ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

MAURICE BLAMBERT
GEORGES CHEVALIER

Suites crameriennes et polynômes de Dirichlet-Tschebyscheff

Annales de l'institut Fourier, tome 17, nº 2 (1967), p. 335-358
<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1967__17_2_335_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
17, 2 (1967), 335-358.

SUITES CRAMERIENNES ET POLYNÔMES DE DIRICHLET-TSCHEBYSCHEFF

par Maurice BLAMBERT et Georges CHEVALIER

Introduction.

On se propose de définir une extension de la notion classique de polynôme de Tschebyscheff. Les résultats énoncés ci-dessous sont tributaires, pour la plupart, de la notion de suite cramerienne sur un compact et contiennent, comme cas particuliers, des résultats classiques bien connus. La notion introduite de « suite cramerienne » semble particulièrement féconde et adaptée à son objet dans la voie choisie ici.

L'exposé qui suit n'a pas la prétention d'être exhaustif. D'autres résultats à paraître viendront compléter ceux obtenus ici.

A. — On considère une suite finie, positive, strictement croissante (que l'on convient d'appeler une D-suite finie), que l'on note (λ_p), $p \in \{0, 1, 2, \ldots, n\}$, (le cas $\lambda_0 = 0$ n'étant pas exclu), et le polynôme dirichletien,

$$f[(a_\iota)] : \qquad \sum_{p=0}^{n} a_{n-p} \exp(-z\lambda_p),$$

à coefficients dans $\mathbf{C}$. On désigne par $f[(a_\iota), z]$ la valeur en $z \in \mathbf{C}$ de ce polynôme, et par (a_ι) le point $(a_1, a_2, \ldots, a_n) \in \mathbf{C}^n$.

Soit un compact $E \subset \mathbf{C}$, ne se réduisant pas à un ensemble fini de points. Le nombre complexe $a_0 \neq 0$, le compact $E \subset \mathbf{C}$ et la D-suite (λ_p) étant donnés, on désigne par $\mathcal{F}$ la famille des applications de E dans $\mathbf{C}$,

$$z \multimap f[(a_\iota), z], \quad z \in E,$$

indexées par (a_ι) sur $\mathbf{C}^n$. Le polynôme dirichletien $f[(a_\iota)]$ est appelé « *le germe algorithmique dirichletien* » de l'application d'indice (a_ι) de la famille $\mathcal{F}$ (plus succinctement, on appellera $f[(a_\iota)]$ « l'al-germe dirichletien » de l'application d'indice (a_ι) de $\mathcal{F}$). On pose,

$$\forall (a_\iota) \in \mathbf{C}^n: \qquad [\varpi(a_\iota)] = \operatorname{Max} |f[(a_\iota), z]|, \quad z \in E.$$

Il est trivial que,

$$\forall (a_\iota) \in \mathbf{C}^n: \qquad \varpi[(a_\iota)] > 0,$$

puisque E ne se réduit pas à un ensemble fini. On considère l'application de support $\mathbf{C}^n$ à valeurs dans R_+^*,

$$(a_\iota) \multimap \varpi[(a_\iota)]$$

et on désigne par $\Omega(E)$ l'ensemble de ses valeurs, par μ l'infimum de cet ensemble, et par $z(a_\iota)$ un point considéré de l'ensemble

$$\{z \in E | \varpi[(a_\iota)] = |f[(a_\iota), z]|\};$$

cet ensemble n'est pas vide.

On convient de désigner sous le vocable « *support de la famille* $\mathcal{F}$ » la donnée du nombre complexe $a_0 \neq 0$, du compact $E \subset \mathbf{C}$ et de la D-suite finie (λ_p); on le note,

$$S: \quad \{a_0; \ E; \ (\lambda_p)\}.$$

On appelle « *polynôme de Dirichlet-Tschebyscheff de support* S » l'al-germe dirichletien d'une application de la famille $\mathcal{F}$ de support S, s'il en existe, dont le maximum de l'ensemble des modules des valeurs, sur le compact E, est égal à μ.

On désigne par $\mathcal{F}^*$ l'ensemble des polynômes de Dirichlet-Tschebyscheff de support S, et on se propose d'établir que $\mathcal{F}^* \neq \emptyset$.

Proposition (A.1). — *L'application de support* $\mathbf{C}^n$,

$$(a_\iota) \multimap \varpi[(a_\iota)]$$

est uniformément continue sur son support.

L'application de $\mathbf{C}^n$ dans $\mathbf{C}$,

$$(a_\iota) \multimap f[(a_\iota), z]$$

indexée par z sur E, est continue sur $\mathbf{C}^n$; l'application, associée à la précédente, de $\mathbf{C}^n$ dans l'ensemble des réels positifs,

$$(a_\iota) \multimap |f[(a_\iota), z]|$$

indexée par z sur E, est donc continue sur son support.

Posant

$$\nu = \operatorname{Max} |\exp(-z\lambda_p)|, \quad p \in \{0, 1, 2, \ldots, n\} \quad \text{et} \quad z \in \mathrm{E},$$

on a, pour (a_ι) et (a'_ι) quelconques sur $\mathbf{C}^n$,

$$|f[(a_\iota), z]| - |f[(a'_\iota), z]| \leqslant |f[(a_\iota), z] - f[(a'_\iota), z]| \leqslant \nu \sum_{\iota=0}^{n} |a_\iota - a'_\iota|.$$

Il en résulte que, $\forall \varepsilon \in \mathrm{R}^*_+$, $\exists \alpha_\varepsilon \in \mathrm{R}^*_+$:

$$|(a_\iota) - (a'_\iota)| < \alpha_\varepsilon \Longrightarrow \begin{cases} |\varpi[(a_\iota)] - |f[(a'_\iota), z_{(a_\iota)}]|| < \varepsilon, \\ |\varpi[(a'_\iota)] - |f[(a_\iota), z_{(a'_\iota)}]|| < \varepsilon. \end{cases}$$

Eu égard à la définition de $\varpi[(a_\iota)]$, on a,

$$\varpi[(a_\iota)] \geqslant |f[(a_\iota), z_{(a'_\iota)}]|$$

et

$$\varpi[(a'_\iota)] \geqslant |f[(a'_\iota), z_{(a_\iota)}]|.$$

Les quatre nombres figurant dans ces deux dernières relations vérifient l'une au moins des trois relations suivantes :

$$\begin{array}{ll} (\mathrm{R}_1) & \varpi[(a_\iota)] \geqslant |f[(a_\iota), z_{(a'_\iota)}| \geqslant \varpi[(a'_\iota)] \geqslant |f[(a'_\iota), z_{(a_\iota)}]| \\ (\mathrm{R}_2) & \varpi[(a_\iota)] \geqslant \varpi[(a'_\iota)] \geqslant |f[(a_\iota), z_{(a'_\iota)}]| \geqslant |f[(a'_\iota), z_{(a_\iota)}]| \\ (\mathrm{R}_3) & \varpi[(a_\iota)] \geqslant \varpi[(a'_\iota)] \geqslant |f[(a'_\iota), z_{(a_\iota)}]| \geqslant |f[(a_\iota), z_{(a'_\iota)}]| \end{array}$$

et les analogues (R_4), (R_5), (R_6), obtenues en substituant dans (R_1), (R_2), (R_3), (a'_ι) à (a_ι) et (a_ι) à (a'_ι). Ainsi, quelle que soit la relation qui est satisfaite, parmi les trois relations ci-dessus, on a :

$$|(a_\iota) - (a'_\iota)| < \alpha_\varepsilon \Longrightarrow |\varpi[(a_\iota)] - \varpi[(a'_\iota)]| < \varepsilon.$$

Considérant le compact $E \subset \mathbf{C}$, et la D-suite finie (λ_p), $p \in \{0, 1, 2, \ldots, n-1\}$, on considère l'application suivante de E^n dans $\mathbf{C}$,

$$(z_\iota) \multimap D[(z_\iota)]$$

où $D[(z_\iota)]$ est le déterminant de la matrice

$$\|\exp(-z_\iota\lambda_{n-j})\|, \qquad i \text{ et } j \in \{1, 2, \ldots, n\}.$$

Proposition (A.2). — *Il existe au moins un point* $(z_\iota) \in E^n$ *tel que*

$$D[(z_\iota)] \neq 0.$$

La négation de cette assertion est équivalente à la proposition suivante :

$$\forall (z_\iota) \in E^n \Longrightarrow D[(z_\iota)] = 0.$$

Désignant un point quelconque $(z_2, \ldots, z_n)$ sur E^{n-1} par $(z_\iota)'$, on considère la famille des applications suivantes de E dans $\mathbf{C}$,

$$z_1 \multimap D[z_1, (z_\iota)'], \qquad \text{ou} \qquad D[z_1, (z_\iota)'] = D[(z_\iota)],$$

indexées par $(z_\iota)'$ sur E^{n-1}. Chaque application de cette famille n'est autre, comme il est évident, que la restriction à E de la fonction analytique entière sur $\mathbf{C}$,

$$z_1 \multimap \sum_{j=1}^{n} A_j \exp(-z_1\lambda_{n-j})$$

où le nombre A_j est le cofacteur de $D[(z_\iota)]$ relatif au terme $\exp(-z_1\lambda_{n-j})$. Les cofacteurs A_j dépendent de $(z_\iota)'$ mais sont indépendants de z_1. Comme on sait, cette fonction entière sur $\mathbf{C}$ ne possède sur E qu'un ensemble fini de zéro (pouvant être vide). On a donc,

$$\forall (z_\iota) \in E^n \Longrightarrow D[(z_\iota)] = 0 \Longleftrightarrow \forall (z_\iota)' \in E^{n-1} \text{ et } \forall_j \in \{1, 2, \ldots, n\} : A_j = 0.$$

Désignant un point quelconque $(z_3, \ldots, z_n)$ sur E^{n-2} par $(z_\iota)''$, on considère la famille des applications suivantes de E dans $\mathbf{C}$,

$$\forall_j \in \{1, 2, \ldots, n\} : \qquad z_2 \multimap A_j[z_2, (z_\iota)''],$$

ou $$A_j[z_2, (z_\iota)''] = A_j,$$

indexées par $(j, (z_\iota)'')$. Itérant sur chacune de ces applications le raisonnement ci-dessus, on obtient,

$$\forall (z_\iota)' \in \mathrm{E}^{n-1} \quad \text{et} \quad \forall_j \in \{1, 2, \ldots, n\} : \mathrm{A}_j = 0$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$\forall (z_\iota)'' \in \mathrm{E}^{n-2}, \ \forall j \quad \text{et} \quad \forall k\,(\neq j) \in \{1, 2, \ldots, n\} : \qquad \mathrm{A}_{j,k} = 0$$

où $\mathrm{A}_{j,k}$ est le cofacteur de A_j relatif au terme $\exp(-z_2\lambda_{m-k})$, $k \in \{1, 2, \ldots, j-1, j+1, \ldots, n\}$. L'itération du raisonnement ci-dessus conduirait au résultat trivialement faux suivant :

$$\exp(-z_n\lambda_p) = 0, \qquad \forall_p \in \{1, 2, \ldots, n\}.$$

La contradiction établit la validité de la proposition (A.2).

Proposition (A.3). — *Étant donnée la famille* $\mathcal{F}$, *de support* $\mathrm{S} : \{a_0;\ \mathrm{E};\ (\lambda_p)\}$, *d'applications indexées par* (a_ι) *sur* $\mathbf{C}^n$, *on a,*

$$\forall \mathrm{M} \in \Omega(\mathrm{E}), \qquad \exists \mathcal{C}_{\mathrm{M}}\,(\text{compact}) \subset \mathbf{C}^n : \qquad \{(a_\iota) | [\varpi(a_\iota)] \leqslant \mathrm{M}\} \subset \mathcal{C}_{\mathrm{M}}.$$

Eu égard à la proposition (A.2), $\exists (z_r^0) \in \mathrm{E}^n$ tel que $\mathrm{D}[(z_r^0)] \neq 0$. On considère le système suivant des n relations linéaires par rapport aux coefficients a_j, $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

$$\sum_{j=1}^{n} a_j \exp(-z_r^0\lambda_{n-j}) = f[(a_\iota),\ z_r^0] - a_0 \exp(-z_r^0\lambda_n),$$
$$r \in \{1, 2, \ldots, n\}.$$

On désigne par $\mathrm{D}_j[(z_r^0)]$, $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$, le déterminant de la matrice $\|\alpha_{rk}\|$, où $\forall r \in \{1, \ldots, n\}$,

$$k = j : \qquad \alpha_{rk} = f[(a_\iota),\ z_r^0] - a_0 \exp(-z_r^0\lambda_n)$$
$$\forall k\,(\neq j) \in \{1, 2, \ldots, n\} : \qquad \alpha_{rk} = \exp(-z_r^0\lambda_{n-k})$$

et par $\mathrm{D}_{j,h}[(z_r^0)]$ le cofacteur de $\mathrm{D}_j[(z_r^0)]$ correspondant à l'élément

$$\alpha_{h,j} = f[(a_\iota),\ z_h^0] - a_0 \exp(-z_h^0\lambda_n), \qquad h \in \{1, 2, \ldots, n\}.$$

On sait que,

$$a_j = (-1)^{j+1}\mathrm{D}_j[(z_r^0)]/\mathrm{D}[(z_r^0)]$$
$$= [(-1)^{j+1}/\mathrm{D}[(z_r^0)]] \sum_{h=1}^{n} \{\mathrm{D}_{j,h}[(z_r^0)](f[(a_\iota), z_h^0] - a_0 \exp(-z_h^0\lambda_n))\}.$$

Soit $M \in \Omega(E)$. Il existe au moins un point de $\mathbf{C}^n$, que l'on note $(a_\iota)_M$, et dans $\mathcal{F}$ une application (les projections $a_{\iota,M}$, $\iota \in \{1, 2, \ldots, n\}$, de $(a_\iota)_M$ sont précisément les valeurs des coefficients a_ι de l'al-germe dirichletien de cette application) dont le maximum de l'ensemble des modules des valeurs sur E, $\varpi[(a_\iota)_M]$, est égal à M; on a,

$$|f[(a_\iota)_M, z_r^0]| \leqslant M, \qquad \forall r \in \{1, 2, \ldots, n\}.$$

Posant

$$M'[(z_r^0)] = \operatorname{Max} |a_0 \exp(-z_r^0\lambda_n)|, \qquad r \in \{1, 2, \ldots, n\},$$

et

$$D'[(z_r^0)] = \operatorname{Max} |D_{j,h}[(z_r^0)]|, \qquad j \text{ et } h \in \{1, 2, \ldots, n\},$$

on a,

$$\forall j \in \{1, 2, \ldots, n\} : |a_{j,M}| \leqslant (M + M'[(z_r^0)])nD'[(z_r^0)]/|D[(z_r^0)]|.$$

Désignant par $\mathfrak{M}[(z_r^0), M]$ la valeur du second membre de cette dernière relation, on considère le sous-ensemble suivant de $\mathbf{C}^n$,

$$\mathcal{C}_M = \{(a_\iota) \in \mathbf{C}^n \mid |a_\iota| \leqslant \mathfrak{M}[(z_r^0), M], \ \iota \in \{1, 2, \ldots, n\}\}.$$

Il est trivial que $\mathcal{C}_M \neq \emptyset$. $\mathcal{C}_M$ est borné et fermé dans $\mathbf{C}^n$; c'est un compact qui est l'adhérence d'un cube de $\mathbf{C}^n$. Tout point $(a_\iota) \in \mathbf{C}^n$ tel que $\varpi[(a_\iota)] \leqslant M$, appartient à $\mathcal{C}_M$ (a_0 conservant la valeur fixée dans la donnée du support S de $\mathcal{F}$).

On se propose maintenant de déduire des propositions antérieures que l'ensemble $\mathcal{F}^*$ des polynômes de Dirichlet-Tschebyscheff, de support S, est non vide. On pose,

$$M_0 = \operatorname{Max} |a_0 \exp(-z\lambda_n)|, \quad z \in E.$$

Il est trivial que $\mu \leqslant M_0 \in \Omega(E)$. Eu égard à la définition de μ, deux cas sont « à priori » possibles :

1) $\mu \in \Omega(E)$,

ou bien

2) $\mu \notin \Omega(E)$ mais cependant μ appartient à l'adhérence dans $\mathbf{R}$ de $\Omega(E)$ (que l'on note $\overline{\Omega(E)}$).

Si $\mu \in \Omega(E)$, il est trivial que l'ensemble

$$\mathcal{K}_\mu = \{(a_\iota) \in \mathbf{C}^n \mid \varpi[(a_\iota)] = \mu\}$$

est non vide. Tout polynôme $f[(a_i)]$ avec $(a_i) \in \mathcal{K}_\mu$ est un polynôme de Dirichlet-Tschebyscheff de support S et réciproquement, tout polynôme de Dirichlet-Tschebyscheff de support S a un indice appartenant à $\mathcal{K}_\mu$. Ainsi

$$(a_i) \in \mathcal{K}_\mu \Longleftrightarrow [f(a_i)] \in \mathcal{F}^*;$$

$\mathcal{F}^*$ est non vide.

Si $\mu \notin \Omega(E)$, on a nécessairement, par définition de μ, comme on l'a déjà dit, $\mu \in \overline{\Omega(E)}$. Il est trivial que $\mu < M_0$. On peut extraire de $\Omega(E)$ une suite infinie strictement positive et strictement décroissante, (μ_n), telle que : $\mu_n < M_0$ et $\lim \mu_n = \mu$, $n \uparrow \infty$. A cette suite, on peut associer la suite des ensembles $\mathcal{E}_n$ suivants :

$$\mathcal{E}_n = \{(a_i) \in \mathbf{C}^n | \varpi[(a_i)] = \mu_n\}.$$

Il est trivial que $\mathcal{E}^n \neq \emptyset$ (puisque $\mu_n \in \Omega(E)$) et que $\mathcal{E}_n \cap \mathcal{E}_{n'} = \emptyset$ si et seulement si $n \neq n'$. On désigne par $(a_i)_n$ un point pris arbitrairement sur $\mathcal{E}_n$. On associe ainsi à la suite strictement décroissante (μ_n) une suite ponctuelle $((a_i)_n)$. Chacun des points de cette suite ponctuelle appartient au cube compact $\mathcal{C}_{M_0}$. L'adhérence de l'ensemble de ces points appartient aussi à $\mathcal{C}_{M_0}$. On désigne par $(a_i)^*$ un point du dérivé de l'ensemble union des $(a_i)_n$. Ce point $(a_i)^*$ appartient à $\mathcal{C}_{M_0}$. Puisque l'application $(a_i) \multimap \varpi[(a_i)]$ est continue au point $(a_i)^* \in \mathcal{C}_{M_0}$, on a,

$$\lim \varpi[(a_i)] = \mu, \qquad (a_i) \rightarrow (a_i)^*$$

et donc $\mu = \varpi[(a_i)^*]$; ainsi $\mu \in \Omega(E)$. Donc si $\mu \notin \Omega(E)$, on a aussi $\mu \notin \overline{\Omega(E)}$; μ ne peut pas être alors l'infimum de l'ensemble $\Omega(E)$. Le cas (2) est impossible. Ainsi $\mu \in \Omega(E)$ et donc $\mathcal{F}^* \neq \emptyset$.

B. — On a prouvé, au paragraphe (A), que l'ensemble $\mathcal{F}^*$ associé à la famille $\mathcal{F}$ de support S, est non vide. On convient de désigner plus particulièrement par (a_i^*), au lieu de (a_i), avec $a_i^* = a_i$, $\forall i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, l'indice du polynôme $f[(a_i)]$ si et seulement si $f[(a_i)] \in \mathcal{F}^*$. Au paragraphe (C) de ce chapitre, on se propose d'établir, sous des conditions convenables, que l'ensemble $\mathcal{F}^*$ se réduit à un seul élément. Dans ce but, on énonce :

LEMME (B.1). — *Si la* D-*suite finie* (λ_p) *du support* S *se réduit à la* D-*suite des entiers successifs,* $\{0, 1, 2, \ldots, n\}$, *alors pour chaque élément* $f[(a_\iota^*)]$ *de l'ensemble* $\mathcal{F}^*$, *l'ensemble associé*

$$\{z \in \mathrm{E}|\ |f[(a_\iota^*),\ z]| = \mu, \qquad \text{avec} \qquad \mu = \operatorname{Inf} \Omega(\mathrm{E})\}$$

contient au moins $n + 1$ *points (on suppose* E *inclus dans une bande du type* $\{z \in \mathbf{C}|\ -\pi \leqslant \mathfrak{I}(z - z_0) < \pi\}$ *ou du type* $\{z \in \mathbf{C}|\ -\pi < \mathfrak{I}(z - z_0) \leqslant \pi\}$, *où* z_0 *est fixe sur* $\mathbf{C}$*).* La négation de l'assertion de ce lemme est équivalente à la proposition suivante :

PROPOSITION (A′). — *Sous les conditions relatives à* (λ_p) *et* E *figurant dans* (B.1), *on peut trouver dans* $\mathcal{F}^*$ *un polynôme* $f[(a_\iota^*)]$ *vérifiant la condition suivante : il existe un entier* $p \in \{1, 2, \ldots, n\}$ *et* p *valeurs* $z_k \in \mathrm{E}$, *pour* $k \in \{1, 2, \ldots, p\}$, *deux à deux distinctes telles que* $|f[(a_\iota^*),\ z_k]| = \mu$ *et*

$$\forall z \in \mathrm{E} - \bigcup_{k=1}^{p} z_k : \qquad \mu > |f[(a_\iota^*),\ z]|.$$

On peut prouver la proposition suivante :

PROPOSITION (B′). — *Eu égard à la validité de la proposition* (A′), *on peut toujours trouver dans la famille* $\mathcal{F}$ *une application d'indice* (a_ι) *telle que* $\varpi[(a_\iota)] < \mu$.

Ainsi (A′) impliquant (B′) conduit à une contradiction, à savoir, l'existence dans $\mathcal{F}$ d'au moins une application dont le maximum de l'ensemble des modules des valeurs sur E est strictement inférieur à l'infimum de $\Omega(\mathrm{E})$. On désigne par $\varphi[(\theta_\iota)]$ le polynôme dirichletien, $\sum_{p=1}^{n} \theta_p \exp{(-z\lambda_{n-p})}$, à coefficients indéterminés dans $\mathbf{C}$ et dont la D-suite des exposants (λ_p) se réduit à la suite des entiers successifs $\{0, 1, 2, \ldots, n-1\}$. On considère l'application $z \longrightarrow f[(a_\iota^*),\ z]$ d'indice (a_ι^*), vérifiant la condition de (A′). Eu égard aux conditions satisfaites par (λ_p) et E la proposition suivante est évidente :

PROPOSITION (B.2). — *Le système des* p *équations linéaires*

$\varphi[(\theta_\iota), z_k] = f[(a_\iota^*), z_k]$, $k \in \{1, 2, \ldots, p\}$, avec $p \leqslant n$

à n *inconnues* θ_ι, $\iota \in \{1, 2, \ldots, n\}$, *admet au moins une solution.*

On considère le polynôme dirichletien

$$F[(\alpha_\iota)] : \quad \sum_{p=0}^{n} \alpha_{n-p} \exp(-z\lambda_p),$$

où les coefficients α_{n-p} sont définis de la manière suivante :

$\alpha_{n-p} = a_{n-p}^* - \alpha\theta_{n-p}$, $\forall p \in \{0, 1, 2, \ldots, n\}$, avec $\theta_0 = 0$,

et l'on a,

$$\forall z \in E : \quad z \multimap F[(\alpha_\iota), z] = f[(a_\iota^*), z] - \alpha\varphi[(\theta_\iota), z],$$

où α est une constante appartenant à $]0, 1[$, où $f[(a_\iota^*)] \in \mathscr{F}^*$ satisfait à (A′), et où $\varphi[(\theta_\iota)]$ satisfait à (B.2). Il est évident, eu égard à la manière dont $\varphi[(\theta_\iota)]$ a été défini, que l'application $z \multimap F[(\alpha_\iota), z]$, de support E, appartient à $\mathscr{F}$. Les applications $z \multimap f[(a_\iota^*), z]$ et $z \multimap \varphi[(\theta_\iota), z]$ de E dans $\mathbf{C}$, sont uniformément continues sur leur support E ; on a,

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \forall k \in \{1, 2, \ldots, p\}, \quad \exists \delta_\varepsilon > 0, \quad \forall z \in \{E \mid |z - z_k| \leqslant \delta_\varepsilon\} :$$
$$|f[(a_{\iota_i}^*), z] - f[(a_\iota^*), z_k]| < \varepsilon,$$

et $|\varphi[(\theta_\iota), z] - \varphi[(\theta_\iota), z_k]| < \varepsilon$. ($\delta_\varepsilon$ indépendant de k).

On désigne par $D_{k,\varepsilon}$ l'ensemble compact

$$\{z \in E \mid |z - z_k| \leqslant \delta_\varepsilon\},$$

et on pose,

$$D_\varepsilon = \bigcup_{k=1}^{p} D_{k,\varepsilon} \qquad \text{et} \qquad E_\varepsilon = E - D_\varepsilon.$$

Si $z \in D_\varepsilon$, on peut trouver un indice $k_z \in \{1, 2, \ldots, p\}$ tel que $z \in D_{k_z,\varepsilon}$. Par définition de $D_{k_z,\varepsilon}$ on a,

$$|f[(a_\iota^*), z] - f[(a_\iota^*), z_{k_z}]| < \varepsilon, \quad \text{avec} \quad |f[(a_\iota^*), z]| \leqslant \mu,$$

et
$$|\varphi[(\theta_\iota), z] - \varphi[(\theta_\iota), z_{k_z}]| < \varepsilon.$$

On pose

$$Z = f[(a_\iota^*), z] \qquad \text{et} \qquad Z_{k_z} = f[(a_\iota^*), z_{k_z}],$$

et on désigne par $\mathfrak{D}_{k_z,\varepsilon}$ le disque

$$\{z' \in \mathbf{C} |\ |z' - Z_{k_z}| < \varepsilon\},$$

et par Γ le disque fermé $\{z' \in \mathbf{C} |\ |z'| \leqslant \mu\}$. On pose,

$$Z_\alpha = \alpha\varphi[(\theta_\iota),\ z] \qquad \text{et} \qquad Z_{k_z,\alpha} = \alpha\varphi[(\theta_\iota),\ z_{k_z}]$$

et on désigne par $\mathfrak{D}^\alpha_{k_z,\varepsilon}$ l'ensemble $\{z' \in \mathbf{C}\,|\,|z' - Z_{k_z,\alpha}| < \alpha\varepsilon\}$.

Ainsi

$$z \in D_\varepsilon \Longrightarrow Z \in \mathfrak{D}_{k_z,\varepsilon} \cap \Gamma \qquad \text{et} \qquad Z_\alpha \in \mathfrak{D}^\alpha_{k_z,\varepsilon}.$$

Eu égard aux relations

$$\varphi[(\theta_\iota),\ z_k] = f[(a^*_\iota),\ z_k], \qquad \forall k \in \{1,\ 2,\ \ldots,\ p\},$$

il est trivial que les points $z = 0$, Z_{k_z}, $Z_{k_z,\alpha}$ sont alignés dans $\mathbf{C}$. Les disques ouverts $\mathfrak{D}_{k_z,\varepsilon}$ et $\mathfrak{D}^\alpha_{k_z,\varepsilon}$ sont homothétiques, avec le point $z = 0$ pour centre d'homothétie.

Il est évident géométriquement que,

$$\exists\varepsilon > 0, \qquad \forall\alpha \in]0, \qquad (\mu - \varepsilon)/(\mu + \varepsilon)[\ :$$
$$\{0\} \not\subset \mathfrak{D}^\alpha_{k_z,\varepsilon}, \qquad \mathfrak{D}_{k_z,\varepsilon} \cap \mathfrak{D}^\alpha_{k_z,\varepsilon} = \emptyset$$

et

$$|Z - Z_\alpha| < \mu.$$

Si, maintenant $z \in E_\varepsilon$ (l'ensemble E_ε n'est pas nécessairement un fermé dans E), on pose,

$$\mu_1 = \operatorname{Sup} |f[(a^*_\iota),\ z]|, \quad z \in E_\varepsilon$$

et donc $\mu_1 < \mu$

$$\mu_0 = \operatorname{Max} |\varphi[(\theta_\iota),\ z]|, \quad z \in E$$
$$\mu' = \operatorname{Sup} |F[(\alpha_\iota),\ z]|, \quad z \in E_\varepsilon.$$

On a $\mu' \leqslant \mu_1 + \alpha\mu_0$, et donc $\mu' < \mu$ si α est choisi appartenant à l'intervalle $]0,\ (\mu - \mu_1)/\mu_0[$. Par suite,

$$\exists\varepsilon > 0 \quad \text{et} \quad \exists\alpha \in]0, \quad (\mu - \varepsilon)/(\mu + \varepsilon)\,[\,\cap\,]0, \quad (\mu - \mu_1)/\mu_0[\ :$$
$$\operatorname{Max} |F[(\alpha_\iota),\ z]| < \mu, \qquad z \in E.$$

On en déduit que $f[(a^*_\iota)]$ ne peut pas simultanément appartenir à $\mathcal{F}^*$ et vérifier la condition de (A'). La proposition (A') est donc fausse, et l'égalité $|f[(a^*_\iota),\ z]| = \mu$ est satisfaite en au moins $n + 1$ points de E.

Il est intéressant de généraliser le lemme (B.1) en ne se limitant pas à la considération d'une D-suite (λ_p) qui se réduit à la suite des entiers successifs $\{0, 1, 2, \ldots, n\}$. Dans ce but, on convient de dire qu'une D-suite

$$(\lambda_p),\ p \in \{0, 1, 2, \ldots, n\},$$

est cramérienne sur un compact E *de* **C** *si pour chaque entier* $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$ *à tout système de* k *valeurs distinctes de* E *on peut associer une sous* D-*suite de* k *termes,* $\lambda_{r_1}, \lambda_{r_2}, \ldots, \lambda_{r_k}$, *avec* $r_k \leqslant n - 1$, *extraite de* (λ_p), *telle que,*

$$\det \|\exp(-z_j\lambda_{r_i})\| \neq 0, \qquad i \text{ et } j \in \{1, 2, \ldots, k\}.$$

On peut alors énoncer :

Lemme (B.1′). — *Si la* D-*suite* (λ_p) *du support* S *est cramérienne sur le compact* E *de* **C** *alors pour chaque élément* $f[(a_\iota^*)]$ *de l'ensemble* $\mathcal{F}^*$, *l'ensemble*

$$\{z \in \mathrm{E} \mid |f[(a_\iota^*), z]| = \mu, \quad \text{avec} \quad \mu = \operatorname{Inf} \Omega(\mathrm{E})\}$$

contient au moins $n + 1$ *points.*

La démonstration de ce lemme est la même mot pour mot que celle du lemme (B.1) puisque la proposition (B.2) est vraie dans le cas d'un polynôme dirichletien,

$$\varphi[(\theta_\iota)] : \quad \sum_{p=1}^{n} \theta_p \exp(-z\lambda_{n-p})$$

à coefficients à déterminer, lorsque la D-suite (λ_p) est cramérienne sur E.

Remarque. — Si la D-suite (λ_p) se réduit à la suite des entiers successifs $\{0, 1, 2, \ldots, n\}$, alors cette D-suite particulière est comme on sait cramérienne sur tout sous-ensemble compact E de **C** appartenant à une bande de **C** du type

$$\{z \in \mathbf{C} \mid -\pi \leqslant \mathfrak{I}(z - z_0) < \pi\}$$

ou du type

$$\{z \in \mathbf{C} \mid -\pi < \mathfrak{I}(z - z_0) \leqslant \pi\},$$

où z_0 est fixe sur **C**.

C. — Dans la famille $\mathcal{F}$, de support S : $\{a_0;\ \mathrm{E};\ (\lambda_p)\}$, des applications $z \multimap f[(a_\iota), z]$ de E dans **C**, on considère la sous-famille — que l'on désigne par $\mathcal{F}_{\mathbf{R}}$ — définie de la manière suivante : l'application f de $\mathcal{F}$ d'indice (a_ι) appartient à $\mathcal{F}_{\mathbf{R}}$ si et seulement si $(a_\iota) \in \mathbf{R}^n$. Désignant par $\Omega_{\mathbf{R}}(\mathrm{E})$ l'ensemble des valeurs de la restriction à $\mathbf{R}^n$ de l'application de $\mathbf{C}^n$ dans $\mathbf{R}_+^*$,

$$(a_\iota) \longrightarrow \varpi[(a_\iota)],$$

(restriction que l'on convient de noter : $(a_\iota) \longrightarrow \varpi_{\mathbf{R}}[(a_\iota)]$) et désignant par $\mu_{\mathbf{R}}$ l'infimum de $\Omega_{\mathbf{R}}(\mathrm{E})$, il est alors trivial que $\mu_{\mathbf{R}} \geqslant \mu$. On désigne par $\mathcal{F}_{\mathbf{R}}^*$ un sous-ensemble des al-germes dirichletiens des applications de la famille $\mathcal{F}_{\mathbf{R}}$, défini de la manière suivante :

$f[(a_\iota)] \in \mathcal{F}_{\mathbf{R}}^*$ si et seulement si les deux conditions suivantes sont satisfaites

1) $z \to f[(a_\iota), z]$ appartient à $\mathcal{F}_{\mathbf{R}}$ de support S

2) $\varpi_{\mathbf{R}}[(a_\iota)] = \mu_{\mathbf{R}}$.

On remarquera que toutes les propositions antérieures énoncées en considérant la famille $\mathcal{F}$ de support S peuvent être transposées en se limitant à la considération de la sous-famille $\mathcal{F}_{\mathbf{R}}$ de même support S. Dans ce paragraphe, on se propose de prouver que, dans le cas où E est un ensemble compact de $\mathbf{R}$ et où (λ_p) est une D-suite cramérienne sur E, l'ensemble $\mathcal{F}_{\mathbf{R}}^*$ se réduit à un seul élément. Certaines propositions qui suivent sont valables sans les conditions restrictives qu'on vient d'énoncer sur E et sur (λ_p) et sans se limiter à la sous-famille $\mathcal{F}_{\mathbf{R}}$. On rappellera ces conditions et cette limitation dans les cas opportuns.

Proposition (C.1). — *L'ensemble $\mathcal{F}^*$ des polynômes de Dirichlet-Tschebyscheff de support* S : $\{a_0;\ \mathrm{E};\ (\lambda_p)\}$ *contient une infinité d'éléments ou bien se réduit à un seul élément.*

On sait que $\mathcal{F}^* \neq \emptyset$. Si $\mathcal{F}^*$ ne se réduit pas à un seul élément, on considère deux éléments distincts de cet ensemble dont on note $(a_{1,\iota}^*)$ et $(a_{2,\iota}^*)$ les indices (deux éléments de $\mathcal{F}^*$ sont distincts si et seulement si leurs indices sont distincts). On considère en outre la suite des polynômes dirichletiens d'indices (a_ι^p) suivants, indexés par p sur N^* :

$$f[(a_\iota^p)] : \quad \sum_{j=0}^{n} a_{n-j}^p \exp(-z\lambda_j), \quad \text{où} \quad a_0^p = a_0, \quad \forall_p \in \mathbf{N}^*,$$

dont les indices (a_ι^p) satisfont aux relations de recurrence suivantes :

$$\forall p \in \{n \in \mathbf{N} |\ n \geqslant 3\} \quad \text{et} \quad \forall_\iota \in \{1, 2, \ldots, n\} : \\ a_\iota^p = \alpha a_\iota^{p-1} + \beta a_\iota^{p-2}$$

avec $a_\iota^1 = a_{1,\iota}^*$ et $a_\iota^2 = a_{2,\iota}^*$, où α et β sont deux constantes strictement positives vérifiant la condition $\alpha + \beta = 1$. Par construction, les applications de E dans **C** suivantes, $z \multimap f[(a_\iota^p), z]$, indexées par (a_ι^p), appartiennent à la famille $\mathcal{F}$ de support S : $\{a_0; \mathrm{E}; (\lambda_p)\}$. On a,

$$\forall p \in \{n \in \mathbf{N} |\ n \geqslant 3\} : \\ \operatorname{Max}|f[(a_\iota^p), z]| \leqslant \alpha \operatorname{Max}|f[(a_\iota^{p-1}), z]| + \beta \operatorname{Max}|f[(a_\iota^{p-2}), z]|, \quad z \in \mathrm{E}.$$

Si les polynômes d'indices (a_ι^{p-1}) et (a_ι^{p-2}) appartiennent à $\mathcal{F}^*$ (ils appartiennent à $\mathcal{F}^*$ pour $p = 3$, par hypothèse) alors le polynôme d'indice (a_ι^p) appartient aussi à $\mathcal{F}^*$; en effet, on a alors,

$$\varpi[(a_\iota^p)] \leqslant \alpha\varpi[(a_\iota^{p-1})] + \beta\varpi[(a_\iota^{p-2})] = \mu;$$

en outre, $\varpi[(a_\iota^p)]$ ne peut pas être strictement inférieur à μ; donc $\varpi[(a_\iota^p)] = \mu$ et $f[(a_\iota^p)] \in \mathcal{F}^*$. Eu égard à cette remarque, tous les polynômes d'indices (a_ι^p) pour p sur $\mathbf{N}^*$ appartiennent à $\mathcal{F}^*$.

Remarque. — La technique utilisée dans la démonstration de la proposition (C.1) montre que si l'ensemble des indices des éléments de $\mathcal{F}^*$ ne se réduit pas à un point de $\mathbf{C}^n$ alors cet ensemble est nécessairement une partie convexe de $\mathbf{C}^n$. On désigne par $\mathcal{L}$ l'ensemble des indices des éléments de $\mathcal{F}^*$; ainsi $(a_\iota) \in \mathcal{L}$ si et seulement si $f[(a_\iota)] \in \mathcal{F}^*$ (cet indice (a_ι) est alors noté de préférence, comme on l'a déjà précisé antérieurement, (a_ι^*), avec $a_\iota^* = a_\iota$, $\forall i \in \{1, 2, \ldots, n\}$). On convient de dire que les deux polynômes d'indices $(a_{1,\iota}^*)$ et $(a_{2,\iota}^*)$ sont des « *polynômes générateurs* » de la suite $f[(a_\iota^p)]$. On dira aussi que la suite ponctuelle $((a_\iota^p))$ est « *la suite recurrentielle de générateurs* $(a_{1,\iota}^*)$ *pondéré par* α *et* $(a_{2,\iota}^*)$ *pondéré par* β »; les deux points $(a_{1,\iota}^*)$ et $(a_{2,\iota}^*)$ constituent une « *base* » de la suite (a_ι^p).

PROPOSITION (C.2). — *Si la* D-*suite* (λ_p) *du support* S : $\{a_0; \mathrm{E}; (\lambda_p)\}$ *est cramerienne sur* E *et si* $\mathcal{F}^*$ *de support* S *ne se réduit pas à un seul élément alors, les deux points* $(a^*_{1,\iota})$ *et* $(a^*_{2,\iota})$ *appartenant à* $\mathcal{L}$ *et* (a^p_ι) *étant une suite recurrentielle dont ces deux points sont des générateurs respectivement pondérés par* α *et* β *strictement positifs, avec* $\alpha + \beta = 1$, *il existe* n' *points sur* E, *avec* $n' \geqslant n + 1$ (n *étant l'indice du terme maximum de la* D-*suite de la base* S *de* $\mathcal{F}$), *que l'on note*

$$z_k,\ k \in \{0, 1, 2, \ldots, n' - 1\}, \qquad \textit{tels que} \qquad \forall p \in \mathbf{N}^*$$

et $\forall k \in \{0, 1, 2, \ldots, n' - 1\}$:

$$f[(a^*_{1,\iota}),\ z_k] = f[(a^*_{2,\iota}),\ z_k] = f[(a^p_\iota),\ z_k]$$

avec

$$|f[(a^p_\iota),\ z_k]| = \mu = \operatorname{Inf} \Omega(\mathrm{E}).$$

Soit $p_0\ (\geqslant 3) \in \mathbf{N}$. Eu égard à la proposition (B.1′), on sait que l'ensemble

$$\{z \in \mathrm{E} |\ |f[(a^{p_0}_\iota),\ z]| = \mu = \operatorname{Inf} \Omega(\mathrm{E})\},$$

contient $n + 1$ points au moins. On note

$$z_k, \qquad k \in \{0, 1, 2, \ldots, n' - 1\},$$

n' (avec $n' \geqslant n + 1$) points pris sur cet ensemble. On a,

$$f[(a^{p_0}_\iota),\ z_k] = \alpha f[(a^{p_0-1}_\iota),\ z_k] + \beta f[(a^{p_0-2}_\iota),\ z_k].$$

Or

$$|f[(a^{p_0}_\iota),\ z_k]| = \mu \Longrightarrow |f[(a^{p_0-1}_\iota),\ z_k]| = \mu;$$

en effet, si l'implication était fausse, on aurait nécessairement,

$$|f[(a^{p_0-1}_\iota),\ z_k]| = \mu' < \mu$$

puisque, eu égard à $(a^{p_0-1}_\iota) \in \mathcal{L}$, on ne peut pas avoir

$$\operatorname{Max} |f[(a^{p_0-1}_\iota),\ z]| > \mu, \quad z \in \mathrm{E}$$

Il en résulterait,

$$\mu \leqslant \alpha\mu' + \beta\mu'' < \mu, \quad \text{avec} \quad \mu'' = |f[(a^{p_0-2}_\iota),\ z_k]| \leqslant \mu.$$

La contradiction entraîne la validité de l'implication ci-dessus. Le même raisonnement prouve aussi que,

$$|f[(a^{p_0}_\iota),\ z_k]| = \mu \Longrightarrow |f[(a^{p_0-2}_\iota),\ z_k]| = \mu.$$

Il en résulte que,

$$|f[(a_\iota^{p_0}), z_k]| = \mu \Longrightarrow |f[(a_\iota^r), z_k]| = \mu, \quad \forall r \in \{1, 2, \ldots, p_{0-1}\}.$$

Enfin, on a,

$$f[(a_\iota^{p_0-1}), z_k] = f[(a_\iota^{p_0-2}), z_k],$$

sinon, on aurait nécessairement $|f[(a_\iota^{p_0}), z_k]| < \mu$; d'où résulte la proposition (C.2).

Proposition (C.3). — *Si dans le support* S: $\{a_0; \mathrm{E}; (\lambda_p)\}$ *les termes de la* D-*suite* (λ_p) *sont des entiers et si cette* D-*suite est cramerienne sur l'ensemble compact* E *de* **R**, *et si* a_0 *est réel, alors l'ensemble* $\mathcal{F}_{\mathbf{R}}^*$ *des polynômes à coefficients* ***réels*** *de Dirichlet-Tschebyscheff de support* S *se réduit à un seul élément.*

Puisque les termes de la suite (λ_p) sont des entiers, il est trivial que tout polynôme dirichletien

$$f[(a_\iota)]: \qquad \sum_{p=0}^{n} a_{n-p} \exp(-z\lambda_p), \qquad \text{avec} \qquad a_0 \neq 0,$$

est un polynôme taylorien de degré λ_n par rapport à la variable $z^* = \exp(-z)$, ne comportant au plus que les termes de degrés $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_n$. Supposons fausse la proposition ci-dessus. L'ensemble $\mathcal{F}_{\mathbf{R}}^*$ contient alors une infinité d'éléments. Soient (a_ι^{*1}) et (a_ι^{*2}) les indices de deux distincts d'entre eux. Eu égard à la proposition (C.2), il existe, sur E, n' points z_k, $k \in \{0, 1, 2, \ldots, n'-1\}$, avec $n' \geqslant n+1$, tels que,

$$\forall k \in \{0, 1, 2, \ldots, n'-1\}:$$
$$f[(a_\iota^{*1}), z_k] = f[(a_\iota^{*2}), z_k], \qquad \text{avec} \qquad |f[(a_\iota^{*1}), z_k]| = \mu.$$

On considère le polynôme dirichletien

$$\psi_{\mathrm{D}}: \qquad \sum_{p=1}^{n} (a_p^{*1} - a_p^{*2}) \exp(-z\lambda_{n-p}).$$

Ce polynôme admet les n' valeurs $z_k \in \mathrm{E}$ pour racines. On a, $\forall z \in \mathrm{E}$,

$$\psi_{\mathrm{T}}(z^*) = \sum_{p=1}^{n} (a_p^{*1} - a_p^{*2}) z^{*\lambda_{n-p}}.$$

Le polynôme taylorien ψ_T est de degré λ_{n-1} au plus par rapport à la variable z^*. Puisque $(a_\iota^{*1}) \neq (a_\iota^{*2})$, il existe nécessairement un entier $p_0 \in \{1, 2, \ldots, n\}$ satisfaisant à la condition,

$$a_p^{*1} = a_p^{*2}, \quad \forall p \in \{0, 1, 2, \ldots, p_{0-1}\}, \quad \text{et} \quad a_{p_0}^{*1} \neq a_{p_0}^{*2}.$$

Deux cas sont « à priori » possibles; ce sont :

$$n' > \lambda_{n-1} \quad \text{ou bien} \quad n' \leqslant \lambda_{n-1}.$$

Or le cas $n' > \lambda_{n-1}$ est impossible puisque $(a_\iota^{*2}) \neq (a_\iota^{*1})$.

Soit donc $n' \leqslant \lambda_{n-1}$; ce qui implique $\lambda_{n-1} \geqslant n + 1$. On a, $\forall z \in E$, avec $z^* = \exp(-z)$

$$\psi_T(z^*) = (a_{p_0}^{*1} - a_{p_0}^{*2}) \prod_{k=0}^{n'-1} (z^* - z_k^*)\psi_{T,1}(z^*),$$

où le polynôme taylorien ψ_T admet pour racines les n' valeurs strictement positives z_k^*, et où $\psi_{T,1}$ est un polynôme taylorien de la variable z^*, de degré $\lambda_{n-1} - n'$ au plus. Or le nombre des variations présentées par la suite des coefficients de ψ_T est au plus égal à $n - 1$; ce polynôme ψ_T, eu égard au théorème bien connu de Descartes, admet donc au plus $n - 1$ racines réelles positives. Ce résultat est en contradiction avec celui obtenu antérieurement où on a mis en évidence l'existence de $n' \geqslant n + 1$ racines distinctes strictement positives pour ψ_T. De cette contradiction résulte, puisque les coefficients de ψ_T ne sont pas tous égaux à 0, qu'on ne peut pas extraire de $\mathcal{F}_{\mathbf{R}}^*$ deux éléments distincts. $\mathcal{F}_{\mathbf{R}}^*$ se réduit donc à un seul élément.

Remarque. — La proposition (C.3) reste vraie si, un peu plus généralement, les termes de la D-suite finie (λ_p) sont des éléments de Q, et non pas seulement de $\mathbf{N}$, et si cette D-suite est cramerienne sur le compact E de $\mathbf{R}$. En effet, si $\lambda_p \in Q$, $\forall p \in \{0, 1, 2, \ldots, n\}$, alors il existe $n_0 \in \mathbf{N}^*$ tel que $\lambda_p = \lambda'_p/n_0$, $\forall p \in \{0, 1, 2, \ldots, n\}$, où la suite (λ'_p) est une D-suite finie extraite de $\mathbf{N}$. Soit $(a_\iota^*) \in \mathcal{L}_{\mathbf{R}}$ ($\mathcal{L}_{\mathbf{R}}$ désignant l'ensemble des indices des éléments de $\mathcal{F}_{\mathbf{R}}^*$); on a,

$$f[(a_\iota^*), z] = \sum_{p=0}^{n} a_p^* \exp(-z\lambda'_{n-p}/n_0).$$

Supposons fausse l'assertion de (C.3) sous la nouvelle condition relative à (λ_p). L'ensemble $\mathcal{L}_{\mathbf{R}}$ est un ensemble convexe (donc un intervalle) qui alors ne se réduit pas à un seul point. Soient (a_ι^{*1}) et (a_ι^{*2}) deux points de $\mathcal{L}_{\mathbf{R}}$. On considère le polynôme dirichletien,

$$\psi_{\mathrm{D}}: \qquad \sum_{p=1}^{n} (a_p^{*1} - a_p^{*2}) \exp(-z\lambda'_{n-p}/n_0).$$

Posant $z_1 = z/n_0$, le raisonnement fait ci-dessus dans la démonstration de (C.3), utilisant le polynôme ψ_{D} de la variable z, est valable ici mot pour mot avec le nouveau polynôme ψ_{D}, de la variable z_1.

Plus généralement, on énonce :

Proposition (C.4). — *Si la* D-*suite* (λ_p) *du support* S: $\{a_0;\ \mathrm{E};\ (\lambda_p)\}$ *de* $\mathcal{F}$ *est cramérienne sur le compact* $\mathrm{E} \subset \mathbf{R}$, *et si* a_0 *est réel, alors l'ensemble* $\mathcal{F}_{\mathbf{R}}^*$ *des polynômes à coefficients réels de Dirichlet-Tschebyscheff de support* S, *se réduit à un seul élément.*

La démonstration de cette proposition est presque mot pour mot la même que celle de (C.3), aux précautions suivantes près : puisque le polynôme

$$\psi_{\mathrm{T}}: \qquad \sum_{p=1}^{n} (a_p^{*1} - a_p^{*2}) z^{*\lambda_{n-p}}$$

n'est plus ici un polynôme à exposants entiers, il suffit pour la validité de la conclusion, de substituer, dans la démonstration antérieure, à l'utilisation du théorème de Descartes celle d'un théorème bien connu et plus général dû à Laguerre.

D. — On considère la famille des polynômes dirichletiens $\mathcal{F}$ de support S: $\{a_0;\ \mathrm{E};\ (\lambda_p)\}$, où E est un compact de $\mathbf{C}$ et où (λ_p) est une D-suite vérifiant la condition suivante,

$$\forall p \in \{1, 2, \ldots, n\}: \quad \lambda_p = (p+1)\lambda_0, \quad \text{avec} \quad \lambda_0 \in \mathbf{R}_+^*.$$

On remarquera qu'une telle D-suite est nécessairement cramérienne sur tout compact de $\mathbf{C}$ appartenant à une bande de $\mathbf{C}$ — que l'on désigne par $\mathcal{B}\{z_0;\ 2\pi/\lambda_0\}$ — du type

$$\{z \in \mathbf{C} \mid -\pi/\lambda_0 \leqslant \mathfrak{I}(z - z_0) < \pi/\lambda_0\}$$

ou du type

$$\{z \in \mathbf{C} \mid -\pi/\lambda_0 < \mathfrak{J}(z - z_0) \leqslant \pi/\lambda_0\},$$

où z_0 est une constante de $\mathbf{C}$. On convient de dire que $\mathcal{B}\{z_0; 2\pi/\lambda_0\}$ est une « bande horizontale semi-ouverte de $\mathbf{C}$, centrée sur le point z_0, et d'épaisseur égale à $2\pi/\lambda_0$ ». La proposition suivante est élémentaire.

Proposition (D.1). — *Si* (λ_p) *est une* D-*suite satisfaisant à la condition ci-dessus et si* E *est un compact appartenant à une bande* $\mathcal{B}\{z_0; 2\pi/\lambda_0\}$ *alors l'ensemble* $\mathcal{F}^*$ *associé à la famille* $\mathcal{F}$ *de support* $\mathrm{S}: \{a_0; \mathrm{E}; (\lambda_p)\}$ *se réduit à un seul élément.*

Dire que la proposition (D.1) est fausse, sous les conditions relatives à (λ_p) et E, c'est affirmer que $\mathcal{L}$ (qui n'est pas vide) ne se réduit pas à un seul point. Dans le cas de la validité de cette négation, soient donc (a_ι^{*1}) et (a_ι^{*2}) deux points de $\mathcal{L}$. On considère les deux polynômes de Dirichlet-Tschebyscheff de support S, $f[(a_\iota^{*1})]$ et $f[(a_\iota^{*2})]$, et le polynôme d'indice (a_ι^p) de la suite recurrentielle de générateurs (a_ι^{*1}) pondéré par α et (a_ι^{*2}) pondéré par β (α et β étant deux constantes strictement positives satisfaisant à la condition $\alpha + \beta = 1$). Puisque (λ_p) est cramérienne sur E alors, eu égard à la proposition (B.1′), l'ensemble

$$\{z \in \mathrm{E} \mid |f[(a_\iota^p), z]| = \mu; \quad \mu = \operatorname{Inf} \Omega(\mathrm{E})\}$$

contient au moins $n + 1$ points.

On note z_k, $k \in \{1, 2, \ldots, n + 1\}$, $n + 1$ points de cet ensemble. On sait que,

$$\forall k \in \{1, 2, \ldots, n + 1\}: \qquad f[(a_\iota^{*1}), z_k] = f[(a_\iota^{*2}), z_k].$$

Il est trivial que

$$\det \|\exp(-z_k\lambda_p)\|, \qquad \text{avec} \qquad k \in \{1, 2, \ldots, n + 1\}$$

et

$$p \in \{0, 1, 2, \ldots, n\}$$

est égal à

$$\exp\left(-\lambda_0 \sum_{k=1}^{n+1} z_k\right). \det \|\exp[-z_k(\lambda_p - \lambda_0)]\|$$

et on sait que $\det \| \exp [-z_k(\lambda_p - \lambda_0)] \| \neq 0$ est équivalent à

$$\forall k \quad \text{et} \quad \forall k' \quad (\text{avec } k \neq k') \in \{1, 2, \ldots, n+1\} :$$
$$z_{k'} \neq z_k + 2\pi t\iota/\lambda_0, \quad \forall t \in \mathbf{Z}^*.$$

Or il est trivial que $|\mathfrak{I}(z_k - z_{k'})| < 2\pi/\lambda_0$ puisque E appartient à une bande $\mathfrak{B}\{z_0 ; 2\pi/\lambda_0\}$. Donc le système des $n+1$ relations

$$\forall k \in \{1, 2, \ldots, n+1\} : \qquad f[(a_\iota^{*1}), z_k] = f[(a_\iota^{*2}), z_k]$$

implique

$$a_\iota^{*2} = a_\iota^{1*}, \qquad \forall \iota \in \{1, 2, \ldots, n\}$$

(on a par définition $a_0^{*1} = a_0^{*2} = a_0$). Donc $\mathfrak{L}$ se réduit à un point et $\mathfrak{F}^*$ se réduit à un élément.

On peut généraliser très facilement la proposition antérieure — comme il est évident — en énonçant :

Proposition (D.2). — *Si* (λ_p) *est une* D-*suite cramérienne sur le compact* E *de* **C**, *alors l'ensemble* $\mathfrak{F}^*$ *de support* S : $\{a_0 ; \mathrm{E} ; (\lambda_p)\}$ *se réduit à un élément.*

On convient de dire qu'une D-suite finie (λ_p) est cramérienne « au sens strict » sur un compact E de **C** si :

1) elle est cramérienne sur E;

2) pour tout système de $n+1$ valeurs (distinctes) extraites de E — que l'on note z_k, $k \in \{0, 1, 2, \ldots, n\}$ — on a $\det \| \exp(-z_k\lambda_p) \| \neq 0$, k et $p \in \{0, 1, 2, \ldots, n\}$.

On montre facilement que (2) implique (1)

Il est à remarquer que la D-suite (λ_p) considérée antérieurement, vérifiant la condition, $\lambda_p = (p+1)\lambda_0$, $\forall p \in \{1, 2, \ldots, n\}$, $\lambda_0 \in \mathbf{R}_+^*$, est cramérienne au sens strict sur tout compact E de **C** appartenant à une bande $\mathfrak{B}\{z_0 ; 2\pi/\lambda_0\}$.

Proposition (D.3). — $f[(a_\iota^*)]$ *étant un élément de l'ensemble* $\mathfrak{F}^*$ *de support* S, *(*(λ_p) *satisfaisant à la condition précisée dans* (D.1) *et, en outre, étant cramérienne sur* E*), alors il existe dans l'ensemble* $\{z \in \mathrm{E} | \; |f[(a_\iota^*), z]| = \mu ; \; \mu = \operatorname{Inf} \Omega(\mathrm{E})\}$ *au moins un sous-ensemble de* $n+1$ *points — que l'on note* z_k, $k \in \{1, 2, \ldots, n+1\}$ *— satisfaisant à la condition*

$$\forall k \quad \text{et} \quad \forall k' \quad (\text{avec } k \neq k') \in \{1, 2, \ldots, n+1\} :$$
$$z_{k'} - z_k \neq 2\pi t\iota/\lambda_0, \qquad \forall t \in \mathbf{Z}^*.$$

Eu égard au lemme (B.1′), l'ensemble

$$E_\mu = \{z \in E \mid |f[(a_\iota^*), z]| = \mu ; \quad \mu = \operatorname{Inf} \Omega(E)\}$$

contient au moins $n+1$ points. On désigne par E_{n+1} tout sous-ensemble de E_μ formé de $n+1$ points. La négation de l'assertion de (D.3) est équivalente à la proposition suivante :

dans tout E_{n+1} il existe au moins deux points (dépendant bien entendu du sous-ensemble E_{n+1} considéré dans E_μ) z_1 et z_2, auxquels on peut associer $t_{1,2} \in \mathbf{Z}^*$, tels que $z_2 - z_1 = 2\pi\iota t_{1,2}/\lambda_0$. On se place dans le cas de la négation de (D.3). On considère alors un quelconque sous-ensemble E_{n+1} de E_μ que l'on note E_{n+1}^0 et on a pour cet E_{n+1}^0 considéré,

$$\exists z_\alpha \quad \text{et} \quad z_\beta \in E_{n+1}^0, \qquad \exists t_{\alpha,\beta} \in \mathbf{Z}^* : \qquad z_\beta - z_\alpha = 2\pi\iota t_{\alpha,\beta}/\lambda_0.$$

On se propose de prouver que cette relation entre z_β et z_α est incompatible avec l'appartenance, $f[(a_\iota^*)] \in \mathcal{F}^*$, ou, ce qui est équivalent, $(a_\iota^*) \in \mathcal{L}$. Pour cela, on considère le polynôme dirichletien,

$$\varphi[(\theta_\iota)] : \qquad \sum_{\iota=1}^{n} \theta_\iota \exp\left[-(n-\iota+1)\lambda_0 z\right],$$

à coefficients θ_ι indéterminés dans $\mathbf{C}$. Puisque la suite (λ_p), avec $\lambda_p = (p+1)\lambda_0$, est cramérienne sur E, le système des n équations linéaires à n inconnues θ_ι

$$\varphi[(\theta_\iota), z_k] = f[(a_\iota^*), z_k], \qquad k \in \{1, 2, \ldots, n\},$$

(où E_{n+1}^0 a été ordonné en une suite $\{z_1, z_2, \ldots, z_n, z_{n+1}\}$, avec $z_n = z_\alpha$ et $z_{n+1} = z_\beta$) admet une solution (et une seule) que l'on désigne par $\theta_1^*, \theta_2^*, \ldots, \theta_n^*$. Puisqu'il existe $t_{\alpha,\beta} \in \mathbf{Z}^*$ tel que $z_{n+1} - z_n = 2\pi\iota t_{\alpha,\beta}/\lambda_0$, le système des $n+1$ équations linéaires à n inconnues θ_ι

$$\varphi[(\theta_\iota), z_k] = f[(a_\iota^*), z_k], \qquad k \in \{1, 2, \ldots, n+1\},$$

est aussi satisfait par le système des n valeurs θ_ι^*; en effet,

$$\varphi[(\theta_\iota), z_{n+1}] = \varphi[(\theta_\iota), z_n] \quad \text{et} \quad f[(a_\iota^*), z_{n+1}] = f[(a_\iota^*), z_n].$$

On désigne par $E_{\mu,n+1}^0$ le complémentaire de E_{n+1}^0 par rapport à E_μ. On remarquera que deux points quelconques, z' et z'', de la suite (z_p), $p \in \{1, 2, \ldots, n\}$ ne peuvent pas satisfaire à la condition,

$$\exists t \in \mathbf{Z} : \qquad z'' - z' = 2\pi ti/\lambda_0,$$

puisque la D-suite (λ_p) étant cramérienne sur E est à fortiori cramerienne sur tout sous-ensemble de E_μ contenant au moins n points.

Soit $z' \in E^0_{\mu, n+1}$. On désigne par $E^{z'}_{n+1}$ l'ensemble des $n+1$ points formés par les n points de la suite (z_p) et le point z'. Eu égard à la validité de la négation de (II.D.3), on peut trouver un terme de la suite (z_p) — soit z_{p_0} un tel terme — tel que,

$$\exists t_{p_0} \in \mathbf{Z}^* : \qquad z' - z_{p_0} = 2\pi t_{p_0} i/\lambda_0.$$

Donc, l'ensemble des points z' de $E^0_{\mu, n+1}$ peut être réparti en n classes au plus de points de la forme,

$$\forall p \in \{1, 2, \ldots, n\} :$$
$$\mathcal{C}_p = \{z' \in E^0_{\mu, n+1} | \ \exists t' \in \mathbf{Z}^* : \qquad z' - z_p = 2\pi t' \iota/\lambda_0\}$$

(il n'est pas exclu que $\mathcal{C}_p = \emptyset$ pour des valeurs de l'indice $p \in \{1, 2, \ldots, n\}$, et peut être pour toutes si $E^0_{\mu, n+1} = \emptyset$; cas dont l'impossibilité — conditionnellement ou non — n'a été établi par aucun raisonnement dans tout ce qui précède).

Il est à remarquer que,

$$\forall p_1 \quad \text{et} \quad \forall p_2 \quad (\text{avec } p_1 \neq p_2) \in \{1, 2, \ldots, n\} :$$
$$\mathcal{C}_{p_1} \cap \mathcal{C}_{p_2} = \emptyset.$$

En effet, $\mathcal{C}_{p_1}$ et $\mathcal{C}_{p_2}$ étant respectivement supposés non vides, on considère un point quelconque $z'_1 \in \mathcal{C}_{p_1}$ et un point quelconque $z'_2 \in \mathcal{C}_{p_2}$, et on a,

$$\exists t'_1 \in \mathbf{Z}^* : \qquad z'_1 - z_{p_1} = 2\pi \iota t'_1/\lambda_0,$$
$$\exists t'_2 \in \mathbf{Z}^* : \qquad z'_2 - z_{p_2} = 2\pi \iota t'_2/\lambda_0,$$

et donc $z_{p_1} - z_{p_2} = 2\pi i(t'_1 - t'_2)/\lambda_0$; ce qui est impossible puisque (λ_p) est cramerienne sur $\{z_1, z_2, \ldots, z_n\}$.

Considérant une quelconque classe non vide $\mathcal{C}_p$ et un quelconque point $z' \in \mathcal{C}_p$, on a,

$$\exists t'_p \in \mathbf{Z}^* : \qquad z' - z_p = 2\pi \iota t'_p/\lambda_0,$$

et donc

$$f[(a_\iota^*),\ z'] = f[(a_\iota'),\ z_p], \qquad \varphi[(\theta_\iota^*),\ z'] = \varphi[(\theta_\iota^*),\ z_p].$$

On considère le polynôme dirichletien,

$$F[(\alpha_\iota)]: \qquad \sum_{p=0}^{n} \alpha_{n-p} \exp(-z\lambda_p)$$

où les coefficients α_{n-p} sont déterminés comme dans la démonstration de la proposition (B.2), à savoir :

$$\alpha_{n-p} = a_{n-p}^* - \alpha\theta_{n-p}^*, \quad \forall p \in \{0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n\}, \quad \text{avec} \quad \theta_0^* = 0,$$

et l'on a,

$$\forall z \in E: \qquad z \multimap F[(\alpha_\iota),\ z] = f[(a_\iota^*),\ z] - \alpha\varphi[(\theta_\iota^*),\ z]$$

où α est une constante appartenant à $]0,\ 1[$. La suite de la démonstration ne diffère qu'à des détails près de celle de (B.2).

Eu égard à la continuité uniforme de $z \multimap f[(a_\iota^*),\ z]$ et $z \multimap \varphi[(\theta_\iota^*),\ z]$ sur leur support, on a,

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \forall z' \in E_\mu, \quad \exists \delta_\varepsilon > 0, \quad \forall z \in \{E|\ |z - z'| \leqslant \delta_\varepsilon\}:$$
$$|f[(a_\iota^*),\ z] - f[(a_\iota^*),\ z']| < \varepsilon$$
$$|\varphi[(\theta_\iota^*),\ z] - \varphi[(\theta_\iota^*),\ z']| < \varepsilon.$$

(δ_ε étant indépendant de z' sur E_μ).

On désigne par $D_{z',\varepsilon}$ l'ensemble $\{z \in E|\ |z - z'| \leqslant \delta_\varepsilon\}$ et par D_ε l'union des ensembles $D_{z',\varepsilon}$ indexés par z' sur E_μ; on a,

$$D_\varepsilon = \bigcup_{z'} D_{z',\varepsilon}, \qquad z' \in E_\mu,$$

et on pose $E_\varepsilon = E - D_\varepsilon$.

Soit un point quelconque $z_0 \in D_\varepsilon$. On peut toujours trouver un point $z'_{z_0} \in E_\mu$ tel que $z_0 \in D_{z'_{z_0},\varepsilon}$. Par définition de $D_{z'_{z_0},\varepsilon}$, on a,

$$|f[(a_\iota^*),\ z_0] - f[(a_\iota^*),\ z'_{z_0}]| < \varepsilon, \quad \text{avec} \quad |f[(a_\iota^*),\ z_0]| \leqslant \mu$$

et

$$|\varphi[(\theta_\iota^*),\ z_0] - \varphi[(\theta_\iota^*),\ z'_{z_0}]| < \varepsilon.$$

Or, ou bien

$$z'_{z_0} \in \{z_1,\ z_2,\ \ldots,\ z_n,\ z_{n+1}\},$$

et alors

$$f[(a_\iota^*),\ z'_{z_0}] = \varphi[(\theta_\iota^*),\ z'_{z_0}]$$

ou bien $z'_{z_0} \in E^0_{\mu, n+1}$ et alors

$$\exists z_{p_0} \in \{z_1,\ z_z,\ \ldots,\ z_n\} \quad \text{et} \quad \exists t_{p_0} \in \mathbf{Z}^* :$$
$$z'_{z_0} - z_{p_0} = 2\pi i t_{p_0}/\lambda_0,$$

et donc

$$f[(a_\iota^*),\ z'_{z_0}] = f[(a_\iota^*),\ z_{p_0}] \quad \text{et} \quad \varphi[(\theta_\iota^*),\ z'_{z_0}] = \varphi[(\theta_\iota^*),\ z_{p_0}]$$

Or

$$f[(a_\iota^*),\ z_{p_0}] = \varphi[(\theta_\iota),\ z_{p_0}]$$

et ainsi,

$$f[(a_\iota^*),\ z'_{z_0}] = \varphi[(\theta_\iota^*),\ z'_{z_0}].$$

On poursuit alors le raisonnement comme dans la démonstration des propositions (B.1) et (B.1′).

Remarque (1). — Eu égard à la définition d'une suite cramerienne sur un compact, la proposition suivante est triviale :

$f[(a_\iota^*)]$ *étant un élément de* $\mathcal{F}^*$ *de support* $S((\lambda_p)$ *satisfaisant à la condition précisée dans* (D.1) *et, en outre, étant cramerienne sur* E) *alors pour tout sous-ensemble* E_n *de* n *points de*

$$\{z \in E \mid |f[(a_\iota^*),\ z]| = \mu\}$$

on a,

$$\forall z \quad \text{et} \quad \forall z' \quad (\text{avec } z \neq z') \in E_n :$$
$$z - z' \neq 2\pi\iota t/\lambda_0, \qquad \forall t \in \mathbf{Z}^*.$$

Remarque (2). — Si la D-suite (λ_p) satisfait à la condition précisée dans (D.1) et, en outre, est « strictement cramerienne » sur le compact $E \subset \mathbf{C}$, alors la proposition (D.3) est triviale. Plus généralement, on énonce :

Proposition (D.3′). — *Si la* D-*suite* (λ_p) *vérifie la condition, il existe un nombre* $\nu > 0$ *et une suite d'entiers* $\{t_0, t_1, \ldots, t_n\}$ *telle que*

$$\forall p \in \{0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n\} : \qquad \nu = t_p/\lambda_p,$$

et si, en outre, (λ_p) *est strictement cramerienne sur le compact* $E \subset \mathbf{C}$, *alors il existe au moins un sous-ensemble* E_{n+1} *de*

$n+1$ points de

$$\{z \in E \mid |f[(a_i^*), z]| = \mu, \quad \text{où } f[(a_i^*)] \in \mathcal{F}^* \text{ de support S, et } \mu = \operatorname{Inf} \Omega(E)\}$$

on a, $\forall z$ *et* $\forall z'$ *(avec* $z \neq z'$*)* $\in E_{n+1}$:

$$z - z' \neq 2\pi i t \nu, \qquad \forall t \in \mathbf{Z}^*.$$

Proposition (D.4). — *Sous les conditions relatives à* (λ_p) *et* E *précisées dans* (D.3), *l'ensemble* $\mathcal{F}^*$ *se réduit à un seul élément.*

La démonstration de cette proposition est analogue à celle de (D.1).

Proposition (D.4′). — *Sous les conditions relatives à* (λ_p) *et* E *précisées dans* (D.3′), $\mathcal{F}^*$ *se réduit à un seul élément.*

(D.4) et (D.4′) sont comme (D.1) contenues dans (D.2).

Manuscrit reçu le 11 juillet 1967

Maurice Blambert
et Georges Chevalier,
Faculté des Sciences de Grenoble
Institut Fourier
Place du Doyen Gosse
38-Grenoble.