\beta$-extension définies par Stevens dans [21]. Après avoir rappelé les définitions essentielles (§1.1), on donne au paragraphe 1.2 une caractérisation de la bijection canonique en termes d'entrelacement. Le paragraphe 1.3 est consacré à la mise en place d'un foncteur de restriction de Jacquet $\mathbf{r}_P$ dans une situation légèrement plus générale que celle de [21] (dont il s'inspire largement, voir *loc. cit.* §5.3 et 6.1), où le sous-groupe parabolique $P$ est attaché à une décomposition qui est subordonnée à la strate considérée, sans lui être proprement subordonnée. Le résultat essentiel (proposition 1.20) est démontré au paragraphe 1.4 : il s'agit de la compatibilité entre le foncteur $\mathbf{r}_P$ et la bijection canonique sur laquelle repose la notion de $\beta$-extension.

La deuxième partie, que l'on décrit ici dans le contexte simplifié ci-dessus, part d'un caractère semi-simple $\theta$ dans $G_n$ convenablement décomposé par rapport au sous-groupe $H_n \times G_0$ et relie les représentations associées $\eta$ et $\kappa$ dans $G_n$ à des objets analogues $\eta'$ et $\kappa'$ dans $H_n \times G_0$ (§2.1). La relation obtenue est précisée au paragraphe 2.2 à l'aide d'un foncteur de restriction de Jacquet relatif à un sous-groupe parabolique de Levi $\mathrm{GL}(n, F) \times G_0$. On construit alors une représentation "de Weil" $\mathbb{W}$ telle que la famille finie des représentations $\kappa$ et celle des $\kappa'$ soient reliées par $\kappa \simeq \mathbb{W} \otimes \kappa'$ sur la "partie de niveau zéro" (§2.3). Grâce aux propriétés de cette représentation de Weil, on montre, lorsque le caractère $\theta$ est attaché à un ordre autodual maximal, que la représentation $\kappa$ est une $\beta$-extension si et seulement si $\kappa'$ en est une (§2.4). L'usage de la compatibilité entre restriction de Jacquet et bijection canonique montrée en 1.4 aboutit au théorème 2.15, qui décrit le caractère par lequel diffèrent les $\beta$-extensions dans $G_n$ et $H_n \times G_0$.

La troisième partie se rapproche de la motivation initiale en expliquant comment les résultats obtenus s'appliquent à l'étude de réductibilité. Nous commençons par résumer les résultats de Stevens [21] dans le contexte simplifié d'une décomposition autoduale en trois morceaux (§3.1, indépendant des deux premières parties). On y voit (corollaire 3.7) que la notion de $\beta$-extension est cruciale pour trouver les générateurs de l'algèbre de Hecke de la paire couvrante considérée. Nous détaillons ensuite le lien entre les relations quadratiques satisfaites par les deux générateurs d'une algèbre de Hecke correspondant à notre situation et les points de réductibilité des représentations induites associées (§3.2, proposition 3.12). Il reste à tirer quelques conclusions : la comparaison des $\beta$-extensions dans $G_n$ et $H_n \times G_0$ faite dans le théorème 2.15 permet de comparer les algèbres de Hecke associées, on passe des générateurs de l'une à ceux de l'autre par torsion par des caractères donnés par ce théorème (§3.3, proposition 3.17). Nous terminons par des exemples dans un groupe symplectique (§3.4), illustrant la relation entre la notion essentielle de $\beta$-extension et les points de réductibilité d'induites paraboliques.

## Notations

On travaille dans cet article sur les objets définis par Shaun Stevens dans [21] et des articles antérieurs, et qui trouvent leur origine dans [7] et [5]. On respecte autant que possible les notations de [21], en les simplifiant parfois comme indiqué ci-dessous.

Soit $F$ un corps local non archimédien de caractéristique résiduelle impaire $p$ muni d'un automorphisme noté $x \mapsto \bar{x}$ d'ordre 1 ou 2 et de points fixes $F_0$. On note $k_F$ son corps résiduel, de cardinal $q_F = q$. On considère le groupe classique $G^+$ des automorphismes d'un espace vectoriel $V$ de dimension finie sur $F$ conservant une forme $\epsilon$-hermitienne (relativement à l'automorphisme $x \mapsto \bar{x}$, avec $\epsilon = \pm 1$) non dégénérée $h$ sur $V$. Dans le cas orthogonal on définit $G$ comme le groupe spécial orthogonal des éléments de $G^+$ de déterminant 1, dans les autres cas on pose $G = G^+$. On note aussi $g \mapsto \bar{g}$ l'involution adjointe sur $\mathrm{End}_F(V)$ associée à $h$, de sorte que $G^+ = \{g \in \mathrm{GL}_F(V) / \bar{g} = g^{-1}\}$. En général on notera avec des tildes les objets relatifs au groupe linéaire $\tilde{G} = \mathrm{GL}_F(V)$, sans tilde ceux relatifs à $G$, et avec un exposant $+$ ceux relatifs à $G^+$ (dont les $p$-sous-groupes sont contenus dans $G$).

Soit $M$ un sous-groupe de Levi de $G$ et $\sigma$ une représentation supercuspidale irréductible de $M$ ; on note $\mathcal{R}^{[\sigma,M]}(G)$ la sous-catégorie pleine des représentations lisses complexes de $G$ dont chaque sous-quotient irréductible est sous-quotient d'une représentation induite parabolique d'une représentation de $M$ tordue de $\sigma$ par un caractère non ramifié.

Soit $J$ un sous-groupe compact ouvert de $G$ et $\lambda$ une représentation lisse irréductible de $J$ d'espace $E$, on note $\mathcal{H}(G,\lambda)$ l'algèbre de Hecke de $\lambda$ dans $G$. C'est l'algèbre de convolution, relativement à la mesure de Haar sur $G$ donnant à $J$ le volume 1, des fonctions lisses à support compact $f : G \longrightarrow \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(E)$ vérifiant :

$$\forall x, y \in J, \forall g \in G, f(xgy) = \lambda(x) f(g) \lambda(y).$$

On note Mod-$\mathcal{H}(G,\lambda)$ la catégorie des modules à droite unitaux sur cette algèbre.

L'objet de base de cet article est une *strate gauche semi-simple* $[\Lambda, n, 0, \beta]$ de $\mathrm{End}_F(V)$ [21, Definition 2.5] dont on note $V = V^1 \perp \cdots \perp V^l$ la décomposition orthogonale de $V$ associée. Rappelons l'essentiel :

- $\beta$ est un élément de $\mathrm{End}_F(V)$ vérifiant $\overline{\beta} = -\beta$ et somme de ses restrictions $\beta_i$ à $V^i$, éléments de $\mathrm{End}_F(V^i)$ tels que $F[\beta_i] = E_i$ soit un corps pour $1 \leqslant i \leqslant l$. De plus $E = F[\beta]$ est la somme $E = E_1 \oplus \cdots \oplus E_l$ et le centralisateur $B$ de $\beta$ dans $\mathrm{End}_F(V)$ est la somme des commutants $B_i$ de $\beta_i$ dans $\mathrm{End}_F(V^i)$, $1 \leqslant i \leqslant l$. On note $\tilde{G}_E = B^\times$, $G_E^+ = B^\times \cap G^+$ et $G_E = B^\times \cap G$.
- $\Lambda$ est une suite autoduale de $\mathfrak{o}_F$-réseaux de $V$ vérifiant pour tout $r \in \mathbb{Z}$ : $\Lambda(r) = \oplus_{i=1}^l \Lambda(r) \cap V^i$, et la suite de réseaux $\Lambda^i$ de $V^i$ définie par $\Lambda^i(r) = \Lambda(r) \cap V^i$ est une suite autoduale de $\mathfrak{o}_{E_i}$-réseaux, $1 \leqslant i \leqslant l$. On note $\mathfrak{a}_0(\Lambda)$ le stabilisateur de la suite $\Lambda$ dans $\mathrm{End}_F(V)$, muni d'une filtration par les $\mathfrak{a}_n(\Lambda)$, $n \geqslant 1$ entier, formés des éléments $x$ tels que $x\Lambda(r) \subseteq \Lambda(r+n)$ pour tout $r \in \mathbb{Z}$ ; de même pour $\mathfrak{b}_0(\Lambda) = \mathfrak{a}_0(\Lambda) \cap B$ et $\mathfrak{b}_n(\Lambda) = \mathfrak{a}_n(\Lambda) \cap B$. On note enfin : $\widetilde{P}(\Lambda) = \mathfrak{a}_0(\Lambda)^\times$, $P^+(\Lambda) = \widetilde{P}(\Lambda) \cap G^+$, $P(\Lambda) = \widetilde{P}(\Lambda) \cap G$, $P^+(\Lambda_{\mathfrak{o}_E}) = P^+(\Lambda) \cap B$, $P(\Lambda_{\mathfrak{o}_E}) = P(\Lambda) \cap B$, $P_1(\Lambda_{\mathfrak{o}_E}) = P(\Lambda_{\mathfrak{o}_E}) \cap (1 + \mathfrak{b}_1(\Lambda))$ et $P^0(\Lambda_{\mathfrak{o}_E})$ l'image inverse dans $P(\Lambda_{\mathfrak{o}_E})$ de la composante neutre du quotient $P(\Lambda_{\mathfrak{o}_E})/P_1(\Lambda_{\mathfrak{o}_E})$ [21, §2.1].

Les groupes $\tilde{H}^1(\beta, \Lambda)$, $\tilde{J}^1(\beta, \Lambda)$, $\tilde{J}(\beta, \Lambda)$ désignent les sous-groupes de $\tilde{G}$ relatifs à une strate semi-simple définis dans [20, §3] (après [7] et [5]). Pour une strate semi-simple gauche on note $H^1(\beta, \Lambda)$, $J^1(\beta, \Lambda)$, $J(\beta, \Lambda)$ leurs intersections avec $G$, et on note $J^+(\beta, \Lambda) = \tilde{J}(\beta, \Lambda) \cap G^+$. On pose enfin $J^0(\beta, \Lambda) = P^0(\Lambda_{\mathfrak{o}_E}) J^1(\beta, \Lambda)$ – rappelons que $J(\beta, \Lambda) = P(\Lambda_{\mathfrak{o}_E}) J^1(\beta, \Lambda)$. On raccourcira en général $H^1(\beta, \Lambda)$ etc. en $H^1(\Lambda)$ etc., puisque la plupart du temps, dans les strates gauches semi-simples $[\Lambda, n, 0, \beta]$ que l'on considérera, l'élément $\beta$ sera fixé. De même on utilisera de façon abusive la notation $\mathfrak{o}_E$, comme dans $\mathfrak{o}_E$-réseaux ou $P^+(\Lambda_{\mathfrak{o}_E})$ [21, §2], en omettant les indices ou exposants auxquels le $E$ pourrait prétendre, de façon à éviter d'écrire "$\mathfrak{o}_{E^{(0)}}$-réseaux" ou "$P^+(\Lambda_{\mathfrak{o}_{E^{(j)}}})$".

Dans toute la suite on désigne par $[\Lambda, n, 0, \beta]$, $[\Lambda', n', 0, \beta]$, $[\Lambda^m, n^m, 0, \beta]$, $[\Lambda^{\mathfrak{M}}, n^{\mathfrak{M}}, 0, \beta]$ des strates gauches semi-simples ayant en commun l'élément $\beta$, donc aussi la décomposition de $V$ en $V = V^1 \perp \cdots \perp V^l$, et telles que

- $\mathfrak{b}_0(\Lambda^m) \subseteq \mathfrak{b}_0(\Lambda)$ ; $\mathfrak{b}_0(\Lambda) = \mathfrak{b}_0(\Lambda')$ ; $\mathfrak{b}_0(\Lambda) \subseteq \mathfrak{b}_0(\Lambda^{\mathfrak{M}})$ ;
- $\mathfrak{b}_0(\Lambda^{\mathfrak{M}})$ est un $\mathfrak{o}_E$-ordre autodual maximal.

On fixe un caractère semi-simple gauche $\theta$ de $H^1(\Lambda)$ [20, §3.6] et on note $\theta'$, $\theta^m$, $\theta^{\mathfrak{M}}$ les caractères de $H^1(\Lambda')$, $H^1(\Lambda^m)$ et $H^1(\Lambda^{\mathfrak{M}})$ qui lui correspondent par transfert [21, Proposition 3.2]. On note $\eta$ (resp. $\eta'$, $\eta^m$, $\eta^{\mathfrak{M}}$) l'unique représentation irréductible de $J^1(\Lambda)$ (resp. $J^1(\Lambda')$, $J^1(\Lambda^m)$, $J^1(\Lambda^{\mathfrak{M}})$) contenant $\theta$ (resp. $\theta'$, $\theta^m$, $\theta^{\mathfrak{M}}$).

Si $[\Lambda^\star, n^\star, 0, \beta]$, où $\star$ désigne n'importe quel symbole, est une autre telle strate, on utilisera de la même façon les notations $\theta^\star$, $\eta^\star$ etc., ou bien aussi $\theta(\Lambda^\star)$, $\eta(\Lambda^\star)$ etc.

# 1. Quelques propriétés des $\beta$-extensions

Pour la commodité de la rédaction on rappelle avant de commencer un fait bien connu et élémentaire mais très utile. Soit $H$ et $H'$ des sous-groupes ouverts compacts d'un groupe l.c.t.d. $K$ et $\rho$ et $\rho'$ des représentations de dimension finie de $H$ et $H'$ respectivement. Alors

$$\mathrm{Hom}_{H\cap H'}(\rho, \rho') \neq \{0\} \Longrightarrow \mathrm{Hom}_K(\mathrm{Ind}_H^K \rho, \mathrm{Ind}_{H'}^K \rho') \neq \{0\}. \tag{1.1}$$

## 1.1. Faits essentiels

Rappelons les résultats suivants de [21], qui jouent un rôle crucial dans la suite.

Proposition 1.2 ([21] Proposition 3.7). — *Il existe une unique représentation irréductible $\eta(\Lambda^m, \Lambda)$ de $J^1(\Lambda^m, \Lambda) = P_1(\Lambda^m_{\mathfrak{o}_E})J^1(\Lambda)$ vérifiant :*

(i) $\eta(\Lambda^m, \Lambda)_{|J^1(\Lambda)} = \eta$ ;

(ii) *Pour toute suite de $\mathfrak{o}_E$-réseaux $\Lambda''$ vérifiant $\mathfrak{b}_0(\Lambda'') = \mathfrak{b}_0(\Lambda^m)$ et $\mathfrak{a}_0(\Lambda'') \subseteq \mathfrak{a}_0(\Lambda)$ on a*

$$\mathrm{Ind}_{J^1(\Lambda'')}^{P_1(\Lambda'')} \eta'' \simeq \mathrm{Ind}_{P_1(\Lambda^m_{\mathfrak{o}_E})J^1(\Lambda)}^{P_1(\Lambda'')} \eta(\Lambda^m, \Lambda).$$

*Démonstration.* — Il ne s'agit que d'étendre les notations de [21, Proposition 3.7], qui suppose $\mathfrak{a}_0(\Lambda^m) \subseteq \mathfrak{a}_0(\Lambda)$, au cas général $\mathfrak{b}_0(\Lambda^m) \subseteq \mathfrak{b}_0(\Lambda)$. Cette extension est implicite dans [21] puisque l'auteur définit $\eta(\Lambda'', \Lambda)$ ($\eta_{m,M}$ dans les notations de [21]) et remarque que cette représentation et son groupe de définition $P_1(\Lambda''_{\mathfrak{o}_E})J^1(\Lambda)$ ne dépendent que de $\mathfrak{b}_0(\Lambda'')$ et non de la suite $\Lambda''$ elle-même. Il suffit donc ici de définir $\eta(\Lambda^m, \Lambda) = \eta(\Lambda'', \Lambda)$. On rappelle que des suites $\Lambda''$ vérifiant les conditions de l'énoncé existent toujours [21, Lemma 2.8]. □

Proposition 1.3 ([21] Lemma 4.3). — *Il y a une bijection canonique $\mathfrak{B}_{\Lambda^m \Lambda}$ entre l'ensemble des prolongements $\kappa^m$ de $\eta^m$ à $J^+(\Lambda^m)$ et l'ensemble des prolongements $\kappa$ de $\eta(\Lambda^m, \Lambda)$ à $P^+(\Lambda^m_{\mathfrak{o}_E})J^1(\Lambda)$. Si*

$\mathfrak{a}_0(\Lambda^m) \subseteq \mathfrak{a}_0(\Lambda)$ *cette bijection associe à* $\kappa^m$ *l'unique représentation* $\kappa$ *de* $P^+(\Lambda^m_{\mathfrak{o}_E})J^1(\Lambda)$ *telle que* $\kappa$ *et* $\kappa^m$ *induisent des représentations (irréductibles) équivalentes de* $P^+(\Lambda^m_{\mathfrak{o}_E})P^1(\Lambda^m)$.

On notera parfois simplement $\mathfrak{B}$ la bijection canonique définie ci-dessus. C'est cette bijection qui permet de définir la notion de $\beta$-extension dans [21] :

Définition 1.4 ([21] Theorem 4.1, Definition 4.5). —

(i) Cas maximal. *Une représentation* $\kappa^{\mathfrak{M}}$ *de* $J^+(\Lambda^{\mathfrak{M}})$ *est une* $\beta$-extension *de* $\eta^{\mathfrak{M}}$ *si* $\kappa^{\mathfrak{M}}$ *est un prolongement de* $\eta(\Lambda^m, \Lambda^{\mathfrak{M}})$, *pour une suite autoduale* $\Lambda^m$ *de* $\mathfrak{o}_E$*-réseaux telle que* $\mathfrak{b}_0(\Lambda^m)$ *soit un* $\mathfrak{o}_E$*-ordre autodual minimal contenu dans* $\mathfrak{a}_0(\Lambda^{\mathfrak{M}})$. *La condition est alors vérifiée pour toute telle suite* $\Lambda^m$. *Il existe des* $\beta$*-extensions et deux d'entre elles diffèrent d'un caractère de* $P^+(\Lambda^{\mathfrak{M}}_{\mathfrak{o}_E})/P_1(\Lambda^{\mathfrak{M}}_{\mathfrak{o}_E})$ *trivial sur les sous-groupes unipotents.*

(ii) Cas général. *Soit* $\kappa^{\mathfrak{M}}$ *une* $\beta$*-extension de* $\eta^{\mathfrak{M}}$ *à* $J^+(\Lambda^{\mathfrak{M}})$. *La* $\beta$-extension de $\eta$ à $J^+(\Lambda)$ relative à $\Lambda^{\mathfrak{M}}$ et compatible à $\kappa^{\mathfrak{M}}$ *est la représentation* $\kappa$ *de* $J^+(\Lambda)$ *telle que* $\mathfrak{B}_{\Lambda\,\Lambda^{\mathfrak{M}}}(\kappa)$ *soit la restriction de* $\kappa^{\mathfrak{M}}$ *à* $P^+(\Lambda_{\mathfrak{o}_E})J^1(\Lambda^{\mathfrak{M}})$.

*On dira que* $\kappa$ *est une* $\beta$*-extension de* $\eta$ *à* $J^+(\Lambda)$ *si elle en est une relativement à une suite* $\Lambda^{\mathfrak{M}}$ *convenable.*

Les faits suivants sont des conséquences immédiates, voire tautologiques, de [21, §4].

Lemme 1.5. — (i) *Si* $\kappa$ *correspond à* $\kappa'$ *par la bijection canonique* $\mathfrak{B}_{\Lambda\,\Lambda'}$, *alors* $\kappa$ *est une* $\beta$*-extension de* $\eta$ *relative à* $\Lambda^{\mathfrak{M}}$ *(compatible à* $\kappa^{\mathfrak{M}}$*) si et seulement si* $\kappa'$ *est une* $\beta$*-extension de* $\eta'$ *relative à* $\Lambda^{\mathfrak{M}}$ *(compatible à* $\kappa^{\mathfrak{M}}$*).*

(ii) *La bijection canonique* $\mathfrak{B}_{\Lambda^m\,\Lambda}$, *entre prolongements de* $\eta^m$ *à* $J^+(\Lambda^m)$ *et prolongements de* $\eta(\Lambda^m, \Lambda)$ *à* $P^+(\Lambda^m_{\mathfrak{o}_E})J^1(\Lambda)$, *est compatible à la torsion par les caractères du groupe* $P^+(\Lambda^m_{\mathfrak{o}_E})/P^1(\Lambda^m_{\mathfrak{o}_E})$.

*Démonstration.* — Le premier fait provient de ce que la composée de deux bijections canoniques est une bijection canonique (voir aussi la démonstration de [21, Lemma 4.3]). Le second est élémentaire. □

### 1.2. Une propriété caractéristique de la bijection canonique

On démontre dans ce paragraphe la propriété suivante :

Proposition 1.6. — *Supposons que* $\mathfrak{a}_0(\Lambda^m) \subseteq \mathfrak{a}_0(\Lambda)$. *Soit* $\kappa^m$ *un prolongement de* $\eta^m$ *à* $J^+(\Lambda^m)$ *et* $\kappa$ *un prolongement de* $\eta(\Lambda^m,\Lambda)$ *à* $P^+(\Lambda^m_{\mathfrak{o}_E})J^1(\Lambda)$. *Alors*

$$\kappa = \mathfrak{B}_{\Lambda^m\,\Lambda}(\kappa^m) \qquad \Longleftrightarrow \qquad \mathrm{Hom}_{\,J^+(\Lambda^m)\cap P^+(\Lambda^m_{\mathfrak{o}_E})J^1(\Lambda)}(\kappa^m,\kappa) \neq \{0\}$$

*Démonstration.* — Elle s'appuie sur deux lemmes qu'on établit d'abord.

Lemme 1.7. — *Il existe un vecteur* $v$ *de l'espace de* $\kappa^m$ *tel que*

$$\int_{H^1(\Lambda)\cap J^+(\Lambda^m)} \theta(x^{-1})\ \kappa^m(x)\ v\,dx \neq 0.$$

*Démonstration.* — Comme $H^1(\Lambda) \subseteq P_1(\Lambda) \subseteq P_1(\Lambda^m)$, l'intégrale calculée est à un volume près

$$X(v) = \mathrm{vol}\left(H^1(\Lambda)\cap J^1(\Lambda^m)\right)^{-1} \int_{H^1(\Lambda)\cap J^1(\Lambda^m)} \theta(x^{-1})\ \eta^m(x)\ v\,dx.$$

L'application $v \mapsto X(v)$ est un projecteur de l'espace de $\eta^m$ sur son sous-espace isotypique de type $\theta$ sous $H^1(\Lambda)\cap J^1(\Lambda^m)$. Il s'agit donc de montrer que celui-ci est non nul, et comme l'induite de $\theta^m$ à $J^1(\Lambda^m)$ est multiple de $\eta^m$ il suffit d'établir

$$\mathrm{Hom}_{\,H^1(\Lambda)\cap J^1(\Lambda^m)}(\theta, \mathrm{Ind}_{H^1(\Lambda^m)}^{J^1(\Lambda^m)}\theta^m) \neq \{0\}.$$

On développe la restriction de $\mathrm{Ind}_{H^1(\Lambda^m)}^{J^1(\Lambda^m)}\theta^m$ à $H^1(\Lambda)\cap J^1(\Lambda^m)$ selon la formule de Mackey ; le premier terme est $\mathrm{Ind}_{H^1(\Lambda)\cap H^1(\Lambda^m)}^{H^1(\Lambda)\cap J^1(\Lambda^m))}\theta^m$, or par réciprocité de Frobenius on a bien

$$\begin{aligned}\mathrm{Hom}_{\,H^1(\Lambda)\cap J^1(\Lambda^m)}&(\theta, \mathrm{Ind}_{H^1(\Lambda)\cap H^1(\Lambda^m)}^{H^1(\Lambda)\cap J^1(\Lambda^m))}\theta^m) \\ &\simeq \mathrm{Hom}_{\,H^1(\Lambda)\cap H^1(\Lambda^m)}(\theta,\theta^m) \neq \{0\}\end{aligned}$$

puisque $\theta^m$ est le transfert de $\theta$ [21, Proposition 3.2]. □

Lemme 1.8. — *La multiplicité de* $\eta$ *dans* $\mathrm{Ind}_{P^+(\Lambda^m_{\mathfrak{o}_E})J^1(\Lambda)}^{P^+(\Lambda^m_{\mathfrak{o}_E})P_1(\Lambda^m)}\ \kappa$ *est* 1.

*Démonstration.* — De nouveau on a $J^1(\Lambda) \subseteq P_1(\Lambda) \subseteq P_1(\Lambda^m)$, il suffit donc de considérer la restriction de la représentation induite à $P_1(\Lambda^m)$, soit $\Phi = \mathrm{Ind}_{P_1(\Lambda^m_{\mathfrak{o}_E})J^1(\Lambda)}^{P_1(\Lambda^m)}\ \kappa_{|P_1(\Lambda^m_{\mathfrak{o}_E})J^1(\Lambda)}$, qui est irréductible [21, Proposition 3.7]. On a

$$\mathrm{Hom}_{\,J^1(\Lambda)}(\eta,\Phi) \simeq \mathrm{Hom}_{\,P_1(\Lambda^m)}(\mathrm{Ind}_{P_1(\Lambda^m_{\mathfrak{o}_E})J^1(\Lambda)}^{P_1(\Lambda^m)}\mathrm{Ind}_{J^1(\Lambda)}^{P_1(\Lambda^m_{\mathfrak{o}_E})J^1(\Lambda)}\eta,\ \Phi).$$

Remarquons que

$$\mathrm{Ind}_{J^1(\Lambda)}^{P_1(\Lambda^m_{\mathfrak{o}_E})J^1(\Lambda)}\eta \simeq \eta(\Lambda^m,\Lambda)\otimes \mathrm{Ind}_{P^1(\Lambda_{\mathfrak{o}_E})}^{P_1(\Lambda^m_{\mathfrak{o}_E})}1 \simeq \oplus_{\chi\in Z} m_\chi\,\eta(\Lambda^m,\Lambda)\otimes\chi,$$

où $Z$ désigne l'ensemble des classes d'isomorphisme de facteurs irréductibles de $\mathrm{Ind}_{P^1(\Lambda_{\mathfrak{o}_E})}^{P_1(\Lambda^m_{\mathfrak{o}_E})} 1$ et $m_\chi$ la multiplicité de $\chi \in Z$ dans cette induite.

Pour $\chi \in Z$, $I(\chi) = \mathrm{Ind}_{P_1(\Lambda^m_{\mathfrak{o}_E})J^1(\Lambda)}^{P_1(\Lambda^m)} \eta(\Lambda^m, \Lambda) \otimes \chi$ est irréductible car l'entrelacement dans $P_1(\Lambda^m)$ de $\eta(\Lambda^m, \Lambda) \otimes \chi$ est contenu dans celui de $\eta$ : $J^1(\Lambda) G_E J^1(\Lambda) \cap P_1(\Lambda^m) = P_1(\Lambda^m_{\mathfrak{o}_E}) J^1(\Lambda)$. Ainsi $I(\chi)$ et $\Phi$ sont entrelacées si et seulement si elles sont isomorphes, si et seulement si $\chi = 1$ par définition de $\eta(\Lambda^m, \Lambda)$. Par ailleurs $m_1$ vaut 1 par Frobenius. $\square$

Montrons maintenant la proposition. Par définition, les représentations $\kappa$ et $\kappa^m$ se correspondent par la bijection canonique si et seulement si il existe un isomorphisme $\mathcal{E}$ entre les représentations induites :

$$\mathrm{Ind}_{P^+(\Lambda^m_{\mathfrak{o}_E})J^1(\Lambda)}^{P^+(\Lambda^m_{\mathfrak{o}_E})P_1(\Lambda^m)} \kappa \quad \xrightarrow{\mathcal{E}} \quad \mathrm{Ind}_{J^+(\Lambda^m)}^{P^+(\Lambda^m_{\mathfrak{o}_E})P_1(\Lambda^m)} \kappa^m.$$

La condition $\mathrm{Hom}_{J^+(\Lambda^m) \cap P^+(\Lambda^m_{\mathfrak{o}_E})J^1(\Lambda)}(\kappa^m, \kappa) \neq \{0\}$ est suffisante par 1.1 (les induites sont irréductibles). Pour montrer qu'elle est nécessaire nous avons besoin des lemmes ci-dessus. On compose $\mathcal{E}$ avec l'injection canonique $\mathcal{J}$ de $\kappa$ dans son induite à droite, avec la projection canonique $\mathcal{P}$ de l'induite de $\kappa^m$ sur $\kappa^m$ à gauche : on obtient un entrelacement $\mathcal{P} \circ \mathcal{E} \circ \mathcal{J}$ de $\kappa$ dans $\kappa^m$ dont on va montrer qu'il est non nul.

D'après le lemme 1.8, l'image de $\kappa$ par $\mathcal{J}$ est la composante isotypique de type $\theta$ de l'induite de $\kappa$, qui s'envoie injectivement par $\mathcal{E}$ sur la composante isotypique de type $\theta$ de l'induite de $\kappa^m$. Il suffit alors de montrer que $\mathcal{P}$ n'est pas identiquement nulle sur cette composante.

L'espace de l'induite de $\kappa^m$ peut se voir comme l'espace des fonctions $f$ de $P^+(\Lambda^m_{\mathfrak{o}_E})P_1(\Lambda^m)$ dans l'espace de $\kappa^m$ vérifiant $f(gx) = \kappa^m(g) f(x)$ pour $g \in J^+(\Lambda^m)$ et on a $\mathcal{P}(f) = f(1)$. L'application $f \mapsto f^\theta$ définie par $f^\theta(y) = c \int_{H^1(\Lambda)} \theta(x^{-1}) f(yx) dx$, avec $c = \mathrm{vol}\left(H^1(\Lambda)\right)^{-1}$, est un projecteur sur la composante de type $\theta$ sous $H^1(\Lambda)$. Prenons $f$ dans l'image canonique de $\kappa^m$, c'est-à-dire de support $J^+(\Lambda^m)$. On a

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(f^\theta) = f^\theta(1) &= c \int_{H^1(\Lambda)} \theta(x^{-1}) f(x) dx \\ &= c \int_{H^1(\Lambda) \cap J^+(\Lambda^m)} \theta(x^{-1}) \kappa^m(x) f(1) dx. \end{aligned}$$

L'existence de $f(1)$ tel que cette intégrale soit non nulle est donnée par le lemme 1.7. $\square$

Corollaire 1.9. — *Si* $\mathfrak{a}_0(\Lambda^m) \subseteq \mathfrak{a}_0(\Lambda)$, *alors* $\eta(\Lambda^m, \Lambda)$ *est l'unique prolongement de* $\eta$ *à* $P_1(\Lambda^m_{\mathfrak{o}_E})J^1(\Lambda)$ *vérifiant*

$$\mathrm{Hom}_{J_1(\Lambda^m) \cap P_1(\Lambda^m_{\mathfrak{o}_E})J^1(\Lambda)}(\eta^m, \eta(\Lambda^m, \Lambda)) \neq \{0\}.$$

### 1.3. Décompositions subordonnées et restriction de Jacquet

Rappelons les définitions de [21, §5]. Soit $V = \oplus_{j=-k}^{k} W^{(j)}$ une décomposition de $V$ autoduale – c'est-à-dire que l'orthogonal dans $V$ de $W^{(j)}$, pour $-k \leqslant j \leqslant k$, est $\oplus_{s \neq -j} W^{(s)}$ – telle que, pour tout $j$, $-k \leqslant j \leqslant k$ :
- $W^{(j)} = \oplus_{i=1}^{l} W^{(j)} \cap V^i$ ;
- $W^{(j)} \cap V^i$ est un $E_i$-sous-espace de $V^i$ pour tout $i$, $1 \leqslant i \leqslant l$.

Une telle décomposition est *subordonnée* à la strate $[\Lambda, n, 0, \beta]$ si on a pour tout entier $r$ : $\Lambda(r) = \oplus_{j=-k}^{k} \Lambda(r) \cap W^{(j)}$ ; on notera $\Lambda^{(j)}$ la suite de réseaux de $W^{(j)}$ définie par $\Lambda^{(j)}(r) = \Lambda(r) \cap W^{(j)}$. Elle est *proprement subordonnée* à $[\Lambda, n, 0, \beta]$ si de plus, pour tout $i$, $1 \leqslant i \leqslant l$, chaque saut de la suite de réseaux $\Lambda^i(r)$ intervient dans un et un seul des sous-espaces $W^{(j)} \cap V^i$ (voir [7, §7] et [21, §5]).

Fixons une décomposition autoduale $V = \oplus_{j=-k}^{k} W^{(j)}$ de $V$ proprement subordonnée à $[\Lambda^m, n, 0, \beta]$ ; elle est alors subordonnée à $[\Lambda, n, 0, \beta]$. Soit $M$ le sous-groupe de Levi de $G^+$ fixant la décomposition $V = \oplus_{j=-k}^{k} W^{(j)}$ et $P$ un sous-groupe parabolique de $G^+$ de facteur de Levi $M$ et radical unipotent $U$ ; on note $P^-$ et $U^-$ les opposés de $P$ et $U$ par rapport à $M$. Il est montré dans [21, §5.3] que sous l'hypothèse de subordination, les sous-groupes $H^1(\Lambda)$ et $J^1(\Lambda)$ ont une décomposition d'Iwahori par rapport à $(P, M)$ et l'on peut définir :
- un prolongement $\theta_P$ de $\theta$ à $H^1_P(\Lambda) = H^1(\Lambda)(J^1(\Lambda) \cap U)$, trivial sur $J^1(\Lambda) \cap U$ ;
- l'unique représentation irréductible $\eta_P$ de $J^1_P(\Lambda) = H^1(\Lambda)(J^1(\Lambda) \cap P)$ contenant $\theta_P$ ; sa restriction à $H^1_P(\Lambda)$ est multiple de $\theta_P$. Elle vérifie en outre :

  $\eta_P$ est la représentation de $J^1_P(\Lambda)$ dans les $J^1(\Lambda) \cap U$-invariants de $\eta$ obtenue par restriction de $\eta$ à $J^1_P(\Lambda)$ et $\eta \simeq \mathrm{Ind}_{J^1_P(\Lambda)}^{J^1(\Lambda)} \eta_P$.

Dans les notations de [21, §5.3] on a $H^1(\Lambda) \cap M = H^1(\Lambda^{(0)}) \times \prod_{j=1}^{k} \widetilde{H}^1(\Lambda^{(j)})$ ; le caractère semi-simple $\theta$ est trivial sur $H^1(\Lambda) \cap U$ et $H^1(\Lambda) \cap U^-$ et a pour restriction à $H^1(\Lambda) \cap M$ un produit $\theta^{(0)} \otimes \bigotimes_{j=1}^{k} (\tilde{\theta}^{(j)})^2$ où $\theta^{(0)}$ est un caractère semi-simple gauche et les $\tilde{\theta}^{(j)}$, pour $j \neq 0$, sont des caractères semi-simples. De même $\eta_{P \,|\, J^1(\Lambda) \cap M}$ est une représentation de $J^1(\Lambda) \cap M = J^1(\Lambda^{(0)}) \times \prod_{j=1}^{k} \widetilde{J}^1(\Lambda^{(j)})$ de la forme $\eta^{(0)} \otimes \bigotimes_{j=1}^{k} \tilde{\eta}^{(j)}$, où $\eta^{(0)}$ est l'unique représentation irréductible de $J^1(\Lambda^{(0)})$ contenant $\theta^{(0)}$ et $\tilde{\eta}^{(j)}$, pour $j \neq 0$, est l'unique représentation irréductible de $\widetilde{J}^1(\Lambda^{(j)})$ contenant $(\tilde{\theta}^{(j)})^2$.

Sous l'hypothèse de subordination *propre*, ici valide pour $\Lambda^m$, on a de tels résultats jusqu'au niveau de $J^+$ [21, §5.3] : le groupe $J^+(\Lambda^m)$ a aussi une décomposition d'Iwahori et tout prolongement $\kappa^m$ de $\eta^m$ à $J^+(\Lambda^m)$ est induit de la représentation $\kappa_P^m$ de $J_P^+(\Lambda^m) = H^1(\Lambda^m)(J^+(\Lambda^m) \cap P)$ obtenue en prenant les $J^1(\Lambda^m) \cap U$-invariants de $\kappa^m$ ; la représentation $\kappa_P^m$ prolonge $\eta_P^m$. Noter qu'alors $J^+(\Lambda^m) \cap U = J^1(\Lambda^m) \cap U$.

En l'absence de subordination *propre*, on peut néanmoins utiliser les techniques de $J^1 \cap U$-invariants pour étudier des prolongements de $\eta$ à un sous-groupe convenable de $J^+(\Lambda)$. Gardons les notations $J_P^+(\Lambda) = H^1(\Lambda)(J^+(\Lambda) \cap P)$, $\kappa_P$ prolongement de $\eta_P$ à $J_P^+(\Lambda)$, dans ce contexte élargi ; on vérifie facilement (critère de Mackey) que $\mathrm{Ind}_{J_P^+(\Lambda)}^{J^+(\Lambda)} \kappa_P$ n'est pas irréductible si $J^+(\Lambda)$ n'est pas égal à $J^1(\Lambda) J_P^+(\Lambda)$. Mais ce sous-groupe lui-même est digne d'intérêt. Il a une décomposition d'Iwahori relative à $(M, P)$ et :

Lemme 1.10. — *Pour tout prolongement $\kappa$ de $\eta$ à*

$$J^1(\Lambda) J_P^+(\Lambda) = (J^1(\Lambda) \cap U^-)(J^+(\Lambda) \cap M)(J^+(\Lambda) \cap U)$$

*le sous-espace des invariants par $J^1(\Lambda) \cap U$ définit une représentation $\kappa_P$ de $J_P^+(\Lambda) = (P^+(\Lambda_{\mathfrak{o}_E}) \cap P) J_P^1(\Lambda)$ prolongeant $\eta_P$ et telle que*

$$\kappa \simeq \mathrm{Ind}_{J_P^+(\Lambda)}^{J^1(\Lambda) J_P^+(\Lambda)} \kappa_P.$$

*Démonstration.* — Il suffit de vérifier l'égalité suivante :

$$J^+(\Lambda) \cap P = (P^+(\Lambda_{\mathfrak{o}_E}) \cap P) \ (J^1(\Lambda) \cap P). \tag{1.11}$$

Comme $J^1(\Lambda)$ a une décomposition d'Iwahori par rapport à $(M, P)$, tout élément de $J^+(\Lambda)$ peut s'écrire $j = x j_-^{-1} j_P$ avec $x \in P^+(\Lambda_{\mathfrak{o}_E})$, $j_P \in J^1(\Lambda) \cap P$ et $j_- \in J^1(\Lambda) \cap U^-$. Alors $j$ appartient à $P$ si et seulement si $x j_-^{-1}$ appartient à $P$. Ecrivons dans ce cas $x = u m j_-$ avec $u \in U$, $m \in M$. Par unicité de la décomposition d'Iwahori on voit que, puisque $x$ commute à $F[\beta]^\times$ qui est contenu dans $M$, alors $j_-$ commute aussi à $F[\beta]^\times$. Ainsi $j_-$ appartient à $P_1(\Lambda_{\mathfrak{o}_E}) \cap U^-$ et $x j_-^{-1}$ appartient à $P^+(\Lambda_{\mathfrak{o}_E}) \cap P$, c.q.f.d.

Ce point acquis, la démonstration reprend sans difficulté celle de [21, §5.3] ou de [7, §7.2]. Noter que dans cette situation d'une décomposition subordonnée à $[\Lambda, n, 0, \beta]$ sans lui être proprement subordonnée, on n'a aucune raison d'avoir égalité entre $J^+(\Lambda) \cap U$ et $J^1(\Lambda) \cap U$. □

Corollaire 1.12. — *Plaçons-nous dans les hypothèses suivantes :*

$$\begin{cases} V = \oplus_{j=-k}^{k} W^{(j)} \text{ est proprement subordonnée à } [\Lambda^m, n, 0, \beta]; \\ P^+(\Lambda_{\mathfrak{o}_E}^m) = (P^+(\Lambda_{\mathfrak{o}_E}) \cap P) \ P_1(\Lambda_{\mathfrak{o}_E}). \end{cases} \tag{1.13}$$

*Le sous-groupe $J^+(\Lambda^m, \Lambda) = P^+(\Lambda_{\mathfrak{o}_E}^m) J^1(\Lambda)$ coïncide avec $(J^+(\Lambda) \cap P) \ J^1(\Lambda)$ et possède une décomposition d'Iwahori par rapport à $(P, M)$.*

*Pour tout prolongement $\kappa$ de $\eta$ à $P^+(\Lambda^m_{\mathfrak{o}_E})J^1(\Lambda)$ le sous-espace des invariants par $J^1(\Lambda) \cap U$ définit une représentation $\kappa_P$ du sous-groupe $J^+_P(\Lambda) = (P^+(\Lambda_{\mathfrak{o}_E}) \cap P)J^1_P(\Lambda)$ prolongeant $\eta_P$ et telle que*

$$\kappa \simeq \mathrm{Ind}_{J^+_P(\Lambda)}^{P^+(\Lambda^m_{\mathfrak{o}_E})J^1(\Lambda)} \kappa_P.$$

Bien entendu on s'intéressera particulièrement aux prolongements de $\eta$ prolongeant de plus $\eta(\Lambda^m, \Lambda)$. Or les techniques de $J^1 \cap U$-invariants permettent, dans nos hypothèses, de préciser la structure de cette représentation (comme dans [21], démonstration de la proposition 6.3). Rappelons la décomposition $\eta_{P|J^1(\Lambda)\cap M} \simeq \eta^{(0)} \otimes \bigotimes_{j=1}^k \tilde{\eta}^{(j)}$ et notons :

– $\eta(\Lambda^{m(0)}, \Lambda^{(0)})$ le prolongement de $\eta^{(0)}$ à $J^1(\Lambda^{m(0)}, \Lambda^{(0)})$ donné par la proposition 1.2 ;

– $\widetilde{\eta}(\Lambda^{m(j)}, \Lambda^{(j)})$ le prolongement de $\widetilde{\eta}^{(j)}$ à $\widetilde{J}^1(\Lambda^{m(j)}, \Lambda^{(j)})$ donné par [21, Proposition 3.12].

Proposition 1.14. — *Sous les hypothèses (1.13), soit $\eta_P(\Lambda^m, \Lambda)$ la représentation du groupe $J^1_P(\Lambda^m, \Lambda) = (P_1(\Lambda^m_{\mathfrak{o}_E}) \cap P)J^1_P(\Lambda)$ obtenue par restriction de $\eta(\Lambda^m, \Lambda)$ au sous-espace de ses $J^1(\Lambda) \cap U$-invariants. On a $\eta(\Lambda^m, \Lambda) \simeq \mathrm{Ind}_{J^1_P(\Lambda^m,\Lambda)}^{J^1(\Lambda^m,\Lambda)} \eta_P(\Lambda^m, \Lambda)$. De plus $\eta_P(\Lambda^m, \Lambda)$ est définie par :*

$$\eta_P(\Lambda^m, \Lambda) = \eta_P \quad \textit{sur } J^1_P(\Lambda),$$

$$\eta_P(\Lambda^m, \Lambda) = 1 \quad \textit{sur } P^1(\Lambda^m_{\mathfrak{o}_E}) \cap U,$$

$$\eta_P(\Lambda^m, \Lambda) = \eta(\Lambda^{m(0)}, \Lambda^{(0)}) \otimes \bigotimes_{j=1}^{k} \widetilde{\eta}(\Lambda^{m(j)}, \Lambda^{(j)})$$

$$\textit{sur } J^1_P(\Lambda^m, \Lambda) \cap M = J^1(\Lambda^{m(0)}, \Lambda^{(0)}) \times \prod_{j=1}^{k} \widetilde{J}^1(\Lambda^{m(j)}, \Lambda^{(j)}).$$

*Démonstration.* — La première assertion découle du corollaire 1.12. Les définitions données déterminent bien une représentation $\phi$ de $J^1_P(\Lambda^m, \Lambda)$ : elles recouvrent tout le groupe, elles sont compatibles et on vérifie aisément, grâce au fait que $\theta$ est normalisé par $P^+(\Lambda_{\mathfrak{o}_E})$ qui contient $P_1(\Lambda^m_{\mathfrak{o}_E})$, que $\phi$ est un homomorphisme.

D'autre part $J^1(\Lambda^m, \Lambda) = J^1(\Lambda)J^1_P(\Lambda^m, \Lambda)$ (une seule double classe) car $P^1(\Lambda^m_{\mathfrak{o}_E}) = [(P^+(\Lambda_{\mathfrak{o}_E}) \cap P)\ P_1(\Lambda_{\mathfrak{o}_E})] \cap P^1(\Lambda^m_{\mathfrak{o}_E}) = (P^1(\Lambda^m_{\mathfrak{o}_E}) \cap P)\ P_1(\Lambda_{\mathfrak{o}_E})$. Ainsi l'induite $\Phi$ de $\phi$ à $J^1(\Lambda^m, \Lambda)$ est irréductible et prolonge $\eta$ puisque

$$\mathrm{Res}_{J^1(\Lambda)}\Phi = \mathrm{Res}_{J^1(\Lambda)}\mathrm{Ind}_{J^1_P(\Lambda^m,\Lambda)}^{J^1(\Lambda^m,\Lambda)}\phi = \mathrm{Ind}_{J^1_P(\Lambda)}^{J^1(\Lambda)}\eta_P = \eta.$$

Reste à voir que $\Phi$ est bien le prolongement de $\eta$ défini à la proposition 1.2. Soit donc $\Lambda^{''}$ une suite de $\mathfrak{o}_E$-réseaux telle que $\mathfrak{b}_0(\Lambda'') = \mathfrak{b}_0(\Lambda^m)$ et

$\mathfrak{a}_0(\Lambda'') \subseteq \mathfrak{a}_0(\Lambda)$ ; il nous faut montrer que

$$\mathrm{Ind}_{J^1(\Lambda'')}^{P_1(\Lambda'')} \eta'' \simeq \mathrm{Ind}_{P_1(\Lambda^m_{\mathfrak{o}_E})J^1(\Lambda)}^{P_1(\Lambda'')} \Phi.$$

Ces deux induites sont irréductibles (voir preuve du lemme 1.8) et par (1.1) il suffit de prouver

$$\mathrm{Hom}_{\,J^1_P(\Lambda'')\cap J^1_P(\Lambda^m,\Lambda)}(\eta''_P, \phi) \neq \{0\}.$$

Les groupes $J^1_P(\Lambda'')$ et $J^1_P(\Lambda^m, \Lambda)$ ont une décomposition d'Iwahori par rapport à $(P, M)$ et les deux représentations considérées sont triviales sur les intersections avec $U$ et $U^-$. Enfin, les restrictions à $J^1_P(\Lambda'') \cap M$ et $J^1_P(\Lambda^m, \Lambda) \cap M$ sont évidemment entrelacées par définition de $\eta(\Lambda^{m\,(0)}, \Lambda^{(0)})$ et $\widetilde{\eta}(\Lambda^{m\,(j)}, \Lambda^{(j)})$ et via le corollaire 1.9, c.q.f.d. □

Terminons par une variante de la proposition 1.6 :

Proposition 1.15. — *Plaçons-nous dans les hypothèses (1.13) et supposons $\mathfrak{a}_0(\Lambda^m)$ contenu dans $\mathfrak{a}_0(\Lambda)$. Soit $\kappa^m$ un prolongement de $\eta^m$ à $J^+(\Lambda^m)$ et $\kappa$ un prolongement de $\eta(\Lambda^m, \Lambda)$ à $P^+(\Lambda^m_{\mathfrak{o}_E})J^1(\Lambda)$. Alors*

$$\begin{aligned} \kappa = \mathfrak{B}_{\Lambda^m\,\Lambda}(\kappa^m) \quad &\Longleftrightarrow \quad \mathrm{Hom}_{\,J^+_P(\Lambda^m)\cap J^+_P(\Lambda)}(\kappa^m_P, \kappa_P) \neq \{0\} \\ &\Longleftrightarrow \quad \mathrm{Hom}_{\,J^+_{P^-}(\Lambda^m)\cap J^+_P(\Lambda)}(\kappa^m_{P^-}, \kappa_P) \neq \{0\} \end{aligned}$$

*Démonstration.* — Les implications $\Longleftarrow$ sont élémentaires via la proposition 1.6, en combinant réciprocité de Frobenius et décomposition de Mackey (dont le premier terme suffit).

Reprenons maintenant la démonstration de 1.6 en posant $P' = P$ ou $P^-$ et avec les mêmes notations. On veut montrer que la composée suivante est non nulle :

$$\kappa_P \overset{\mathcal{J}_P}{\hookrightarrow} \kappa \overset{\mathcal{J}}{\hookrightarrow} \mathrm{Ind}_{P^+(\Lambda^m_{\mathfrak{o}_E})J^1(\Lambda)}^{P^+(\Lambda^m_{\mathfrak{o}_E})P_1(\Lambda^m)} \kappa \quad \xrightarrow{\mathcal{E}} \quad \mathrm{Ind}_{J^+(\Lambda^m)}^{P^+(\Lambda^m_{\mathfrak{o}_E})P_1(\Lambda^m)} \kappa^m \xrightarrow{\mathcal{P}} \kappa^m \xrightarrow{\mathcal{P}_{P'}} \kappa^m_{P'}$$

où $\mathcal{J}_P$ est l'injection canonique de $\kappa_P$ dans son induite $\kappa$ et $\mathcal{P}_{P'}$ est la surjection canonique de l'induite de $\kappa^m_{P'}$ sur $\kappa^m_{P'}$. Les ingrédients sont les mêmes :

– La multiplicité de $\eta_P$ dans $\mathrm{Ind}_{P^+(\Lambda^m_{\mathfrak{o}_E})J^1(\Lambda)}^{P^+(\Lambda^m_{\mathfrak{o}_E})P_1(\Lambda^m)} \kappa$ est 1 par réciprocité de Frobenius puisque celle de $\eta \simeq \mathrm{Ind}_{J^1_P(\Lambda)}^{J^1(\Lambda)} \eta_P$ est 1 (lemme 1.8), donc l'image de $\mathcal{E} \circ \mathcal{J} \circ \mathcal{J}_P$ est donc la composante isotypique de type $\theta_P$ de $\mathrm{Ind}_{J^+(\Lambda^m)}^{P^+(\Lambda^m_{\mathfrak{o}_E})P_1(\Lambda^m)} \kappa^m$.

– Il existe un vecteur $v$ de l'espace de $\kappa^m_{P'}$ tel que

$$\int_{H^1_P(\Lambda)\cap J^+_{P'}(\Lambda^m)} \theta_P(x^{-1})\ \kappa^m_{P'}(x)\ v\,dx \neq 0.$$

En effet, il suffit (par Frobenius et Mackey comme pour le lemme 1.7) de montrer que Hom $_{H^1_P(\Lambda)\cap H^1_{P'}(\Lambda^m)}(\theta_P, \theta^m_{P'}) \neq \{0\}$. L'intersection des groupes $H^1_P(\Lambda)$ et $H^1_{P'}(\Lambda^m)$ se calcule terme à terme sur leur décomposition d'Iwahori. Or les caractères sont triviaux sur les intersections avec $U$ et $U^-$ et sont transferts l'un de l'autre sur l'intersection avec $M$. □

### 1.4. Bijections canoniques et restriction de Jacquet

Soit $V = \oplus_{j=-k}^{k} W^{(j)}$ une décomposition autoduale proprement subordonnée à $[\Lambda, n, 0, \beta]$ ; elle est aussi proprement subordonnée à $[\Lambda', n', 0, \beta]$. Soit $M$ le sous-groupe de Levi de $G^+$ fixant la décomposition $V = \oplus_{j=-k}^{k} W^{(j)}$ et $P$ un sous-groupe parabolique de $G^+$ de facteur de Levi $M$ et radical unipotent $U$ ; on note $P^-$ et $U^-$ les opposés de $P$ et $U$ par rapport à $M$.

Lemme 1.16. — *L'application $\mathbf{r}_P$ : $\kappa \mapsto \kappa_{P|J^+(\Lambda)\cap M}$ est une bijection de l'ensemble des prolongements de $\eta$ à $J^+(\Lambda)$ sur l'ensemble des prolongements de $\eta_{P|J^1_P(\Lambda)\cap M}$ à $J^+_P(\Lambda) \cap M$.*

*Démonstration.* — Découle de $J^+(\Lambda) \cap U = J^1(\Lambda) \cap U$ et $J^+_P(\Lambda) = (J^+(\Lambda) \cap M) J^1_P(\Lambda)$. □

La bijection canonique $\mathfrak{B}$ de [21, Lemma 4.3] (proposition 1.3 ci-dessus) est compatible à la bijection $\mathbf{r}_P$ :

Proposition 1.17. — *Le diagramme suivant est commutatif :*

$$\begin{array}{ccc}
\{\textit{Prolongements de } \eta \textit{ à } J^+(\Lambda)\} & \xrightarrow{\mathbf{r}_P} & \{\textit{Prolongements de } \eta_{P|J^1(\Lambda)\cap M} \textit{ à } J^+(\Lambda)\cap M\} \\
\mathfrak{B}_{\Lambda\Lambda'} \updownarrow & & \mathfrak{B} \updownarrow \\
\{\textit{Prolongements de } \eta' \textit{ à } J^+(\Lambda')\} & \xrightarrow{\mathbf{r}_P} & \{\textit{Prolongements de } \eta'_{P|J^1(\Lambda')\cap M} \textit{ à } J^+(\Lambda')\cap M\}
\end{array}$$

*De plus, les bijections $\mathfrak{B}$ et $\mathbf{r}_P$ ci-dessus sont compatibles à la torsion par les caractères de $P^+(\Lambda_{\mathfrak{o}_E})/P^1(\Lambda_{\mathfrak{o}_E}) = P^+(\Lambda'_{\mathfrak{o}_E})/P^1(\Lambda'_{\mathfrak{o}_E})$.*

La bijection canonique $\mathfrak{B}$ du côté droit est bien sûr définie comme le produit de $\mathfrak{B}^{(0)} = \mathfrak{B}_{\Lambda^{(0)}\Lambda'^{(0)}}$ et des bijections canoniques $\widetilde{\mathfrak{B}}^{(j)}$ entre prolongements de $\tilde{\eta}^{(j)}$ et de $\tilde{\eta}'^{(j)}$ [21, §4.3]. En effet le caractère semi-simple $\theta'$ est un produit $\theta'^{(0)} \otimes \bigotimes_{j=1}^{k} (\tilde{\theta}'^{(j)})^2$ comme ci-dessus, où $\theta'^{(0)}$ est le transfert de $\theta^{(0)}$ et chaque $\tilde{\theta}'^{(j)}$, pour $j > 0$, le transfert de $\tilde{\theta}^{(j)}$.

*Démonstration.* — Grâce à la technique de [21, §4], basée sur [21, Lemma 2.10], il suffit de démontrer cette assertion si $\mathfrak{a}_0(\Lambda) \subseteq \mathfrak{a}_0(\Lambda')$, ce que nous supposons désormais.

Les applications considérées sont des bijections, il suffit donc de montrer que si $\kappa_{P|J^+(\Lambda)\cap M}$ et $\kappa'_{P|J^+(\Lambda')\cap M}$ se correspondent par la bijection canonique, alors $\kappa'$ et $\kappa$ aussi. L'hypothèse se traduit en

$$\mathrm{Hom}_{J^+(\Lambda)\cap J^+(\Lambda')\cap M}(\kappa_P, \kappa'_P) \neq \{0\} \quad \text{(proposition 1.6).}$$

Or $J_P^+(\Lambda)$ et $J_P^+(\Lambda')$ ont tous deux une décomposition d'Iwahori et $\kappa'_P$ et $\kappa_P$ sont toutes deux triviales sur les intersections avec $U$ et $U^-$ (comme $\eta'_P$ et $\eta_P$). Ainsi $\mathrm{Hom}_{J_P^+(\Lambda)\cap J_P^+(\Lambda')}(\kappa_P, \kappa'_P) \neq \{0\}$, d'où $\mathrm{Hom}_{P^+(\Lambda_{\mathfrak{o}_E})P_1(\Lambda)}(\mathrm{Ind}_{J_P^+(\Lambda)}^{P^+(\Lambda_{\mathfrak{o}_E})P_1(\Lambda)} \kappa_P, \mathrm{Ind}_{J_P^+(\Lambda')}^{P^+(\Lambda_{\mathfrak{o}_E})P_1(\Lambda)} \kappa'_P) \neq \{0\}$ par (1.1), et le résultat. □

Pour étudier le cas où la subordination n'est pas propre, nous nous plaçons désormais sous les hypothèses (1.13) qui permettent de définir $\kappa_P$ pour tout prolongement de $\eta$ à $P^+(\Lambda^m_{\mathfrak{o}_E})J^1(\Lambda)$, et d'énoncer des variantes du lemme et de la proposition ci-dessus.

Lemme 1.18. — *Sous les hypothèses (1.13), l'application* $\mathbf{r}_P : \kappa \mapsto \kappa_{P|J_P^+(\Lambda)\cap M}$ *est une bijection de l'ensemble des prolongements de* $\eta(\Lambda^m, \Lambda)$ *à* $P^+(\Lambda^m_{\mathfrak{o}_E})J^1(\Lambda)$ *sur l'ensemble des prolongements à* $J_P^+(\Lambda) \cap M$ *de la représentation*

$$\eta_{P|M}(\Lambda^m, \Lambda) = \eta_P(\Lambda^m, \Lambda)_{|J_P^1(\Lambda^m,\Lambda)\cap M}.$$

*Démonstration.* — Certainement $\kappa \mapsto \kappa_P$ est une bijection de l'ensemble des prolongements de $\eta$ à $P^+(\Lambda^m_{\mathfrak{o}_E})J^1(\Lambda)$ sur l'ensemble des prolongements de $\eta_P$ à $J_P^+(\Lambda)$ (corollaire 1.12). C'est pour conserver une bijection en restreignant à $J_P^+(\Lambda) \cap M$ qu'il faut travailler sur les prolongements de $\eta(\Lambda^m, \Lambda)$. Notons d'abord les propriétés indispensables :

(1.19)
$$\begin{aligned}
&J^+(\Lambda) \cap M = J_P^+(\Lambda) \cap M = (P^+(\Lambda_{\mathfrak{o}_E}) \cap M)\ (J^1(\Lambda) \cap M)\\
&J_P^+(\Lambda) = (H^1(\Lambda) \cap U^-)\ (J_P^+(\Lambda) \cap M)\ (P^+(\Lambda_{\mathfrak{o}_E}) \cap U)\ (J^1(\Lambda) \cap U)\\
&P^+(\Lambda_{\mathfrak{o}_E}) \cap U = P^+(\Lambda^m_{\mathfrak{o}_E}) \cap U = P^1(\Lambda^m_{\mathfrak{o}_E}) \cap U\\
&P^+(\Lambda_{\mathfrak{o}_E}) \cap M = P^+(\Lambda^m_{\mathfrak{o}_E}) \cap M
\end{aligned}$$

qui découlent de l'hypothèse, du paragraphe précédent et du fait que la décomposition est proprement subordonnée à $\Lambda^m$. L'injectivité s'en déduit car $\eta_P(\Lambda^m, \Lambda)$ est triviale sur $H^1(\Lambda) \cap U^-$ (comme $\eta_P$), sur $J^1(\Lambda) \cap U$ (comme $\eta_P$) et sur $P^1(\Lambda^m_{\mathfrak{o}_E}) \cap U$ (proposition 1.14).

Pour la surjectivité, on remarque que $J_P^+(\Lambda) = (J_P^+(\Lambda) \cap M)\ J_P^1(\Lambda^m, \Lambda)$. Il faut vérifier que si $\xi$ est un prolongement de $\eta_{P|M}(\Lambda^m, \Lambda)$ à $J_P^+(\Lambda) \cap M$, alors

$\phi(xy) = \xi(x)\eta_P(\Lambda^m, \Lambda)(y)$, $x \in J_P^+(\Lambda) \cap M$, $y \in J_P^1(\Lambda^m, \Lambda)$, définit une représentation de $J_P^+(\Lambda)$. Cela revient à montrer que $\eta_P(\Lambda^m, \Lambda)(y)\xi(x) = \xi(x)\eta_P(\Lambda^m, \Lambda)(x^{-1}yx)$ ($x \in P^+(\Lambda^m_{\mathfrak{o}_E}) \cap M$, $y$ comme ci-dessus). C'est immédiat, grâce à la trivialité de $\eta_P(\Lambda^m, \Lambda)(y)$ pour $y \in P^1(\Lambda^m_{\mathfrak{o}_E}) \cap U$ (proposition 1.14). $\square$

Proposition 1.20. — *Sous les hypothèses (1.13), le diagramme suivant est commutatif :*

$$\begin{array}{ccc}
\{\textit{Prolongements de } \eta^m \textit{ à } J^+(\Lambda^m)\} & \xrightarrow{\mathbf{r}_P} & \{\textit{Prolong. de } \eta^m_{P\,|J^1(\Lambda^m)\cap M} \textit{ à } J^+(\Lambda^m)\cap M\} \\
\mathfrak{B}_{\Lambda^m\Lambda} \updownarrow & & \mathfrak{B} \updownarrow \\
\{\textit{Prolong. de } \eta(\Lambda^m,\Lambda) \textit{ à } P^+(\Lambda^m_{\mathfrak{o}_E})J^1(\Lambda)\} & \xrightarrow{\mathbf{r}_P} & \{\textit{Prolong. de } \eta_{P|M}(\Lambda^m,\Lambda) \textit{ à } J^+(\Lambda)\cap M\}
\end{array}$$

*Démonstration.* — La démonstration est celle de 1.17, on utilise les décompositions d'Iwahori (1.19) et le fait que les représentations $\kappa_P^m$ et $\kappa_P$ sont triviales sur les intersections avec $U$ et $U^-$, comme $\eta_P^m$ et $\eta_P(\Lambda^m, \Lambda)$ (proposition 1.14). $\square$

## 2. Une représentation de Weil

### 2.1. Des sous-groupes remarquables

Soit $[\Lambda, n, 0, \beta]$ une strate gauche semi-simple et $V = V^1 \perp \cdots \perp V^l$ la décomposition de $V$ associée. Soit $V = Z_1 \perp \cdots \perp Z_t$ une décomposition moins fine de $V$ : chaque $Z_j$, $1 \leqslant j \leqslant t$, est somme de certains $V^i$. La strate $[\Lambda, n, 0, \beta]$ est alors somme directe de strates semi-simples

$$[S_j = \Lambda \cap Z_j, n_j, 0, \beta_j = \beta_{|Z_j}]$$

dans chaque $\mathrm{End}_F(Z_j)$. On souhaite examiner en détail la structure de $\eta$, l'unique représentation irréductible de $J^1(\Lambda)$ contenant le caractère semi-simple gauche $\theta$ de $H^1(\Lambda)$, et de ses prolongements $\kappa$ à $J^+(\Lambda)$, en la comparant à celle des objets analogues définis dans le groupe

$$G^+_{\mathrm{int}} = G^+ \cap \prod_{1 \leqslant j \leqslant t} \mathrm{GL}_F(Z_j)$$

à partir des strates $[S_j, n_j, 0, \beta_j]$ et des caractères semi-simples gauches correspondant à $\theta$. Remarquons que le commutant $G_E^+$ de $\beta$ dans $G^+$ vérifie

$$G_E^+ \ \subseteq\ G^+ \cap \prod_{1 \leqslant i \leqslant l} \mathrm{GL}_F(V^i)\ \subseteq G^+_{\mathrm{int}}.$$

Considérons le groupe $J^1_{\rm int}(\Lambda) = J^1(\Lambda) \cap G^+_{\rm int}$. La décomposition $V = Z_1 \perp \cdots \perp Z_t$ est subordonnée à la strate $[\Lambda, n, 0, \beta]$ et les résultats de [21, §5.1, §5.2] s'appliquent :

$$H^1(\Lambda) \cap G^+_{\rm int} = \prod_{1 \leqslant j \leqslant t} H^1(S_j), \quad \theta_{|H^1(\Lambda)\cap G^+_{\rm int}} = \otimes_{1\leqslant j \leqslant t}\, \theta(S_j),$$

où les $\theta(S_j)$ sont des caractères semi-simples gauches attachés aux strates $[S_j, n_j, 0, \beta_j]$ et transferts de $\theta$ au sens de *loc. cit.,* Proposition 5.5, et

$$J^1_{\rm int}(\Lambda) = \prod_{1 \leqslant j \leqslant t} J^1(S_j).$$

Soit $J^1_{\rm ext}(\Lambda)$ l'orthogonal de $H^1(\Lambda)J^1_{\rm int}(\Lambda)$ pour la forme bilinéaire alternée non dégénérée usuelle $(x, y) \longmapsto \langle x, y \rangle = \theta([x, y])$ sur $J^1(\Lambda)/H^1(\Lambda)$. La restriction de cette forme aux sous-espaces orthogonaux $H^1(\Lambda)J^1_{\rm int}(\Lambda)/H^1(\Lambda)$ et $J^1_{\rm ext}(\Lambda)/H^1(\Lambda)$ reste non dégénérée et l'on définit comme d'habitude la représentation irréductible $\eta_{\rm int}$ de $J^1_{\rm int}(\Lambda)$ (resp. $\eta_{\rm ext}$ de $J^1_{\rm ext}(\Lambda)$) comme l'unique représentation irréductible (à isomorphisme près) dont la restriction à $H^1(\Lambda) \cap G^+_{\rm int}$ (resp. $H^1(\Lambda)$) contient $\theta$ (et en est multiple). On reconnaît en outre via *loc.cit.* que $\eta_{\rm int}$ est isomorphe à $\otimes_{1\leqslant j \leqslant t}\, \eta(S_j)$.

Comme $J^1_{\rm int}(\Lambda)J^1_{\rm ext}(\Lambda) = J^1(\Lambda)$ et $(H^1(\Lambda)J^1_{\rm int}(\Lambda)) \cap J^1_{\rm ext}(\Lambda) = H^1(\Lambda)$, on obtient une réalisation de la représentation $\eta$ en posant pour $g \in J^1(\Lambda)$ :

$$\eta(g) = \eta_{\rm ext}(g_{\rm ext}) \otimes \eta_{\rm int}(g_{\rm int}) \quad \text{si } g = g_{\rm ext}\ g_{\rm int} \tag{2.1}$$

avec $g_{\rm ext} \in J^1_{\rm ext}(\Lambda)$, $g_{\rm int} \in J^1_{\rm int}(\Lambda)$.

Définissons dans $\widetilde{G} = GL_F(V)$ et $\widetilde{G}_{\rm int} = \prod_{1\leqslant j\leqslant t} {\rm GL}_F(Z_j)$ les sous-groupes analogues : $\widetilde{J}^1_{\rm int}(\Lambda) = \widetilde{J}^1(\Lambda) \cap \widetilde{G}_{\rm int}$ et son orthogonal $\widetilde{J}^1_{\rm ext}(\Lambda)$ pour la forme $\tilde\theta([x, y])$, où $\tilde\theta$ est un caractère semi-simple de $\widetilde{H}^1(\Lambda)$ dont la restriction à $H^1(\Lambda)$ est $\theta$. Soit $Q$ un sous-groupe parabolique de $\widetilde{G}$ de facteur de Levi $\tilde{G}_{\rm int}$, $N$ son radical unipotent et $N^-$ le radical unipotent du parabolique opposé par rapport à $\tilde{G}_{\rm int}$. D'après [21, Proposition 5.2, Lemma 5.6(iii)] on a :

$$\widetilde{J}^1_{\rm ext}(\Lambda) = (\widetilde{J}^1(\Lambda) \cap N^-)(\widetilde{J}^1(\Lambda) \cap N)\widetilde{H}^1(\Lambda).$$

Lemme 2.2. — (i) *On a $J^1_{ext}(\Lambda) = \widetilde{J}^1_{ext}(\Lambda) \cap G$, indépendant de $\theta$.*

(ii) *On a pour tout $g \in G^+_E$ :*

$$J^1(\Lambda) \cap gJ^1(\Lambda)g^{-1} = (J^1_{ext}(\Lambda) \cap gJ^1_{ext}(\Lambda)g^{-1}).(J^1_{int}(\Lambda) \cap gJ^1_{int}(\Lambda)g^{-1}).$$

*Démonstration.* — (i) De $J^1_{\rm int}(\Lambda) = \widetilde{J}^1_{\rm int}(\Lambda) \cap G$ on déduit par orthogonalité : $H^1_{\rm ext}(\Lambda) \subseteq \widetilde{J}^1_{\rm ext}(\Lambda) \cap G \subseteq J^1_{\rm ext}(\Lambda)$. L'égalité découle alors de $\widetilde{J}^1(\Lambda) \cap G = (\widetilde{J}^1_{\rm int}(\Lambda) \cap G)(\widetilde{J}^1_{\rm ext}(\Lambda) \cap G)$ dont la démonstration est un cas particulier de celle de (ii) ci-dessous.

(ii) La difficulté technique est que $G^+_{\mathrm{int}}$ n'est pas un sous-groupe de Levi de $G^+$. Il faut remonter dans $\widetilde{G} = GL(V)$ et utiliser la décomposition d'Iwahori de $\widetilde{J}^1(\Lambda)$ relativement à $Q$ pour calculer l'intersection $\widetilde{J}^1(\Lambda) \cap g\widetilde{J}^1(\Lambda)g^{-1}$ terme à terme. Comme $g$ appartient à $G^+_E$ contenu dans $G^+_{\mathrm{int}}$, on obtient ainsi l'égalité analogue dans $\widetilde{G}$. Pour revenir à $G^+$ on prend les points fixes de l'involution adjointe : on applique l'argument de Stevens [19, Theorem 2.3], en posant $H = \widetilde{J}^1_{\mathrm{int}}(\Lambda) \cap g\widetilde{J}^1_{\mathrm{int}}(\Lambda)g^{-1}$, $U = \widetilde{J}^1_{\mathrm{ext}}(\Lambda) \cap g\widetilde{J}^1_{\mathrm{ext}}(\Lambda)g^{-1}$, et en remarquant que $\widetilde{J}^1_{\mathrm{ext}}(\Lambda)$ et $\widetilde{J}^1_{\mathrm{int}}(\Lambda)$ se normalisent mutuellement puisque $[\widetilde{J}^1(\Lambda), \widetilde{J}^1(\Lambda)] \subset \widetilde{H}^1(\Lambda)$. □

Proposition 2.3. — (i) *Les représentations $\eta_{\mathrm{ext}}$ et $\eta_{\mathrm{int}}$ sont entrelacées par $G^+_E$.*

(ii) *Soit $g \in G^+_E$ et soit $E_{\mathrm{ext}}(g)$, resp. $E_{\mathrm{int}}(g)$, un opérateur d'entrelacement de $\eta_{\mathrm{ext}}$, resp. $\eta_{\mathrm{int}}$, en $g$. Alors $E(g) = E_{\mathrm{ext}}(g) \otimes E_{\mathrm{int}}(g)$ est un opérateur d'entrelacement de $\eta$ en $g$. Tout opérateur d'entrelacement de $\eta$ en $g$ est de cette forme.*

(iii) *Les espaces d'entrelacement de $\eta_{\mathrm{ext}}$ et de $\eta_{\mathrm{int}}$ en $g \in G^+_E$ sont de dimension* 1.

*Démonstration.* — $G^+_E$ entrelace $\theta$, donc $\eta_{\mathrm{ext}}$ et $\eta_{\mathrm{int}}$. Pour le deuxième point, comme la dimension de l'espace d'entrelacement de $\eta$ en $g$ est 1, il suffit de montrer que $E_{\mathrm{ext}}(g) \otimes E_{\mathrm{int}}(g)$ entrelace effectivement $\eta$. Cela n'est qu'une vérification étant donné le lemme ci-dessus. Le troisième point découle du deuxième vu la propriété semblable de $\eta$. □

Le groupe $P^+(\Lambda_{\mathfrak{o}_E})$, qui est contenu dans $G^+_{\mathrm{int}}$, normalise $J^1(\Lambda)$ et $H^1(\Lambda)$ et entrelace le caractère $\theta$ ; il normalise donc $H^1(\Lambda)J^1_{\mathrm{int}}(\Lambda)$ et son orthogonal $J^1_{\mathrm{ext}}(\Lambda)$ pour la forme $<,>$ sur $J^1(\Lambda)/H^1(\Lambda)$. Considérons un prolongement $\kappa$ de $\eta$ à $J^+(\Lambda) = P^+(\Lambda_{\mathfrak{o}_E})J^1(\Lambda)$ et un prolongement $\kappa_{\mathrm{int}}$ de $\eta_{\mathrm{int}}$ à $P^+(\Lambda_{\mathfrak{o}_E})J^1_{\mathrm{int}}(\Lambda) = \prod_{1 \leqslant j \leqslant t} J^+(S_j)$ : il en existe par [21, §4.1]. D'après la proposition 2.3, pour tout $g \in P^+(\Lambda_{\mathfrak{o}_E})$, l'opérateur d'entrelacement $\kappa(g)$ s'écrit de façon unique sous la forme $\kappa(g) = E_{\mathrm{ext}}(g) \otimes \kappa_{\mathrm{int}}(g)$ et les opérateurs $E_{\mathrm{ext}}(g)$ ainsi définis fournissent une représentation de $P^+(\Lambda_{\mathfrak{o}_E})$ dans l'espace de $\eta_{\mathrm{ext}}$, triviale sur $P_1(\Lambda_{\mathfrak{o}_E})$ (qui est contenu dans $H^1(\Lambda)$). Autrement dit :

Corollaire 2.4. — *Il existe des représentations de $P^+(\Lambda_{\mathfrak{o}_E})/P_1(\Lambda_{\mathfrak{o}_E})$ dans l'espace de $\eta_{\mathrm{ext}}$ entrelaçant $\eta_{\mathrm{ext}}$ ; elles diffèrent entre elles d'un caractère. Tout choix d'une telle représentation $\mathcal{X}$ détermine une bijection* $\mathrm{Int}_{\mathcal{X}}$ *entre prolongements de $\eta$ à $J^+(\Lambda)$ et prolongements de $\eta_{\mathrm{int}}$ à $P^+(\Lambda_{\mathfrak{o}_E})J^1_{\mathrm{int}}(\Lambda)$, donnée par :*

$$\kappa(g) = \mathcal{X}(g) \otimes \mathrm{Int}_{\mathcal{X}}(\kappa)(g), \qquad g \in P^+(\Lambda_{\mathfrak{o}_E}).$$

Une telle représentation $\mathcal{X}$ étant fixée, on notera également $\mathrm{Int}_{\mathcal{X}}$ la bijection reliant de la même façon prolongements de $\eta$ à $TJ^1(\Lambda)$ et prolongements de $\eta_{\mathrm{int}}$ à $TJ^1_{\mathrm{int}}(\Lambda)$, pour tout sous-groupe $T$ de $P^+(\Lambda_{\mathfrak{o}_E})$ contenant $P_1(\Lambda_{\mathfrak{o}_E})$.

## 2.2. Mise en place de la restriction de Jacquet

Donnons-nous à présent, pour $1 \leqslant j \leqslant t$, des décompositions des sous-espaces $Z_j$ subordonnées aux strates $[S_j, n_j, 0, \beta_j]$ et autoduales ([21, §5.3]) :

$$Z_j = \oplus_{r=-m_j}^{m_j} W_j^{(r)},$$

où l'orthogonal de $W_j^{(r)}$ dans $Z_j$ est $\oplus_{s\neq -r} W_j^{(s)}$. On demande que $W_j^{(0)}$ soit non nul pour au plus un $j$ et l'on somme ces décompositions de façon disjointe, c'est-à-dire que la décomposition de $V$ obtenue, soit $V = \oplus_{i=-m}^{m} W^{(i)}$, vérifie que pour tout $i$, $-m \leqslant i \leqslant m$, il y a un unique $j$, $1 \leqslant j \leqslant t$, et un unique $r$, $-m_j \leqslant r \leqslant m_j$, tels que $W^{(i)} = W_j^{(r)}$ et $W^{(-i)} = W_j^{(-r)}$. On obtient une décomposition autoduale de $V$ subordonnée à la strate $[\Lambda, n, 0, \beta]$.

Soit $M$ le sous-groupe de Levi de $G^+$ stabilisant cette décomposition et $P$ un sous-groupe parabolique de $G^+$ de facteur de Levi $M$. On note $U$ le radical unipotent de $P$ et $U^-$ son opposé par rapport à $M$. D'après [21, Corollaire 5.10] les groupes $H^1(\Lambda)$ et $J^1(\Lambda)$ ont une décomposition d'Iwahori par rapport à $(M, P)$. Puisque $M$ est contenu dans $G^+_{\mathrm{int}}$ et que les décompositions induites sur les $Z_j$ sont subordonnées aux strates $[S_j, n_j, 0, \beta_j]$, le groupe $H^1(\Lambda)J^1_{\mathrm{int}}(\Lambda)$ a lui aussi une décomposition d'Iwahori par rapport à $(M, P)$.

Rappelons enfin ([7, Proposition 7.2.3], [21, Lemma 5.6]) que l'on a une décomposition de l'espace symplectique $J^1(\Lambda)/H^1(\Lambda)$ en

$$\frac{J^1(\Lambda)}{H^1(\Lambda)} = \frac{J^1(\Lambda)\cap M}{H^1(\Lambda)\cap M} \perp \left(\frac{J^1(\Lambda)\cap U^-}{H^1(\Lambda)\cap U^-} \oplus \frac{J^1(\Lambda)\cap U}{H^1(\Lambda))\cap U}\right)$$

dans laquelle les deux derniers sous-espaces sont totalement isotropes, en dualité ; on a une décomposition analogue pour $H^1(\Lambda)J^1_{\mathrm{int}}(\Lambda)/H^1(\Lambda)$. On en déduit que $J^1_{\mathrm{ext}}(\Lambda)$ a lui aussi une décomposition d'Iwahori par rapport à $(M, P)$ et que :

– $J^1_{\mathrm{ext}}(\Lambda) = (J^1_{\mathrm{ext}}(\Lambda)\cap U^-)\ \ (H^1(\Lambda)\cap M)\ \ (J^1_{\mathrm{ext}}(\Lambda)\cap U)$.
– $J^1(\Lambda)\cap U^- = (J^1_{\mathrm{ext}}(\Lambda)\cap U^-)(J^1_{\mathrm{int}}(\Lambda)\cap U^-)$,
  $J^1(\Lambda)\cap U = (J^1_{\mathrm{ext}}(\Lambda)\cap U)(J^1_{\mathrm{int}}(\Lambda)\cap U)$,

– le groupe $(H^1(\Lambda)\cap U)(J^1_{\rm int}(\Lambda)\cap U)$ est l'orthogonal de $J^1_{\rm ext}(\Lambda)\cap U^-$ dans $J^1(\Lambda)\cap U$,
– $J^1_{\rm ext}(\Lambda)\cap U$ est l'orthogonal de $(J^1_{\rm int}(\Lambda)\cap U^-)(H^1(\Lambda)\cap U^-)$ dans $J^1(\Lambda)\cap U$.

Examinons à présent les $J^1(\Lambda)\cap U$-invariants de $\eta$ dans le modèle (2.1). Notons $X_{\rm ext}$ l'espace de $\eta_{\rm ext}$, $X_{\rm int}$ celui de $\eta_{\rm int}$ et $X = X_{\rm ext}\otimes X_{\rm int}$ celui de $\eta$. L'espace $X_{\rm ext}^{J^1_{\rm ext}(\Lambda)\cap U}$ est de dimension 1 car $H^1(\Lambda)(J^1_{\rm ext}(\Lambda)\cap U)/H^1(\Lambda)$ est totalement isotrope maximal dans $J^1_{\rm ext}(\Lambda)/H^1(\Lambda)$ et $\theta_{|H^1(\Lambda)\cap U} = 1$. Le choix d'un vecteur non nul $x_{\rm ext}\in X_{\rm ext}^{J^1_{\rm ext}(\Lambda)\cap U}$ nous donne un isomorphisme :

$$\begin{array}{rcl} X^{J^1(\Lambda)\cap U} = X_{\rm ext}^{J^1_{\rm ext}(\Lambda)\cap U}\otimes X_{\rm int}^{J^1_{\rm int}(\Lambda)\cap U} & \xrightarrow{\Phi} & X_{\rm int}^{J^1_{\rm int}(\Lambda)\cap U} \\ x_{\rm ext}\otimes v & \mapsto & v \end{array} \tag{2.5}$$

L'espace $X^{J^1(\Lambda)\cap U}$ est une représentation de

$$J^1_P(\Lambda) = H^1(\Lambda)(J^1(\Lambda)\cap P) = H^1(\Lambda)(J^1_{\rm int}(\Lambda)\cap P)(J^1_{\rm ext}(\Lambda)\cap U)$$

et l'isomorphisme (2.5) commute à l'action de $J^1_{\rm int}(\Lambda)\cap P$. D'autre part $P^+(\Lambda_{\mathfrak{o}_E})\cap P$ normalise $J^1(\Lambda)\cap U$, $J^1_{\rm ext}(\Lambda)\cap U$ et $J^1_{\rm int}(\Lambda)\cap U$ donc agit sur leurs invariants ; en particulier, pour tout choix de représentation $\mathcal{X}$ comme dans le corollaire 2.4, $P^+(\Lambda_{\mathfrak{o}_E})\cap P$ agit sur $x_{\rm ext}$ par un caractère (trivial sur $P_1(\Lambda_{\mathfrak{o}_E})\cap P$).

Utilisons la notation simplifiée $X_{{\rm int},P}$, de préférence à $X_{{\rm int},P_{\rm int}}$ avec $P_{\rm int} = P\cap G_{\rm int}$ :

$$\begin{aligned} J^1_{{\rm int},P}(\Lambda) &= J^1_P(\Lambda)\cap G^+_{\rm int} = \left(H^1(\Lambda)\cap G^+_{\rm int}\right)\left(J^1_{\rm int}(\Lambda)\cap P\right), \\ J^+_{{\rm int},P}(\Lambda) &= J^+_P(\Lambda)\cap G^+_{\rm int} = \left(P^+(\Lambda_{\mathfrak{o}_E})\cap P\right)\, J^1_{{\rm int},P}(\Lambda). \end{aligned}$$

Donnons-nous un prolongement $\kappa$ de $\eta$ à $J^1(\Lambda)J^+_P(\Lambda)$ et un prolongement $\kappa_{\rm int}$ de $\eta_{\rm int}$ à $J^1_{\rm int}(\Lambda)J^+_{{\rm int},P}(\Lambda)$. Le lemme 1.10 permet d'en étudier les $J^1\cap U$-invariants ou $J^1_{\rm int}\cap U$-invariants, qui fournissent des représentations $\kappa_P$ de $J^+_P(\Lambda) = (P^+(\Lambda_{\mathfrak{o}_E})\cap P)J^1_P(\Lambda)$ et $\kappa_{{\rm int},P}$ de $J^+_{{\rm int},P}(\Lambda)$. Rappelons d'autre part (cf 1.11) que $J^+_{{\rm int},P}(\Lambda)/J^1_{{\rm int},P}(\Lambda)$ est canoniquement isomorphe à $P^+(\Lambda_{\mathfrak{o}_E})\cap P/P_1(\Lambda_{\mathfrak{o}_E})\cap P$, ce qui permet de considérer tout caractère du second groupe comme un caractère du premier. Avec ces conventions, on a en résumé :

Proposition 2.6. — *Soit $\mathcal{X}$ une représentation de $P^+(\Lambda_{\mathfrak{o}_E})\,/\,P_1(\Lambda_{\mathfrak{o}_E})$ entrelaçant $\eta_{\rm ext}$. Notons $\chi_U$ le caractère de $P^+(\Lambda_{\mathfrak{o}_E})\cap P$ par lequel ce groupe agit sur les $J^1_{\rm ext}(\Lambda)\cap U$-invariants de $\eta_{\rm ext}$. Soit $\kappa$ un prolongement* *de $\eta$ à $J^1(\Lambda)J^+_P(\Lambda)$. Alors*

$$\kappa_{P|J^+_{int,P}(\Lambda)} = \chi_U \ \mathrm{Int}_{\mathcal{X}}(\kappa)_P.$$

## 2.3. Une représentation à la Weil

Il est une situation particulière dans laquelle on peut élucider le caractère $\chi_U$ introduit en 2.6, en construisant une représentation entrelaçant $\eta_{\mathrm{ext}}$. Soit donc $V = W^{(-1)} \oplus W^{(0)} \oplus W^{(1)}$ une décomposition autoduale de $V$ subordonnée à la strate $[\Lambda, n, 0, \beta]$ et telle que $W^{(0)}$ soit somme de certains $V^i$ ; posons $Z_1 = W^{(-1)} \oplus W^{(1)}$, $Z_2 = W^{(0)}$. Soit $P$ le sous-groupe parabolique de $G^+$ stabilisant le drapeau $\{0\} \subset W^{(-1)} \subset W^{(-1)} \oplus W^{(0)} \subset V$, $U$ son radical unipotent, $M$ le fixateur de la décomposition, $P^-$ et $U^-$ les opposés de $P$ et $U$ par rapport à $M$.

Pour simplifier les notations, on raccourcit $J^1_{\mathrm{ext}}(\Lambda)$, $H^1(\Lambda)$ etc. en $J^1_{\mathrm{ext}}$, $H^1$ etc. Le caractère $\theta$ de $H^1$, trivial sur $H^1 \cap U$ et $H^1 \cap U^-$, se prolonge en un caractère $\theta_U$ de $H^1(J^1_{\mathrm{ext}} \cap U)$ trivial sur $J^1_{\mathrm{ext}} \cap U$. On peut alors réaliser la représentation $\eta_{\mathrm{ext}}$ de $J^1_{\mathrm{ext}}$ comme l'action par translations à droite dans l'espace de fonctions

(2.7)
$$\mathcal{W} = \{f : J^1_{\mathrm{ext}} \longrightarrow \mathbb{C} \ / \ f(ht) = \theta_U(h)f(t), \ h \in H^1(J^1_{\mathrm{ext}} \cap U), \ t \in J^1_{\mathrm{ext}}\},$$

isomorphe par restriction à l'espace des fonctions de $J^1_{\mathrm{ext}} \cap U^-/H^1 \cap U^-$ dans $\mathbb{C}$.

On vérifie aisément que pour $g \in P^+(\Lambda_{\mathfrak{o}_E}) \cap P$, l'opérateur $\Omega(g)$ défini par

$$\Omega(g)(f)(x) = f(g^{-1}xg) \quad (f \in \mathcal{W}, \ x \in J^1_{\mathrm{ext}}, \ g \in P^+(\Lambda_{\mathfrak{o}_E}) \cap P)$$

conserve $\mathcal{W}$. Il existe (§2.1) une représentation projective $g \mapsto \Omega(g)$ de $P^+(\Lambda_{\mathfrak{o}_E})/P_1(\Lambda_{\mathfrak{o}_E})$ dans $\mathcal{W}$ entrelaçant $\eta_{\mathrm{ext}}$ et prolongeant cette vraie représentation de $P^+(\Lambda_{\mathfrak{o}_E}) \cap P$. La donnée de $\Omega$ va nous permettre de construire une vraie représentation par l'élégante méthode de Neuhauser ([16] ; voir aussi [22]).

Rappelons que $J^1/H^1$ est un espace vectoriel sur $k_F$, donc sur $\mathbb{F}_p$ agissant par $n.x = x^n$ ($n \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, $x \in J^1/H^1$), et $J^1_{\mathrm{ext}} \cap U^-/H^1 \cap U^-$ aussi : soit $a$ sa dimension sur $\mathbb{F}_p$, la dimension de $\mathcal{W}$ sur $\mathbb{C}$ est $p^a$. Considérons les sous-espaces $\mathcal{W}^+$ et $\mathcal{W}^-$ de $\mathcal{W}$ formés des fonctions paires pour le premier, impaires pour le second :

$$\mathcal{W}^+ = \{f : J^1_{\mathrm{ext}} \cap U^-/H^1 \cap U^- \longrightarrow \mathbb{C} \ / \\ \forall v \in J^1_{\mathrm{ext}} \cap U^-/H^1 \cap U^- \quad f(v) = f(v^{-1})\}$$

$$\mathcal{W}^- = \{f : J^1_{\mathrm{ext}} \cap U^-/H^1 \cap U^- \longrightarrow \mathbb{C} \ / \\ \forall v \in J^1_{\mathrm{ext}} \cap U^-/H^1 \cap U^- \quad f(v) = -f(v^{-1})\}.$$

Leurs dimensions sont $1 + (p^a - 1)/2$ et $(p^a - 1)/2$ respectivement. On prétend que

Lemme 2.8. — *$\mathcal{W}^+$ et $\mathcal{W}^-$ sont stables par les opérateurs $\Omega(g)$, $g \in P^+(\Lambda_{\mathfrak{o}_E})/P_1(\Lambda_{\mathfrak{o}_E})$.*

*Démonstration.* — L'élément $\epsilon$ : $\epsilon_{|Z_1} = -I_{Z_1}, \epsilon_{|Z_2} = I_{Z_2}$, appartient au centre de $P^+(\Lambda_{\mathfrak{o}_E})$. Un bref calcul matriciel montre que, pour tout $u \in J^1_{\mathrm{ext}} \cap U^-$, $(\epsilon u \epsilon^{-1})u$ appartient à $G^+_{\mathrm{int}}$ donc à son intersection avec $J^1_{\mathrm{ext}} \cap U^-$, soit : $\epsilon u \epsilon^{-1} \in (H^1 \cap U^-)u^{-1}$. Les sous-espaces $\mathcal{W}^+$ et $\mathcal{W}^-$ sont donc les sous-espaces propres de $\Omega(\epsilon)$ pour les valeurs propres 1 et $-1$ respectivement. Si $\Omega$ était une vraie représentation le résultat suivrait, ici il faut faire un peu attention. Les opérateurs $\Omega(g)\Omega(\epsilon)$ et $\Omega(\epsilon)\Omega(g)$ diffèrent d'un scalaire $c_g$ et $\Omega(g)$ applique le sous-espace propre de $\Omega(\epsilon)$ correspondant à la valeur propre $\lambda$ sur celui correspondant à $c_g\lambda$. Alors $c_g$ est nécessairement égal à 1 puisque $\mathcal{W}^+$ et $\mathcal{W}^-$ sont de dimensions différentes. □

Soit $\Omega^+$ la restriction de $\Omega$ à $\mathcal{W}^+$. D'après [16, Theorem 4.3], où l'on examine les déterminants des représentations projectives $\Omega$ et $\Omega^+$, on définit une vraie représentation en posant :

$$\mathbb{W}(g) = \frac{\det \Omega(g)}{\det \Omega^+(g)^2} \ \ \Omega(g), \quad g \in P^+(\Lambda_{\mathfrak{o}_E})/P_1(\Lambda_{\mathfrak{o}_E}).$$

Calculons le caractère $\mathbf{w}_U$ correspondant. Dans le modèle ci-dessus, la droite des $J^1_{\mathrm{ext}} \cap U$-invariants de $\eta_{\mathrm{ext}}$ a pour base la fonction $f_1$ de support $H^1(J^1_{\mathrm{ext}} \cap U)$ et valeur 1 en 1, fixée par les opérateurs $\Omega(u)$, $u \in P^+(\Lambda_{\mathfrak{o}_E}) \cap P$. D'autre part $\mathcal{W}$ a pour base l'ensemble des fonctions $f_v$, $v \in J^1_{\mathrm{ext}} \cap U^-/H^1_{\mathrm{ext}} \cap U^-$, définies par leur support $H^1(J^1_{\mathrm{ext}} \cap U)\, v$ et leur valeur 1 en $v$.

Lemme 2.9. — *Soit $u \in P^+(\Lambda_{\mathfrak{o}_E}) \cap U$, soit $x \in J^1_{\mathrm{ext}}(\Lambda) \cap U$ et soit $v \in J^1_{\mathrm{ext}}(\Lambda) \cap U^-$. Le commutateur $[u, x]$ appartient à $H^1(\Lambda) \cap G^+_{\mathrm{int}}$ et le commutateur $[u, v]$ appartient à $H^1(\Lambda)(J^1_{\mathrm{ext}}(\Lambda) \cap U)$.*

*Démonstration.* — Le commutateur de deux éléments de $U$ appartient à $G^+_{\mathrm{int}}$ (vérification matricielle immédiate) donc $[u, x]$ appartient à $J^1_{\mathrm{ext}}(\Lambda) \cap$

$U\cap G^+_{\mathrm{int}} \subset H^1(\Lambda)\cap U\cap G^+_{\mathrm{int}}$. Le commutateur $[u,v]$ appartient à $J^1_{\mathrm{ext}}(\Lambda)$, il suffit de montrer qu'il est orthogonal à $J^1_{\mathrm{ext}}(\Lambda)\cap U$. On calcule donc pour $x\in J^1_{\mathrm{ext}}(\Lambda)\cap U$ :

$$\begin{aligned}\theta([uvu^{-1}v^{-1},x]) &= \theta([uvu^{-1},x][v^{-1},x]) = \theta([v,u^{-1}xu])\theta([v,x^{-1}])\\ &= \theta([v,u^{-1}xux^{-1}])\end{aligned}$$

qui vaut 1 puisque $[u^{-1},x]$ appartient à $H^1(\Lambda)$. □

On a donc pour $u\in P^+(\Lambda_{\mathfrak{o}_E})\cap U$ : $\Omega(u)f_v = \theta_U([u^{-1},v])f_v$. En outre $\Omega(u)$ envoie fonction paire sur fonction paire, d'où : $\theta_U([u^{-1},v]) = \theta_U([u^{-1},v^{-1}])$ pour $v\in J^1_{\mathrm{ext}}\cap U^-$. Il en résulte $\det\Omega(u) = \det\Omega^+(u)^2$, donc $\mathbb{W}(u)$ est égal à $\Omega(u)$ et fixe $f_1$.

Etudions maintenant les opérateurs $\Omega(x)$ pour $x\in P^+(\Lambda_{\mathfrak{o}_E})\cap M$, qui normalise $J^1_{\mathrm{ext}}\cap U^-$ et $H^1_{\mathrm{ext}}\cap U^-$. On a $\Omega(x)f_v = f_{xvx^{-1}}$, autrement dit ces opérateurs agissent par permutation de la base des $f_v$ et leur déterminant est la signature de la permutation correspondante. Il en est de même pour $\mathcal{W}^+$, de base les $f_v + f_{v^{-1}}$, donc $\det\Omega^+(x)^2 = 1$. En conclusion :

Proposition 2.10. — *Soit $\mathbf{w}_U$ le caractère de $P^+(\Lambda_{\mathfrak{o}_E})\cap P$, trivial sur $P^+(\Lambda_{\mathfrak{o}_E})\cap U$, qui à $x\in P^+(\Lambda_{\mathfrak{o}_E})\cap M$ associe la signature de la permutation $v\mapsto xvx^{-1}$ de $J^1_{\mathrm{ext}}(\Lambda)\cap U^-/H^1(\Lambda)\cap U^-$. Il existe une représentation $\mathbb{W}$ de $P^+(\Lambda_{\mathfrak{o}_E})/P_1(\Lambda_{\mathfrak{o}_E})$ dans l'espace de $\eta_{\mathrm{ext}}$, entrelaçant $\eta_{\mathrm{ext}}$, dont la restriction à $P^+(\Lambda_{\mathfrak{o}_E})\cap P$ est donnée, dans le modèle (2.7) de $\eta_{\mathrm{ext}}$, par :*

$$\mathbb{W}(g)(f)(x) = \mathbf{w}_U(g)f(g^{-1}xg) \quad (g\in P^+(\Lambda_{\mathfrak{o}_E})\cap P,\ f\in\mathcal{W},\ x\in J^1_{\mathrm{ext}}).$$

*En particulier, le caractère $\mathbf{w}_U$ est l'action de $P^+(\Lambda_{\mathfrak{o}_E})\cap P$ sur la droite des $J^1_{\mathrm{ext}}\cap U$-invariants de $\eta_{\mathrm{ext}}$.*

*Remarque 2.11.* — On obtient un caractère $\mathbf{w}_U$ à valeurs dans $\{\pm1\}$, donc trivial sur tous les sous-groupes d'ordre impair, en particulier sur tous les $p$-sous-groupes. Rappelons aussi que $J^1_{\mathrm{ext}}(\Lambda)$ ne dépend pas de $\theta$ (lemme 2.2), donc $\mathbf{w}_U$ n'en dépend pas non plus.

*Remarque 2.12.* — Au lieu d'étudier directement la représentation de $P^+(\Lambda_{\mathfrak{o}_E})/P_1(\Lambda_{\mathfrak{o}_E})$ comme ci-dessus, on aurait pu utiliser l'homomorphisme naturel de ce groupe dans le groupe symplectique $\mathcal{S}$ de l'espace alterné $J^1_{\mathrm{ext}}\cap U^-/H^1\cap U^-\oplus J^1_{\mathrm{ext}}\cap U/H^1\cap U$ et se ramener à la représentation de Weil de $\mathcal{S}$ telle qu'elle est décrite par Gérardin [9]. Cette approche s'avère plus compliquée. D'une part il n'est pas clair que l'action naturelle de $P^+(\Lambda_{\mathfrak{o}_E})/P_1(\Lambda_{\mathfrak{o}_E})$ sur le groupe d'Heisenberg correspondant nous donne une section conjuguée à la section standard (de $\mathcal{S}$ dans le groupe des automorphismes du groupe d'Heisenberg). D'autre part la connaissance du caractère du stabilisateur de $J^1_{\mathrm{ext}} \cap U / H^1_{\mathrm{ext}} \cap U$ dans $\mathcal{S}$ par lequel il agit sur un invariant de son radical unipotent ne suffit pas à décrire sa restriction à $P^+(\Lambda_{\mathfrak{o}_E}) \cap M$.

### 2.4. Lien avec les $\beta$-extensions

Nous allons à présent appliquer le corollaire 2.4 pour comparer $\beta$-extensions dans $G^+$ et dans $G^+_{\mathrm{int}}$. Les deux ingrédients nécessaires sont la restriction de Jacquet, qui interviendra via la proposition 2.6 et qui commute aux bijections canoniques (proposition 1.20), et un bon choix de la représentation $\mathcal{X}$ (proposition 2.10). Nous nous plaçons dans des hypothèses communes à ces résultats :

(i) $V = W^{(-1)} \oplus W^{(0)} \oplus W^{(1)}$ est une décomposition autoduale de $V$ proprement subordonnée à la strate $[\Lambda, n, 0, \beta]$, donc subordonnée à $[\Lambda^{\mathfrak{M}}, n^{\mathfrak{M}}, 0, \beta]$, et telle que $W^{(0)}$ soit somme de certains $V^i$ ; $Z_1 = W^{(-1)} \oplus W^{(1)}$, $Z_2 = W^{(0)}$.

La strate $[\Lambda, n, 0, \beta]$ est donc somme directe des strates semi-simples $[S_1, n_1, 0, \beta_1]$ et $[S_2, n_2, 0, \beta_2]$ avec $S_j = \Lambda \cap Z_j$, $j = 1, 2$. Il en est de même pour la strate $[\Lambda^{\mathfrak{M}}, n^{\mathfrak{M}}, 0, \beta]$, somme directe des strates semi-simples $[S_1^{\mathfrak{M}}, n_1^{\mathfrak{M}}, 0, \beta_1]$ et $[S_2^{\mathfrak{M}}, n_2^{\mathfrak{M}}, 0, \beta_2]$.

(ii) $P$ est le sous-groupe parabolique de $G^+$ stabilisant le drapeau $\{0\} \subset W^{(-1)} \subset W^{(-1)} \oplus W^{(0)} \subset W^{(-1)} \oplus W^{(0)} \oplus W^{(1)}$, $U$ est son radical unipotent, $M$ est le fixateur de la décomposition, $P^-$ et $U^-$ sont les opposés de $P$ et $U$ par rapport à $M$.

(iii) On demande $P^+(\Lambda_{\mathfrak{o}_E}) = (P^+(\Lambda^{\mathfrak{M}}_{\mathfrak{o}_E}) \cap P)\ P_1(\Lambda^{\mathfrak{M}}_{\mathfrak{o}_E})$.

Rappelons que $\mathfrak{b}_0(\Lambda^{\mathfrak{M}})$ est un $\mathfrak{o}_E$-ordre autodual maximal. On applique les résultats du paragraphe précédent à $\Lambda^{\mathfrak{M}}$ en ajoutant l'exposant $\mathfrak{M}$ aux notations si nécessaire. Alors :

Proposition 2.13. — *Soit $\mathbb{W}^{\mathfrak{M}}$ la représentation de $P^+(\Lambda^{\mathfrak{M}}_{\mathfrak{o}_E})$ dans l'espace de $\eta^{\mathfrak{M}}_{\mathrm{ext}}$ définie dans la proposition 2.10 et soit $\mathrm{Int}_{\mathbb{W}^{\mathfrak{M}}}$ la bijection correspondante. Alors $\kappa^{\mathfrak{M}}$, prolongement de $\eta^{\mathfrak{M}}$ à $J^+(\Lambda^{\mathfrak{M}})$, est une $\beta$-extension si et seulement si $\mathrm{Int}_{\mathbb{W}^{\mathfrak{M}}}(\kappa^{\mathfrak{M}})$, prolongement de $\eta^{\mathfrak{M}}_{\mathrm{int}}$ à $J^+_{\mathrm{int}}(\Lambda^{\mathfrak{M}})$, est une $\beta$-extension.*

*Démonstration.* — Il suffit de montrer, pour une suite autoduale $\Lambda^m$ de $\mathfrak{o}_E$-réseaux telle que $\mathfrak{b}_0(\Lambda^m)$ soit un $\mathfrak{o}_E$-ordre autodual minimal contenu dans $\mathfrak{b}_0(\Lambda^{\mathfrak{M}})$, que les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) $\kappa^{\mathfrak{M}}$ est un prolongement de $\eta(\Lambda^m, \Lambda^{\mathfrak{M}})$ ;

(ii) $\mathrm{Int}_{\mathbb{W}^{\mathfrak{M}}}(\kappa^{\mathfrak{M}})$ est un prolongement de $\eta_{\mathrm{int}}(\Lambda^m, \Lambda^{\mathfrak{M}})$.

On choisit, comme on le peut, une suite $\Lambda^m$ telle que la décomposition $V = W^{(-1)} \oplus W^{(0)} \oplus W^{(1)}$ soit proprement subordonnée à la strate $[\Lambda^m, n^m, 0, \beta]$ et telle que $\mathfrak{b}_0(\Lambda^m) \subset \mathfrak{b}_0(\Lambda)$.

– L'hypothèse (iii) entraîne

$$P^+(\Lambda_{\mathfrak{o}_E}) = (P^1(\Lambda^{\mathfrak{M}}_{\mathfrak{o}_E}) \cap U^-)(P^+(\Lambda^{\mathfrak{M}}_{\mathfrak{o}_E}) \cap M)(P^+(\Lambda^{\mathfrak{M}}_{\mathfrak{o}_E}) \cap U)$$

donc $P_1(\Lambda^m_{\mathfrak{o}_E}) \cap U^- \subset P^1(\Lambda^{\mathfrak{M}}_{\mathfrak{o}_E}) \cap U^-$. Comme $P^1(\Lambda^{\mathfrak{M}}_{\mathfrak{o}_E}) \subset P^1(\Lambda^m_{\mathfrak{o}_E})$, on a en fait $P_1(\Lambda^m_{\mathfrak{o}_E}) \cap U^- = P_1(\Lambda_{\mathfrak{o}_E}) \cap U^- = P_1(\Lambda^{\mathfrak{M}}_{\mathfrak{o}_E}) \cap U^-$, contenu dans $J^1(\Lambda)$.

– Rappelons que $\eta(\Lambda^m, \Lambda^{\mathfrak{M}})$ est une représentation de $P^1(\Lambda^m_{\mathfrak{o}_E})J^1(\Lambda^{\mathfrak{M}})$, possèdant une décomposition d'Iwahori relative à $(P, M)$ et d'intersection avec $U^-$ : $J^1(\Lambda^{\mathfrak{M}}) \cap U^-$. On peut comme au paragraphe 1.3 définir la représentation $\eta_P(\Lambda^m, \Lambda^{\mathfrak{M}})$ du groupe $(P^1(\Lambda^m_{\mathfrak{o}_E}) \cap P)J^1_P(\Lambda^{\mathfrak{M}})$ : c'est l'action sur les $J^1(\Lambda^{\mathfrak{M}}) \cap U$-invariants de $\eta(\Lambda^m, \Lambda^{\mathfrak{M}})$. On vérifie que $\eta(\Lambda^m, \Lambda^{\mathfrak{M}})$ est la représentation induite de $\eta_P(\Lambda^m, \Lambda^{\mathfrak{M}})$.

– Le groupe $P^+(\Lambda_{\mathfrak{o}_E})J^1(\Lambda^{\mathfrak{M}})$ contient $P^+(\Lambda^m_{\mathfrak{o}_E})J^1(\Lambda^{\mathfrak{M}})$, de sorte que la condition voulue sur $\kappa^{\mathfrak{M}}$ peut se voir comme une condition sur sa restriction à $P^+(\Lambda_{\mathfrak{o}_E})J^1(\Lambda^{\mathfrak{M}})$, à laquelle le lemme 1.10 s'applique. Ainsi $\kappa^{\mathfrak{M}}$ prolonge $\eta(\Lambda^m, \Lambda^{\mathfrak{M}})$ si et seulement si $\kappa^{\mathfrak{M}}_P$ prolonge $\eta_P(\Lambda^m, \Lambda^{\mathfrak{M}})$.

– Les mêmes constructions s'appliquent dans $G^+_{\mathrm{int}}$ aux objets induits dans les groupes d'isométries de $Z_1$ et $Z_2$ ; on continue d'utiliser la notation $P$ au lieu d'utiliser une notation spécifique pour le parabolique $P \cap G^+_{\mathrm{int}}$. Elles aboutissent à : $\mathrm{Int}_{\mathbb{W}^{\mathfrak{M}}}(\kappa^{\mathfrak{M}})$ prolonge $\eta_{\mathrm{int}}(\Lambda^m, \Lambda^{\mathfrak{M}})$ si et seulement si $\mathrm{Int}_{\mathbb{W}^{\mathfrak{M}}}(\kappa^{\mathfrak{M}})_P$ prolonge $\eta_{\mathrm{int}}(\Lambda^m, \Lambda^{\mathfrak{M}})_P$.

– On peut décrire $\eta_P(\Lambda^m, \Lambda^{\mathfrak{M}})$ de façon analogue à la proposition 1.14 ci-dessus et à [21], preuve de la proposition 6.3 : c'est la représentation de $(P^1(\Lambda^m_{\mathfrak{o}_E}) \cap P)J^1_P(\Lambda^{\mathfrak{M}})$ prolongeant $\eta_P(\Lambda^{\mathfrak{M}})$ qui est triviale sur $P^1(\Lambda^m_{\mathfrak{o}_E}) \cap U$ et égale à $\eta(\Lambda^{m(0)}, \Lambda^{\mathfrak{M}(0)}) \otimes \widetilde{\eta}(\Lambda^{m(1)}, \Lambda^{\mathfrak{M}(1)})$ sur $P^1(\Lambda^m_{\mathfrak{o}_E}) \cap M$. Il en est de même pour $\eta_{\mathrm{int}}(\Lambda^m, \Lambda^{\mathfrak{M}})_P$ avec les modifications évidentes.

Les conditions "$\kappa^{\mathfrak{M}}_P$ prolonge $\eta_P(\Lambda^m, \Lambda^{\mathfrak{M}})$" et "$\mathrm{Int}_{\mathbb{W}^{\mathfrak{M}}}(\kappa^{\mathfrak{M}})_P$ prolonge $\eta_{\mathrm{int}}(\Lambda^m, \Lambda^{\mathfrak{M}})_P$" se lisent sur $J^+_{\mathrm{int},P}(\Lambda^{\mathfrak{M}})$. Par la proposition 2.6, la restriction de $\kappa^{\mathfrak{M}}_P$ à $J^+_{\mathrm{int},P}(\Lambda^{\mathfrak{M}})$ est équivalente à $\mathbf{w}^{\mathfrak{M}}_U \mathrm{Int}_{\mathbb{W}^{\mathfrak{M}}}(\kappa^{\mathfrak{M}})_P$. Comme $\mathbf{w}^{\mathfrak{M}}_U$ est trivial sur le ($p$-)groupe de définition de $\eta_{\mathrm{int}}(\Lambda^m, \Lambda^{\mathfrak{M}})_P$, on a le résultat annoncé. □

*Remarque 2.14.* — On montre de la même façon que $\kappa^{\mathfrak{M}}$ prolonge $\eta(\Lambda, \Lambda^{\mathfrak{M}})$ si et seulement si $\mathrm{Int}_{\mathbb{W}^{\mathfrak{M}}}(\kappa^{\mathfrak{M}})$ prolonge $\eta_{\mathrm{int}}(\Lambda, \Lambda^{\mathfrak{M}})$.

Nous pouvons enfin rassembler tous les résultats et décrire le lien entre $\beta$-extensions dans $G^+$ et dans $G^+_{\mathrm{int}}$ en termes de l'application $\mathbf{r}_P$ du paragraphe 1.4 et du caractère $\mathbf{w}_U^{\mathfrak{M}}$ de la proposition 2.10 appliquée à la suite $\Lambda^{\mathfrak{M}}$. Le caractère $\mathbf{w}_U^{\mathfrak{M}}$ de $P^+(\Lambda^{\mathfrak{M}}_{\mathfrak{o}_E}) \cap P / P^1(\Lambda^{\mathfrak{M}}_{\mathfrak{o}_E}) \cap P$ s'identifie à un caractère de $P^+(\Lambda_{\mathfrak{o}_E}) = (P^+(\Lambda^{\mathfrak{M}}_{\mathfrak{o}_E}) \cap P)\ P_1(\Lambda^{\mathfrak{M}}_{\mathfrak{o}_E})$, trivial sur $P^1(\Lambda_{\mathfrak{o}_E})$. On rappelle que $P^+(\Lambda_{\mathfrak{o}_E}) = (P^1(\Lambda_{\mathfrak{o}_E}) \cap U^-)(P^+(\Lambda_{\mathfrak{o}_E}) \cap M)(P^1(\Lambda_{\mathfrak{o}_E}) \cap U)$.

Théorème 2.15. — *Soit $\kappa(\Lambda)$ un prolongement de $\eta(\Lambda)$ à $J^+(\Lambda)$ et $\kappa(S_1) \otimes \kappa(S_2)$ un prolongement de $\eta(S_1) \otimes \eta(S_2)$ au sous groupe $J^+_{int}(\Lambda) = J^+(S_1) \times J^+(S_2)$, reliés par la condition*

$$\mathbf{r}_P\left(\kappa(\Lambda)\right) = \mathbf{r}_P\left(\kappa(S_1) \otimes \kappa(S_2)\right).$$

*Soit $\mathbf{w}_U^{\mathfrak{M}}$ le caractère de $P^+(\Lambda_{\mathfrak{o}_E})$, trivial sur $P^1(\Lambda_{\mathfrak{o}_E})$, qui à un élément $x \in P^+(\Lambda_{\mathfrak{o}_E}) \cap M$ associe la signature de la permutation $v \mapsto xvx^{-1}$ de $J^1_{ext}(\Lambda^{\mathfrak{M}}) \cap U^- / H^1(\Lambda^{\mathfrak{M}}) \cap U^-$.*
*La représentation $\kappa(\Lambda)$ est une $\beta$-extension de $\eta(\Lambda)$ relativement à $\Lambda^{\mathfrak{M}}$ si et seulement si la représentation $\mathbf{w}_U^{\mathfrak{M}}(\kappa(S_1) \otimes \kappa(S_2))$ est une $\beta$-extension de $\eta(S_1) \otimes \eta(S_2)$ relativement à $\Lambda^{\mathfrak{M}}$.*

*Démonstration.* — Elle s'appuie sur le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc}
\{\text{Prolongements de } \eta(\Lambda) \text{ à } J^+(\Lambda)\} & \overset{\mathfrak{B}}{\longleftrightarrow} & \{\text{Pr. de } \eta(\Lambda, \Lambda^{\mathfrak{M}}) \text{ à } P^+(\Lambda_{\mathfrak{o}_E}) J^1(\Lambda^{\mathfrak{M}})\} \\
\mathbf{r}_P \downarrow & & \mathbf{r}_P \downarrow \\
\{\text{Pr. de } \eta_P(\Lambda)_{|J^1(\Lambda)\cap M} \text{ à } J^+(\Lambda) \cap M\} & \overset{\mathfrak{B}}{\longleftrightarrow} & \{\text{Pr. de } \eta_{P|M}(\Lambda, \Lambda^{\mathfrak{M}}) \text{ à } J^+(\Lambda^{\mathfrak{M}}) \cap M\} \\
\downarrow & & \Phi \downarrow \\
\{\text{Pr. de } \eta_P(S_1)_{|J^1(S_1)\cap M} \otimes \eta(S_2) \text{ à } J^+_{\mathrm{int}}(\Lambda) \cap M\} & \overset{\mathfrak{B}}{\longleftrightarrow} & \{\text{Pr. de } \eta_{P|M}(S_1, S_1^{\mathfrak{M}}) \otimes \eta(S_2, S_2^{\mathfrak{M}}) \\
 & & \text{à } J^+_{\mathrm{int}}(\Lambda^{\mathfrak{M}}) \cap M\} \\
\mathbf{r}_P \uparrow & & \mathbf{r}_P \uparrow \\
\{\text{Pr. de } \eta(S_1) \otimes \eta(S_2) \text{ à } J^+_{\mathrm{int}}(\Lambda)\} & \overset{\mathfrak{B}}{\longleftrightarrow} & \{\text{Pr. de } \eta(S_1, S_1^{\mathfrak{M}}) \otimes \eta(S_2, S_2^{\mathfrak{M}}) \\
 & & \text{à } P^+(\Lambda_{\mathfrak{o}_E}) J^1_{\mathrm{int}}(\Lambda^{\mathfrak{M}})\}
\end{array}$$

Expliquons ce diagramme. Les deux premières lignes reproduisent le diagramme commutatif de la proposition 1.20 appliquée à $\Lambda$ et $\Lambda^{\mathfrak{M}}$, avec échange des lignes et des colonnes. Les deux dernières lignes reproduisent le même diagramme commutatif dans le groupe $G^+_{\mathrm{int}}$, avec les paires $(S_1, S_1^{\mathfrak{M}})$ et $(S_2, S_2^{\mathfrak{M}})$, et inversé ; noter que $\eta(S_2, S_2^{\mathfrak{M}}) = \eta_{P|M}(S_2, S_2^{\mathfrak{M}})$.

Soit de nouveau $\mathbb{W}^{\mathfrak{M}}$ la représentation de $P^+(\Lambda^{\mathfrak{M}}_{\mathfrak{o}_E})$ dans l'espace de $\eta^{\mathfrak{M}}_{\mathrm{ext}}$ définie dans la proposition 2.10, soit $\mathrm{Int}_{\mathbb{W}^{\mathfrak{M}}}$ la bijection correspondante et soit $\Phi$ l'isomorphisme associé par la proposition 2.6. Alors $\Phi$ entrelace des représentations de $J^+_{\mathrm{int},P}(\Lambda^{\mathfrak{M}})$, en particulier de $J^+_{\mathrm{int},P}(\Lambda^{\mathfrak{M}}) \cap M = J^+_{\mathrm{int}}(\Lambda^{\mathfrak{M}}) \cap M = J^+(\Lambda^{\mathfrak{M}}) \cap M = (J^+(S_1^{\mathfrak{M}}) \cap M) \times J^+(S_2^{\mathfrak{M}})$ (cf (1.11)), et

$\Phi$ est le produit tensoriel par $(\mathbf{w}_U^{\mathfrak{M}})^{-1} = \mathbf{w}_U^{\mathfrak{M}}$. La composée de haut en bas, soit $\mathbf{r}_P^{-1} \circ \Phi \circ \mathbf{r}_P$, des applications verticales de droite du diagramme est la bijection $\mathrm{Int}_{\mathbb{W}^{\mathfrak{M}}}$.

Partons alors de $\kappa(\Lambda)$, prolongement de $\eta(\Lambda)$ à $J^+(\Lambda)$. C'est une $\beta$-extension relativement à $\Lambda^{\mathfrak{M}}$ si et seulement si son image $\mathfrak{B}(\kappa(\Lambda))$, prolongement de $\eta(\Lambda, \Lambda^{\mathfrak{M}})$ à $P^+(\Lambda_{\mathfrak{o}_E})J^1(\Lambda^{\mathfrak{M}})$, se prolonge à $J^+(\Lambda^{\mathfrak{M}})$ en une $\beta$-extension de $\eta(\Lambda^{\mathfrak{M}})$. Puisque $\mathbb{W}^{\mathfrak{M}}$ est une représentation de $P^+(\Lambda^{\mathfrak{M}}_{\mathfrak{o}_E})$ tout entier, cette condition équivaut à : $\mathrm{Int}_{\mathbb{W}^{\mathfrak{M}}}(\mathfrak{B}(\kappa(\Lambda)))$ se prolonge à $J^+_{\mathrm{int}}(\Lambda^{\mathfrak{M}})$ en une $\beta$-extension de $\eta_{\mathrm{int}}(\Lambda^{\mathfrak{M}})$ (proposition 2.13). Ceci signifie exactement que :

$\mathfrak{B}^{-1}[\,\mathrm{Int}_{\mathbb{W}^{\mathfrak{M}}}(\mathfrak{B}(\kappa(\Lambda)))]$ *est une $\beta$-extension de $\eta(S_1)\otimes\eta(S_2)$ relativement à $\Lambda^{\mathfrak{M}}$.*

Il reste à faire le lien avec les applications $\mathbf{r}_P$ de la colonne de gauche. L'application faisant commuter le diagramme du milieu est encore le produit tensoriel par $\mathbf{w}_U^{\mathfrak{M}}$ puisque la bijection canonique est compatible à la torsion par les caractères de $P^+(\Lambda_{\mathfrak{o}_E})/P^1(\Lambda_{\mathfrak{o}_E})$ (lemme 1.5). Autrement dit :

$$\begin{aligned}\mathbf{r}_P(\kappa(\Lambda)) &= \mathbf{w}_U^{\mathfrak{M}}\ \mathbf{r}_P\left(\mathfrak{B}^{-1}[\,\mathrm{Int}_{\mathbb{W}^{\mathfrak{M}}}(\mathfrak{B}(\kappa(\Lambda)))]\right)\\ &= \mathbf{r}_P\left(\mathbf{w}_U^{\mathfrak{M}}\,\mathfrak{B}^{-1}[\,\mathrm{Int}_{\mathbb{W}^{\mathfrak{M}}}(\mathfrak{B}(\kappa(\Lambda)))]\right).\end{aligned}$$ □

*Exemple 2.16.* — Plaçons-nous dans un groupe symplectique avec $\dim W^{(1)} = 1$, de sorte que $G \simeq \mathrm{Sp}(2N{+}2, F)$ et $G_{\mathrm{int}} \simeq \mathrm{Sp}(2, F)\times\mathrm{Sp}(2N, F)$. Prenons dans $Z_1$ la strate nulle $[S_1, 0, 0, 0]$ attachée à une suite de réseaux dont le fixateur est le sous-groupe d'Iwahori standard $I$ de $\mathrm{Sp}(2, F)$, dans $Z_2$ une strate semi-simple sans composante nulle $[S_2, n_2, 0, \beta_2]$. Alors $\eta(S_1)$ est la représentation triviale de $J^1(S_1)$, radical pro-unipotent de $J(S_1) = I$. Un prolongement $\kappa(S_1)$ de $\eta(S_1)$ à $I$ est un caractère $\Xi$ de $I$ de la forme $\Xi\left(\begin{smallmatrix} a & b\\ c & d\end{smallmatrix}\right) = \xi(a)$ pour un caractère $\xi$ de $\mathfrak{o}_F^\times$ trivial sur $1 + \mathfrak{p}_F$. Un tel caractère est une $\beta$-extension relativement à une des deux suites de réseaux minimales $S_1^+$ et $S_1^-$ extraites de $S_1$ si et seulement si $\kappa(S_1)$ est le caractère trivial de $I$ (Corollaire 1.9, Proposition 1.6).

Soient $\xi$ et $\Xi$ comme ci-dessus, soit $\kappa(S_2)$ un prolongement de $\eta(S_2)$ à $J(S_2)$ et soit $\kappa_P(\Lambda)$ le prolongement de $\eta_P(\Lambda)$ à $J_P(\Lambda)$ dont la restriction à $J_P(\Lambda)\cap M$ est $\xi\otimes\kappa(S_2)$. Le théorème 2.15 dit que $\mathrm{Ind}_{J_P(\Lambda)}^{J(\Lambda)}\kappa_P(\Lambda)$ est une $\beta$-extension relativement à la suite de réseaux $\Lambda^{\mathfrak{M}} = S_1^+ \perp S_2$ si et seulement si $\mathbf{w}_U^{\mathfrak{M}}(\Xi\otimes\kappa(S_2))$ est une $\beta$-extension de $1_{J^1(S_1)}\otimes\eta(S_2)$ relativement à $\Lambda^{\mathfrak{M}}$. D'après nos hypothèses $\mathfrak{b}_0(S_2)$ est un ordre autodual maximal, de sorte que $\mathbf{w}_U^{\mathfrak{M}}\kappa(S_2)$ est une $\beta$-extension si et seulement si $\kappa(S_2)$ en est une (Définition 1.4 ; $\mathbf{w}_U^{\mathfrak{M}}$ est trivial sur les sous-groupes unipotents). Il reste :

$\mathrm{Ind}_{J_P(\Lambda)}^{J(\Lambda)}\kappa_P(\Lambda)$ *est une $\beta$-extension relativement à $\Lambda^{\mathfrak{M}}$ si et seulement si* $\Xi = \mathbf{w}_U^{\mathfrak{M}}$.

La détermination du caractère $\mathbf{w}_U^{\mathfrak{M}}$ nécessite d'expliciter le quotient $J^1_{\mathrm{ext}}(\Lambda^{\mathfrak{M}}) \cap U^-/H^1(\Lambda^{\mathfrak{M}}) \cap U^-$. A titre d'exemple, supposons que l'élément $\beta_2$ engendre une extension totalement ramifiée de degré $2N$ dans laquelle il a pour valuation $-(2Nk+1)$, $k \in \mathbb{N}$ ; il est en particulier minimal. On obtient $J^1_{\mathrm{ext}}(\Lambda^{\mathfrak{M}}) \cap U^-$ sous la forme de matrices par blocs $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 & 0 \\ Y & I & 0 \\ z & X & 1 \end{smallmatrix}\right)$ appartenant à $\mathrm{Sp}(2N+2, F)$ avec $z \in \mathfrak{p}_F$ et $X \in \left(\mathfrak{p}_F^{k+1}, \cdots, \mathfrak{p}_F^{k+1}, \mathfrak{p}_F^{k}, \cdots, \mathfrak{p}_F^{k}\right)$ ($N$ fois $\mathfrak{p}_F^{k+1}$ et $N$ fois $\mathfrak{p}_F^{k}$). La description de $H^1(\Lambda^{\mathfrak{M}}) \cap U^-$ est analogue avec cette fois $N+1$ fois $\mathfrak{p}_F^{k+1}$ et $N-1$ fois $\mathfrak{p}_F^{k}$, de sorte que le quotient cherché est isomorphe à $\mathfrak{o}_F/\mathfrak{p}_F$. Pour $x \in \mathfrak{o}_F^\times$, l'action de $\iota(x) \in P^+(\Lambda_{\mathfrak{o}_E}) \cap M$ est la multiplication par $x^{-1}$ dans $\mathfrak{o}_F/\mathfrak{p}_F$, la signature de cette permutation est l'unique caractère d'ordre 2 de $k_F^\times$. En particulier, $\mathrm{Ind}_{J_P(\Lambda)}^{J(\Lambda)}\kappa_P(\Lambda)$ *est une $\beta$-extension relativement à $\Lambda^{\mathfrak{M}}$ si et seulement si $\xi^2 = 1$ et $\xi \neq 1$.*

Le cas $\Lambda^{\mathfrak{M}} = S_1^- \perp S_2$ est semblable.

## 3. Application à la réductibilité

### 3.1. Une paire couvrante et son algèbre de Hecke

Soit $[\Lambda, n, 0, \beta]$ une strate semi-simple gauche et $V = W^{(-1)} \oplus W^{(0)} \oplus W^{(1)}$ une décomposition autoduale de $V$ telle que $W^{(0)}$ contienne tous les $V^i$ sauf un ; quitte à réordonner les $V^i$ on peut donc supposer $W^{(0)} = V^1 \cap W^{(0)} \perp V^2 \perp \cdots \perp V^l$ et $\left(W^{(-1)} \oplus W^{(1)}\right) \perp V^1 \cap W^{(0)} = V^1$. On demande que cette décomposition soit *exactement subordonnée* à la strate $[\Lambda, n, 0, \beta]$, c'est-à-dire proprement subordonnée et telle que $\mathfrak{b}_0(\Lambda^{(0)})$ soit un $\mathfrak{o}_E$-ordre autodual maximal de $\mathrm{End}_F(W^{(0)}) \cap B$ et $\mathfrak{b}_0(\Lambda^{(1)})$ un $\mathfrak{o}_{E_1}$-ordre maximal de $\mathrm{End}_{E_1}(W^{(1)})$ [21, Definition 6.5]. Soit $e_1$ la période sur $E_1$ de la suite de réseaux $\Lambda^1$ ; quitte à échanger $W^{(-1)}$ et $W^{(1)}$, on suppose comme dans [21, §6.2] que l'unique entier $q_1$ vérifiant $-\frac{e_1}{2} < q_1 \leqslant \frac{e_1}{2}$ et $\Lambda^{(1)}(q_1+1) \subsetneq \Lambda^{(1)}(q_1)$ est positif ou nul ; comme la décomposition est proprement subordonnée on a de fait $q_1 > 0$.

Soit $P$ le sous-groupe parabolique de $G$ stabilisant le drapeau $W^{(-1)} \subset W^{(-1)} \oplus W^{(0)} \subset V$, $U$ son radical unipotent, $M$ le fixateur de la décomposition autoduale, $P^-$ et $U^-$ les opposés de $P$ et $U$ par rapport à $M$. La décomposition $V = W^{(-1)} \oplus W^{(0)} \oplus W^{(1)}$ détermine des injections des algèbres $\mathrm{End}_F(W^{(i)})$, $i = 0, 1, -1$, dans $\mathrm{End}_F(V)$, obtenues par un prolongement nul sur les deux autres sous-espaces. L'involution adjointe $g \mapsto \bar{g}$ sur $\mathrm{End}_F(V)$ se restreint à $\mathrm{End}_F(W^{(0)})$ en une involution notée de la même façon, et induit un isomorphisme noté $x \mapsto \hat{x}$ de $\mathrm{End}_F(W^{(1)})$ sur $\mathrm{End}_F(W^{(-1)})$. On identifie le groupe $\mathrm{GL}_F(W^{(1)}) = \widetilde{G}^{(1)}$ à un sous-groupe de $G$ au moyen du monomorphisme $\iota$ qui à $g \in \widetilde{G}^{(1)}$ associe $\iota(g) = (\hat{g}^{-1}, I_{W^{(0)}}, g) \in G \cap M$. On note $G^{(0)} = G \cap \mathrm{GL}_F(W^{(0)})$ ; ainsi $M \simeq G^{(0)} \times \iota(\widetilde{G}^{(1)})$.

Soit $E_1^0$ le corps des points fixes de l'involution adjointe dans $E_1$ et $e_0$ l'indice de ramification de $E_1$ sur $E_1^0$ ; fixons une uniformisante $\varpi_1$ de $E_1$ telle que $\bar{\varpi}_1 = (-1)^{e_0-1}\varpi_1$. Notons enfin $f_1$ la $E_1/E_1^0$-forme $\epsilon$-hermitienne non dégénérée sur $V^1$ associée à la restriction de $h$. Suivant toujours [21, §6.2] on choisit une base ordonnée $\mathcal{B}^{(1)} = \{v_1, \cdots, v_d\}$ du réseau $\Lambda^{(1)}(0)$ sur $\mathfrak{o}_{E_1}$. Les éléments $v_{-i}$, $1 \leqslant i \leqslant d$, définis par $f_1(v_j, v_{-i}) = \varpi_1\delta_{ij}$ $(1 \leqslant j \leqslant d)$ constituent une base ordonnée $\mathcal{B}^{(-1)} = \{v_{-1}, \cdots, v_{-d}\}$ du réseau $\Lambda^{(-1)}(1)$ sur $\mathfrak{o}_{E_1}$. On définit les éléments $I_{1,-1}$, $I_{-1,1}$ de $\mathrm{End}_{E_1}\left(W^{(-1)} \oplus W^{(1)}\right)$ et $s_1$ et $s_1^{\varpi}$ de $G_E^+$ comme suit :

$$I_{-1,1}(v_i) = v_{-i} \quad \text{et} \quad I_{-1,1}(v_{-i}) = 0 \quad \text{pour } 1 \leqslant i \leqslant d \ ;$$
$$I_{1,-1}(v_{-i}) = v_i \quad \text{et} \quad I_{1,-1}(v_i) = 0 \quad \text{pour } 1 \leqslant i \leqslant d \ ;$$
$$s_1 = I_{-1,1} + \epsilon(-1)^{e_0-1} I_{1,-1} + I_{W^{(0)}} \ ; \quad s_1^{\varpi} = \varpi_1^{-1} I_{-1,1} + \epsilon\varpi_1 I_{1,-1} + I_{W^{(0)}}.$$

Aucun des éléments $s_1$ et $s_1^{\varpi}$ n'appartient à $P^+(\Lambda_{\mathfrak{o}_E})$ car la décomposition est exactement subordonnée [21, Definition 6.8, Lemma 6.7], tandis que pour toute suite autoduale $\Lambda^{\mathfrak{M}}$ de $\mathfrak{o}_E$-réseaux telle que $\mathfrak{b}_0(\Lambda^{\mathfrak{M}})$ soit un $\mathfrak{o}_E$-ordre autodual maximal contenant $\mathfrak{b}_0(\Lambda)$, l'un de ces deux éléments appartient à $P^+(\Lambda^{\mathfrak{M}}_{\mathfrak{o}_E})$ [21, fin du §6.2]. Remarquons que

$$s_1^2 = \iota\left(\epsilon(-1)^{e_0-1} I_{W^{(1)}}\right), \ (s_1^{\varpi})^2 = \iota\left(\epsilon I_{W^{(1)}}\right), \ s_1^{\varpi} s_1 = \iota\left(\epsilon\varpi_1\right), \ s_1 s_1^{\varpi} = \iota\left(\epsilon(-1)^{e_0-1}\varpi_1^{-1}\right).$$

On obtient un automorphisme involutif $\sigma_1$ de $\widetilde{G}^{(1)}$ en posant : $\iota(\sigma_1(g)) = s_1\iota(g)s_1^{-1}$.

Lemme 3.1 ([21] Lemma 7.11, Corollary 7.12). — *Soit $J_P = J_P(\Lambda) = H^1(\Lambda)(J(\Lambda) \cap P)$. Soit $e(E_1/F)$ l'indice de ramification de $E_1$ sur $F$. Posons $\zeta = \iota\left(\varpi_1^{-1}\right)$ et $\zeta' = \iota\left(\varpi_F^{-1}\right)$ où $\varpi_F$ est une uniformisante de $F$. Alors $\zeta'$ est un élément fortement positif ou fortement négatif du centre de $M$ et on a*

$$J_P s_1 J_P s_1^{\varpi} J_P = J_P \zeta J_P \quad \text{et} \quad (J_P\zeta J_P)^{e(E_1/F)} = J_P \zeta^{e(E_1/F)} J_P = J_P \zeta' J_P.$$

*Les mêmes résultats sont valides en remplaçant $J_P(\Lambda)$ par $J_{P^-}(\Lambda)$.*

*Démonstration.* — On reprend la démonstration de [21, Lemma 7.11] en notant $J^1 = J^1(\Lambda)$ etc. Le changement de $J_P^0$ en $J_P$ ou $J_P^+$ n'affecte que l'intersection avec $M$, normalisée par $s_1$ et $s_1^{\varpi}$, la conjugaison par $s_1$ ou $s_1^{\varpi}$ échange $U$ et $U^-$, et il suffit en fait de travailler dans $\widetilde{G}$. Notons $e^{(i)}$ la projection de $V$ sur $W^{(i)}$ de noyau la somme des $W^{(j)}$ pour $j \neq i$ et détaillons les calculs de *loc. cit.*, qui utilisent les ordres $\mathfrak{J} = \mathfrak{J}(\beta, \Lambda)$ et $\mathfrak{H} = \mathfrak{H}(\beta, \Lambda)$ définis dans [20, §3.2]. On écrit $\tilde{J}^1 \cap U^- = 1 + e^{(1)}\mathfrak{J}e^{(0)} + e^{(1)}\mathfrak{J}e^{(-1)} + e^{(0)}\mathfrak{J}e^{(-1)}$ d'où

$$s_1(\tilde{J}^1 \cap U^-)s_1^{-1} = 1 + I_{-1,1}e^{(1)}\mathfrak{J}e^{(0)} + I_{-1,1}e^{(1)}\mathfrak{J}I_{-1,1} + e^{(0)}\mathfrak{J}I_{-1,1}e^{(1)}.$$

Comme $e^{(i)}$ appartient à $\mathfrak{b}_0(\Lambda)$, $I_{-1,1}e^{(1)}$ appartient à $\mathfrak{b}_0(\Lambda)$ et $\mathfrak{b}_1(\Lambda)\mathfrak{J} \subset \mathfrak{H}$, on en déduit

$$s_1(\tilde{J}^1 \cap U^-)s_1^{-1} \subset \tilde{H}^1 \cap U$$

assertion un peu plus forte que *loc. cit.*(ii). On a de même

$$(s_1^{\varpi})^{-1}(\tilde{J}^1 \cap U)s_1^{\varpi} \subset \tilde{H}^1 \cap U^-,$$

qui est l'assertion (iii) de *loc. cit.*. Ces propriétés suffisent à conclure puisque les groupes $J_P$ et $J_{P^-}$ sont les groupes $(H^1 \cap U^-)(J \cap M)(J^1 \cap U)$ et $(J^1 \cap U^-)(J \cap M)(H^1 \cap U)$. □

Partons d'un caractère semi-simple gauche $\theta$ de $H^1(\beta, \Lambda)$ et résumons, d'après [21, §5.3], les propriétés des objets associés que voici :

- son prolongement $\theta_P$ au sous-groupe $H_P^1(\Lambda) = H^1(\Lambda)(J^1(\Lambda) \cap U)$ trivial sur $J^1(\Lambda) \cap U$ ;
- l'unique représentation irréductible $\eta_P$ de $J_P^1(\Lambda) = H^1(\Lambda)(J^1(\Lambda) \cap P)$ contenant $\theta_P$ ;
- l'unique représentation irréductible $\eta$ de $J^1(\Lambda)$ contenant $\theta$, qui vérifie $\eta \simeq \mathrm{Ind}_{J_P^1(\Lambda)}^{J^1(\Lambda)} \eta_P$ ;
- un prolongement $\kappa$ de $\eta$ à $J^+(\Lambda)$ ;
- la représentation $\kappa_P$ de $J_P^+(\Lambda) = H^1(\Lambda)(J^+(\Lambda) \cap P)$ obtenue par restriction de $\kappa$ à l'espace des $J^1(\Lambda) \cap U$-invariants de $\eta$, qui prolonge $\eta_P$ et vérifie $\kappa \simeq \mathrm{Ind}_{J_P^+(\Lambda)}^{J^+(\Lambda)} \kappa_P$.

Les groupes considérés ont tous une décomposition d'Iwahori relative à $(M, P)$, les représentations $\theta_P$, $\eta_P$ et $\kappa_P$ sont triviales sur $H^1(\Lambda) \cap U^-$ et $J^1(\Lambda) \cap U = J^+(\Lambda) \cap U$ et leur composante en $M$ vérifie :

$$\begin{aligned} \theta_{P|H^1(\Lambda)\cap M} &= \theta_{|H^1(\Lambda)\cap M} = \theta^{(0)} \otimes \tilde{\theta}^{(1)}; \\ \eta_{P|J^1(\Lambda)\cap M} &\simeq \eta^{(0)} \otimes \tilde{\eta}^{(1)}; \\ \kappa_{P|J^+(\Lambda)\cap M} &\simeq \kappa^{(0)} \otimes \tilde{\kappa}^{(1)}; \end{aligned}$$

où $\theta^{(0)}$ est un caractère semi-simple gauche de $H^1(\beta^{(0)},\Lambda^{(0)})$, $\eta^{(0)}$ est l'unique représentation irréductible de $J^1(\beta^{(0)},\Lambda^{(0)})$ contenant $\theta^{(0)}$, $\kappa^{(0)}$ est un prolongement de $\eta^{(0)}$ à $J^+(\beta^{(0)},\Lambda^{(0)})$ ; $\tilde\theta^{(1)}$ est un caractère semi-simple de $\widetilde H^1(\beta^{(1)},\Lambda^{(1)}) = \widetilde H^1(2\beta^{(1)},\Lambda^{(1)})$ attaché à la strate $[\Lambda^{(1)},n^{(1)},0,2\beta^{(1)}]$, $\tilde\eta^{(1)}$ est l'unique représentation irréductible de $\widetilde J^1(\beta^{(1)},\Lambda^{(1)})$ contenant $\tilde\theta^{(1)}$ et $\tilde\kappa^{(1)}$ est un prolongement de $\tilde\eta^{(1)}$ à $\widetilde J(\beta^{(1)},\Lambda^{(1)})$. En outre :

Lemme 3.2 ([21] Proposition 6.3, Lemma 6.9, Corollary 6.10). — *L'involution $\sigma_1$ stabilise le groupe $\widetilde J(\beta^{(1)},\Lambda^{(1)})$. De plus, si $\kappa$ est une $\beta$-extension de $\eta$, alors $\kappa^{(0)}$ est une $\beta^{(0)}$-extension, $\tilde\kappa^{(1)}$ est une $2\beta^{(1)}$-extension équivalente à $\tilde\kappa^{(1)}\circ\sigma_1$ et $s_1$ et $s_1^{\varpi}$ entrelacent $\kappa_P$.*

Les groupes $J(\Lambda)/J^1(\Lambda)$ et $J_P(\Lambda)/J^1_P(\Lambda)$ sont isomorphes à $P(\Lambda_{\mathfrak{o}_E})/P^1(\Lambda_{\mathfrak{o}_E})$, lui-même isomorphe à $P(\Lambda^{(0)}_{\mathfrak{o}_E})/P^1(\Lambda^{(0)}_{\mathfrak{o}_E}) \times \iota(\widetilde P(\Lambda^{(1)}_{\mathfrak{o}_E})/\widetilde P^1(\Lambda^{(1)}_{\mathfrak{o}_E}))$ [21, Lemma 5.3] ; dans ce produit le second terme est toujours un groupe linéaire sur une extension finie de $k_F$, tandis que le premier terme peut ne pas être connexe. Donnons-nous une représentation cuspidale irréductible $\rho$ de ces groupes, que l'on peut écrire sous la forme $\rho^{(0)}\otimes\iota(\widetilde\rho^{(1)})$ moyennant les identifications ci-dessus, et considérons les représentations $\lambda_P$ de $J_P(\Lambda)$ et $\lambda$ de $J(\Lambda)$ définies par

$$\lambda_P = \kappa_P \otimes \rho, \quad \lambda = \kappa\otimes\rho.$$

On peut écrire comme précédemment $\lambda_{P|J(\Lambda)\cap M} \simeq \lambda^{(0)}\otimes\iota(\tilde\lambda^{(1)})$ avec $\lambda^{(0)} = \kappa^{(0)}\otimes\rho^{(0)}$ et $\tilde\lambda^{(1)} = \tilde\kappa^{(1)}\otimes\widetilde\rho^{(1)}$. (La notation ne différencie pas les produits tensoriels de représentations d'un même groupe, comme $\kappa\otimes\rho$, des produits tensoriels de représentations de groupes distincts, comme $\lambda^{(0)}\otimes\iota(\tilde\lambda^{(1)})$ : il faut être vigilant.)

D'après [21, Lemma 6.1] – dont la démonstration n'utilise pas le fait que $\kappa$ soit une $\beta$-extension – elles sont irréductibles, on a $\lambda = \mathrm{Ind}_{J_P}^{J}\lambda_P$ et l'isomorphisme d'algèbres naturel de $\mathcal{H}(G,\lambda_P)$ sur $\mathcal{H}(G,\lambda)$ envoie une fonction de support $J_P y J_P$, $y\in G_E$, sur une fonction de support $JyJ$.

Fixons, pour $i=2,\cdots,l$, une $\mathfrak{o}_{E_i}$-base de la suite de réseaux $\Lambda^i$, fixons une $\mathfrak{o}_{E_1}$-base de la suite de réseaux $\Lambda^1\cap W^{(0)}$, et prenons la base $\mathcal{B}^{(-1)}\cup\mathcal{B}^{(1)}$ de $W^{(-1)}\oplus W^{(1)}$. Ceci définit un tore déployé maximal de $G_E^+$ de normalisateur $N^+$. Soit $N^+_\Lambda$ l'intersection de $N^+$ avec le normalisateur dans $G_E^+$ de $P^0(\Lambda_{\mathfrak{o}_E})\cap M$. On a $N^+_\Lambda = N^+_{\Lambda^{(0)}}\times N^+_{\Lambda^{(\neq 0)}}$ où $N^+_{\Lambda^{(0)}}$ et $N^+_{\Lambda^{(\neq0)}}$ sont les objets analogues définis respectivement dans $G_E^+\cap \mathrm{GL}_F(W^{(0)}) = G^+_{E_1}\cap\mathrm{GL}_F(W^{(0)}\cap V^1)\times G^+_{E_2}\times\cdots G^+_{E_l}$ et $G^+_{E_1}\cap\mathrm{GL}_F(W^{(-1)}\oplus W^{(1)})$. Soit $\tau$ une composante irréductible de la restriction de $\rho$ à $P^0(\Lambda_{\mathfrak{o}_E})/P^1(\Lambda_{\mathfrak{o}_E})\simeq P^0(\Lambda^{(0)}_{\mathfrak{o}_E})/P^1(\Lambda^{(0)}_{\mathfrak{o}_E})\times\iota(\widetilde P(\Lambda^{(1)}_{\mathfrak{o}_E})/\widetilde P^1(\Lambda^{(1)}_{\mathfrak{o}_E}))$ ; on peut l'écrire comme plus haut sous la forme $\tau^{(0)} \otimes \iota(\widetilde{\rho}^{(1)})$, de sorte que

$$N_\Lambda^+(\tau) := \{n \in N_\Lambda^+ \ / \ {}^n\tau \simeq \tau\} = N^+_{\Lambda^{(0)}}(\tau^{(0)}) \times N^+_{\Lambda^{(\neq 0)}}(\iota(\widetilde{\rho}^{(1)}))$$

$$\text{et } N_\Lambda(\tau) := N_\Lambda^+(\tau) \cap G = \Big(N^+_{\Lambda^{(0)}}(\tau^{(0)}) \times N^+_{\Lambda^{(\neq 0)}}(\iota(\widetilde{\rho}^{(1)}))\Big) \cap G.$$

Rappelons que $s_1$ et $s_1^\varpi$ appartiennent à $G_E$ dans tous les cas excepté celui du groupe spécial orthogonal avec $\beta_1 = 0$ et $\dim_F W^{(1)}$ impaire [21, §6.2]. Plaçons-nous dans cette situation d'exception et supposons $V^1 \cap W^{(0)}$ non nul. Le groupe $G^+_{E_1} \cap \mathrm{GL}_F(W^{(0)} \cap V^1)$ est alors un groupe orthogonal et l'on peut choisir $\mathbf{p} \in P^+(\Lambda^{(0)}_{\mathfrak{o}_E} \cap V^1)$ de déterminant $-1$ tel que $\mathbf{p}^2 = 1$ [21, Case (i) p.350] ; si $V^1 \cap W^{(0)}$ est de dimension impaire on choisit $\mathbf{p} = -1$. Alors $\mathbf{p}s_1$ et $\mathbf{p}s_1^\varpi$ vérifient toutes les propriétés de $s_1$ et $s_1^\varpi$ utilisées précédemment et appartiennent à $G_E$. Dans tous les autres cas posons $\mathbf{p} = 1$. Soit enfin $W$ le groupe de Weyl affine à deux générateurs engendré par $\mathbf{p}s_1$ et $\mathbf{p}s_1^\varpi$ (par abus de langage - plus exactement c'est le quotient du groupe engendré par $\mathbf{p}s_1$, $\mathbf{p}s_1^\varpi$ et $\iota(\mathfrak{o}^\times_{E_1})$ par $\iota(\mathfrak{o}^\times_{E_1})$). Alors $N_{\Lambda^{(\neq 0)}}/N_{\Lambda^{(\neq 0)}} \cap P(\Lambda^{(\neq 0)}_{\mathfrak{o}_E})$ est isomorphe à $W$ lorsque $\mathbf{p}s_1$ appartient à $G_E$, c'est-à-dire dans tous les cas excepté celui du *groupe spécial orthogonal avec $\beta_1 = 0$, $\dim_F W^{(1)}$ impaire et $V^1 \cap W^{(0)} = \{0\}$.*

Proposition 3.3 ( [21] §6.4). — *Posons $J_P = J_P(\Lambda)$ et soit $\kappa$ un prolongement de $\eta$ à $J^+(\Lambda)$.*

(i) *Dans les trois cas suivants :*

  (a) *la représentation $\widetilde{\lambda}^{(1)}$ n'est pas équivalente à $\widetilde{\lambda}^{(1)} \circ \sigma_1$,*

  (b) *$\mathbf{p}$ n'entrelace pas $\tau^{(0)}$,*

  (c) *$\mathbf{p}s_1$ n'appartient pas à $G_E$,*

  *le support de l'algèbre $\mathcal{H}(G, \lambda_P)$ est $J_P(I_{G^{(0)}}(\lambda^{(0)}) \times \iota(E_1^\times))J_P$.*

(ii) *Si $\widetilde{\lambda}^{(1)}$ est équivalente à $\widetilde{\lambda}^{(1)} \circ \sigma_1$ et $\mathbf{p}$ entrelace $\tau^{(0)}$ et $\mathbf{p}s_1$ appartient à $G_E$, le support de $\mathcal{H}(G, \lambda_P)$ est $J_P\left(I_{G^{(0)}}(\lambda^{(0)}) \rtimes W\right) J_P$.*

Cette proposition donne une caractérisation intrinsèque du support de $\mathcal{H}(G, \lambda_P)$, les propriétés examinées ne dépendent donc pas du choix de $\tau$.

*Démonstration.* — Supposons tout d'abord que $\kappa$ est une $\beta$-extension standard [21, (4.11)] de $\eta$ de façon à utiliser facilement les résultats de *loc. cit.* ; en particulier $\tilde{\kappa}^{(1)}$ est équivalente à $\tilde{\kappa}^{(1)} \circ \sigma_1$ et la condition "$\widetilde{\lambda}^{(1)}$ est équivalente à $\widetilde{\lambda}^{(1)} \circ \sigma_1$" est vérifiée si et seulement si $\widetilde{\rho}^{(1)}$ est équivalente à $\widetilde{\rho}^{(1)} \circ \sigma_1$ (variante de [7, démonstration de la Proposition 5.3.2]). L'application de [21, Proposition 6.15, Corollary 6.16 et démonstration de la Proposition 6.18] montre que l'entrelacement de $\lambda_P$ est contenu dans

$J_P N_\Lambda(\tau) J_P$. D'autre part l'entrelacement de $\lambda_P$ dans $M$ est exactement l'entrelacement de $\lambda^{(0)} \otimes \iota(\widetilde{\lambda}^{(1)})$ [4, Proposition 6.3 (ii)]. Si $\widetilde{\rho}^{(1)}$ n'est pas équivalente à $\widetilde{\rho}^{(1)} \circ \sigma_1$ ou si $\mathbf{p}s_1$ n'appartient pas à $G_E$, $N_{\Lambda^{(\neq 0)}}(\iota(\widetilde{\rho}^{(1)}))$ se réduit à $\iota(E_1^\times)$ qui entrelace effectivement la représentation, d'où le résultat. Il en est de même si $\mathbf{p}$ n'entrelace pas $\tau^{(0)}$, car $\mathbf{p}s_1$ alors n'entrelace pas $\tau$. Dans le second cas au contraire, $\mathbf{p}s_1$ entrelace $\tau$, donc $\rho$, donc $\lambda_P$.

Un prolongement $\kappa$ arbitraire de $\eta$ à $J^+(\Lambda)$ peut s'écrire sous la forme $\chi\kappa^s$ où $\kappa^s$ est une $\beta$-extension standard de $\eta$ et $\chi$ est un caractère de $P^+(\Lambda_{\mathfrak{o}_E})/P^1(\Lambda_{\mathfrak{o}_E})$ (par unicité des opérateurs d'entrelacement de $\eta$ à scalaire près [21, Proposition 3.5]). Ecrivons $\chi = \chi^{(0)} \otimes \iota(\widetilde{\chi}^{(1)})$. Alors l'entrelacement de $\lambda_P = (\chi\kappa^s)_P \otimes \rho = \kappa_P^s \otimes \chi\rho$ est déterminé par l'action de $\sigma_1$ sur $\widetilde{\chi}^{(1)}\widetilde{\rho}^{(1)}$. Comme $\widetilde{\kappa^s}^{(1)}$ est équivalente à $\widetilde{\kappa^s}^{(1)} \circ \sigma_1$, la première partie donne le résultat. Noter que si $\kappa$ est une $\beta$-extension le lemme 3.2 s'applique aussi bien à $\kappa$ qu'à $\kappa^s$, le caractère $\widetilde{\chi}^{(1)}$ est donc $\sigma_1$-invariant (voir aussi [21, Corollary 6.13]), de sorte que $\widetilde{\rho}^{(1)}$ est $\sigma_1$-invariante si et seulement si $\widetilde{\chi}^{(1)}\widetilde{\rho}^{(1)}$ l'est. □

Corollaire 3.4. — *Soit $\kappa$ un prolongement de $\eta$ à $J^+(\Lambda)$ et $\lambda = \kappa \otimes \rho$ comme ci-dessus. Notons $J^{(0)} = J(\beta^{(0)}, \Lambda^{(0)})$ et $\widetilde{J}^{(1)} = \widetilde{J}(\beta^{(1)}, \Lambda^{(1)})$. La paire $(J_P, \lambda_P)$ est une paire couvrante de $(J^{(0)} \times \iota(\widetilde{J}^{(1)}),\ \lambda^{(0)} \otimes \iota(\tilde{\lambda}^{(1)}))$ dans $G$. Il en est de même de la paire analogue $(J_{P^-}, \lambda_{P^-})$.*

*Dans le cas (i) de la proposition, l'algèbre $\mathcal{H}(G, \lambda_P)$ est isomorphe à $\mathcal{H}(M, \lambda_{P|J\cap M})$. En particulier, la représentation induite parabolique d'une représentation irréductible de $M$ de type $\lambda_{P|J\cap M}$ est toujours irréductible.*

*Dans le cas (ii) de la proposition, si $I_{G^{(0)}}(\lambda^{(0)}) = J^{(0)}$, l'algèbre $\mathcal{H}(G, \lambda_P)$ est une algèbre de convolution sur $W$. Sa structure est déterminée par les relations quadratiques vérifiées par deux générateurs $T_1$ et $T_1^\varpi$ de supports respectifs $J_P\mathbf{p}s_1J_P$ et $J_P\mathbf{p}s_1^\varpi J_P$.*

*Démonstration.* — Dans le cas (i) de la proposition, l'entrelacement de $\lambda_P$ est formé de doubles classes d'éléments de $M$, la paire est donc couvrante par [4, Comments 8.2] ; les conséquences sur l'irréductibilité sont prouvées dans *loc. cit.* et rappelées au paragraphe suivant.

Dans l'autre cas, l'entrelacement de $\lambda_P$ est $J_PWJ_P$. Grâce au lemme 3.1, qui reste valide pour $\mathbf{p}s_1$ et $\mathbf{p}s_1^\varpi$, et aux résultats de *loc. cit.*, il suffit de montrer que les éléments de $\mathcal{H}(G, \lambda_P)$ de support $J_P\mathbf{p}s_1J_P$ et $J_P\mathbf{p}s_1^\varpi J_P$ sont inversibles, ce que l'on peut faire comme dans [10] §2.2 (en vérifiant que les démonstrations des lemmes 2.10 et 2.13 s'appliquent mot pour mot) ou en passant directement aux énoncés plus précis ci-après.

Pour passer de $P$ à $P^-$ il suffit de remarquer que l'action de $\kappa|_{J_{P^-}}$ sur les $J^1(\Lambda)\cap U^-$-invariants de $\eta$ est aussi égale à $\kappa^{(0)}\otimes\tilde\kappa^{(1)}$ sur $J\cap M$. C'est élémentaire en prenant le modèle de $\eta\simeq\mathrm{Ind}_{J^1_P}^{J^1}\eta_P$ formé des fonctions de $J^1\cap U^-/H^1\cap U^-$ dans l'espace de $\eta_P$ : les $J^1(\Lambda)\cap U^-$-invariants sont les fonctions constantes. □

Pour obtenir des précisions sur les relations quadratiques du second cas ci-dessus nous suivons encore [21], §7.1 et 7.2.2. Commençons par construire deux suites de $\mathfrak{o}_E$-réseaux autoduales $\mathfrak{M}_0=\mathfrak{M}_0^1\perp\Lambda^2\cdots\perp\Lambda^l$ et $\mathfrak{M}_1=\mathfrak{M}_1^1\perp\Lambda^2\cdots\perp\Lambda^l$ comme dans *loc. cit.* §7.2.2, à partir des suites de $\mathfrak{o}_{E_1}$-réseaux $\mathfrak{M}_0^1$ et $\mathfrak{M}_1^1$ dans $V^1$, de période 2 sur $E_1$, caractérisées par :

$$\mathfrak{M}_0^1(0)=\Lambda^1(1-q_1),\quad \mathfrak{M}_0^1(1)=\Lambda^1(q_1),$$

$$\mathfrak{M}_1^1(0)=\Lambda^1(1-\frac{e_1}{2}),\quad \mathfrak{M}_1^1(1)=\Lambda^1(\frac{e_1}{2}).$$

Les ordres $\mathfrak{b}_0(\mathfrak{M}_0)$ et $\mathfrak{b}_0(\mathfrak{M}_1)$ sont des $\mathfrak{o}_E$-ordres autoduaux maximaux contenant $\mathfrak{b}_0(\Lambda)$ et la décomposition $V=W^{(-1)}\oplus W^{(0)}\oplus W^{(1)}$ est subordonnée aux strates $[\mathfrak{M}_i,n_{\mathfrak{M}_i},0,\beta]$ $(i=0,1)$. Enfin $s_1$ appartient à $P^+(\mathfrak{M}_{0,\mathfrak{o}_E})$, $s_1^{\varpi}$ appartient à $P^+(\mathfrak{M}_{1,\mathfrak{o}_E})$ et l'on a :

$$\begin{aligned}P^+(\Lambda_{\mathfrak{o}_E})&=\left(P^+(\mathfrak{M}_{1,\mathfrak{o}_E})\cap P^-\right)P^1(\mathfrak{M}_{1,\mathfrak{o}_E})\\&=\left(P^+(\mathfrak{M}_{0,\mathfrak{o}_E})\cap P\right)P^1(\mathfrak{M}_{0,\mathfrak{o}_E}).\end{aligned}\tag{3.5}$$

En particulier, la représentation $\rho=\rho^{(0)}\otimes\iota(\widetilde{\rho}^{(1)})$ de $J(\Lambda)/J^1(\Lambda)\simeq P(\Lambda_{\mathfrak{o}_E})/P^1(\Lambda_{\mathfrak{o}_E})$ s'étend en une représentation toujours notée $\rho$ du sous-groupe parabolique $P(\Lambda_{\mathfrak{o}_E})/P^1(\mathfrak{M}_{1,\mathfrak{o}_E})$ de $P(\mathfrak{M}_{1,\mathfrak{o}_E})$ triviale sur son radical unipotent $P^1(\Lambda_{\mathfrak{o}_E})/P^1(\mathfrak{M}_{1,\mathfrak{o}_E})$, et de même avec $\mathfrak{M}_{0,\mathfrak{o}_E}$. Avec ces conventions on a :

Proposition 3.6 ([21](7.3)). — *Si $\kappa$ est une $\beta$-extension de $\eta$ relative à $\mathfrak{M}_0$, il y a un homomorphisme d'algèbres injectif*

$$j_0:\ \mathcal{H}(P(\mathfrak{M}_{0,\mathfrak{o}_E}),\rho)\ \hookrightarrow\ \mathcal{H}(G,\lambda_P)$$

*préservant le support :* $\mathrm{Supp}(j_0(\phi))=J_P\,\mathrm{Supp}(\phi)J_P$. *Il en est de même en remplaçant $\mathfrak{M}_0$ par $\mathfrak{M}_1$, avec un homomorphisme $j_1$.*

*Démonstration.* — Il faut justifier l'usage de [21, §7.1], qui s'occupe de représentations de groupes de la forme $J^0(\Lambda)$, pour nos représentations de groupes $J(\Lambda)$. Par hypothèse, il existe une $\beta$-extension $\kappa(\mathfrak{M}_0)$, représentation de $J^+(\mathfrak{M}_0)$, dont la restriction à $P^+(\Lambda_{\mathfrak{o}_E})J^1(\mathfrak{M}_0)$ correspond à la représentation $\kappa$ de $J^+(\Lambda)$ par la bijection canonique $\mathfrak{B}$. Reprenant la démonstration de [21, Proposition 7.1] pas à pas, on obtient un isomorphisme d'algèbres, préservant le support, de $\mathcal{H}(G,\kappa(\mathfrak{M}_0)|_{P(\Lambda_{\mathfrak{o}_E})J^1(\mathfrak{M}_0)}\otimes\rho)$

sur $\mathcal{H}(G,\kappa|_{J(\Lambda)}\otimes\rho)$. L'isomorphisme de la proposition 7.2 de *loc. cit.* reste valide puisque $\kappa(\mathfrak{M}_0)|_{P(\Lambda_{\mathfrak{o}_E})J^1(\mathfrak{M}_0)}$ se prolonge à $J(\mathfrak{M}_0)$. Le dernier isomorphisme de la composition de [21, (7.3)] provient de [21, Lemma 6.1]. $\square$

Corollaire 3.7. — *Soit $\kappa$ un prolongement de $\eta$ à $J^+(\Lambda)$ et $\lambda=\kappa\otimes\rho$ comme ci-dessus. Supposons que la représentation $\widetilde{\lambda}^{(1)}$ est équivalente à $\widetilde{\lambda}^{(1)}\circ\sigma_1$, que $\mathbf{p}$ entrelace $\tau^{(0)}$ et que $\mathbf{p}s_1$ appartient à $G_E$. Soient $\chi_0$ et $\chi_1$ des caractères de $P^+(\Lambda_{\mathfrak{o}_E})/P^1(\Lambda_{\mathfrak{o}_E})$ tels que $\chi_0^{-1}\kappa$ soit une $\beta$-extension relative à $\mathfrak{M}_0$ et $\chi_1^{-1}\kappa$ soit une $\beta$-extension relative à $\mathfrak{M}_1$. Moyennant une normalisation convenable, les relations quadratiques vérifiées par les générateurs $T_1$ et $T_1^{\varpi}$ de $\mathcal{H}(G,\lambda_P)$ sont respectivement les relations quadratiques vérifiées par*

– *le générateur de $\mathcal{H}(P(\mathfrak{M}_{0,\mathfrak{o}_E}),\chi_0\rho)$, de support $P(\Lambda_{\mathfrak{o}_E})\mathbf{p}s_1P(\Lambda_{\mathfrak{o}_E})$,*
– *le générateur de $\mathcal{H}(P(\mathfrak{M}_{1,\mathfrak{o}_E}),\chi_1\rho)$, de support $P(\Lambda_{\mathfrak{o}_E})\mathbf{p}s_1^{\varpi}P(\Lambda_{\mathfrak{o}_E})$.*

Ce corollaire fournit le moyen de calculer les relations quadratiques cherchées, à homothétie près, dans un groupe réductif fini. Nous indiquons dans le paragraphe suivant les conclusions qu'une telle connaissance permet de tirer en termes de réductibilité d'induites.

### 3.2. Relations quadratiques et points de réductibilité

Nous expliquons dans cette section comment les coefficients des relations quadratiques satisfaites par les deux générateurs de l'algèbre de Hecke ci-dessus, sous les hypothèses communes aux corollaires 3.4 et 3.7, déterminent entièrement les parties réelles des quatre points de réductibilité de l'induite correspondante.

Commençons par rappeler la propriété caractéristique des paires couvrantes dans le groupe classique $G$, pour des représentations supercuspidales d'un sous-groupe de Levi maximal $M\simeq \mathrm{GL}(n,F)\times L$. On se donne une représentation supercuspidale $\pi$ de $\mathrm{GL}(n,F)$, un type $(J_n,\lambda_n)$ pour $\pi$, une représentation supercuspidale $\sigma$ de $L$, un type $(J_0,\lambda_0)$ pour $\sigma$, un sous-groupe parabolique $P$ de $G$ de facteur de Levi $M$, et on suppose construite une paire couvrante $(J,\lambda)$ de $(J_n\times J_0,\lambda_n\otimes\lambda_0)$ dans $G$. Par définition [4, §7] il existe un morphisme d'algèbres injectif $t:\mathcal{H}(M,\lambda_n\otimes\lambda_0)\longrightarrow\mathcal{H}(G,\lambda)$ rendant le diagramme suivant commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{R}^{[\pi\otimes\sigma,M]}(G) & \xrightarrow{\mathfrak{h}_G} & \text{Mod-}\mathcal{H}(G,\lambda) \\ \mathrm{ind}_P^G\uparrow & & t_*\uparrow \\ \mathcal{R}^{[\pi\otimes\sigma,M]}(M) & \xrightarrow{\mathfrak{h}} & \text{Mod-}\mathcal{H}(M,\lambda_n\otimes\lambda_0) \end{array} \tag{3.8}$$

Nous travaillons ici avec l'induite normalisée $\mathrm{ind}_P^G$ et avec des modules à droite sur les algèbres de Hecke. Le foncteur $t_*$ associe à un module $X$ le module $\mathrm{Hom}_{\mathcal{H}(M,\,\lambda_n\otimes\lambda_0)}(\mathcal{H}(G,\lambda),X)$, dans lequel $t$ détermine la structure de module de $\mathcal{H}(G,\lambda)$, et le foncteur $\mathfrak{h}$ (resp. $\mathfrak{h}_G$) associe à une représentation $\tau$ le module $\mathrm{Hom}_{J_n\times J_0}(\lambda_n\otimes\lambda_0,\tau)$ (resp. $\mathrm{Hom}_J(\lambda,\tau)$).

Les flèches horizontales de (3.8) sont des équivalences de catégories, ce diagramme implique donc que pour tout $s\in\mathbb{C}$, la représentation $\mathrm{ind}_P^G\,\pi|\det|^s\otimes\sigma$ est réductible si et seulement si le $\mathcal{H}(G,\lambda)$-module $t_*\,\mathfrak{h}\,(\pi|\det|^s\otimes\sigma)$ est réductible.

Choisissons pour $\sigma$ un type $(J_0,\lambda_0)$ construit par Stevens [21, Theorem 7.14] de sorte que $\sigma\simeq\mathrm{Ind}_{J_0}^L\lambda_0$. Alors l'algèbre $\mathcal{H}(M,\lambda_n\otimes\lambda_0)$ est isomorphe à $\mathcal{H}(\mathrm{GL}(n,F),\lambda_n)$.

Choisissons pour $\pi$ un type simple maximal de Bushnell-Kutzko $(J_n,\lambda_n)$, attaché à une strate simple $[\Lambda_n,t_n,0,\beta_n]$. Posons $E_n=F[\beta_n]$ et notons $\varpi_{E_n}$ une uniformisante de $E_n$. D'après [7, §6], l'entrelacement de $\lambda_n$ est égal à $\widehat{J_n}=E_n^\times J_n=\varpi_{E_n}^{\mathbb{Z}}J_n$ et on a une bijection $\Lambda_\tau\ \longmapsto\ \tau=\mathrm{Ind}_{\widehat{J}_n}^{\mathrm{GL}(n,F)}\Lambda_\tau$ entre l'ensemble des prolongements de $\lambda_n$ à $\widehat{J}_n$ et l'ensemble des classes d'équivalence de représentations irréductibles de la classe d'inertie de $\pi$. Soit $Z$ un élément de $\mathcal{H}(\mathrm{GL}(n,F),\lambda_n)$ de support $\varpi_{E_n}J_n$ ; on a par [7, §5.5] :

$$\mathcal{H}(\mathrm{GL}(n,F),\lambda_n)\simeq\mathbb{C}[Z,Z^{-1}].$$

En particulier, les représentations irréductibles de cette algèbre sont des caractères, déterminés par leur valeur en $Z$. Le groupe $X^0$ des caractères non ramifiés de $\mathrm{GL}(n,F)$ agit sur $\mathcal{H}(\mathrm{GL}(n,F),\lambda_n)$ par $\chi(f)(x)=\chi(x)f(x)$ ($\chi\in X^0$, $f\in\mathcal{H}(\mathrm{GL}(n,F),\lambda_n)$, $x\in\mathrm{GL}(n,F)$), et si $\tau$ est une représentation irréductible comme ci-dessus on a : $\mathfrak{h}(\chi^{-1}\tau)=\mathfrak{h}(\tau)\circ\chi$ soit :

$$\mathfrak{h}(\chi^{-1}\tau)(Z)=\chi(\varpi_{E_n})\mathfrak{h}(\tau)(Z). \tag{3.9}$$

Le plongement de $\mathrm{GL}(n,F)$ dans $M\subset G$ détermine une involution $g\mapsto\hat{g}^{-1}$ sur $\mathrm{GL}(n,F)$ déduite de l'involution adjointe (voir le début du paragraphe précédent) ; on dira que $\pi$ est *autoduale* si sa classe d'isomorphisme est fixée par cette involution. (Cela signifie que $\pi$ est équivalente à sa contragrédiente dans les cas symplectique et orthogonal, à la contragrédiente de sa composée avec la conjugaison de $F$ sur $F_0$ dans le cas unitaire.) Si aucune des représentations $\pi|\det|^s$ n'est autoduale on sait que la représentation induite est toujours irréductible ([18, Corollary 1.8] ; voir aussi [23, Lemmas 4.1 and 5.1]).

Supposons $\pi$ autoduale et faisons les hypothèses suivantes :

(i) L'algèbre $\mathcal{H}(G,\lambda)$ a deux générateurs $T_0$ et $T_1$ vérifiant des relations quadratiques de la forme $(T_i-\omega_i^1)(T_i-\omega_i^2)=0 \quad (i=0,1)$ et on a $t(Z)=T_0T_1$.

(ii) Les quotients des valeurs propres sont des nombres réels strictement négatifs. On ordonne alors les valeurs propres de façon que : $\omega_i^1/\omega_i^2=-q^{r_i}$ avec $r_i\geqslant 0$.

Soit $\xi$ un caractère de $\mathcal{H}(M,\lambda_n\otimes\lambda_0)$. La représentation $t_*(\xi)$ est de dimension 2, elle est réductible si et seulement si elle contient un caractère, c'est-à-dire si et seulement si il existe un caractère $\alpha$ de $\mathcal{H}(G,\lambda)$ tel que $\xi=\alpha\circ t$ [1, Proposition 1.13]. Ainsi la réductibilité de $\mathrm{ind}_P^G\,\pi|\det|^s\otimes\sigma$ est obtenue exactement pour quatre valeurs de $s$ (comptées avec multiplicité), données par $\mathfrak{h}\,(\pi|\det|^s)(Z)=\omega_0^j\omega_1^k$, $j,k=1,2$, c'est-à-dire

$$\mathfrak{h}\,(\pi|\det|^s)(Z)\ \in\ \{\alpha_0=\omega_0^2\omega_1^2,\ \ -q^{r_0}\alpha_0,\ \ -q^{r_1}\alpha_0,\ \ q^{r_0+r_1}\alpha_0\}. \tag{3.10}$$

On sait par ailleurs que $\mathcal{R}^{[\pi,\mathrm{GL}(n,F)]}(\mathrm{GL}(n,F))$ contient exactement deux représentations irréductibles autoduales non équivalentes : $\pi$ et $\pi\,|\det|^{\frac{e}{2n}\frac{2i\pi}{\log q}}$, pour un unique entier $e$ divisant $n$, qui est l'indice de ramification de $E_n$ sur $F$ [7, Lemma 6.2.5]. On sait enfin [18, Theorem 1.6] que pour chaque représentation supercuspidale autoduale $\pi'$ de $\mathrm{GL}(n,F)$ l'ensemble des points de réductibilité *réels* de $\mathrm{ind}_P^G\,\pi'|\det|^s\otimes\sigma$ est soit vide, soit de la forme $\{a,-a\}$ pour un réel positif ou nul $a$. Ainsi il existe au maximum quatre représentations donnant lieu à réductibilité (comptées avec multiplicité), à savoir : $\pi|\det|^{\pm s_1}$ et $\pi|\det|^{\pm s_2+\frac{e}{2n}\frac{2i\pi}{\log q}}$, pour un $s_1\in\mathbb{R}$ et un $s_2\in\mathbb{R}$, dont les images par $\mathfrak{h}$ sont, via (3.9), les caractères ayant pour valeur en $Z$ un élément de l'ensemble :

$$\{q^{s_1\frac{n}{e}}\ \mathfrak{h}\,(\pi)(Z),q^{-s_1\frac{n}{e}}\ \mathfrak{h}\,(\pi)(Z),-q^{s_2\frac{n}{e}}\ \mathfrak{h}\,(\pi)(Z),-q^{s_2\frac{n}{e}}\ \mathfrak{h}\,(\pi)(Z)\}. \tag{3.11}$$

Sous les hypothèses (i) et (ii), un sous-ensemble $X$ convenable de (3.11) doit coïncider avec (3.10). Comme (3.10) contient des paires d'éléments de quotient négatif, le sous-ensemble $X$ doit avoir la même propriété : c'est (3.11) tout entier. Les hypothèses faites entraînent donc que les induites considérées ont effectivement des points de réductibilité. En comparant les quotients réels positifs de valeurs de (3.10) et (3.11) on obtient la formule suivante :

Proposition 3.12. — *Supposons que l'algèbre $\mathcal{H}(G,\lambda)$ a deux générateurs vérifiant des relations quadratiques de la forme $(T_i-\omega_i^1)(T_i-\omega_i^2)=0$ $(i=0,1)$ dont les quotients des valeurs propres s'écrivent $\omega_i^1/\omega_i^2=-q^{r_i}$ avec $r_i\geqslant 0$, et tels que $t(Z)=T_0T_1$. Les paramètres $r_0,r_1$ déterminent alors* *les parties réelles des points de réductibilité de* $\mathrm{ind}_P^G\,\pi|\det|^s\otimes\sigma$ *($s\in\mathbb{C}$) : ce sont les éléments de l'ensemble*

$$\{\ \pm\frac{e}{2n}\,(r_0+r_1),\ \pm\frac{e}{2n}\,(r_0-r_1)\ \}.$$

*Remarque 3.13.* — Les parties réelles des points de réductibilité de $\mathrm{ind}_P^G\,\pi|\det|^s\otimes\sigma$ et de $\mathrm{ind}_P^G\,\pi|\det|^{s+\frac{e}{2n}\frac{2i\pi}{\log q}}\otimes\sigma$ sont évidemment les mêmes. L'énoncé s'applique donc indifféremment à l'une ou à l'autre et de fait il ne permet pas de déterminer séparément les deux points de réductibilité réels correspondant à chacune des deux représentations autoduales $\pi$ et $\pi\,|\det|^{\frac{e}{2n}\frac{2i\pi}{\log q}}$. Il ne fournit que l'ensemble total des parties réelles des points de réductibilité pour une représentation autoduale de la classe d'inertie de $\pi$.

*Remarque 3.14.* — Lorsque la structure de $\mathcal{H}(G,\lambda)$ est donnée par un énoncé semblable au corollaire 3.7 ci-dessus, l'hypothèse (i) est automatiquement vérifiée. L'hypothèse (ii) l'est aussi par [15, §6.7], après [11] : le quotient des valeurs propres est $-p^c$, i.e. l'opposé du quotient des degrés des deux représentations irréductibles formant l'induite de la cuspidale dans le groupe réductif fini.

*Remarque 3.15.* — Pour des représentations $\sigma$ et $\pi$ dont les types vérifient les hypothèses du paragraphe 3.1 (voir à ce sujet la remarque 3.18 plus loin) on retrouve les résultats de réductibilité connus par ailleurs. En effet, si $G$ est un groupe symplectique ou unitaire les énoncés de ce paragraphe se simplifient (car $\mathbf{p}=1$ et $s_1$ appartient à $G_E$) et, complétés par la proposition 3.12, fournissent l'irréductibilité de $\mathrm{ind}_P^G\,\pi|\det|^s\otimes\sigma$ si aucune des représentations $\pi|\det|^s$ n'est autoduale, et sa réductibilité pour un unique $s\geqslant 0$ si $\pi$ est autoduale. Il en est de même si $G$ est spécial orthogonal en dimension impaire : le seul cas où $s_1$ n'appartient pas à $G_E$ est celui où $\beta_1=0$, les espaces $V^2,\cdots,V^l$ sont alors de dimension paire, car chacun porte une strate simple gauche non nulle, donc $W^{(0)}\cap V^1$ est de dimension impaire d'où $\mathbf{p}=-1$ et $\mathbf{p}s_1$ appartient à $G_E$.

Le cas du groupe spécial orthogonal en dimension paire est plus délicat. L'irréductibilité de $\mathrm{ind}_P^G\,\pi|\det|^s\otimes\sigma$ si aucune des représentations $\pi|\det|^s$ n'est autoduale est donnée par le corollaire 3.4. Via les lemmes de Zhang cités plus haut, on est assurés de l'existence de points de réductibilité réels, pour $\pi$ autoduale, dans tous les cas sauf le suivant : $G$ est un groupe spécial orthogonal et $n$ est impair. De fait, si $n$ est pair, $s_1$ appartient à $G_E$, $\mathbf{p}=1$ et l'on retrouve les situations décrites plus haut. Supposons $n$ impair ; l'autodualité de $\pi$ entraîne $n=1$ par [2, Theorem 1]. Le cas d'exception est donc celui de $\mathrm{GL}_1(F)\times\mathrm{SO}(2t,F)$, Levi de $\mathrm{SO}(2t+2,F)$. D'après la proposition 3.3 il existera des points de réductibilité si et seulement si $\mathbf{p}$ entrelace $\tau^{(0)}$ et $\mathbf{p}s_1$ appartient à $G_E$ – en particulier il n'en existe pas si $W^{(0)} \cap V^1 = \{0\}$. On pourrait comparer cette condition avec celle de Jantzen [12] selon laquelle l'induite a des points de réductibilité si et seulement si $\sigma$ est équivalente à sa conjuguée par un élément du groupe orthogonal de déterminant $-1$ (si $W^{(0)} \cap V^1 = \{0\}$ il est facile de voir que cette condition n'est jamais satisfaite). Ce n'est pas notre propos ici.

Ces questions de réductibilité ont été beaucoup étudiées, en premier lieu par Shahidi [17, Theorem 8.1] ; pour le cas d'exception citons par exemple [14], [23], [12]...

## 3.3. Conclusion

Passons enfin à l'étude de la réductibilité sous les hypothèses communes aux paragraphes 3.1 et 2.4, c'est-à-dire une décomposition autoduale $V = W^{(-1)} \oplus W^{(0)} \oplus W^{(1)}$ exactement subordonnée à $[\Lambda, n, 0, \beta]$, avec $W^{(0)} = V^2 \perp \cdots \perp V^l$ et $W^{(-1)} \oplus W^{(1)} = V^1$. On pose $Z_1 = W^{(-1)} \oplus W^{(1)}$, $Z_2 = W^{(0)}$, comme au paragraphe 2.4, et on note $G_1^+$ (resp. $G_{(0)}^+$) le groupe d'automorphismes de la restriction de la forme $h$ à $Z_1$ (resp. $Z_2$), $G_1$ (resp. $G_{(0)}$) sa composante neutre, de sorte que $G_{\mathrm{int}}^+ = G_{(0)}^+ \times G_1^+$. Etant donné que $V^1 \cap W^{(0)} = \{0\}$ l'élément $\mathbf{p}$ introduit pour énoncer la proposition 3.3 est ici égal à 1.

Soient $P$ et $M$ comme en 3.1 et $P_1$, $M_1$ leurs intersections avec $G_1$. Le corollaire 3.4 nous décrit une paire couvrante $(J_P, \lambda_P)$, dans $G$, de la paire $(J^{(0)} \times \iota(\widetilde{J}^{(1)}),\ \lambda^{(0)} \otimes \iota(\tilde{\lambda}^{(1)}))$ dans $M = G_{(0)} \times \iota(\mathrm{GL}_F(W^{(1)}))$. Supposons que $I_{G^{(0)}}(\lambda^{(0)}) = J^{(0)}$ ; la paire $(J^{(0)},\ \lambda^{(0)})$ est alors un type pour la classe d'inertie de la représentation supercuspidale $\sigma = \mathrm{Ind}_{J^{(0)}}^{G_{(0)}} \lambda^{(0)}$ de $G_{(0)}$ ([21, Corollary 6.19] ; $\kappa^{(0)}$ est tordue d'une $\beta$-extension par un caractère, comme dans la démonstration de la proposition 3.3). D'autre part $\mathfrak{b}_0(\Lambda^{(1)})$ est un $\mathfrak{o}_{E_1}$-ordre maximal de $\mathrm{End}_{E_1}(W^{(1)})$ donc $(\widetilde{J}^{(1)},\ \tilde{\lambda}^{(1)})$ est un type pour une classe d'inertie de représentations supercuspidales de $\mathrm{GL}_F(W^{(1)})$ [7, Theorem 6.2.2] dont on note $\pi$ un élément. Le diagramme 3.8 relie alors l'étude de réductibilité des induites $\mathrm{ind}_P^G \pi|\det|^s \otimes \sigma$ à la structure de $\mathcal{H}(G, \lambda_P)$.

Notre but est de comparer les parties réelles des points de réductibilité des induites paraboliques $\mathrm{ind}_P^G \pi|\det|^s \otimes \sigma$ dans $G$ aux parties réelles des points de réductibilité des induites paraboliques $\mathrm{ind}_{P_1}^{G_1} \pi|\det|^s$ dans $G_1$. Dans $G_1$ nous avons une situation tout à fait analogue c'est-à-dire une paire couvrante $(J_{P_1}(\Lambda^1), \lambda_{P_1})$ de la paire $(\iota(\widetilde{J}^{(1)}),\ \iota(\tilde{\lambda}^{(1)}))$ dans $M_1$ (ce qui définit $\lambda_{P_1}$).

D'après le corollaire 3.4, si la représentation $\widetilde{\lambda}^{(1)}$ n'est pas équivalente à $\widetilde{\lambda}^{(1)} \circ \sigma_1$ ou si $s_1$ n'appartient pas à $G_E$, les algèbres $\mathcal{H}(G, \lambda_P)$ et $\mathcal{H}(G_1, \lambda_{P_1})$ sont isomorphes à $\mathcal{H}(M, \lambda_{P|J\cap M})$ et $\mathcal{H}(M_1, \lambda_{P_1|J_{P_1}(\Lambda^1)\cap M_1})$ respectivement et les induites $\mathrm{ind}_P^G \pi|\det|^s \otimes \sigma$ et $\mathrm{ind}_{P_1}^{G_1} \pi|\det|^s$ sont toujours irréductibles. Le premier cas est celui où la classe d'inertie de $\pi$ ne contient pas de représentation autoduale et l'on retrouve le fait qu'une représentation supercuspidale autoduale possède un type autodual.

Plaçons-nous désormais dans le cas autodual où $\widetilde{\lambda}^{(1)}$ est équivalente à $\widetilde{\lambda}^{(1)} \circ \sigma_1$, et supposons que $s_1$ appartient à $G_E$. L'énoncé du corollaire 3.7, dont on reprend les notations, peut être précisé en ne faisant intervenir que les intersections avec $G_1$. En effet $P(\mathfrak{M}_{0,\mathfrak{o}_E})$ est égal au produit $P(\mathfrak{M}^{(0)}_{0,\mathfrak{o}_E}) \times P(\mathfrak{M}^1_{0,\mathfrak{o}_E})$, de même pour $P(\mathfrak{M}_{1,\mathfrak{o}_E})$ et $P(\Lambda_{\mathfrak{o}_E})$. Comme $\mathfrak{b}_0(\Lambda^{(0)})$ est un $\mathfrak{o}_E$-ordre autodual maximal de $\mathrm{End}_F(W^{(0)}) \cap B$ on a $P(\mathfrak{M}^{(0)}_{0,\mathfrak{o}_E}) = P(\mathfrak{M}^{(0)}_{1,\mathfrak{o}_E}) = P(\Lambda^{(0)}_{\mathfrak{o}_E})$, de sorte que (cf. (3.5)) les algèbres :

$$\begin{aligned} \mathcal{H}(P(\mathfrak{M}_{0,\mathfrak{o}_E}), \chi_0\rho) &\simeq \mathcal{H}(P(\mathfrak{M}^1_{0,\mathfrak{o}_E}), \iota(\chi_0^{(1)}\rho^{(1)})) \\ \text{et} \quad \mathcal{H}(P(\mathfrak{M}_{1,\mathfrak{o}_E}), \chi_1\rho) &\simeq \mathcal{H}(P(\mathfrak{M}^1_{1,\mathfrak{o}_E}), \iota(\chi_1^{(1)}\rho^{(1)})) \end{aligned}$$

déterminent les relations quadratiques satisfaites par les générateurs de $\mathcal{H}(G, \lambda_P)$. De la même façon, les relations quadratiques satisfaites par les générateurs de $\mathcal{H}(G_1, \lambda_{P_1})$ sont déterminées par les algèbres

$$\mathcal{H}(P(\mathfrak{M}^1_{0,\mathfrak{o}_E}), \iota(\chi_{1,0}^{(1)}\rho^{(1)})) \quad \text{et} \quad \mathcal{H}(P(\mathfrak{M}^1_{1,\mathfrak{o}_E}), \iota(\chi_{1,1}^{(1)}\rho^{(1)}))$$

où $\chi_{1,0}$ et $\chi_{1,1}$ sont des caractères de $P^+(\Lambda^1_{\mathfrak{o}_E})/P^1(\Lambda^1_{\mathfrak{o}_E})$ tels que $\chi_{1,0}^{-1}\kappa_1$ soit une $\beta$-extension relative à $\mathfrak{M}^1_0$ et $\chi_{1,1}^{-1}\kappa_1$ une $\beta$-extension relative à $\mathfrak{M}^1_1$.

Dans chaque cas on obtient une algèbre de Hecke $\mathcal{H}(\mathcal{G}, \gamma)$ sur un groupe réductif fini $\mathcal{G} = P(\mathfrak{M}^1_{i,\mathfrak{o}_E})/P^1(\mathfrak{M}^1_{i,\mathfrak{o}_E})$, relative à une représentation supercuspidale autoduale $\gamma$ du sous-groupe de Levi de Siegel

$$P(\Lambda^1_{\mathfrak{o}_E})/P^1(\Lambda^1_{\mathfrak{o}_E}) \simeq \widetilde{P}(\Lambda^{(1)}_{\mathfrak{o}_E})/\widetilde{P}^1(\Lambda^{(1)}_{\mathfrak{o}_E}) \simeq \mathrm{GL}(f, k_{E_1})$$

où $k_{E_1}$ est le corps résiduel de $E_1$ et $f$ la dimension de $W^{(1)}$ sur $E_1$. (On rappelle comme au paragraphe 3.2 que la notion d'autodualité correspond ici à $\gamma \circ \sigma_1 \simeq \gamma$, et que l'action de $\sigma_1$ sur $\mathrm{GL}(f, k_{E_1})$ est équivalente à $g \mapsto {}^t g^{-1}$ si $\beta_1 = 0$ ou si $E_1$ est ramifiée sur $E_1^0$, à $g \mapsto {}^t\bar{g}^{-1}$ si $E_1$ est non ramifiée sur $E_1^0$, la barre désignant alors l'action de l'élément non trivial du groupe de Galois de $k_{E_1}$ sur $k_{E_1^0}$.) Les relations quadratiques correspondantes peuvent être calculées au cas par cas à partir des travaux de Lusztig. Quoi qu'il en soit, il arrive que ces relations soient indépendantes du choix de la représentation cuspidale autoduale $\gamma$. Lorsque c'est le cas, la proposition 3.12 implique que les parties réelles des points de réductibilité de $\operatorname{ind}_P^G \pi|\det|^s \otimes \sigma$ et $\operatorname{ind}_{P_1}^{G_1} \pi|\det|^s$ sont les mêmes.

*Exemple 3.16.* — Si $E_1$ est non ramifiée sur $E_1^0$ et de degré maximal $[E_1 : F] = \dim_F W^{(1)}$, le groupe $\mathcal{G}$ est isomorphe dans les deux cas à $U(1,1)(k_{E_1}/k_{E_1^0})$. Les relations quadratiques sont toujours homothétiques à $X^2 = (q_{E_1} - 1)X + q_{E_1}$, avec quotient des valeurs propres $-q_{E_1}$. L'application de la proposition 3.12 donne pour parties réelles des points de réductibilité 0 (double) et $\pm\frac{1}{2}$. Si $E_1$ est ramifiée sur $E_1^0$ et de degré maximal, le groupe $\mathcal{G}$ est isomorphe à $\mathrm{SL}(2, k_{E_1})$ ou $O(1,1)(k_{E_1})$. Dans $\mathrm{SL}(2, k_{E_1})$ la relation quadratique est soit $X^2 = (q_{E_1} - 1)X + q_{E_1}$, soit $X^2 = 1$, avec quotient des valeurs propres $-q_{E_1}$ ou $-1$, elle est sensible à la torsion ; dans $O(1,1)(k_{E_1})$ c'est $X^2 = 1$. Les parties réelles des points de réductibilité sont soit 0 (double) et $\pm\frac{1}{2}$, soit 0 (quadruple).

Dans ces deux cas, pour toute représentation $\sigma$ vérifiant les hypothèses du présent paragraphe (voir la remarque 3.18), les points de réductibilité de $\operatorname{ind}_P^G \pi|\det|^s \otimes \sigma$ sont de partie réelle strictement inférieure à 1.

Si les relations *ne sont pas indépendantes* du choix de $\gamma$, la comparaison cherchée impose de comparer les caractères $\chi_0$ et $\chi_1$ d'une part, $\chi_{1,0}$ et $\chi_{1,1}$ d'autre part ; c'est là qu'intervient le théorème 2.15. Soit donc $\mathbf{w}_U^0$ (resp. $\mathbf{w}_{U^-}^1$) le caractère de $P^+(\Lambda_{\mathfrak{o}_E})$, trivial sur $P^1(\Lambda_{\mathfrak{o}_E})$, qui à $x \in P^+(\Lambda_{\mathfrak{o}_E}) \cap M$ associe la signature de la permutation $v \mapsto xvx^{-1}$ de $J^1_{\mathrm{ext}}(\mathfrak{M}_0) \cap U^- / H^1(\mathfrak{M}_0) \cap U^-$ (resp. $J^1_{\mathrm{ext}}(\mathfrak{M}_1) \cap U / H^1(\mathfrak{M}_1) \cap U$). Rappelons que ces caractères ne dépendent que de la strate $[\Lambda, n, 0, \beta]$ (lemme 2.2).

Les hypothèses du paragraphe 2.4 sont vérifiées par le sous-groupe parabolique $P$ et la suite de réseaux $\mathfrak{M}_0$, ainsi que par $P^-$ et $\mathfrak{M}_1$ (3.5) et les représentations $\kappa$ et $\kappa_1$ sont reliées par la condition :

$$\mathbf{r}_P(\kappa) = \mathbf{r}_P\left(\kappa^{(0)} \otimes \kappa_1\right) = \kappa^{(0)} \otimes \iota(\widetilde{\kappa}^{(1)}) = \mathbf{r}_{P^-}(\kappa) = \mathbf{r}_{P^-}\left(\kappa^{(0)} \otimes \kappa_1\right).$$

D'après le théorème 2.15, $\chi_0^{-1}\kappa$ est une $\beta$-extension relative à $\mathfrak{M}_0$ si et seulement si $\mathbf{w}_U^0 \chi_0^{-1}(\kappa^{(0)} \otimes \kappa_1)$ est une $\beta$-extension relative à $\mathfrak{M}_0$ ; de même $\chi_1^{-1}\kappa$ est une $\beta$-extension relative à $\mathfrak{M}_1$ si et seulement si $\mathbf{w}_{U^-}^1 \chi_1^{-1}(\kappa^{(0)} \otimes \kappa_1)$ est une $\beta$-extension relative à $\mathfrak{M}_1$. Sur la composante en $W^{(0)}$ la torsion par $\mathbf{w}_U^0$ ou $\mathbf{w}_{U^-}^1$ ne change pas le fait d'être une $\beta$-extension car ces caractères sont triviaux sur tous les sous-groupes unipotents [21, Theorem 4.1]. La condition se simplifie donc comme suit :

*$\chi_0^{-1}\kappa$ est une $\beta$-extension relative à $\mathfrak{M}_0$ si et seulement si $(\chi_0^{(0)})^{-1}\kappa^{(0)}$ est une $\beta$-extension et $\mathbf{w}_U^0 \chi_0^{-1}\kappa_1$ est une $\beta$-extension relative à $\mathfrak{M}_0^1$ ;*

et de même en remplaçant $\mathfrak{M}_0$ par $\mathfrak{M}_1$ et $\chi_0$ par $\chi_1$. Notons au passage que $\chi_0$ et $\chi_1$ diffèrent d'un caractère autodual [21, Remark 6.12] tandis que $\mathbf{w}_U^0$ et $\mathbf{w}_{U^-}^1$ sont quadratiques ou triviaux. Finalement :

PROPOSITION 3.17. — *Notons $\gamma_0 = \iota(\chi_0^{(1)}\rho^{(1)})$ et $\gamma_1 = \iota(\chi_1^{(1)}\rho^{(1)})$. Les générateurs de $\mathcal{H}(G, \lambda_P)$ se calculent dans*

$$\mathcal{H}(P(\mathfrak{M}^1_{0,\mathfrak{o}_E})/P^1(\mathfrak{M}^1_{0,\mathfrak{o}_E}),\ \gamma_0) \ \text{ et } \ \mathcal{H}(P(\mathfrak{M}^1_{1,\mathfrak{o}_E})/P^1(\mathfrak{M}^1_{1,\mathfrak{o}_E}),\ \gamma_1)$$

*tandis que ceux de $\mathcal{H}(G_1, \lambda_{P_1})$ se calculent dans*

$$\mathcal{H}(P(\mathfrak{M}^1_{0,\mathfrak{o}_E})/P^1(\mathfrak{M}^1_{0,\mathfrak{o}_E}),\ \gamma_0\ \mathbf{w}_U^0) \ \text{ et } \ \mathcal{H}(P(\mathfrak{M}^1_{1,\mathfrak{o}_E})/P^1(\mathfrak{M}^1_{1,\mathfrak{o}_E}),\ \gamma_1\ \mathbf{w}_{U^-}^1),$$

*où le caractère $\mathbf{w}_U^0$ (resp. $\mathbf{w}_{U^-}^1$) de $P(\Lambda^1_{\mathfrak{o}_E})/P^1(\Lambda^1_{\mathfrak{o}_E})$ associe à $x \in P(\Lambda^1_{\mathfrak{o}_E})$ la signature de la permutation $v \mapsto xvx^{-1}$ de $J^1_{ext}(\mathfrak{M}^1_0) \cap U^- / H^1(\mathfrak{M}^1_0) \cap U^-$ (resp. $J^1_{ext}(\mathfrak{M}^1_1) \cap U / H^1(\mathfrak{M}^1_1) \cap U$).*

*Remarque 3.18.* — Bien entendu ce résultat ne permet pas de traiter la réductibilité de $\operatorname{ind}_P^G \pi|\det|^s \otimes \sigma$ pour n'importe quelle paire $(\pi, \sigma)$, puisque les types attachés à $\pi$ et $\sigma$ ont été construits à partir des éléments suivants :

- une strate semi-simple gauche $[\Lambda, n, 0, \beta]$ et une décomposition autoduale exactement subordonnée à cette strate $V = W^{(-1)} \oplus W^{(0)} \oplus W^{(1)}$ telle que $V^1 = W^{(-1)} \oplus W^{(1)}$ ;
- un caractère semi-simple gauche $\theta$ dont la restriction $\theta^{(0)} \otimes \iota(\tilde{\theta}^{(1)})$ à $H^1(\Lambda) \cap M$ détermine un caractère semi-simple gauche $\theta^{(0)}$ intervenant dans $\sigma$ et un caractère simple $\tilde{\theta}^{(1)}$ intervenant dans $\pi$.

On ne peut l'appliquer qu'à des paires de représentations possédant des strates et caractères semi-simples sous-jacents au-dessus desquels il existe une strate semi-simple et un caractère semi-simple convenablement décomposés comme ci-dessus, ce qui peut imposer des conditions de compatibilité entre les caractères $\theta^{(0)}$ et $\iota(\tilde{\theta}^{(1)})$ (voir la définition des caractères semi-simples [20, Definition 3.13] et la notion de "common approximation" de [5, §8]).

Précisons ceci, avec les notations du paragraphe 3.1. On choisit un type pour la représentation supercuspidale autoduale $\pi$ avec strate simple sous-jacente $[\Lambda^{(1)}, n^{(1)}, 0, 2\beta^{(1)}]$ et caractère simple sous-jacent $\tilde{\theta}^{(1)}$. On peut sommer la strate $[\Lambda^{(1)}, n^{(1)}, 0, \beta^{(1)}]$ et la strate duale dans $W^{(-1)}$ de façon à obtenir une strate simple gauche $[\Lambda^1, n^1, 0, \beta^1]$ dans $V^1$ à laquelle $V^1 = W^{(-1)} \oplus W^{(1)}$ soit exactement subordonnée [2] [10], avec $\beta^1 = \beta^{(-1)} \oplus \beta^{(1)}$. On choisit par ailleurs un type pour $\sigma$ avec strate semi-simple gauche sous-jacente $[\Lambda^{(0)}, n^{(0)}, 0, \beta^{(0)}]$ et caractère semi-simple gauche $\theta^{(0)}$. On se ramène au cas où $\Lambda^1$ et $\Lambda^{(0)}$ ont même période. La proposition 3.17 s'applique alors dans les cas suivants : $n^1 = n^{(0)}$ et les polynômes caractéristiques des strates $[\Lambda^1, n^1, 0, \beta^1]$ et $[\Lambda^{(0)}, n^{(0)}, 0, \beta^{(0)}]$ sont premiers entre eux ; $n^1 = 0$ et $\beta^{(0)}$ est inversible ; $n^{(0)} = 0$ et $\beta^1$ est inversible. Si les strates sont moins “disjointes”, un examen plus approfondi est nécessaire pour déterminer si $\tilde{\theta}^{(1)}$ et $\theta^{(0)}$ vérifient les conditions d'existence d'un caractère $\theta$ comme ci-dessus.

En particulier ce résultat s'applique toujours si la strate sous-jacente à $\pi$ est nulle et $\beta^{(0)}$ inversible. En revanche le cas d'un caractère autodual $\pi$ de $GL(1, F)$ et d'une représentation $\sigma$ attachée à une strate semi-simple dont une composante simple est nulle (ce qui est automatique dans un groupe spécial orthogonal impair) ne relève pas de la proposition 3.17.

### 3.4. Exemples

Commençons par illustrer la signification de la proposition 3.17 à partir d'exemples basés sur les calculs de paires couvrantes et d'algèbres de Hecke déjà faits dans $\mathrm{Sp}(4, F)$ [1] ; le groupe $G$ est ici symplectique.

Le cas des représentations supercuspidales autoduales $\pi$ de $\mathrm{GL}(2, F)$ vu comme sous-groupe de Levi de Siegel de $\mathrm{Sp}(4, F)$ [1, Tableau (3.17)] est conforme à l'exemple 3.16 ci-dessus. Passons au cas le plus intéressant, celui d'un caractère quadratique ou trivial $\tilde{\chi}$ de $\mathrm{GL}(1, F)$. Notons $\chi$ la restriction de $\tilde{\chi}$ à $\mathfrak{o}_F^\times$. La paire couvrante $(J_{P_1}(\Lambda_1), \lambda_{P_1})$ dans $G_1 = \mathrm{Sp}(2, F)$ correspondante est tout simplement la paire $(I, \chi_0)$ où $I = \begin{pmatrix} \mathfrak{o}_F^\times & \mathfrak{o}_F \\ \mathfrak{p}_F & \mathfrak{o}_F^\times \end{pmatrix} \cap G_1$ est un sous-groupe d'Iwahori et $\chi_0\left(\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)\right) = \chi(a), \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in I$. Les deux sous-groupes parahoriques maximaux contenant $I$ sont $\mathcal{P}_0 = \mathrm{SL}(2, \mathfrak{o}_F)$ et $\mathcal{P}_1 = \begin{pmatrix} \mathfrak{o}_F^\times & \mathfrak{p}_F^{-1} \\ \mathfrak{p}_F & \mathfrak{o}_F^\times \end{pmatrix} \cap G_1$. La seule $\beta$-extension du caractère trivial de $I^1 = \left(\begin{smallmatrix} 1+\mathfrak{p}_F & \mathfrak{o}_F \\ \mathfrak{p}_F & 1+\mathfrak{p}_F \end{smallmatrix}\right) \cap G_1$ à $I$ relativement à l'un ou l'autre de ces parahoriques est le caractère trivial. Notant encore $\chi_0$ le caractère du sous-groupe parabolique image de $I$ dans le quotient réductif de $\mathcal{P}_0$ ou de $\mathcal{P}_1$, on voit par le corollaire 3.7 que les relations quadratiques déterminant la réductibilité sont deux fois celle satisfaite par un générateur de $\mathcal{H}(\mathrm{SL}(2, k_F), \chi_0)$, soit $(X + 1)(X - q) = 0$ $(A)$ $(r_0 = r_1 = 1)$ si $\chi$ est trivial sur $\mathfrak{o}_F^\times$, $(X + 1)(X - 1) = 0$ $(B)$ $(r_0 = r_1 = 0)$ sinon, d'où la structure bien connue pour $\mathcal{H}(\mathrm{SL}(2, F), \chi_0)$ et les points de réductibilité de parties réelles 0 et 1 dans le premier cas, 0 quatre fois dans le second, pour la représentation $\mathrm{ind}_{P_1}^{\mathrm{Sp}(2,F)} \tilde{\chi}|\ |^s$.

Occupons-nous maintenant des représentations $\mathrm{ind}_P^{\mathrm{Sp}(4,F)} \tilde{\chi}|\ |^s \otimes \sigma$ où $\sigma$ est une représentation supercuspidale de $\mathrm{Sp}(2, F)$. L'examen des tableaux (2.17) p. 676 et 1 p. 677 de [1] appelle quelques remarques.

(i) Lorsque $\sigma$ est une représentation de la série non ramifiée "exceptionnelle", i.e. induite à partir de l'inflation à $\mathrm{SL}(2, \mathfrak{o}_F)$ d'une représentation cuspidale de $\mathrm{SL}(2, k_F)$ qui ne se prolonge pas à $\mathrm{GL}(2, k_F)$, et si $\chi$ n'est pas trivial, on trouve une relation dont le quotient des valeurs propres est $-q^2$. De fait, dans ce cas la strate sous-jacente à $\sigma$ est une strate nulle, la strate sous-jacente à $\pi = \tilde{\chi}$ aussi, et nous ne sommes pas dans les conditions d'application de la proposition 3.17 (voir la remarque 3.18). C'est pourquoi cette proposition ne permet de prévoir ni ce cas, ni les autres cas dits "de niveau 0" où $\sigma$ est induite de l'inflation d'une représentation cuspidale de $\mathrm{SL}(2, k_F)$ qui se prolonge à $\mathrm{GL}(2, k_F)$.

(ii) Si $\chi$ est trivial, on trouve deux relations de type (A) si $\sigma$ est de la série non ramifiée et de niveau strictement positif, deux relations de type (B) si $\sigma$ est de la série ramifiée ; si $\chi$ est non trivial, c'est exactement le contraire. Ces cas relèvent de la proposition 3.17, les caractères $\mathbf{w}_U^0$ et $\mathbf{w}_{U^-}^1$ sont nécessairement triviaux dans le cas non ramifié et non triviaux dans le cas ramifié.

Dans un groupe symplectique on a calculé dans l'exemple 2.16 les caractères $\mathbf{w}_U^0$ et $\mathbf{w}_{U^-}^1$ dans le cas d'un caractère autodual $\tilde{\chi}$ de $\mathrm{GL}(1, F)$ et d'une représentation $\sigma$ de $\mathrm{Sp}(2N, F)$ attachée à un type simple maximal où l'élément $\beta^{(0)}$ engendre une extension totalement ramifiée et y est de valuation congrue à $-1$ modulo $\dim W^{(0)}$. Ces deux caractères sont égaux au caractère quadratique non trivial de $\mathfrak{o}_F^\times$ (comme dans (ii) pour $N = 1$). La proposition 3.17 nous permet de comparer comme ci-dessus la réductibilité de $\operatorname{ind}_P^{\mathrm{Sp}(2N+2,F)} \tilde{\chi}|\ |^s \otimes \sigma$ à celle de $\operatorname{ind}_{P_1}^{\mathrm{Sp}(2,F)} \tilde{\chi}|\ |^s$. On en déduit qu'il y a un unique caractère autodual $\tilde{\chi}$ de $F^\times$ tel que $\operatorname{ind}_P^{\mathrm{Sp}(2N+2,F)} \tilde{\chi}|\ |^s \otimes \sigma$ soit réductible en $s = 1$, et que la restriction de ce caractère à $\mathfrak{o}_F^\times$ est non triviale. Il s'agit donc, comme on s'y attend par ailleurs, d'un caractère quadratique ramifié. Cependant (voir remarque 3.13), la détermination exacte de ce caractère parmi les deux caractères quadratiques ramifiés nécessite des calculs plus poussés qui sortent du cadre du présent article.

## BIBLIOGRAPHIE

[1] L. Blasco & C. Blondel, « Algèbres de Hecke et séries principales généralisées de $Sp_4(F)$ », *Proc. London Math. Soc.* **85(3)** (2002), p. 659-685.

[2] C. Blondel, « Sp(2N)-covers for self-contragredient supercuspidal representations of GL(N) », *Ann. scient. Ec. Norm. Sup.* **37** (2004), p. 533-558.

[3] ———, « Covers and propagation in symplectic groups », Functional analysis IX, Various Publ. Ser. (Aarhus), vol. 48, Univ. Aarhus, 2007, p. 16-31.

[4] C. Blondel & S. Stevens, « Smooth representations of reductive $p$-adic groups : structure theory via types », *Proc. London Math. Soc.* **77** (1998), p. 582-634.

[5] ———, « Semisimple types in $\mathrm{GL}_n$ », *Compositio Math.* **119** (1999), p. 53-97.

[6] ———, « Genericity of supercuspidal representations of $p$-adic Sp4 », *Compositio Math.* **145**(1) (2009), p. 213-246.

[7] C. Bushnell & P. Kutzko, *The admissible dual of GL(N) via compact open subgroups*, Annals of Mathematics Studies 129, Princeton, 1993.

[8] W. Gan & S. Takeda, « The Local Langlands Conjecture for $Sp(4)$ », *Int. Math. Res. Not.* **2010** (2010), p. 2987-3038.

[9] P. Gérardin, « Weil representations associated to finite fields », *J. of Algebra* **46** (1977), p. 54-101.

[10] D. Goldberg, P. Kutzko & S. Stevens, « Covers for self-dual supercuspidal representations of the Siegel Levi subgroup of classical p-adic groups », *Int. Math. Res. Not.* **2007** (2007).

[11] R. Howlett & G. Lehrer, « Induced cuspidal representations and generalised Hecke rings », *Invent. Math.* **58** (1980), p. 37-64.

[12] C. Jantzen, « Discrete series for $p$-adic $\mathrm{SO}(2n)$ and restrictions of representations of $\mathrm{O}(2n)$ », to appear in Canadian Journal of Mathematics (2011).

[13] P. Kutzko & L. Morris, « Level zero Hecke algebras and parabolic induction : the Siegel case for split classical groups », *Int. Math. Res. Not.* **2006** (2006).

[14] C. Mœglin, « Normalisation des opérateurs d'entrelacement et réductibilité des induites de cuspidales ; le cas des groupes classiques p-adiques », *Ann. of Math.* **151** (2000), p. 817-847.

[15] L. Morris, « Tamely ramified intertwining algebras », *Ann. of Math.* **114** (1993), p. 1-54.

[16] M. Neuhauser, « An explicit construction of the metaplectic representation over a finite field », *J. of Lie Theory* **12** (2002), p. 15-30.

[17] F. Shahidi, « A proof of Langlands conjecture on Plancherel measure ; complementary series for p-adic groups », *Ann. of Math.* **132** (1990), p. 273-330.

[18] A. Silberger, « Special representations of reductive p-adic groups are not integrable », *Ann. of Math.* **111** (1980), p. 571-587.

[19] S. Stevens, « Double coset decomposition and intertwining », *manuscripta math.* **106** (2001), p. 349-364.

[20] ———, « Semisimple characters for $p$-adic classical groups », *Duke Math. J.* **127(1)** (2005), p. 123-173.

[21] ———, « The supercuspidal representations of $p$-adic classical groups », *Invent. Math.* **172** (2008), p. 289-352.

[22] F. Szechtman, « Weil representations of the symplectic group », *J. of Algebra* **208** (1998), p. 662-686.

[23] Y. Zhang, « Discrete series of classical groups », *Canad. J. Math.* **52**(5) (2000), p. 1101-1120.

Manuscrit reçu le 9 juillet 2010,
accepté le 26 novembre 2010.

Corinne BLONDEL
C.N.R.S. - Institut de Mathématiques de Jussieu -
UMR 7586

Université Paris 7
Groupes, représentations et géométrie - Case 7012
75205 Paris Cedex 13 (France)
Corinne.Blondel@math.jussieu.fr