



ANNALES

DE

L'INSTITUT FOURIER

Yann JULLIAN

Construction du cœur compact d'un arbre réel par substitution d'arbre

Tome 61, n° 3 (2011), p. 851-904.

http://aif.cedram.org/item?id=AIF_2011__61_3_851_0

© Association des Annales de l'institut Fourier, 2011, tous droits réservés.

L'accès aux articles de la revue « Annales de l'institut Fourier » (<http://aif.cedram.org/>), implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://aif.cedram.org/legal/>). Toute reproduction en tout ou partie cet article sous quelque forme que ce soit pour tout usage autre que l'utilisation à fin strictement personnelle du copiste est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

cedram

*Article mis en ligne dans le cadre du
Centre de diffusion des revues académiques de mathématiques
<http://www.cedram.org/>*

CONSTRUCTION DU CŒUR COMPACT D'UN ARBRE RÉEL PAR SUBSTITUTION D'ARBRE

par Yann JULLIAN

RÉSUMÉ. — Étant donné un automorphisme σ d'un groupe libre et un représentant topologique train-track de son inverse, on peut construire un arbre réel T appelé arbre répulsif de σ . Le groupe libre agit sur T par isométries. La dynamique engendrée par σ peut être représentée par l'action du groupe libre restreinte à un sous-ensemble compact bien choisi du complété métrique de T . Cet article construit ce sous-ensemble sur une classe d'exemples en introduisant des opérations appelées substitutions d'arbre ; on mettra en évidence les relations entre la construction par substitution d'arbre et la dynamique symbolique sous-jacente.

ABSTRACT. — Let σ be an automorphism of the free group. Using a train-track representative of its inverse, one can construct the repelling tree T of σ . The free group acts on T by isometries. The dynamical system generated by σ can be interpreted geometrically by the action of the free group restricted to a compact subset of the metric completion of T . This article gives a construction of this subset on a class of examples by introducing tree substitutions. We will insist on the connections between the construction using a tree substitution and the initial symbolic dynamical system.

Introduction

On distingue deux grandes classes de systèmes symboliques ; les décalages de type fini ([21]), et les systèmes substitutifs ([25]). Les derniers sont souvent de bons candidats pour décrire des systèmes auto-similaires, c'est-à-dire des systèmes dont la dynamique globale se retrouve localement par l'application premier retour ([2]). On se pose ici le problème inverse ; étant donné un système dynamique substitutif, peut-on interpréter géométriquement sa dynamique ? Cette question a été largement étudiée et abordée

Mots-clés : substitution d'arbre, dynamique symbolique, substitution, combinatoire des mots, automorphisme de groupe libre, arbre réel, système d'isométries.

Classification math. : 37B10, 20E08, 20F65.

sous des angles multiples, et chaque méthode vient avec son propre jeu de restrictions. On citera par exemple les fractals de Rauzy ([27], [2], [7]) ou les échanges d'intervalles ([18], [29], [26]), dont la dynamique symbolique est engendrée par un échange de domaines. Une condition suffisante pour l'existence d'un fractal de Rauzy (et d'un échange de domaines défini à ensembles de mesures nulles près sur ce fractal) est donnée dans [2] et [7]; si la matrice d'incidence de la substitution est unimodulaire Pisot et si la substitution vérifie la condition de forte coïncidence, alors on peut définir un fractal de Rauzy qui supporte la dynamique de la substitution. Dans le cas des échanges d'intervalles, il est par exemple nécessaire que la matrice d'incidence de la substitution soit symplectique ([30]). En règle générale, la question de l'existence d'un fractal de Rauzy (et d'un échange de domaines bien défini) ou d'un échange d'intervalles permettant de représenter la dynamique d'un système substitutif est encore largement ouverte. On note que ces représentations sont basées sur la minimalité des systèmes dynamiques symboliques engendrés par une classe de substitutions; les substitutions primitives. On rappellera les propriétés les plus importantes de ces systèmes en section 1.

Toute substitution sur un alphabet A peut s'étendre en un endomorphisme du groupe libre de base A . Tandis que la théorie générale des endomorphismes de groupe libre est encore incertaine, celle des automorphismes est beaucoup plus développée ([12], [4], [3]), et c'est dans ce cadre que nous nous placerons. En général, la dynamique engendrée par un automorphisme est plus compliquée que celle d'une substitution; des annulations peuvent se produire. Dans [4], M. Bestvina et M. Handel donnent des méthodes pour contrôler ces annulations, et définissent notamment les représentants topologiques (applications $f : G \rightarrow G$, où G est un graphe topologique) train-track des automorphismes de groupe libre. Pour une métrique bien choisie sur G , une application train-track étend uniformément les arcs de G (en multipliant leurs longueurs par un facteur constant).

La dynamique des automorphismes de groupe libre est souvent représentée par des actions de groupe libre sur des arbres réels. Se servant des résultats de [4], D. Gaboriau, A. Jaeger, G. Levitt et M. Lustig associent dans [15] un arbre réel T_α à tout automorphisme α de groupe libre. L'arbre T_α est muni d'une action (non-triviale, minimale et avec des stabilisateurs d'arcs triviaux) du groupe libre par isométries, et l'action de l'automorphisme α est représentée par une homothétie sur T_α . Lorsque le train-track représentant α est strictement dilatant, l'action est à orbites denses. Rejoignant les travaux de G. Levitt et M. Lustig dans [19], on peut

alors construire une application équivariante surjective Q de ∂F (le bord de Gromov du groupe libre F) dans $\overline{T_\alpha} \cup \partial T_\alpha$ (où $\overline{T_\alpha}$ est le complété métrique de T_α et ∂T_α est son bord de Gromov). Cette application traduit l'action du groupe libre sur son bord en termes d'isométries sur l'arbre. D'autres définitions de Q peuvent être trouvées dans [10] et [11]. Dans [11], elle est utilisée pour définir un compact (l'ensemble limite ou cœur) (inclus dans \overline{T}) associé à tout arbre T défini avec une action (par isométries) du groupe libre très petite, minimale, et à orbites denses. On s'intéresse aux dynamiques induites par l'action du groupe libre sur ces compacts.

La section 2 définit une nouvelle notion : les substitutions d'arbre. Combinatoirement, les substitutions d'arbre peuvent être vues comme des généralisations des substitutions sur les mots ; notamment, toute substitution induit naturellement une substitution d'arbre. Dans [16, chapitre 4, 5], on étudie les propriétés de ces objets, et on explique comment elles permettent d'obtenir des compacts invariants par constructions graphe-dirigées (au sens de [23]). Dans le cadre de cet article, elles sont utilisées comme un moyen simple de construire des arbres réels compacts auto-similaires. On associera un arbre réel à tout arbre simplicial ; la section 2.3 décrit un espace adapté à ces réalisations. La substitution d'arbre produira ainsi une suite convergente d'arbre réel et on s'intéressera à l'arbre limite.

Étant donnée une substitution, l'objectif est de construire une substitution d'arbre, et d'obtenir grâce à elle un arbre réel auto-similaire et une partition de celui-ci ; cette partition nous permettra de définir un échange de domaines conjugué au système dynamique engendré par la substitution initiale. L'objet principal de cet article est de proposer une telle construction pour la famille particulière d'exemples définie au paragraphe suivant. On insistera sur le fait que la substitution d'arbre permet de mettre en évidence les propriétés géométriques et dynamiques de l'arbre limite. On prouvera notamment que les points de branchement (points de valence au moins trois) de cet arbre sont exactement les points dont l'orbite est codée par un décalé du point fixe de la substitution initiale. On effectuera également une étude détaillée de la combinatoire du système symbolique, en particulier des facteurs bispéciaux de son langage ; on montrera comment ces derniers interviennent dans la construction des points de branchement et permettent d'expliquer en quoi la substitution d'arbre « reflète » la dynamique engendrée par la substitution. Ce travail est effectué en section 3.

Chaque substitution σ de la famille considérée est primitive inversible, et on la considère comme un automorphisme de groupe libre. Dans la section 4, on définira l'arbre T de [15] associé à l'automorphisme σ^{-1} , inverse de σ ,

et on montrera que le compact obtenu en section 3 peut être vu comme une partie de \overline{T} , le complété métrique de T . Cette partie est à rapprocher de l'ensemble limite décrit dans [11].

Énoncé des résultats

Soit $d \geq 3$. On note A l'alphabet $A = \{1, 2, \dots, d\}$ et A^* l'ensemble des mots finis à lettres dans A ; le mot vide est noté ϵ . La substitution (morphisme du monoïde A^*) primitive σ est définie par :

$$\begin{aligned} \sigma : 1 &\mapsto 12 \\ k &\mapsto (k+1) \text{ pour } 2 \leq k \leq d-1 \\ d &\mapsto 1 \end{aligned}$$

L'application décalage est l'application S de $A^{\mathbb{N}}$ dans $A^{\mathbb{N}}$ qui à un mot $V = (V_i)_{i \in \mathbb{N}}$ associe $S(V) = (V_{i+1})_{i \in \mathbb{N}}$. Soit ω le mot de $A^{\mathbb{N}}$ défini par $\omega = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sigma^n(1)$; on note Ω^+ l'adhérence de l'orbite de ω sous l'action de S . Le système dynamique symbolique (Ω^+, S) engendré par σ est minimal et uniquement ergodique (cf. [25]).

Dans la section 2, nous introduirons la notion de substitution d'arbre. Un arbre simplicial (graphe connexe sans cycle) est la donnée d'un couple $(\mathcal{V}, \mathcal{E})$, où \mathcal{V} est un ensemble de sommets (pris dans un ensemble non dénombrable quelconque) et \mathcal{E} est une partie de $\mathcal{V} \times \mathcal{V} \times A_\tau$ (où A_τ est un alphabet); les arêtes sont orientées et colorées par les éléments de A_τ . L'ensemble des arbres finis (au sens du nombre d'arêtes) ainsi définis est noté $\mathcal{S}_0(A_\tau)$, et on note $\mathcal{S}_E(A_\tau)$ l'ensemble des arbres de $\mathcal{S}_0(A_\tau)$ constitués d'une unique arête.

DÉFINITION 0.1. — Une **substitution d'arbre** est une application τ de $\mathcal{S}_E(A_\tau)$ dans $\mathcal{S}_0(A_\tau)$ telle que :

- pour tout $X \in \mathcal{S}_E(A_\tau)$, les sommets de X sont des sommets de $\tau(X)$,
- les images par τ de deux arbres de $\mathcal{S}_E(A_\tau)$ de même couleur sont égales à renommage des sommets près.

L'application τ s'étend naturellement en une application de $\mathcal{S}_0(A_\tau)$ dans $\mathcal{S}_0(A_\tau)$ en prenant l'union des images des arêtes. On pourra par exemple se reporter aux figures 0.1 et 0.2.

Nous construirons une substitution d'arbre associée à σ . On note

$$A_\tau = \{1, \dots, d, (d+1), \dots, (2d-2)\};$$

l'alphabet A_τ contient A , ainsi que $d - 2$ lettres supplémentaires. Pour tout $i \in A_\tau$, l'arbre $X_i = (\{x, y\}, \{(x, y, i)\})$ est un élément de $\mathcal{S}_E(A_\tau)$, et on définit τ par :

- $\tau(X_1) = X_d$,
- l'image de X_2 est représentée sur la figure 0.1,
- $\tau(X_i) = X_{i-1}$ si $3 \leq i \leq d$,
- $\tau(X_{d+1}) = X_1$,
- $\tau(X_i) = X_{i-1}$ si $d + 2 \leq i \leq 2d - 2$.

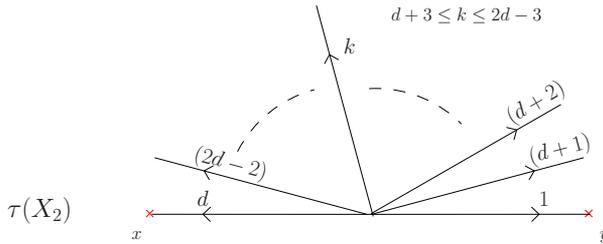


FIGURE 0.1. Substitution d'arbre associée à σ .

On appelle T_0^s (l'exposant s indique qu'il s'agit d'un arbre simplicial) l'arbre constitué d'un sommet x_0 et de d arêtes colorées $1, 2, \dots, d$ sortant de x_0 . Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit $T_n^s = \tau^n(T_0^s)$, et on note \mathcal{V}_n^s l'ensemble des sommets de T_n^s . La figure 0.2 illustre l'action de τ sur T_0^s (dans le cas $d = 3$).

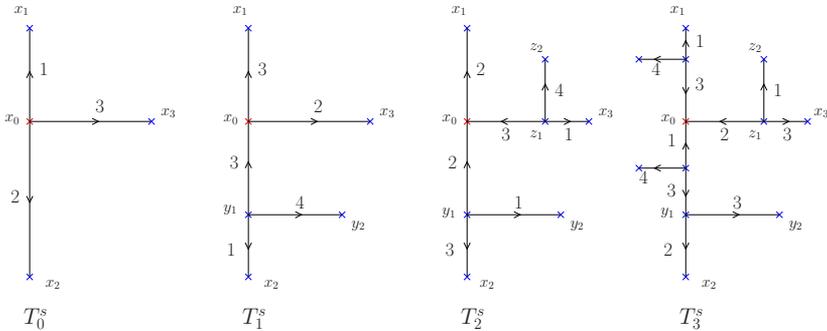


FIGURE 0.2. Représentation de $T_0^s, T_1^s, T_2^s, T_3^s$ dans le cas $d = 3$.

Un arbre réel T est un espace métrique géodésique et 0-hyperbolique ; le degré d'un point x de T est le nombre de composantes connexes de $T \setminus \{x\}$.

L'espace \mathcal{R}^d (décrit dans la section 2.3) est un arbre réel qui contient tous les arbres réels possédant un nombre fini de points de branchement (points de degré > 2), et dont les points sont de degré maximal ($2d$). Réaliser l'arbre simplicial T_n^s consiste à considérer chaque arête comme un segment de \mathbb{R} ; on obtient ainsi une partie de \mathcal{R}^d . Par définition des substitutions d'arbre, $\mathcal{V}_n^s \subset \mathcal{V}_{n+1}^s$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Si on impose en plus que deux arêtes de T_n^s de même couleur sont envoyées sur deux segments de même longueur, alors la suite $(T_n)_n$ de réalisations est définie de manière unique à homothétie près ([16, section 5.5]). La suite $(T_n)_n$ ainsi obtenue est une suite de Cauchy (pour la distance de Hausdorff) et converge vers un arbre réel compact T_τ de $\overline{\mathcal{R}^d}$, le complété métrique de \mathcal{R}^d . On définira, en utilisant les propriétés combinatoires de la substitution d'arbre, une application surjective $f_Q : \Omega^+ \rightarrow T_\tau$, et on verra que f_Q réalise une conjugaison entre le système symbolique et un système d'isométries partielles sur T_τ . La construction de cette application passe par une étude détaillée de la combinatoire du système symbolique et des points de branchement de la substitution d'arbre. On montrera en particulier que f_Q est une bijection de l'ensemble des décalés du point fixe de la substitution σ dans l'ensemble des points de branchement de T_τ , et on mettra en évidence une relation entre ces points de branchement et les facteurs bispéciaux du langage.

Une des ambitions de cet article est de poser les bases d'une théorie plus générale. Étant donnée une substitution inversible, on voudrait pouvoir se servir des propriétés du système dynamique engendré que l'on connaît bien pour construire de manière systématique une substitution d'arbre associée. À cet effet, on met en évidence, sur l'exemple proposé, une relation fondamentale entre le système dynamique (Ω^+, S) et la substitution d'arbre.

Un arc $[s, t]$ (segment géodésique reliant s à t) d'un arbre T_n est dit **simple** si s et t sont les seuls points de $[s, t]$ de degré $\neq 2$ (dans T_n). Tout arbre T_n se décompose naturellement en arcs simples, et cette décomposition se traduit (par application de la substitution d'arbre) en une partition (modulo un ensemble fini) de T_τ . La partition de T_τ ainsi obtenue se relève (par f_Q^{-1}) en une partition de Ω^+ qui est dite **déterminée** par T_n .

On note $\mathfrak{L}(\Omega^+)$ l'ensemble des facteurs (sous-mots finis) des éléments de Ω^+ . Pour tout mot u de $\mathfrak{L}(\Omega^+)$, on note P_u l'ensemble des mots V de Ω^+ tels que uV appartient encore à Ω^+ et pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, on note $\mathcal{P}_m = \{P_u; |u| = m\}$.

On peut maintenant énoncer les résultats principaux. Soit $d \geq 3$, soit σ la substitution définie par $\sigma(1) = 12$, $\sigma(k) = (k + 1)$ (pour $2 \leq k \leq d - 1$) et $\sigma(d) = 1$, et soit (Ω^+, S) le système dynamique engendré par σ . On

définit une substitution d'arbre τ associée à σ et on décrit, grâce aux arbres $T_n^s = \tau^n(T_0^s)$, une suite $(T_n)_n$ d'arbres réels convergente vers un arbre réel T_τ .

THÉORÈME 0.2. — *Tout arbre T_n détermine une partition \mathcal{P}_m (pour un certain m défini explicitement en fonction de n) de Ω^+ .*

On étudie les partitions \mathcal{P}_m atteintes (toutes ne le sont pas). On note μ l'unique mesure de probabilité du système symbolique et on s'intéresse au cardinal de l'ensemble \mathcal{P}_m / \sim où $P_u \sim P_v$ lorsque $\mu(P_u) = \mu(P_v)$. Ce cardinal prend la valeur (d) si $m = 1$, la valeur $(2d - 2)$ si et seulement si $\mathfrak{L}(\Omega^+)$ contient un mot $u \neq \epsilon$ bispécial (il existe au moins 2 prolongements à droite et au moins 2 prolongements à gauche de u dans $\mathfrak{L}(\Omega^+)$) de longueur $m - 1$, et la valeur $(2d - 1)$ sinon. On montre alors le théorème suivant.

THÉORÈME 0.3. — *T_0 détermine \mathcal{P}_1 . La partition \mathcal{P}_m , $m > 1$, est déterminée par un arbre T_n si et seulement si $\#(\mathcal{P}_m / \sim) = 2d - 2$.*

La substitution σ considérée est inversible, et on note encore σ l'automorphisme du groupe libre de base A (désormais noté F_d) engendré par la substitution, et σ^{-1} son inverse.

On note $T_{\Phi^{-1}}$ l'arbre invariant de σ^{-1} (comme défini dans [15]). On utilise les résultats énoncés dans [19] pour construire une application Q surjective de ∂F_d dans $\bar{T}_{\Phi^{-1}} \cup \partial T_{\Phi^{-1}}$ (où $\bar{T}_{\Phi^{-1}}$ est le complété métrique de $T_{\Phi^{-1}}$ et $\partial T_{\Phi^{-1}}$ est son bord de Gromov). On considère Ω^+ comme une partie de ∂F_d . Si $V = aV' \in \Omega^+$ avec $a \in A$, la propriété d'équivariance vérifiée par Q assure notamment que $Q(V') = a^{-1}Q(V)$ (ici a^{-1} est la translation associé à l'action du groupe libre sur $T_{\Phi^{-1}}$), ce qui nous permet à nouveau de représenter géométriquement l'action du décalage sur Ω^+ .

THÉORÈME 0.4. — *Il existe une bijection isométrique de T_τ dans $Q(\Omega^+)$.*

La démonstration repose sur le fait que l'application f_Q définie précédemment grâce à la substitution d'arbre « copie » l'application $Q : si d_∞ est la distance sur $Q(\Omega^+)$ et d_{T_τ} la distance sur T_τ , on a$

$$\forall V_1, V_2 \in \Omega^+, d_\infty(Q(V_1), Q(V_2)) = d_{T_\tau}(f_Q(V_1), f_Q(V_2)).$$

On conclut (section 5) par une discussion sur la généralisation des résultats à d'autres automorphismes.

1. Combinatoire des mots

1.1. Système dynamique symbolique

On rappelle ici des notions classiques de dynamique symbolique ; pour plus d'informations sur le sujet, on pourra par exemple consulter [25] ou [14].

On considère un alphabet fini A , et on note A^* l'ensemble des mots finis sur A (le mot vide est noté ϵ), $A^{-\mathbb{N}^*}$ l'ensemble des mots infinis à gauche, $A^{\mathbb{N}}$ l'ensemble des mots infinis à droite, et $A^{\mathbb{Z}}$ l'ensemble des mots bi-infinis. Ces ensembles sont munis de la topologie produit. On écrira un mot W de $A^{\mathbb{Z}}$ en le pointant entre W_{-1} et W_0 ; $W = \dots W_{-2}W_{-1}.W_0W_1W_2\dots$

Soit $w = w_0w_1\dots w_p$ un mot de A^* . La longueur de w est $|w| = p + 1$. Le mot w est **préfixe** d'un mot $v \in A^*$ (resp. $V \in A^{\mathbb{N}}$) s'il existe $v' \in A^*$ (resp. $V' \in A^{\mathbb{N}}$) tel que $v = wv'$ (resp. $V = wV'$). Le mot w est **suffixe** d'un mot $u \in A^*$ (resp. $U \in A^{-\mathbb{N}^*}$) s'il existe $u' \in A^*$ (resp. $U' \in A^{-\mathbb{N}^*}$) tel que $u = u'w$ (resp. $U = U'w$).

Le **langage** $\mathfrak{L}(W)$ d'un mot W est l'ensemble de tous les mots finis qui apparaissent dans W . Un élément de $\mathfrak{L}(W)$ est appelé **facteur** de W . On dit qu'un facteur u de $\mathfrak{L}(W)$ est **spécial à gauche** (resp. **à droite**) s'il existe deux éléments distincts a et b de A tels que les mots au et bu (resp. ua et ub) sont encore dans $\mathfrak{L}(W)$. Un facteur est **bispécial** s'il est à la fois spécial à gauche et à droite.

On note S l'application **décalage** sur $A^{\mathbb{N}}$ (ou $A^{\mathbb{Z}}$) qui à tout mot $W = (W_i)_i$ (pour $i \in \mathbb{N}$ ou \mathbb{Z}) associe le mot $S(W) = (W_{i+1})_i$. Le **système dynamique bilatère** engendré par un mot W est le couple $(\Omega(W), S)$, où $\Omega(W) = \{W' \in A^{\mathbb{Z}}; \mathfrak{L}(W') \subset \mathfrak{L}(W)\}$. Notons que l'ensemble $\Omega(W)$ est l'adhérence dans $A^{\mathbb{Z}}$ de l'orbite de W sous l'action de S ; il est compact pour la topologie induite par celle de $A^{\mathbb{Z}}$ et la restriction de S à $\Omega(W)$, encore notée S , est un homéomorphisme.

On définit de même un **système dynamique unilatère** $\Omega^+(W)$ en se plaçant dans $A^{\mathbb{N}}$ (dans ce cas S n'est pas une bijection). Un mot V de $\Omega^+(W)$ sera dit **spécial à gauche** s'il existe deux éléments distincts a et b de A tels que les mots aV et bV sont encore dans $\Omega^+(W)$.

Une **substitution** est un morphisme σ pour la concaténation du monoïde libre A^* , qui envoie A sur $A^* \setminus \{\epsilon\}$, et tel qu'il existe une lettre a de A pour laquelle $\lim_{n \rightarrow +\infty} |\sigma^n(a)| = +\infty$. La substitution se prolonge de manière naturelle aux ensembles $A^{-\mathbb{N}^*}$, $A^{\mathbb{N}}$ et $A^{\mathbb{Z}}$ par concaténation.

Si σ est une substitution sur $\{1, 2, \dots, d\}$, on note M_σ la **matrice d'incidence** de σ , dont le coefficient (i, j) est le nombre d'occurrences de la lettre i dans $\sigma(j)$.

Une matrice est dite **primitive** s'il existe une puissance de cette matrice dont les coefficients sont tous strictement positifs. Le théorème de Perron-Frobenius implique que M_σ admet alors une valeur propre dominante simple, qui est réelle positive et un vecteur propre associé à cette valeur propre à coefficients strictement positifs. Une substitution est **primitive** si et seulement si sa matrice d'incidence est primitive.

Toute substitution primitive σ possède un mot périodique bi-infini (mot $W \in A^{\mathbb{Z}}$ tel que $\sigma^k(W) = W$ pour un certain $k \in \mathbb{N}^*$). Soit W un mot périodique par σ . Par primitivité, l'ensemble $\Omega(W)$ ne dépend pas de W ; on le note Ω . Le couple (Ω, S) est le **système dynamique symbolique** engendré par σ . De même, $\mathfrak{L}(W)$ ne dépend pas de W et on le note $\mathfrak{L}(\Omega)$. Si la substitution est primitive, le système (Ω, S) est minimal (il ne possède pas de fermé invariant par S non trivial) et uniquement ergodique (il existe une unique mesure de probabilité invariante par S) (voir [25]).

Le **système dynamique symbolique unilatère** possède des propriétés similaires, si ce n'est que le décalage S n'est pas une bijection sur cet ensemble. On note que la projection canonique du système bilatère sur le système unilatère est injective sauf sur un ensemble dénombrable où elle est fini-à-un ([25]).

1.2. Automate et développement en préfixes-suffixes

On pourra se référer à [28, chapitre 2] et [6] pour plus de détails sur cette section.

Soit σ une substitution primitive non S -périodique (si $W \in \Omega$ vérifie $\sigma^k(W) = W$ pour un certain $k \in \mathbb{N}^*$, alors pour tout $h \in \mathbb{N}^*$, $S^h(W) \neq W$) sur un alphabet de cardinal fini A et soit (Ω, S) , $\Omega \subset A^{\mathbb{Z}}$, le système symbolique engendré par σ . On définit l'automate A_σ associé à la substitution σ par :

- A est l'ensemble des états ; tous les états sont initiaux,
- $P = \{(p, a, s) \in A^* \times A \times A^*; \exists b \in A; \sigma(b) = pas\}$ est l'ensemble des couleurs,
- il existe une flèche entre les états a et b colorée par $e = (p, a, s)$ si $\sigma(b) = pas$.

Cet automate est fortement connexe si σ est primitive. Un exemple est donné figure 1.1.

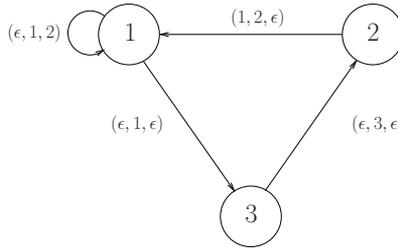


FIGURE 1.1. Automate des préfixes-suffixes associé à $\sigma : 1 \mapsto 12, 2 \mapsto 3, 3 \mapsto 1$.

Un élément $(e_i)_{i \geq 0} \in P^{\mathbb{N}}$ est dit **admissible** s'il s'agit d'un mot infini reconnu par l'automate des préfixes-suffixes. On note D l'ensemble des éléments admissibles de $P^{\mathbb{N}}$.

PROPOSITION 1.1. — Si $(p_i, a_i, s_i)_{i \geq 0}$ est un élément de D , alors pour tout $i \geq 0, \sigma(a_{i+1}) = p_i a_i s_i$ et pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a

$$\sigma^k(a_k) = \sigma^{k-1}(p_{k-1}) \dots \sigma(p_1) p_0 a_0 s_0 \sigma(s_1) \dots \sigma^{k-1}(s_{k-1}).$$

Notamment, le mot $s_0 \sigma(s_1) \dots \sigma^{k-1}(s_{k-1})$ est un suffixe strict de $\sigma^k(a_k)$ et le mot $\sigma^{k-1}(p_{k-1}) \dots \sigma(p_1) p_0$ est un préfixe strict de $\sigma^k(a_k)$.

Dans [6], V. Canterini et A. Siegel explicitent une application $\Gamma : \Omega \rightarrow D$ qui met en évidence la structure auto-similaire de Ω . Si $W \in \Omega, W = U.V$ (où $U \in A^{-\mathbb{N}^*}$ et $V \in A^{\mathbb{N}}$) et $\Gamma(W) = (p_i, a_i, s_i)_{i \in \mathbb{N}}$,

- si $(s_i)_{i \in \mathbb{N}}$ n'est pas ultimement constante égale à ϵ , alors

$$V = \lim_{n \rightarrow +\infty} a_0 s_0 \sigma(s_1) \dots \sigma^n(s_n),$$

- si $(p_i)_{i \in \mathbb{N}}$ n'est pas ultimement constante égale à ϵ , alors

$$U = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sigma^n(p_n) \dots \sigma(p_1) p_0.$$

Les différents cas sont abordés au paragraphe suivant.

THÉORÈME 1.2 ([6]). — Si σ est primitive et non S -périodique, l'application Γ est continue surjective de Ω sur D . Elle est injective sur l'ensemble $\Omega \setminus (\bigcup_{n \in \mathbb{Z}} S^n(\Omega_{per}))$ (où $\Omega_{per} \subset \Omega$ est l'ensemble des mots périodiques par σ) et est donc injective en mesure. De plus, pour tout d de $D, \#(\Gamma^{-1}(\{d\})) \leq \#(\Omega_{per})$.

La suite $\Gamma(W)$ est le **développement en préfixes-suffixes** de W .

On note D_{min}, D_{max} et D_ϵ les sous-ensembles de D définis par :

- $D_{\min} = \{(p_i, a_i, s_i)_{i \geq 0} \in D; \forall i \in \mathbb{N}, p_i = \epsilon\}$
- $D_{\max} = \{(p_i, a_i, s_i)_{i \geq 0} \in D; \forall i \in \mathbb{N}, s_i = \epsilon\}$
- $D_\epsilon = \{(p_i, a_i, s_i)_{i \geq 0} \in D; (\exists i_0 \in \mathbb{N}; \forall i \geq i_0, p_i = \epsilon) \text{ ou } (\exists i_0 \in \mathbb{N}; \forall i \geq i_0, s_i = \epsilon)\}$.

L'ensemble des mots bi-infinis périodiques par σ est encore noté Ω_{per} .

THÉOREME 1.3 ([6]). — *Les égalités suivantes sont vérifiées.*

- $\Gamma(\Omega_{per}) = D_{\min}$ et $\Gamma^{-1}(D_{\min}) = \Omega_{per}$
- $\Gamma(S^{-1}(\Omega_{per})) = D_{\max}$ et $\Gamma^{-1}(D_{\max}) = S^{-1}(\Omega_{per})$
- $\Gamma(\bigcup_{n \in \mathbb{Z}} S^n(\Omega_{per})) = D_\epsilon$ et $\Gamma^{-1}(D_\epsilon) = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} S^n(\Omega_{per})$.

1.3. Le groupe libre et son bord

On pourra se reporter à [22] pour une introduction aux groupes libres, et à [17] pour des définitions et résultats concernant les bords des groupes hyperboliques.

On note F_n le groupe libre de rang $n \geq 2$. Une base A étant fixé, on peut voir $F_n = F(A)$ comme l'ensemble des mots (finis) $u = u_0 \dots u_k$, ($u_i \in A \cup A^{-1}$) réduits ($u_i \neq u_{i+1}^{-1}$); l'élément neutre est noté ϵ . La loi du groupe est la concaténation-réduction.

Le bord (de Gromov) ∂F_n de F_n peut être vu comme l'ensemble $\partial F(A)$ des mots $V = V_0 \dots V_k \dots$ infinis à droite, réduits sur l'alphabet $A \cup A^{-1}$. On munit $A \cup A^{-1}$ de la topologie discrète et $(A \cup A^{-1})^{\mathbb{N}}$ de la topologie produit. Le bord $\partial F_n \subset (A \cup A^{-1})^{\mathbb{N}}$ hérite de la topologie induite : c'est un ensemble de Cantor.

Un mot $w = w_0 w_1 \dots w_p \in F(A)$ est **préfixe** d'un mot $v = v_0 v_1 \dots v_q \in F(A)$ (resp. $V = (V_i)_{i \in \mathbb{N}} \in \partial F(A)$) si pour tout j , ($0 \leq j \leq p$), $w_j = v_j$ (resp. $w_j = V_j$). Le mot w est **suffixe** d'un mot $u = u_0 u_1 \dots u_r \in F(A)$ si pour tout j , ($r - p \leq j \leq r$), $w_j = u_j$.

Le groupe libre agit (continûment) sur son bord par translations à gauche : si $u = u_0 \dots u_k \in F(A)$ et $V = V_0 \dots V_k \dots \in \partial F(A)$, alors

$$uV = u_0 \dots u_{k-i-1} V_{i+1} \dots V_k \dots \in \partial F(A)$$

où $V_0 \dots V_i = u_k^{-1} \dots u_{k-i}^{-1}$ est le plus long préfixe commun à u^{-1} et V .

2. Substitutions d'arbre et arbres réels

Le but de cette section est d'introduire des opérations de substitution sur des arbres simpliciaux ; on peut voir celles-ci comme des extensions des

substitutions usuelles (morphismes de monoïdes). Elles sont étudiées plus en détails dans [16, chapitre 4]; ici, on s'en servira pour construire des suites d'arbres simpliciaux.

2.1. Arbres simpliciaux

Un **graphe orienté** G se compose d'un ensemble \mathcal{V} de sommets et d'un ensemble \mathcal{E} d'arêtes, \mathcal{E} étant une partie de $\mathcal{V} \times \mathcal{V}$. Le **degré** d'un sommet x est le nombre d'arêtes adjacentes à x .

- Un **chemin** de G est une liste $p = (x_0, x_1, \dots, x_k)$ de sommets de \mathcal{V} telle que pour tout $0 \leq i \leq k-1$, on a $((x_i, x_{i+1}) \in \mathcal{E}$ ou $(x_{i+1}, x_i) \in \mathcal{E})$.
- On appelle **cycle** un chemin $p = (x_0, x_1, \dots, x_k)$ tel que $x_0 = x_k$.
- On dit qu'un graphe orienté est **connexe** si et seulement si il existe un chemin entre chaque paire de sommets.

Un **arbre simplicial (orienté)** est un **graphe (orienté) connexe sans cycle**. Si x et x' sont deux sommets quelconques d'un arbre simplicial, il existe un unique chemin minimal (au sens du nombre de sommets)

$$(x = x_0, x_1, \dots, x_k = x')$$

reliant x à x' ; l'entier k est la **distance** entre x et x' .

On considère un alphabet A de cardinal fini. Étant donné un ensemble \mathcal{V} infini non dénombrable quelconque, on appelle **graphe coloré par A à sommets dans \mathcal{V}** un couple $(\mathcal{V}, \mathcal{E})$ tel que \mathcal{V} est une partie de \mathcal{V} , et \mathcal{E} est une partie de $\mathcal{V} \times \mathcal{V} \times A$.

On appelle $\mathcal{S}_0(A)$ l'ensemble des arbres finis (au sens du nombre d'arêtes), orientés, colorés par A et à sommets dans \mathcal{V} . On note $\mathcal{S}_E(A)$ l'ensemble des arbres de $\mathcal{S}_0(A)$ ne possédant qu'une seule arête.

Dans la suite de cette section, pour tout élément X de $\mathcal{S}_0(A)$, l'ensemble des sommets de X sera noté \mathcal{V}_X et l'ensemble des arêtes colorées de X sera noté \mathcal{E}_X .

Si $A = \{a_0, \dots, a_d\}$, on note $\bar{A} = \{\bar{a}_0, \dots, \bar{a}_d\}$. À tout élément X de $\mathcal{S}_0(A)$, on associe une fonction

$$\gamma_X : \mathcal{V}_X \times \mathcal{V}_X \rightarrow (A \cup \bar{A})^*$$

où $(A \cup \bar{A})^*$ est le monoïde libre engendré par $A \cup \bar{A}$. Si (x, x', a) est une arête de X , alors $\gamma_X(x, x') = a$ et $\gamma_X(x', x) = \bar{a}$. Si (x, x') est une paire de sommets quelconques de X et $(x, x_1, x_2, \dots, x_{k-2}, x_{k-1}, x_k = x')$ est la liste des sommets formant le chemin le plus court de x à x' , alors on définit

$$\gamma_X(x, x') = \gamma_X(x, x_1)\gamma_X(x_1, x_2) \dots \gamma_X(x_{k-2}, x_{k-1})\gamma_X(x_{k-1}, x').$$

La fonction γ_X est appelée **fonction chemin** de X .

On introduit la notion de discernement, qui sera essentielle par la suite. On considère un arbre X de $\mathcal{S}_0(A)$, et on choisit arbitrairement un sommet x_0 de X . La propriété de discernement a pour but d'assurer que tout sommet x de X est déterminé de manière unique par le mot $\gamma_X(x_0, x)$.

DÉFINITION 2.1. — Si pour tout couple x, x' de sommets d'un arbre X de $\mathcal{S}_0(A)$, le mot $\gamma_X(x, x')$ de $(A \cup \bar{A})^*$ ne contient aucune paire $\bar{\alpha}\alpha$, pour $\alpha \in A$, alors on dit de X que c'est un arbre **discerné**.

2.2. Substitutions d'arbre

Nous introduisons maintenant l'objet principal de cet article : les substitutions d'arbre.

DÉFINITION 2.2. — Une **substitution d'arbre** est une application τ de $\mathcal{S}_E(A)$ dans $\mathcal{S}_0(A)$ vérifiant les propriétés suivantes.

- Si $X = (\{x_1, x_2\}, \{(x_1, x_2, a)\})$ est un élément de $\mathcal{S}_E(A)$, d'image $\tau(X)$, alors $x_1, x_2 \in \mathcal{V}_{\tau(X)}$.
- Pour toute lettre a de A , si

$$X = (\{x_1, x_2\}, \{(x_1, x_2, a)\}) \quad \text{et} \quad Y = (\{y_1, y_2\}, \{(y_1, y_2, a)\})$$

sont deux éléments de $\mathcal{S}_E(A)$, alors il existe une bijection f de $\mathcal{V}_{\tau(X)}$ dans $\mathcal{V}_{\tau(Y)}$ vérifiant

- $f(x_1) = y_1$ et $f(x_2) = y_2$,
- pour tout couple (x, x') de $\mathcal{V}_{\tau(X)}$,

$$\gamma_{\tau(X)}(x, x') = \gamma_{\tau(Y)}(f(x), f(x')).$$

- Soient X et Y deux éléments quelconques distincts de $\mathcal{S}_E(A)$, $\tau(X)$ et $\tau(Y)$ étant leurs images respectives par l'application τ . Alors
 - $(\mathcal{V}_{\tau(X)} \setminus \mathcal{V}_X) \cap \mathcal{V}_{\tau(Y)} = \emptyset$, et
 - $(\mathcal{V}_{\tau(Y)} \setminus \mathcal{V}_Y) \cap \mathcal{V}_{\tau(X)} = \emptyset$.
- Pour tout $a \in A$, on note $X_a = (\{x_1, x_2\}, \{(x_1, x_2, a)\})$. S'il existe une liste $(a_1, \dots, a_{k-1}, a_k = a_1)$ ($k \leq \#A + 1$) d'éléments de A telle que, pour tout $1 \leq j \leq k - 1$, (x_1, x_2, a_{j+1}) ou (exclusif) (x_2, x_1, a_{j+1}) est une arête de l'arbre $\tau(X_{a_j})$, alors les degrés de x_1 et x_2 dans $\tau(X_{a_j})$ sont égaux à 1 quel que soit $1 \leq j \leq k - 1$.

On étend maintenant la définition de substitution d'arbre : la nouvelle application, également notée τ , est une application de $\mathcal{S}_0(A)$ dans $\mathcal{S}_0(A)$.

Soit X un élément de $\mathcal{S}_0(A)$. On note t l'application qui à tout élément (x_1, x_2, a) de \mathcal{E}_X associe l'élément $(\{x_1, x_2\}, \{(x_1, x_2, a)\})$ de $\mathcal{S}_E(A)$. L'image de X par τ est alors :

$$\tau(X) = \left(\bigcup_{p \in \mathcal{E}_X} \mathcal{V}_{\tau(t(p))}, \bigcup_{p \in \mathcal{E}_X} \mathcal{E}_{\tau(t(p))} \right).$$

Un exemple est donné figure 2.1.

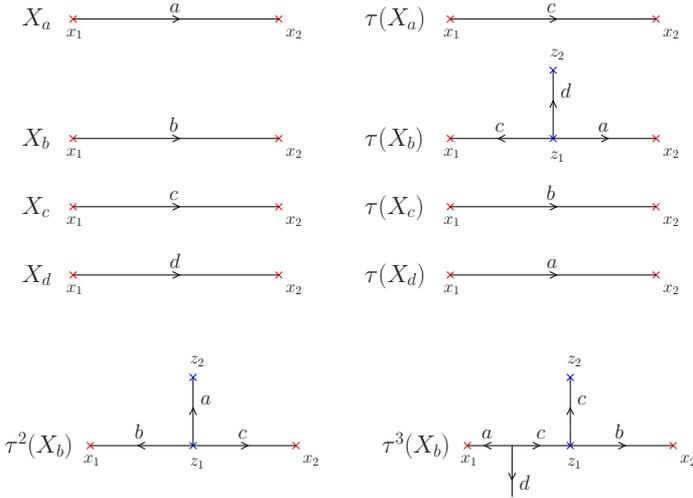


FIGURE 2.1. Un exemple de substitution d'arbre.

DÉFINITION 2.3. — Soit $A = \{1, \dots, d\}$ un alphabet, τ une substitution d'arbre sur $\mathcal{S}_0(A)$ et $X_a = (\{x_1, x_2\}, \{(x_1, x_2, a)\})$ un arbre de $\mathcal{S}_E(A)$. On appelle **tronc** de $\tau(X_a)$ le sous-arbre uniquement constitué des arêtes du chemin de x_1 à x_2 . La **matrice tronc** M_t est la matrice $d \times d$ telle que $M_t(i, j)$ est le nombre d'arêtes de couleur i dans le tronc de $\tau(j)$.

La matrice tronc de l'exemple donné en figure 2.1 est

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

2.3. Arbres réels

Un **arbre réel** T est un espace métrique où deux points quelconques sont joints par un unique arc, et cet arc est isométrique à un segment de \mathbb{R} . On notera $[s, t]$ l'arc joignant s à t . Le **degré** d'un point x dans un arbre T est le nombre de composantes connexes de $T \setminus \{x\}$. On dit que x est un **point de branchement** s'il est de degré supérieur ou égal à 3 ; c'est un **point terminal** s'il est de degré 1.

Dans cette section, on présente un espace métrique \mathcal{R}^k adapté aux constructions d'arbres réels au moyen de substitutions d'arbre. L'ensemble \mathcal{R}^k est un arbre réel qui contient notamment tous les arbres réels possédant un nombre fini de points de branchement, et dont les points sont de degré maximal $(2k)$. Par la suite, on se servira des substitutions d'arbre pour définir des suites d'arbres simpliciaux et on réalisera ces suites en leurs associant des suites d'arbres réels de \mathcal{R}^k . On verra dans la section 3 que ces suites peuvent être convergentes (pour la distance de Hausdorff) vers des arbres réels compacts de $\overline{\mathcal{R}^k}$, le complété métrique de \mathcal{R}^k .

Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, le **produit libre** $\mathbb{R} * \dots * \mathbb{R}$ de k copies de \mathbb{R} est noté \mathcal{R}^k . L'ensemble \mathcal{R}^k est un groupe dans lequel tout élément t (différent de l'origine) a une unique écriture réduite (finie) $x_0^{t_0} x_1^{t_1} \dots x_q^{t_q}$, avec

- $x_i \in \{0, \dots, k - 1\}$ et $t_i \in \mathbb{R}^*$ pour tout $0 \leq i \leq q$,
- $x_i \neq x_{i+1}$ pour tout $0 \leq i \leq q - 1$.

Cette notation distingue implicitement les copies de \mathbb{R} , bien qu'elles jouent le même rôle ; la copie j sera notée \mathbb{R}_j . L'origine est notée O .

On définit la distance d invariante par translation à gauche sur \mathcal{R}^k telle que tout point $x_0^{t_0} x_1^{t_1} \dots x_q^{t_q}$ (en écriture réduite) est à distance $|t_0| + |t_1| + \dots + |t_q|$ de l'origine. L'élément inverse de $t = x_0^{t_0} x_1^{t_1} \dots x_q^{t_q}$ est $t^{-1} = x_q^{-t_q} \dots x_1^{-t_1} x_0^{-t_0}$. Si s et t sont deux éléments de \mathcal{R}^k , on obtient de l'invariance par translation à gauche que $d(s, t) = d(O, s^{-1}t)$; l'écriture réduite de $s^{-1}t$ permet alors d'obtenir la distance de s à t . L'ensemble \mathcal{R}^k muni de cette distance est un arbre réel.

On notera $\overline{\mathcal{R}^k}$ le complété métrique de \mathcal{R}^k . En plus de \mathcal{R}^k , l'ensemble $\overline{\mathcal{R}^k}$ contient donc tous les points t dont l'écriture réduite $x_0^{t_0} x_1^{t_1} \dots x_n^{t_n} \dots$ est infinie à droite et vérifie

- $x_i \in \{0, \dots, k - 1\}$, $t_i \in \mathbb{R}^*$ et $x_i \neq x_{i+1}$ pour tout $i \in \mathbb{N}$,
- $\sum_{n \geq 0} |t_n|$ est finie.

L'espace métrique $(\overline{\mathcal{R}^k}, d)$ est également un arbre réel.

On munit l'ensemble des parties de $\overline{\mathcal{R}^k}$ de la distance de Hausdorff associée à d . Cette distance est notée δ . L'espace métrique $(\overline{\mathcal{R}^k}, d)$ étant complet, l'ensemble des compacts non vide de $\overline{\mathcal{R}^k}$ est complet pour δ .

On notera enfin \mathcal{T}^k l'ensemble des compacts connexes non vides de $\overline{\mathcal{R}^k}$. Les éléments de \mathcal{T}^k sont des arbres réels.

PROPOSITION 2.4. — *Quel que soit $k \in \mathbb{N}^*$, (\mathcal{T}^k, δ) est complet.*

Démonstration. — Soit $(T_n)_n$ une suite de Cauchy d'éléments de \mathcal{T}^k . L'ensemble des compacts non vides de $\overline{\mathcal{R}^k}$ étant complet pour la distance de Hausdorff, il existe un compact T limite de la suite $(T_n)_n$.

Il s'agit maintenant de vérifier que T est connexe. On suppose qu'il ne l'est pas ; il existe P_1, P_2 deux compacts de $\overline{\mathcal{R}^k}$ et $\epsilon > 0$ tels que $T = P_1 \cup P_2$ et $\delta([P_1]_\epsilon, [P_2]_\epsilon) > 0$. Il existe n_0 tel que pour tout $n \geq n_0$, $\delta(T_n, T) < \epsilon$. On déduit de la connexité des T_n que pour tout $n \geq n_0$, $T_n \subset [P_1]_\epsilon$ ou (exclusif) $T_n \subset [P_2]_\epsilon$, ce qui est impossible. \square

3. Construction de cœurs compacts par substitutions d'arbre

Soit d un entier supérieur ou égal à 3 et $A = \{1, 2, \dots, d\}$ un alphabet. On note σ la substitution définie sur A par

$$\begin{aligned} \sigma : 1 &\mapsto 12 \\ k &\mapsto (k + 1) \text{ pour } 2 \leq k \leq d - 1 \\ d &\mapsto 1 \end{aligned}$$

La matrice d'incidence M_σ de σ est définie par

$$M_\sigma = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \diagdown & \diagdown & \diagdown & \vdots \\ \vdots & \diagdown & \diagdown & \diagdown & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Cette matrice est primitive et admet donc une valeur propre réelle dominante $\lambda (> 1)$ qui vérifie $\lambda^d = \lambda^{d-1} + 1$.

La substitution σ est primitive quel que soit d ; on note (Ω, S) (resp. (Ω^+, S)) le système dynamique symbolique bilatère (resp. unilatère) engendré par σ et $\mathfrak{L}(\Omega)$ son langage.

On verra également σ comme un automorphisme de $F_d = F(A)$, le groupe libre de base A .

L'application inverse à σ est définie par

$$\begin{aligned} \sigma^{-1} : \quad & 1 \mapsto d \\ & 2 \mapsto d^{-1}1 \\ & k \mapsto (k - 1) \text{ pour } 3 \leq k \leq d. \end{aligned}$$

La coordonnée (i, j) de la matrice d'incidence $M_{\sigma^{-1}}$ de σ^{-1} est la somme des nombres d'occurrences de i et i^{-1} dans $\sigma^{-1}(j)$ (elle est donc différente de M_{σ}^{-1}). Cette matrice est primitive et admet une valeur propre

$$M_{\sigma^{-1}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & 0 & \diagdown & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \diagdown & & 0 \\ 0 & 0 & \diagdown & & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

réelle dominante $\eta (> 1)$ qui vérifie $\eta^d = \eta + 1$. Le vecteur $\mathbf{V}_{\sigma^{-1}} = [1 \ \eta^{d-1} \ \eta^{d-2} \ \dots \ \eta^2 \ \eta]$ est un vecteur propre à gauche associé à η .

3.1. Substitution d'arbre associée à σ

On définit une substitution d'arbre τ et un arbre initial T_0^s . On va associer à chaque arbre $T_n^s = \tau(T_0^s)$, un arbre réel T_n de \mathcal{R}^d . La suite $(T_n)_n$ obtenue sera convergente vers un arbre réel compact T_τ de \mathcal{T}^d sur lequel on définira un système d'isométries partielles qui représentera l'action du décalage sur Ω^+ .

3.1.1. Substitution d'arbre simplicial

On considère l'alphabet $A_\tau = \{1, \dots, d, d + 1, \dots, 2d - 2\}$; A_τ contient A et $d - 2$ lettres supplémentaires dont le sens combinatoire sera explicité plus loin (par l'application p_*). Si X_i est un élément de $\mathcal{S}_E(A_\tau)$, $X_i = (\{x, y\}, \{(x, y, i)\})$, où $i \in A_\tau$, τ est la substitution d'arbre de $\mathcal{S}_0(A_\tau)$ définie par :

- $\tau(X_1) = X_d$,
- l'image de X_2 est représentée figure 3.1,
- $\tau(X_i) = X_{i-1}$ si $3 \leq i \leq d$,

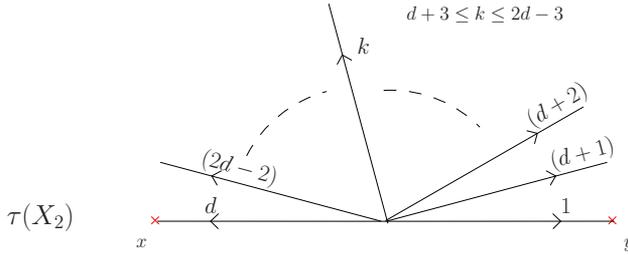


FIGURE 3.1. Substitution d'arbre associée à σ .

- $\tau(X_{d+1}) = X_1$,
- $\tau(X_i) = X_{i-1}$ si $d + 2 \leq i \leq 2d - 2$.

Remarque 3.1. — On peut définir la matrice d'incidence M_τ associée à τ ; M_τ est une matrice $(2d-2) \times (2d-2)$ et $M_\tau(i, j)$ est le nombre d'arêtes colorées par i dans $\tau(X_j)$. Le spectre de M_τ est constitué du spectre de M_σ et de $d - 2$ valeurs propres de module 1.

La matrice tronc M_t est définie par

- $M_t(d, 1) = M_t(d, 2) = 1$,
- $M_t(1, d + 1) = 1$,
- pour tout $2 \leq i \leq 2d - 2$ où $i \neq d + 1$, $M_t(i - 1, i) = 1$,
- M_t est nulle partout ailleurs.

$$M_t = \left[\begin{array}{cccc|cccc} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & 0 & \diagdown & & \vdots & 0 & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \diagdown & & \vdots & 0 & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & & & 1 & \vdots & & & \vdots \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & & & \vdots \\ \hline 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 1 & \diagdown & & \vdots \\ \vdots & & & & \vdots & 0 & \diagdown & 0 & \vdots \\ \vdots & & & & \vdots & & \diagdown & 1 & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{array} \right]$$

M_t est une matrice $(2d-2) \times (2d-2)$ égale à $M_{\sigma^{-1}}$ sur $\{1 \dots d\} \times \{1 \dots d\}$. Le spectre de M_t contient le spectre de $M_{\sigma^{-1}}$ et 0 (d'ordre $d-2$). Les deux matrices ont donc la même valeur propre dominante η . Le vecteur

$$\mathbf{V}_t = [1 \quad \eta^{d-1} \quad \eta^{d-2} \quad \dots \quad \eta^2 \quad \eta \quad \eta^{-1} \quad \eta^{-2} \quad \dots \quad \eta^{-(d-3)} \quad \eta^{-(d-2)}]$$

est un vecteur propre à gauche associé à η ; on se servira de \mathbf{V}_t pour définir les longueurs des arêtes lors de la réalisation.

On choisit un élément X_2 de $\mathcal{S}_E(A_\tau)$ d'arête colorée 2 et on définit $T_0^s = \tau^{d-1}(X_2)$.

PROPOSITION 3.2. — T_0^s est constitué des d arêtes (x_0, x_j, j) pour $1 \leq j \leq d$ (voir figure 3.2). Par la suite, le sommet x_0 sera appelé **racine** de T_0^s .

On définit également $T_n^s = \tau^n(T_0^s)$. On dira encore que x_0 est la racine de T_n^s (quel que soit $n \in \mathbb{N}$).

Remarque 3.3. — L'exposant s est là pour signifier que T_n^s est un arbre simplicial.

Pour tout $k, n \in \mathbb{N}$, on notera $B_k(T_n^s)$ la **boule** de rayon k autour de x_0 de T_n^s , c'est-à-dire le sous-arbre de T_n^s constitué des sommets à distance $\leq k$ de x_0 .

PROPOSITION 3.4. — Pour tout $n \in \mathbb{N}$, T_n^s est un arbre discerné (voir section 2.1).

Démonstration. — Il faut vérifier qu'aucun chemin de la forme $\bar{k}k$ ou $k\bar{k}$, $1 \leq k \leq 2d - 2$ n'apparaît dans les chemins de T_n^s . On se reporte à la figure 3.2 qui représente les boules de rayon 1 (autour de la racine) des arbres T_n^s ($n \leq d$) et on note que pour tout $k \geq d$, $B_1(T_k^s)$ et $B_1(T_d^s)$ sont égaux à renommage des sommets près. Les chemins de longueur 2 représentés sur les arbres de la figure 3.2 sont les seuls possibles, et on en conclut que pour tout $n \in \mathbb{N}$, T_n^s est un arbre discerné. \square

Par la suite, on voudra voir les chemins des arbres simpliciaux comme des éléments de F_d (au lieu de $(A_\tau \cup \bar{A}_\tau)^*$). Le morphisme $p_* : (A_\tau \cup \bar{A}_\tau)^* \rightarrow F_d$ permet de passer de la structure de monoïde à celle de groupe, et interprète combinatoirement les lettres $d + 1, \dots, 2d - 2$ en fonction des lettres de A ; il est défini par :

- $p_*(k) = k$ pour $k \in \{1, \dots, d\}$,
- $p_*((d + k)) = \sigma^k(1)$ pour $k \in \{1, \dots, d - 2\}$,
- $p_*(\bar{k}) = p_*(k)^{-1}$ pour $k \in \{1, \dots, 2d - 2\}$.

PROPOSITION 3.5. — Pour tout $1 \leq i \leq d$, si $X_i = (\{x, y\}, \{(x, y, i)\})$ et $\gamma_{\tau(X_i)}$ est la fonction chemin (cf. section 2.1) de $\tau(X_i)$, alors on a

$$p_*(\gamma_{\tau(X_i)}(x, y)) = \sigma^{-1}(i).$$

Le tronc de $\tau(X_i)$ (pour $1 \leq i \leq d$) est complètement déterminé par σ^{-1} .

On remarque que pour tout $n \in \mathbb{N}$, les sommets de T_n^s sont de degré soit 1, soit d .

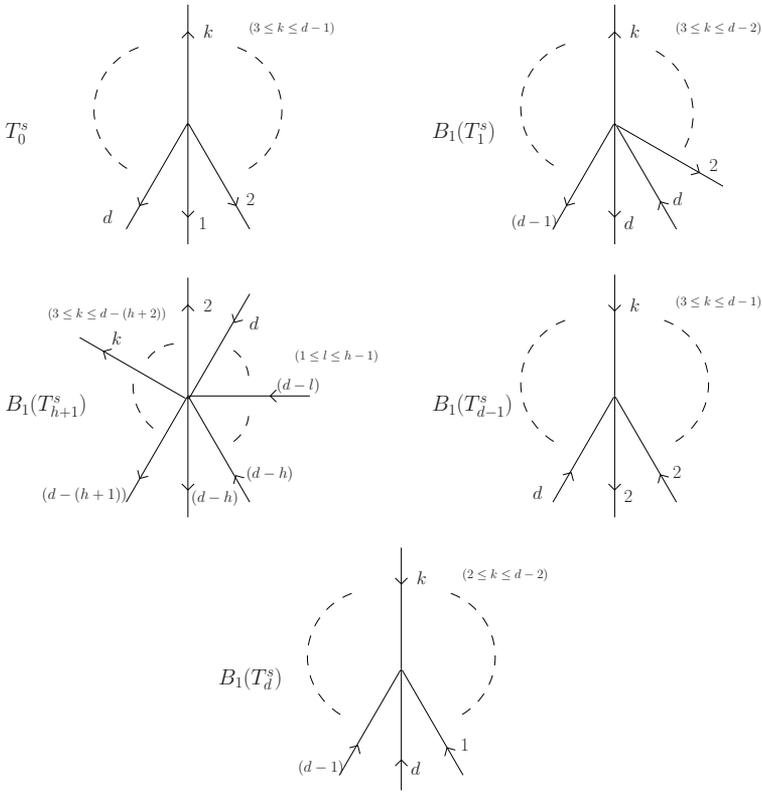


FIGURE 3.2. Application de τ sur une boule de rayon 1.

DÉFINITION 3.6. — Pour tout entier n , on appelle

- \mathcal{V}_n^s l'ensemble des sommets de T_n^s ,
- \mathcal{W}_n^s l'ensemble des points de branchement de T_n^s (les sommets de degré d),
- $\gamma_n : \mathcal{V}_n^s \times \mathcal{V}_n^s \rightarrow (A_\tau \cup \overline{A_\tau})^*$ la fonction chemin de T_n^s (cf. section 2.1).

Si x_0 est la racine de T_n^s , pour tout élément x de \mathcal{V}_n^s , il existe un chemin minimal de x_0 à x et un mot $\gamma_n(x_0, x)$ de $(A_\tau \cup \overline{A_\tau})^*$ associé.

PROPOSITION 3.7. — Si x et y sont deux sommets distincts de T_n^s , alors $p_*(\gamma_n(x_0, x)) \neq p_*(\gamma_n(x_0, y))$.

Démonstration. — L'arbre T_n^s est discerné ; on en déduit directement que $\gamma_n(x_0, x) \neq \gamma_n(x_0, y)$. Le résultat est alors immédiat si aucun des deux mots ne contient de lettres de $\{d+1, \dots, 2d-2\}$ (en se rappelant que puisque T_n^s

est discerné, il n'y aura pas d'annulations). Si $\gamma_n(x_0, x)$ contient la lettre $(d + k) \in \{d + 1, \dots, 2d - 2\}$ et que $p_*(\gamma_n(x_0, x)) = p_*(\gamma_n(x_0, y))$, alors $\gamma_n(x_0, y)$ contient soit la paire 12 (dans ce cas T_{n+1}^s n'est pas discerné), soit une paire $(d + h)(h + 2)$ pour un certain $h < k$ (dans ce cas T_{n+h+1}^s n'est pas discerné); les deux cas contredisent la proposition 3.4. \square

3.1.2. Réalisation

On se permettra de confondre un point de \mathcal{R}^d avec ses écritures (réduites ou non). Le sommet x_0 est toujours la racine de T_0^s ; pour tout $1 \leq j \leq d$, il existe un sommet x_j tel que (x_0, x_j, j) est une arête de T_0^s . On note ν_0 l'application définie par

$$\begin{aligned} \nu_0 : \mathcal{V}_0^s &\rightarrow \mathcal{R}^d \\ x_0 &\mapsto O \\ x_1 &\mapsto 0^1 \\ x_j &\mapsto (j - 1)^{\eta^{d-j+1}} \quad (2 \leq j \leq d). \end{aligned}$$

On va construire par récurrence une suite $(\nu_n)_n$ d'applications avec, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\nu_n : \mathcal{V}_n^s \rightarrow \mathcal{R}^d$. On suppose ν_{n-1} construite de telle sorte que si (y_1, y_2, k) est une arête de T_{n-1}^s , alors $\nu_{n-1}(y_1)^{-1}\nu_{n-1}(y_2) = j^p$ pour un certain $0 \leq j \leq d - 1$ et $|p| = \eta^{-(n-1)}\mathbf{V}_t(k)$. Tout sommet x de T_{n-1} est également un sommet de T_n^s par définition de la substitution d'arbre. Pour ces points, on définit

$$\nu_n(x) = \nu_{n-1}(x).$$

Si y est un point de branchement de $\mathcal{V}_n^s \setminus \mathcal{V}_{n-1}^s$, alors il existe deux sommets y_1 et y_2 de \mathcal{V}_{n-1}^s tels que $(y, y_1, 1)$ et (y, y_2, d) sont des arêtes de T_n^s et $\nu_{n-1}(y_1)^{-1}\nu_{n-1}(y_2) = j^p$ pour un certain $0 \leq j \leq d - 1$ et $|p| = \eta^{-(n-1)+(d-1)}$. Pour $\alpha = \frac{p}{|p|}$, on définit alors

$$\nu_n(y) = \nu_{n-1}(y_1)j^{\alpha\eta^{-n}}.$$

Pour ce même y , il existe $d - 2$ sommets z_1, \dots, z_{d-2} de $\mathcal{V}_n^s \setminus \mathcal{V}_{n-1}^s$ tels que pour tout $1 \leq h \leq d - 2$, $(y, z_h, (d + h))$ est une arête de T_n^s . On définit alors $\nu_n(z_h) = \nu_{n-1}(y_1)j^{\alpha\eta^{-n}}k^{\eta^{-n-h}}$ où $k = j + h[d]$.

PROPOSITION 3.8. — *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, si (x_i, x_j, k) est une arête de T_n^s , alors la longueur du segment $[\nu_n(x_i), \nu_n(x_j)]$ est $\mathbf{V}_t(k)\eta^{-n}$.*

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit l'arbre T_n de \mathcal{T}^d comme l'enveloppe convexe des points de $\nu_n(\mathcal{V}_n^s)$. De manière évidente, $T_{n-1} \subset T_n$ quel que soit $n \in \mathbb{N}^*$.

De plus, tout point de T_n est à une distance inférieure ou égale à η^{-1-n} de T_{n-1} , ce qui fait de la suite $(T_n)_n$ une suite de Cauchy de \mathcal{T}^d qui est complet.

La suite de cet article est consacrée à une étude détaillée des propriétés géométriques et dynamiques de l'arbre limite T_τ défini par

$$(3.1) \quad T_\tau = \lim_{n \rightarrow +\infty} T_n.$$

On notera d_{T_τ} la distance sur T_τ . On remarque que pour tout $n \in \mathbb{N}$, les points de T_n sont de degré 1, 2, ou d , et qu'il en est de même pour les points de T_τ .

DÉFINITION 3.9. — *On notera $\mathcal{V}_n = \nu_n(\mathcal{V}_n^s)$ l'union des points de branchement (points de degré d) et des points terminaux (points de degré 1) de T_n et \mathcal{W}_n l'ensemble de ses points de branchement.*

On note que pour tout $n \in \mathbb{N}$, ν_n est une bijection de \mathcal{V}_n^s dans \mathcal{V}_n , et une bijection de \mathcal{W}_n^s dans \mathcal{W}_n .

3.2. Étude combinatoire

Dans la section 3.3, on associera un point de l'arbre limite T_τ (équation 3.1) à tout mot du système symbolique Ω^+ . On se servira notamment de la substitution d'arbre et des facteurs bispéciaux du langage afin d'établir une bijection entre les points de branchement de T_τ et les décalés du point fixe ω . Ces résultats nécessitent une étude combinatoire détaillée du système symbolique.

L'automate des préfixes-suffixes de σ est décrit en figure 3.3. On se reporte à la section 1.2 concernant l'automate des préfixes-suffixes pour les notations. On note

$$\Omega_{per} = \left\{ \lim_{n \rightarrow +\infty} \sigma^{dn}(k.1), 1 \leq k \leq d \right\}$$

l'ensemble des mots de Ω périodiques par σ et on définit par

$$\omega = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sigma^n(1)$$

le point de Ω^+ fixe par σ .

Il est évident que si un mot est préfixe de ω , alors il est spécial à gauche. On met ici en évidence les mots bispéciaux du langage, et on en déduit que les seuls mots spéciaux à gauche sont les préfixes de ω .

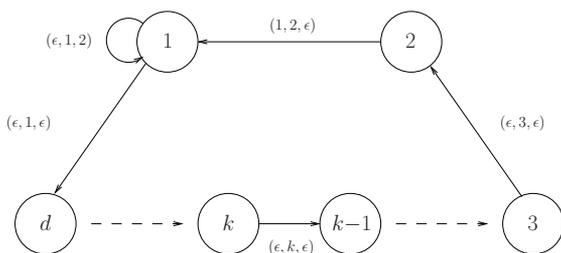


FIGURE 3.3. Automate des préfixes-suffixes de σ .

LEMME 3.10. — Un mot u ($|u| > 1$) de $\mathfrak{L}(\Omega)$ est bispécial si et seulement si il existe un mot v de $\mathfrak{L}(\Omega)$ bispécial tel que $u = \sigma(v)p$ avec $p = 1$ si la dernière lettre de v est $(d - 1)$ et $p = \epsilon$ sinon.

Démonstration. — On vérifie facilement que les mots $k1$ pour tout $1 \leq k \leq d$ et $k(k + 1)$ pour tout $1 \leq k \leq d - 1$ sont les seuls mots de longueur 2 du langage. On note que toute lettre $k \neq d$ est prolongeable à droite par 1 et $(k + 1)$.

Soit v un facteur bispécial. On suppose que la dernière lettre de v est $k \neq d - 1$. Les dernières lettres de $\sigma(\alpha)$ et $\sigma(\beta)$ sont distinctes si $\alpha \neq \beta$ et

$$\begin{array}{ccc} \alpha & \searrow & v & \swarrow & 1 \\ \beta & \swarrow & & \searrow & (k + 1) \end{array} \xrightarrow{\sigma} \begin{array}{ccc} \sigma(\alpha) & \searrow & \sigma(v) & \swarrow & 12 \\ \sigma(\beta) & \swarrow & & \searrow & (k + 2) \end{array}$$

$k + 2 \neq 1$; $\sigma(v)$ est donc bispécial.

On suppose maintenant que la dernière lettre de v est $(d - 1)$, et on remarque que $d1$ est le seul mot de longueur 2 de préfixe d . Il vient que $\sigma(v)1$ est un facteur bispécial.

Soit u un mot bispécial ($|u| > 1$); u commence forcément par 1 et on suppose que k est la dernière lettre de u . En remarquant que $k \neq d$ et que $d11$ est l'unique mot de longueur 3 de suffixe 11, on déduit que u peut être prolongé à droite par 12 et $(k + 1)$. On suppose que u peut être prolongé à gauche par α et β . Puisque 2 n'est pas spécial à droite, on pourra supposer que $\alpha, \beta \in \{1, 12, 3, \dots, d\}$.

$$\begin{array}{ccc} \alpha & \searrow & v & \swarrow & 1 \\ \beta & \swarrow & & \searrow & d1 \end{array} \xrightarrow{\sigma} \begin{array}{ccc} \sigma(\alpha) & \searrow & \sigma(v) & \swarrow & 12 \\ \sigma(\beta) & \swarrow & & \searrow & 112 \end{array}$$

Si $k \neq 1$, il existe un mot v de $\mathfrak{L}(\Omega)$ tel que $\sigma(v) = u$ et v peut être prolongé à droite par 1, k et à gauche par α', β' avec $\sigma(\alpha') = \alpha$ et $\sigma(\beta') = \beta$.

Si $k = 1$, on note $u = u_p 1$. $|u_p| > 1$ puisque 11 n'est pas bispécial. u_p peut être prolongé à droite par 112 et 12 et se termine forcément par d (puisque'on peut le prolonger par 11). Il existe donc $v \in \mathfrak{L}(\Omega)$ tel que $\sigma(v) = u_p$ (v se termine par $(d-1)$) et v peut être prolongé à droite par 1 et $d1$, et à gauche par α', β' avec $\sigma(\alpha') = \alpha$ et $\sigma(\beta') = \beta$. \square

PROPOSITION 3.11. — *Un mot $u \neq \epsilon$ de $\mathfrak{L}(\Omega)$ est bispécial si et seulement si $u = \sigma^{\alpha_n}(1) \dots \sigma^{\alpha_0}(1)$ avec*

$$- \alpha_0 < d,$$

$$- \alpha_{k+1} - \alpha_k = d - 1 \text{ quel que soit } 0 \leq k \leq n - 1.$$

Démonstration. — On remarque que 1 est le seul mot de longueur 1 bispécial, et que $\sigma^k(1)$ se termine par la lettre $(k+1)$ pour tout $k < d$. On conclut grâce au lemme précédent. \square

On remarque que par construction, tous les mots bispéciaux sont des préfixes de ω , et ils sont tous prolongeables à gauche par toute lettre de A . De plus, tout mot spécial à gauche du langage est facteur de $\sigma^k(1)$ pour tout k supérieur à un certain k_0 (par primitivité et puisque $\sigma^n(1)$ est un préfixe de $\sigma^{n+1}(1)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$), et on peut donc le prolonger à droite en un mot bispécial; on en déduit que les préfixes de ω sont les seuls mots spéciaux à gauche de $\mathfrak{L}(\Omega)$. Le nombre de mots de longueur $n \geq 1$ dans $\mathfrak{L}(\Omega)$ est donc $(d-1)n + 1$ et on a la proposition suivante.

PROPOSITION 3.12. — *ω est l'unique mot de Ω^+ spécial à gauche.*

3.3. Application du système symbolique Ω^+ dans l'arbre limite T_τ

On va se servir d'une étude combinatoire de la substitution d'arbre pour construire une application f_Q de Ω^+ dans l'arbre T_τ (équation 3.1); celle-ci nous permettra de définir un système d'isométries partielles qui représente sur T_τ l'action du décalage sur Ω^+ .

3.3.1. Sur les décalés du point fixe

On rappelle que $\omega = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sigma^n(1)$ et on note $\Omega_p^+ = \{S^n(\omega), n \in \mathbb{N}\}$. Dans un premier temps, on définit f_Q de Ω_p^+ dans T_τ . Si $V = S^k(\omega)$ ($k \in \mathbb{N}$) est

un élément de Ω_p^+ , alors $V = u^{-1}\omega$ où u est le préfixe de ω de longueur k . On va établir une bijection f_0 entre l'ensemble \mathcal{W}_n^s des points de branchement (points de degré d) des arbres T_n^s et l'ensemble $\delta(\Omega_p^+) = \{u^{-1} ; u \text{ est un préfixe de } \omega\}$; si x est un sommet de T_k^s dont l'image est $u^{-1} \in \delta(\Omega_p^+)$, alors on définira $f_Q(u^{-1}\omega) = \nu_k(x)$ (voir le paragraphe 3.1.2 pour la définition de l'application ν_k).

Soit f_0 l'application définie par

$$(3.2) \quad \begin{aligned} f_0 : \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{W}_n^s &\rightarrow F_d \\ x &\mapsto \sigma^k(p_*(\gamma_k(x_0, x))) \end{aligned}$$

où k est n'importe quel entier tel que x est un sommet de T_k^s , et γ_k est la fonction chemin de T_k^s (voir section 2.1). Par définition de la substitution d'arbre, l'égalité $\sigma(p_*(\gamma_{k+1}(x_0, x))) = p_*(\gamma_k(x_0, x))$ est vérifiée et $f_0(x)$ ne dépend pas du choix de k .

DÉFINITION 3.13. — *On dit qu'un mot u^{-1} apparaît à l'étape k s'il existe un point de branchement x de T_k^s tel que $u^{-1} = \sigma^k(p_*(\gamma_k(x_0, x)))$ et si x n'est pas un sommet de T_{k-1}^s .*

On dira par convention que le mot ϵ est apparu à l'étape $-(d-2)$ et qu'aucun autre mot n'est apparu aux étapes ≤ 0 . On se reporte à la figure 3.2 et on rappelle qu'on a défini $T_0^s = \tau^{d-1}(X_2)$. Si un mot u^{-1} apparaît à une étape n , alors pour tout $d-1 \leq k \leq 2d-2$, le mot $u^{-1}\sigma^{n+k}(d^{-1})$ apparaît à l'étape $n+k$. De plus, pour tout $k \geq 2d-2$, le mot $u^{-1}\sigma^{n+k}(1^{-1})$ apparaît en $n+k$. On remarque cependant que si $u^{-1}\sigma^{n+k}(1^{-1})$ apparaît à l'étape $n+k$ ($k \geq 2d-2$), alors le mot $v^{-1} = u^{-1}\sigma^{n+k}(1^{-1})\sigma^{n+k}(d)$ est un mot apparu à une étape $< n+k$. On en déduit la proposition suivante.

PROPOSITION 3.14. — *Tout mot u^{-1} apparu à une étape n , vérifie $u^{-1} = v^{-1}\sigma^n(d^{-1})$, où v^{-1} est apparu à une étape m , avec*

$$n - (2d - 2) \leq m \leq n - (d - 1).$$

La proposition précédente va nous permettre d'énumérer les mots qui apparaissent à une étape donnée. On va voir que l'apparition de ces mots est déterminée par les facteurs bispéciaux du langage. À cet effet, on définit $l_0 = \epsilon$ et $l_m = \sigma^{m-1}(1^{-1})$ si $1 \leq m \leq d-1$, et pour tout $m \geq d$, on définit $l_m = \sigma^{\alpha_0}(1^{-1}) \dots \sigma^{\alpha_n}(1^{-1})$ ($n \geq 0$) avec

- $\alpha_0 = m - 1[d - 1]$,
- pour tout $1 \leq i \leq n$, $\alpha_i = \alpha_{i-1} + (d - 1)$,
- $\alpha_n = m - 1$.

PROPOSITION 3.15. —

- Soit $u^{-1} \neq \epsilon$ un mot de F_d . Il existe $m \in \mathbb{N}^*$ tel que $u^{-1} = l_m$ si et seulement si u est un mot bispécial de $\mathfrak{L}(\Omega)$ (cf. proposition 3.11).
- Tout mot bispécial étant un préfixe de ω , l_k est un suffixe (propre) de l_{k+1} pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.

La proposition suivante permettra de conclure à la bijectivité de f_0 . On note que le raisonnement donné est tout aussi important que le résultat lui-même. On montre que les mots apparaissent par ordre croissant de longueur (partie (4)) et que le mot le plus long à apparaître à une étape donnée est l'inverse d'un bispécial (parties (1) et (2)). Cette propriété a été constatée sur d'autres classes d'exemples, et pourrait servir de base à une théorie plus générale.

PROPOSITION 3.16. —

- (1) Pour tout $1 \leq m \leq d-1$, le mot l_m est le seul mot à apparaître à l'étape m .
- (2) Pour tout $m \geq d$, l_m est le plus long mot apparaissant en m .
- (3) L'image par f_0 de tout point de branchement de T_m^s est un suffixe de l_m .
- (4) Tout suffixe de l_m est apparu à une étape $\leq m$.

Démonstration. — La partie (1) peut se lire directement sur la figure 3.2. On va démontrer les parties (2), (3) et (4) par récurrence. On suppose les propriétés vraies aux rangs $< m$ et on suppose $m \geq d$.

(2) On déduit de la proposition 3.14 (et de l'hypothèse de récurrence) que le mot le plus long apparaissant à l'étape m est le mot

$$l_{m-(d-1)}\sigma^m(d^{-1}) = l_{m-(d-1)}\sigma^{m-1}(1^{-1})$$

où $l_{m-(d-1)}$ est le plus long mot apparaissant en $(m-(d-1))$. L'hypothèse de récurrence permet immédiatement de conclure.

(3) Par hypothèse de récurrence, tout mot u^{-1} apparu à une étape $\leq (m-(d-1))$ est un suffixe de $l_{m-(d-1)}$; le mot $u^{-1}\sigma^{m-1}(1^{-1})$ (cf. proposition 3.14) est alors un suffixe de $l_{m-(d-1)}\sigma^{m-1}(1^{-1}) = l_m$.

(4) On note c_k le mot le plus court à apparaître à l'étape k . Il nous suffit de prouver que $|c_m| = |l_{m-1}| + 1$. Si $(m = d)$, alors on a

- $c_m = \sigma^d(d^{-1}) = \sigma^{d-1}(1^{-1})$, et
- $l_{m-1} = \sigma^{d-2}(1^{-1})$ d'après (1).

Si $(d+1 \leq m \leq 2d-1)$, alors on a

- $c_m = 1^{-1}\sigma^m(d^{-1}) = 1^{-1}\sigma^{m-1}(1^{-1})$, et
- $l_{m-1} = \sigma^{\alpha_0}(1^{-1})\sigma^{\alpha_1}(1^{-1})$ avec $\alpha_0 = (m-2) - (d-1)$ et $\alpha_1 = (m-2)$.

En remarquant que $\sigma^d(1^{-1}) = 1^{-1}\sigma^{d-1}(1^{-1})$, on obtient $l_{m-1} = \sigma^{m-1}(1^{-1})$. Dans les deux cas, on a $|c_m| = |l_{m-1}| + 1$.

On se place finalement dans le cas où $m > 2d - 1$. On déduit de la proposition 3.14 que

- $c_m = c_{m-(2d-2)}\sigma^{m-1}(1^{-1})$, et
- $l_{m-1} = l_{(m-1)-(2d-2)}\sigma^{\alpha_{p-1}}(1^{-1})\sigma^{\alpha_p}(1^{-1})$ avec $\alpha_{p-1} = (m-2) - (d-1)$ et $\alpha_p = (m-2)$,

et on obtient ainsi $l_{m-1} = l_{(m-1)-(2d-2)}\sigma^{m-1}(1^{-1})$.

L'égalité $|c_{m-(2d-2)}| = |l_{(m-1)-(2d-2)}| + 1$ est vérifiée par hypothèse de récurrence et on conclut que $|c_m| = |l_{m-1}| + 1$. □

On déduit de cette proposition que l'application f_0 est surjective de $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{W}_n^s$ dans $\delta(\Omega_p^+)$. L'injection est assurée par la proposition 3.7 et par le fait que σ est un automorphisme.

PROPOSITION 3.17. — *L'application f_0 (équation 3.2) est une bijection de l'ensemble $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{W}_n^s$ des points de branchement des arbres T_n^s dans l'ensemble $\delta(\Omega_p^+)$ des mots u^{-1} de F_d tels que u est un préfixe (possiblement vide) de ω .*

On définit finalement l'application f_Q (pour l'instant restreinte à l'ensemble Ω_p^+ des mots de l'orbite positive du point fixe ω) par :

$$(3.3) \quad \begin{aligned} f_Q : \Omega_p^+ &\rightarrow T_\tau \\ u^{-1}\omega &\mapsto \nu_k(f_0^{-1}(u^{-1})) \end{aligned}$$

où k est n'importe quel entier pour lequel $f_0^{-1}(u^{-1})$ est un sommet de T_k^s et ν_k est l'application définie au paragraphe 3.1.2.

Remarque 3.18. — On peut également définir l'application f_0 sur l'ensemble des points terminaux (en donnant la même définition que pour les points de branchement). Il est possible de montrer que f_0 est aussi une bijection de l'ensemble des points terminaux dans l'ensemble des mots u de $\mathfrak{L}(\Omega)$ tels que $u\omega \in \Omega^+$. On aurait ainsi pu définir directement l'image par f_Q des mots V de Ω^+ tels que $S^k(V) = \omega$ pour un certain $k \in \mathbb{N}^*$. La définition alternative donnée au paragraphe suivant est équivalente.

3.3.2. Extension du domaine de définition de l'application f_Q

L'application f_Q (équation 3.3) associe un point de l'arbre T_τ (équation 3.1) à tout mot de l'ensemble $\Omega_p^+ = \{S^n(\omega); n \in \mathbb{N}\}$ (où ω est le mot de $A^{\mathbb{N}}$ fixe par σ). Le but de ce paragraphe est d'associer un point de l'arbre T_τ

à tout mot du système symbolique unilatère Ω^+ , et de montrer que la nouvelle application f_Q ainsi obtenue est surjective de Ω^+ dans T_τ . Pour cela, on utilisera l'automate des préfixes-suffixes afin de produire des suites de mots dont les images par f_Q sont convergentes dans T_τ . On commence par un travail préliminaire sur certaines propriétés des développements en préfixes-suffixes et de l'application f_0 (équation 3.2).

Soit u un préfixe de ω . On appelle **écriture automatique** de u^{-1} l'écriture

- $u^{-1} = \sigma^{\alpha_0}(1^{-1}) \dots \sigma^{\alpha_p}(1^{-1})$, avec
- $\forall i, 0 \leq i < p, \alpha_{i+1} - \alpha_i \geq d$.

La suite $\alpha_0, \dots, \alpha_p$ détermine de manière unique un développement en préfixes-suffixes : celui de $S^{|u|}(\bar{\omega}.\omega)$, où $\bar{\omega}$ est n'importe quel mot infini à gauche tel que $\bar{\omega}.\omega \in \Omega$. De plus, l'écriture automatique est unique ; en effet, d'après la proposition 1.1, tout mot dont l'écriture automatique a une puissance maximale $\leq m$ (quel que soit $m \in \mathbb{N}$) est un suffixe propre de $\sigma^{m+1}(1^{-1})$.

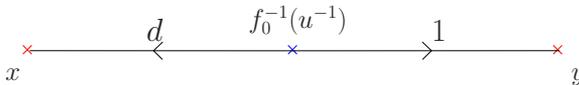
LEMME 3.19. — Si un mot u^{-1} apparaît à l'étape $n \geq 1$, alors la puissance maximale de son écriture automatique est soit $n - 1$, soit n .

Démonstration. — Pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, le mot le plus long à apparaître à l'étape m est $l_m = \sigma^{\alpha_0}(1^{-1}) \dots \sigma^{\alpha_p}(1^{-1})$ ($p \geq 0$) avec

- $\alpha_0 = m - 1[d - 1]$,
- pour tout $1 \leq i \leq p, \alpha_i = \alpha_{i-1} + (d - 1)$,
- $\alpha_p = m - 1$.

Si $m \leq d - 1$, le mot $\sigma^{m-1}(1^{-1})$ est le seul à apparaître à l'étape m . Si $m \geq d$, appliquer l'égalité $\sigma^d(1^{-1}) = 1^{-1}\sigma^{d-1}(1^{-1})$ (dans l'ordre décroissant des puissances) permet d'obtenir une écriture automatique de l_m de puissance maximale m . Si u^{-1} apparaît à l'étape $n \geq 1$, alors $|l_{n-1}| < |u^{-1}| \leq |l_n|$. On conclut en utilisant la proposition 1.1. \square

Si le mot u^{-1} apparaît à l'étape $n \geq 1$, alors il existe deux sommets x et y de T_n^s tels que l'arbre décrit ci-dessous est un sous-arbre de T_n^s . De plus, $(x, y, 2)$ est une arête de T_{n-1}^s . Les points de degré 1 ne peuvent



pas posséder d'arête sortante colorée 2 ; on en déduit que x est un point de branchement. On montre de plus la propriété suivante.

LEMME 3.20. — Soit u^{-1} un mot apparaissant à l'étape $n \geq 1$ et soit y le sommet de T_n^s tel que $(f_0^{-1}(u^{-1}), y, 1)$ est une arête de T_n^s . Si n est la puissance maximale de l'écriture automatique de u^{-1} , alors y est un point de branchement.

Démonstration. — On suppose que l'écriture automatique de u^{-1} est

$$u^{-1} = \sigma^{\alpha_0}(1^{-1}) \dots \sigma^{\alpha_{p-1}}(1^{-1})\sigma^n(1^{-1}).$$

On a alors $f_0(y) = \sigma^{\alpha_0}(1^{-1}) \dots \sigma^{\alpha_{p-1}}(1^{-1})$ (on note que $f_0(y)$ peut être égal à ϵ). On sait que f_0 est une bijection de $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{W}_n^s$ dans

$$\delta(\Omega_p^+) = \{u^{-1} ; u \text{ est un préfixe de } \omega\}.$$

Ainsi, si y n'était pas un point de branchement, la proposition 3.7 serait contredite. □

On va maintenant définir les images par f_Q des mots de $\Omega^+ \setminus \Omega_p^+$. Soit V un mot de $\Omega^+ \setminus \Omega_p^+$. Puisque ω est le seul mot de Ω^+ spécial à gauche, il existe un unique mot U infini à gauche tel que $U.V \in \Omega$. On suppose de plus que $\Gamma(U.V) = (p_i, a_i, s_i)_{i \in \mathbb{N}}$. On note $u_0^{-1} = p_0^{-1}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1}^{-1} = u_n^{-1}\sigma^{n+1}(p_{n+1}^{-1})$.

PROPOSITION 3.21. — La suite $(f_Q(u_n^{-1}\omega))_n$ est une suite de Cauchy de T_τ .

Démonstration. — Soit $n \in \mathbb{N}$. Le mot p_{n+1} peut être égal à ϵ ou à 1. Si $p_{n+1} = \epsilon$, alors $u_n = u_{n+1}$. On se place dans le cas où $p_{n+1} = 1$. Soit m l'étape d'apparition du mot u_{n+1}^{-1} . Les points $f_0^{-1}(u_n^{-1}) = x$ et $f_0^{-1}(u_{n+1}^{-1}) = y$ sont des sommets de T_m^s . On déduit du lemme 3.19 que $(n + 1 = m)$ ou $(n + 1 = m - 1)$. Si $(n + 1 = m)$, alors $\gamma_m(y, x) = 1$, et si $(n + 1 = m - 1)$, alors $\gamma_m(y, x) = d$ (on rappelle que γ_m est la fonction chemin de T_m^s). On se reporte à la proposition 3.8 pour conclure que dans les deux cas, on a

$$d_{T_\tau}(f_Q(u_n^{-1}\omega), f_Q(u_{n+1}^{-1}\omega)) = \eta^{-(n+1)} \mathbf{V}_t(1),$$

où \mathbf{V}_t est le vecteur propre à gauche (associé à η) de la matrice tronç défini précédemment. □

Finalement, f_Q est l'application de Ω^+ dans T_τ définie par :

$$\forall V = u^{-1}\omega \in \Omega_p^+, f_Q(V) = \nu_k(f_0^{-1}(u^{-1}))$$

si $f_0^{-1}(u^{-1})$ est un sommet de T_k^s (cf. équation 3.3), et

$$(3.4) \quad \forall V \in \Omega^+ \setminus \Omega_p^+, f_Q(V) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f_Q(u_n^{-1}\omega)$$

si $U.V$ est un mot de Ω tel que $\Gamma(U.V) = (p_i, a_i, s_i)_{i \in \mathbb{N}}$, et si on a défini $u_0^{-1} = p_0^{-1}$ et $u_{n+1}^{-1} = u_n^{-1} \sigma^{n+1}(p_{n+1}^{-1})$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

On va montrer que l'application $f_Q : \Omega^+ \rightarrow T_\tau$ ainsi définie est surjective. Si z est un point quelconque de T_τ , on va choisir une suite $(z_n)_n$ de points de $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{W}_n$ (on rappelle que \mathcal{W}_n est l'ensemble des points de T_n de degré d) convergente vers z , et montrer l'existence d'une suite extraite $(z'_n)_n$ telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

- $f_Q(u_n^{-1}\omega) = z'_n$,
- si $u_n^{-1} = \sigma^{\alpha_0}(1^{-1}) \dots \sigma^{\alpha_p}(1^{-1})$ avec $\alpha_{i+1} - \alpha_i \geq d$ pour tout $0 \leq i < p$, alors $u_{n+1}^{-1} = \sigma^{\alpha_0}(1^{-1}) \dots \sigma^{\alpha_p}(1^{-1}) \sigma^{\alpha_{p+1}}(1^{-1})$ avec $\alpha_{p+1} - \alpha_p \geq d$.

La suite $(u_n^{-1})_n$ nous permettra ainsi de retrouver le développement en préfixes-suffixes d'un mot $U.V \in \Omega$, et on pourra en conclure que $z = f_Q(V)$.

Le choix de la suite $(z_n)_n$ est déterminé par l'approximation de T_τ par la suite $(T_n)_n$.

DÉFINITION 3.22. — Soit $e = [s, t]$ un arc de T_n . Si e est tel que

- s et t sont des éléments de \mathcal{V}_n (l'ensemble des points de T_n de degré 1 ou d),
- l'intérieur de e ne contient aucun élément de \mathcal{V}_n ,

alors on dira que e est un arc **simple**.

Pour tout arc $[s, t]$ simple dans T_n pour un certain n , on définit

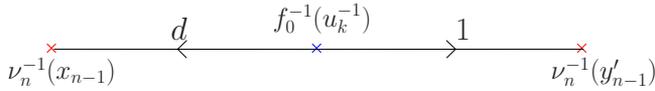
$$T_\tau(s, t) = \{x \in T_\tau; s \notin]x, t[\text{ et } t \notin]x, s[\}.$$

Essentiellement, $T_\tau(s, t)$ contient s, t et la partie de T_τ comprise « entre » s et t .

PROPOSITION 3.23. — f_Q est surjective de Ω^+ dans T_τ .

Démonstration. — On rappelle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'application ν_n est une bijection de \mathcal{V}_n^s dans \mathcal{V}_n et que sa restriction à \mathcal{V}_{n-1}^s (si $n \geq 1$) est égale à ν_{n-1} .

Soit z un point de $T_\tau \setminus (\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{W}_n)$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un unique arc simple $e = [x_n, y'_n]$ de T_n tel que $z \in T_\tau(x_n, y'_n)$. On suppose par convention que $(\nu_n^{-1}(x_n), \nu_n^{-1}(y'_n), j)$ avec $j \in A_\tau$ est une arête de T_n^s . Sous cette condition, le point x_n est forcément un point de branchement (les points de degré 1 de T_n^s ne peuvent pas posséder d'arêtes sortantes). Si y'_n est un point de branchement, alors on définit $y_n = y'_n$; sinon, on prend



$y_n = x_n$. On définit, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} z_{2n} &= x_n, \\ z_{2n+1} &= y_n. \end{aligned}$$

La suite $(z_n)_n$ est une suite de $(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{W}_n)$ qui converge vers z et on suppose que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_Q(u_n^{-1}\omega) = z_n$.

On remarque que $z_0 = f_Q(\omega)$. Pour pouvoir conclure à la surjectivité de f_Q , il suffit de montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, si

- $u_k^{-1} = \sigma^{\alpha_0}(1^{-1}) \dots \sigma^{\alpha_p}(1^{-1})$ avec $p \geq 1$, et
- $\forall i, 0 \leq i < p, \alpha_{i+1} - \alpha_i \geq d$,

alors il existe un entier h tel que $u_h^{-1} = \sigma^{\alpha_0}(1^{-1}) \dots \sigma^{\alpha_{p-1}}(1^{-1})$. On suppose que u_k^{-1} est apparu à l'étape $n \geq 1$. L'exposant α_p vaut soit $n - 1$, soit n (lemme 3.19) et l'arbre décrit ci-dessous est un sous-arbre de T_n^s (on rappelle que l'application f_0 est définie par l'équation 3.2). Si $\alpha_p = n - 1$, alors on a

$$f_0(\nu_n^{-1}(x_{n-1})) = \sigma^{\alpha_0}(1^{-1}) \dots \sigma^{\alpha_{p-1}}(1^{-1}).$$

Si $\alpha_p = n$, alors le point y'_{n-1} est un point de branchement (lemme 3.20), et on a

$$f_0(\nu_n^{-1}(y_{n-1})) = \sigma^{\alpha_0}(1^{-1}) \dots \sigma^{\alpha_{p-1}}(1^{-1}).$$

□

3.4. Interprétation des cylindres du système symbolique Ω^+ dans l'arbre T_τ

Dans la section 3.5, on montre que l'application f_Q (équation 3.4) réalise une conjugaison entre le système symbolique engendré par σ et un système d'isométries partielles sur T_τ (équation 3.1). En plus de fournir des informations précises sur la structure auto-similaire de T_τ , la substitution d'arbre a ainsi produit un moyen efficace d'associer une trajectoire infinie de Ω^+ à un point de l'arbre. Cela simplifie la compréhension de la représentation géométrique du système dynamique engendré par σ . On voudrait donner une méthode systématique pour associer une substitution d'arbre à un automorphisme donné. Dans la présente section, on étudie plus en détail l'exemple proposé et on met en évidence une relation fondamentale entre

la substitution d'arbre et le système symbolique engendré par σ . Cette relation pourrait servir de base à des résultats plus généraux.

Chaque arbre de la suite $(T_n)_n$ (convergente vers T_τ) peut être décomposé en arcs simples (définition 3.22) et chaque arc simple correspond à une partie de T_τ . La décomposition en arcs simples induit donc une partition (modulo un ensemble fini de points) de T_τ ; notre but est de montrer que chacune de ces partitions se relève par f_Q^{-1} en une partition (modulo un ensemble fini de points) en cylindres de Ω^+ .

3.4.1. Images par f_Q des cylindres de Ω^+

Si $[s, t]$ est un arc simple de T_n , il existe k , ($1 \leq k \leq 2d - 2$), tel que le segment $[s, t]$ de T_{n+k} contient exactement 1 point de branchement; on le note $z(s, t)$. L'antécédent de $z(s, t)$ par f_Q dans Ω_p^+ est noté $u(s, t)^{-1}\omega$.

Pour tout mot u de $\mathfrak{L}(\Omega)$, on note P_u l'ensemble des mots V de Ω^+ tels que uV est encore dans Ω^+ . Dans ce paragraphe, on montre par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout arc simple $[s, t]$ de T_n , on a $f_Q(P_{u(s,t)}) = T_\tau(s, t)$.

Remarque 3.24. — Si u est un préfixe de ω , alors l'élément $u^{-1}\omega$ de Ω_p^+ est dans P_u .

La proposition suivante fera office d'initialisation pour la récurrence à suivre. L'arbre T_0^s étant constitué des d arêtes (x_0, x_j, j) (où x_0 est la racine et $1 \leq j \leq d$), on définit $z_j = \nu_0(x_j)$ pour tout $0 \leq j \leq d$ (voir paragraphe 3.1.2 pour la définition de ν_0).

PROPOSITION 3.25. — Pour tout $1 \leq j \leq d$, on a

$$T_\tau(z_0, z_j) = f_Q(P_{u(z_0, z_j)}).$$

Démonstration. — On déduit de la figure 3.2 que $u(z_0, z_1)^{-1} = \sigma^{d-1}(1^{-1})$ et que pour tout $2 \leq j \leq d$, on a $u(z_0, z_j)^{-1} = \sigma^{j-2}(1^{-1})$. Le point $z_0 = f_Q(\omega)$ est à l'intersection des $T_\tau(z_0, z_j)$ et $\omega \in P_{u(z_0, z_j)}$ quel que soit $1 \leq j \leq d$ (le mot bi-infini $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sigma^{dn}(j.1)$ existe quel que soit j).

Si $z \in T_\tau(z_0, z_j) \cap (\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{W}_n)$ et $z \neq z_0$, alors z est l'image par f_Q d'un mot $w^{-1}\omega$ de Ω_p^+ tel que $w^{-1} = u(z_0, z_j)^{-1}\sigma^{k_1}(d^{-1})\sigma^{k_2}(d^{-1}) \dots \sigma^{k_m}(d^{-1})$ avec

- $j' + (d - 1) \leq k_1 \leq j' + (2d - 2)$ si $u(z_0, z_j)^{-1}$ apparaît à l'étape j' (proposition 3.14),
- $k_i + (d - 1) \leq k_{i+1} \leq k_i + (2d - 2)$ pour tout $1 \leq i < m$ (toujours par 3.14).

Le mot $u(z_0, z_j)^{-1}$ est un préfixe de w^{-1} et on déduit que $w^{-1}\omega \in P_{u(z_0, z_j)}$.

Soit z un point de $T_\tau(z_0, z_j) \setminus (\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{W}_n)$. En reprenant le principe de la preuve de la proposition 3.23, on trouve une suite $(x_n)_n$ d'éléments de $T_\tau(z_0, z_j) \cap (\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{W}_n)$ telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

- $f_Q(w_n^{-1}\omega) = x_n$,
- si $w_n^{-1} = \sigma^{\alpha_0}(1^{-1}) \dots \sigma^{\alpha_p}(1^{-1})$ avec $\alpha_{i+1} - \alpha_i \geq d$ pour tout $0 \leq i < p$, alors $w_{n+1}^{-1} = \sigma^{\alpha_0}(1^{-1}) \dots \sigma^{\alpha_p}(1^{-1})\sigma^{\alpha_{p+1}}(1^{-1})$ avec $\alpha_{p+1} - \alpha_p \geq d$.

La suite $(w_n)_n$ détermine un unique développement en préfixes-suffixes qui a un unique antécédent $U.V$ par Γ^{-1} . Il existe un rang k tel que pour tout $n \geq k$, le mot w_n^{-1} admet $u(z_0, z_j)^{-1}$ comme préfixe (théorème 1.3), ce qui fait de $u(z_0, z_j)$ un suffixe de U ; on en déduit que $V \in P_{u(z_0, z_j)}$. De plus, l'égalité $f_Q(V) = z$ est vérifiée, et on a finalement $z \in f_Q(P_{u(z_0, z_j)})$. On conclut que $T_\tau(z_0, z_j) \subset f_Q(P_{u(z_0, z_j)})$.

Soit z un point de $f_Q(P_{u(z_0, z_j)})$ et V un antécédent de z dans $P_{u(z_0, z_j)}$. Si V est un mot de Ω_p^+ et $f_Q(V) \in T_\tau(z_0, z_k)$, avec $k \neq j$, alors on vient de voir que V est également dans $P_{u(z_0, z_k)}$. Les dernières lettres des mots $u(z_0, z_j)$ sont deux à deux distinctes. Le mot ω étant le seul mot de Ω^+ spécial à gauche (proposition 3.12), on a $V = \omega$. On en déduit $z = f_Q(V)$ est dans $T_\tau(z_0, z_j)$.

Si V n'est pas dans Ω_p^+ , il existe un mot U infini à gauche tel que $U.V \in \Omega$ et $u(z_0, z_j)$ est un suffixe de U . On suppose que $\Gamma(U.V) = (p_i, a_i, s_i)_{i \geq 0}$ et on note, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $w_n^{-1} = p_0^{-1}\sigma(p_1^{-1}) \dots \sigma^n(p_n^{-1})$. D'après le théorème 1.3, il existe un entier k tel que $u(z_0, z_j)^{-1}$ est un préfixe de w_n^{-1} pour tout $n \geq k$. La suite $(f_Q(w_n^{-1}\omega))_{n \geq k}$ est une suite de Cauchy de $T_\tau(z_0, z_j)$ (compact en tant que fermé du compact T_τ) et converge vers $f_Q(V)$. Finalement, $z = f_Q(V) \in T_\tau(z_0, z_j)$ et $f_Q(P_{u(z_0, z_j)}) \subset T_\tau(z_0, z_j)$. □

On généralise maintenant cette propriété à tout arc simple de tout arbre T_n . La proposition suivante n'est qu'une étape dans la démonstration du théorème 3.29 à venir. Elle nous permettra d'associer à tout arbre T_n une décomposition (pour l'instant grossière) de Ω^+ ; le sens réel de cette décomposition est donné dans le paragraphe suivant.

PROPOSITION 3.26. — *Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout arc simple $[s, t]$ de T_n , on a $f_Q(P_{u(s,t)}) = T_\tau(s, t)$.*

Démonstration. — L'initialisation de la récurrence a été faite dans la proposition précédente et on suppose la propriété vraie au rang $n - 1$.

Soit w^{-1} un mot apparaissant à l'étape n . On note $y_0 = f_Q(w^{-1}\omega)$; il existe d points y_1, \dots, y_d de \mathcal{V}_n tels que pour tout $1 \leq j \leq d$, $[y_0, y_j]$ est

un arc simple de T_n . De plus, par hypothèse de récurrence, il existe deux points, disons y_1 et y_2 , tels que $T_\tau(y_1, y_2) = f_Q(P_w)$.

On veut se ramener à un cas similaire à celui de l'initialisation. Pour cela, il faut prendre en compte le fait qu'au moins un des points y_1, y_2 est un point de branchement (alors qu'ils étaient tous les deux de degré 1 dans l'initialisation).

On suppose que y_1 et y_2 sont tous les deux dans \mathcal{W}_n . Les mots $w^{-1}\sigma^n(d)\omega$ et $w^{-1}\sigma^n(1)\omega$ sont des antécédents par f_Q de y_1 et y_2 ; on supposera par exemple que

$$y_1 = f_Q(w^{-1}\sigma^n(d)\omega) \quad \text{et} \quad y_2 = f_Q(w^{-1}\sigma^n(1)\omega).$$

Il est évident que $y_1 \in T_\tau(y_0, y_1)$ et $y_2 \in T_\tau(y_0, y_2)$ et il faut maintenant s'assurer que les mots $w^{-1}\sigma^n(d)\omega$ et $w^{-1}\sigma^n(1)\omega$ sont des éléments de $P_{u(y_0, y_1)}$ et $P_{u(y_0, y_2)}$ respectivement. Sachant que $u(y_0, y_1) = \sigma^{n+d-1}(d)w$ et $u(y_0, y_2) = \sigma^{n+d}(d)w$, il suffit de montrer que les mots $\sigma^{n+d-1}(d)\sigma^n(d)\omega$ et $\sigma^{n+d}(d)\sigma^n(1)\omega$ sont effectivement des éléments de Ω^+ et on conclut que c'est le cas en se rappelant que $\sigma^d(1) = \sigma^{d-1}(1)1$.

Le reste de la preuve (pour le rang n) se fait en reprenant le raisonnement donné dans la proposition précédente. □

3.4.2. Chaque arbre de la suite $(T_n)_n$ détermine une partition en cylindres de Ω^+

Jusqu'à la fin de cet article, toute partition de Ω^+ sera en fait une partition modulo un ensemble fini. Pour tout $m \in \mathbb{N}$, on note \mathcal{P}_m la partition en cylindres de Ω^+ définie par

$$\mathcal{P}_m = \{P_u; u \in \mathfrak{L}(\Omega) \text{ et } |u| = m\}.$$

Dans ce paragraphe, on fait correspondre chaque arbre T_n à l'une de ces partitions. Quel que soit $n \in \mathbb{N}$, on explicite un entier m tel que tout arc simple $[s, t]$ de T_n vérifie $f_Q(P_u) = T_\tau(s, t)$ pour un certain P_u de \mathcal{P}_m ; réciproquement, pour tout P_u de \mathcal{P}_m , il existe un arc simple $[s, t]$ de T_n tel que $f_Q(P_u) = T_\tau(s, t)$.

LEMME 3.27. — *Soit w^{-1} un mot apparu à l'étape n ($-(d-2)$ si $w = \epsilon$) ($w^{-1}\omega \in \Omega_p^+$). Soit j un entier tel que $d-1 \leq j \leq 2d-2$; on note u_j^{-1} la première lettre de $\sigma^{n+j}(d^{-1})$. L'égalité $P_{\sigma^{n+j}(d)w} = P_{u_j w}$ est vérifiée.*

Démonstration. — L'inclusion $P_{\sigma^{n+j}(d)w} \subset P_{u_j w}$ est évidente puisque $u_j w$ est un suffixe de $\sigma^{n+j}(d)w$. Soit V un élément de $P_{u_j w} \cap \Omega_p^+$. Le mot V est dans P_w et $f_Q(V)$ est dans $f_Q(P_w) \cap (\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{W}_n)$. Le mot V est donc un

mot de $P_{\sigma^{n+k}(d)w}$ pour un certain k , $d - 1 \leq k \leq 2d - 2$. Les dernières lettres des mots $\sigma^{n+k}(d)$, $d - 1 \leq k \leq 2d - 2$ sont deux à deux distinctes. Si $k \neq j$, alors $wV = \omega$ (ω est le seul mot de Ω^+ spécial à gauche), et V appartient également à $P_{\sigma^{n+j}(d)w}$. Si $V \neq w^{-1}\omega$, on a forcément $k = j$. Finalement, tout élément de $P_{u_jw} \cap \Omega_p^+$ est dans $P_{\sigma^{n+j}(d)w}$.

Soit V un élément de P_{u_jw} et U un mot infini à gauche tel que $U.V \in \Omega$ et u_jw est un suffixe de U . Soit de plus \bar{w} un mot infini à gauche tel que $\bar{w}.\omega \in \Omega$. Par minimalité, on peut trouver une suite $(\alpha_n)_n$ d'éléments de \mathbb{N} telle que la suite $(S^{\alpha_n}(\bar{w}.\omega))_n$ converge vers $U.V$. On a ainsi mis en évidence une suite d'éléments de $P_{u_jw} \cap \Omega_p^+$ ($\subset P_{\sigma^{n+j}(d)w}$) convergente vers V . L'ensemble $P_{\sigma^{n+j}(d)w}$ étant ouvert-fermé, on a $V \in P_{\sigma^{n+j}(d)w}$. \square

Il vient que tout suffixe w' de $\sigma^{n+j}(d)w$ de longueur $\geq |u_jw|$ vérifie $P_{\sigma^{n+j}(d)w} = P_{w'}$ (les notations sont celles du lemme précédent). La longueur du suffixe w' à choisir sera donné dans le théorème 3.29.

Il faut encore s'assurer que l'on retrouve effectivement une partition de Ω^+ ; puisqu'aucun détail n'a été donné concernant la non-injectivité de f_Q , on pourrait imaginer l'existence d'un cylindre P_w tel que

$$f_Q(\Omega^+ \setminus P_w) = T_\tau.$$

Le problème aurait pu être réglé en comptant le nombre d'arêtes des arbres T_n d'une part et le cardinal des partitions \mathcal{P}_n (donné par le nombre de mots de longueur n de $\mathfrak{L}(\Omega)$) de l'autre. On préfère cependant faire appel aux propriétés de l'application f_Q .

LEMME 3.28. — Soient w_1 et w_2 deux mots de $\mathfrak{L}(\Omega)$ tels que $w_1 \neq w_2$ et $|w_1| = |w_2|$. Alors $f_Q(P_{w_1}) \cap f_Q(P_{w_2})$ comporte au plus 1 point.

Démonstration. — Si le mot w^{-1} apparaît à l'étape n , alors les mots $w^{-1}\sigma^{n+k}(d^{-1})\omega$, pour $(d - 1 \leq k \leq 2d - 2)$ (cf. proposition 3.14) sont des éléments de P_w . On en déduit que si $[s_1, t_1]$ et $[s_2, t_2]$ sont des arcs simples de T_{n_1} et T_{n_2} respectivement, avec $n_1 \leq n_2$, alors $T_\tau(s_2, t_2) \subset T_\tau(s_1, t_1)$ si et seulement si $u(s_1, t_1)$ est un suffixe de $u(s_2, t_2)$; l'ensemble $f_Q(P_{u(s_1, t_1)}) \cap f_Q(P_{u(s_2, t_2)})$ comporte au plus 1 point (s_1 ou t_1) sinon.

Les préfixes de ω sont les seuls mots spéciaux à gauche (cf. proposition 3.11); si w_1 et w_2 sont deux mots de $\mathfrak{L}(\Omega)$ tels que $w_1 \neq w_2$ et $|w_1| = |w_2|$, alors il existe un unique v_1 (resp. v_2) tel que

- v_1 (resp. v_2) est un préfixe de ω ,
- w_1 (resp. w_2) est un suffixe de v_1 (resp. v_2),
- $P_{v_1} = P_{w_1}$ (resp. $P_{v_2} = P_{w_2}$).

On peut supposer que $|v_1| \geq |v_2|$. Puisque $w_1 \neq w_2$ et $|w_1| = |w_2|$, alors v_2 n'est pas un suffixe de v_1 et on conclut que $f_Q(P_{w_1}) \cap f_Q(P_{w_2})$ comporte au plus 1 point. \square

On peut maintenant associer une partition \mathcal{P}_m à chaque arbre T_n .

THÉORÈME 3.29. — *Si $n = 0$, on prend $m = 1$, et si $n \in \mathbb{N}^*$, on suppose que $(m - 1)$ est la longueur du plus long mot apparaissant à l'étape n . On a alors :*

- pour tout arc simple $[s, t]$ de T_n , il existe un unique élément P_u de \mathcal{P}_m tel que $f_Q(P_u) = T_\tau(s, t)$,
- réciproquement, pour tout $P_u \in \mathcal{P}_m$, il existe un arc simple $[s, t]$ de T_n pour lequel $f_Q(P_u) = T_\tau(s, t)$,

On dit que T_n **détermine** la partition \mathcal{P}_m .

Démonstration. — Soit $[s, t]$ un arc simple de T_n . Il existe un mot w^{-1} (apparu à l'étape $r < n$) tel que $u(s, t)^{-1} = w^{-1}\sigma^{r+j}(d^{-1})$ pour un certain j , ($d - 1 \leq j \leq 2d - 2$). D'après la proposition 3.26, $f_Q(P_{u(s,t)}) = T_\tau(s, t)$ et par le lemme 3.27, $P_{u(s,t)} = P_{u_j w}$ si u_j est la dernière lettre de $\sigma^{r+j}(d)$. Le mot w^{-1} est apparu l'étape $r < n$ et $u(s, t)^{-1}$ n'est pas encore apparu ; on a donc $|u_j w| \leq m \leq |u(s, t)|$, et on en déduit l'existence d'un mot u de longueur m tel que

- u est un suffixe de $u(s, t)$,
- $u_j w$ est un suffixe de u ,
- $P_{u(s,t)} = P_u$.

L'unicité découle directement du lemme 3.28.

Soit u un mot de longueur m . Il existe un arc simple $[s, t]$ de T_n tel que $f_Q(P_u) \cap T_\tau(s, t)$ comporte une infinité de points et on vient de montrer qu'il existe un mot w de longueur m tel que $f_Q(P_w) = T_\tau(s, t)$. On conclut que $u = w$ par le lemme 3.28. \square

3.4.3. Propriétés des partitions déterminées

Ce paragraphe étudie les partitions de Ω^+ qui peuvent être déterminées par les arbres T_n . On note μ l'unique mesure de probabilité sur Ω^+ invariante par décalage. Pour tout $u \in \mathcal{L}(\Omega)$, la mesure de P_u est définie comme la fréquence du mot u dans ω :

$$\mu(P_u) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \#\{0 \leq k < n; \omega_k \dots \omega_{k+|u|-1} = u\} > 0$$

où $\#$ désigne le cardinal et ω_j ($j \in \mathbb{N}$) est la j -ième lettre de ω . Si P_u et P_v sont les éléments d'une partition \mathcal{P}_n quelconque, on dit que $P_u \sim P_v$

si et seulement si $\mu(P_u) = \mu(P_v)$. On va mettre en évidence une relation entre les partitions déterminées par les arbres T_n et les cardinaux des ensembles \mathcal{P}_n / \sim .

Pour tout mot u de $\mathfrak{L}(\Omega)$, on note C_u l'ensemble des mots de Ω^+ dont u est préfixe. μ étant invariante par le décalage, l'égalité $\mu(P_u) = \mu(C_u)$ est vérifiée quel que soit $u \in \mathfrak{L}(\Omega)$. On travaillera sur les ensembles C_u dans la suite de ce paragraphe.

On rappelle que les préfixes de ω sont les seuls mots spéciaux à gauche. Le réel λ est la valeur propre dominante de la matrice d'incidence de σ . La mesure définie est telle que pour tout u dans le langage, $\mu(\sigma(C_u)) = \lambda^{-1}\mu(C_u)$. Le lemme suivant permettra d'utiliser cette propriété par la suite.

LEMME 3.30. — *Si u est un mot de $\mathfrak{L}(\Omega)$ dont la dernière lettre est différente de d , alors $\sigma(C_u) = C_{\sigma(u)}$.*

Démonstration. — L'inclusion $\sigma(C_u) \subset C_{\sigma(u)}$ est évidente. Soit $V \in C_{\sigma(u)}$, $V = \sigma(u)V_1$, $V_1 \in \Omega^+$, et puisque d n'est pas la dernière lettre de u , alors 1 n'est pas la dernière lettre de $\sigma(u)$ et V_1 ne commence pas par 2. Or, tout mot (infini) commençant par $l \neq 2$ a un antécédent par σ dans Ω^+ , c'est-à-dire qu'il existe $V_2 \in \Omega^+$ tel que $\sigma(V_2) = V_1$. Une manière simple de s'en assurer est d'écrire le développement en préfixes-suffixes d'un mot $U.\alpha V_1 \in \Omega$, $\alpha \in A$. Dans ce cas, $V = \sigma(uV_2)$, assurant que V est dans $\sigma(C_u)$. □

Le réel λ vérifie $\lambda^d = \lambda^{d-1} + 1$ et on en déduit les égalités

$$\lambda^{2d-2} = \sum_{0 \leq k \leq d-1} \lambda^k \quad \text{et} \quad 1 = \sum_{0 \leq k \leq d-1} \lambda^{-(d-1+k)}.$$

On va calculer toutes les valeurs possibles des mesures des cylindres. Il est évident que si $u \in \mathfrak{L}(\Omega)$ et $\alpha \in A$, on a $\mu(C_u) = \mu(C_{\alpha u})$ si et seulement si u n'est pas spécial à gauche. On s'intéresse donc au cas où u est spécial à gauche.

PROPOSITION 3.31. — *Soit u un préfixe de ω (possiblement ϵ) et $\mu(C_u) = x$. Alors $\mu(C_{1u}), \mu(C_{2u}), \dots, \mu(C_{du})$ prennent les valeurs (pas forcément respectives) $\lambda^{-(d-1+k)}x$, $0 \leq k \leq d-1$.*

Démonstration. — Si u est un préfixe de ω , alors u est préfixe de $\sigma(u)$. On pourra supposer u spécial à droite, en remarquant que si ce n'est pas le cas, il existe un mot u_0 spécial à droite (dont u est préfixe) tel que $C_u = C_{u_0}$.

Il n'existe qu'une seule lettre l_0 de $\{1, \dots, d\}$ pour laquelle $\sigma(l_0)u$ est encore spécial à droite; on choisit $l \in \{1, \dots, d\}; l \neq l_0$. On déduit de

l'expression des préfixes de ω spéciaux à droite (les bispéciaux) qu'il n'existe aucun préfixe v de $\sigma(u)$ tel que u est préfixe de v , $|u| < |v| < |\sigma(u)|$ et v est spécial à droite. On en conclut que $C_{\sigma(l)\sigma(u)} = C_{\sigma(l)u}$. Le mot u étant spécial à droite, sa dernière lettre est différente de d , et par 3.30, $\sigma(C_{lu}) = C_{\sigma(l)\sigma(u)}$, ce qui donne $\sigma(C_{lu}) = C_{\sigma(l)u}$. On rappelle que 2 est non spécial à gauche. On a ainsi, pour tout $l \neq l_0$:

$$\begin{aligned} \mu(C_{lu}) &= \lambda\mu(C_{(l+1)u}) \text{ si } l \neq d, \\ \mu(C_{lu}) &= \lambda\mu(C_{1u}) \text{ si } l = d. \end{aligned}$$

On note $y = \mu(C_{(l_0+1)u})$ si $l_0 \neq d$ et $y = \mu(C_{1u})$ si $l_0 = d$; on a alors $\sum_{0 \leq k \leq d-1} \lambda^{-k}y = x$, ce qui donne $y = \lambda^{-(d-1)}x$. □

On va pouvoir préciser le cardinal des ensembles \mathcal{P}_n / \sim après un dernier lemme. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $E_n = \{\mu(C_u); u \in \mathfrak{L}(\Omega), |u| = n\}$.

LEMME 3.32. — *Si u est un préfixe du point fixe ω , alors $\mu(C_u)$ est un élément maximal de $E_{|u|}$. De plus, u est spécial à droite si et seulement si pour tout $v \in \mathfrak{L}(\Omega)$ tel que $|v| = |u|, v \neq u$, on a $\mu(C_u) > \mu(C_v)$.*

Démonstration. — Soit $v \in \mathfrak{L}(\Omega)$ un mot de longueur $|u|$. Si v n'est pas un préfixe du point fixe, alors il existe un préfixe w du point fixe, tel que $|w| > |v|$, v est un suffixe (propre) de w et $\mu(C_w) = \mu(C_v)$; en effet si v n'est pas spécial à gauche et $\alpha v \in \mathfrak{L}(\Omega)$ ($\alpha \in \{1, \dots, d\}$), alors $\mu(C_{\alpha v}) = \mu(C_v)$. Or, puisque u est un préfixe de w , alors $C_u \supset C_w$ et $\mu(C_u) \geq \mu(C_w) = \mu(C_v)$.

Le mot v est toujours un mot de longueur $|u|$ non préfixe de ω , le mot u est préfixe de ω et le mot w est un préfixe de ω tel que v est un suffixe propre de w et $\mu(C_w) = \mu(C_v)$. On note $w = uw_0$; si u est spécial à droite, alors il existe w_1 tel que $|w_1| = |w_0|, w_1 \neq w_0$ et uw_1 est dans le langage. Dans ce cas, $C_u \supset C_{uw_0} \cup C_{uw_1}$ et $\mu(C_u) > \mu(C_w) = \mu(C_v)$ (car C_{uw_0} et C_{uw_1} sont de mesures strictement positives).

Si pour tout v tel que $|v| = |u|, v \neq u$, on a $\mu(C_u) > \mu(C_v)$, on note α une lettre de $\{1, \dots, d\}$ telle que $u\alpha$ est dans le langage. Si v est le suffixe de $u\alpha$ de longueur $|u|$, alors v n'est pas spécial à gauche et $\mu(C_v) = \mu(C_{u\alpha})$. On a alors $\mu(C_u) > \mu(C_{u\alpha})$, ce qui implique que u est spécial à droite. □

PROPOSITION 3.33. — *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note u_n le préfixe de longueur n de ω .*

- $E_1 = \bigcup_{0 \leq k \leq d-1} \{\lambda^{-(d-1+k)}\}$,
- $\forall n \geq 2,$

- si le préfixe u_{n-1} de ω de longueur $n - 1$ est spécial à droite, alors il existe $j \in \mathbb{N}$ tel que $E_n = \bigcup_{0 \leq k \leq 2d-3} \{\lambda^{-(j+k)}\}$,
- sinon, il existe $j \in \mathbb{N}$ tel que $E_n = \bigcup_{0 \leq k \leq 2d-2} \{\lambda^{-(j+k)}\}$.

Démonstration. — Par récurrence.

On obtient directement de 3.31 que $E_1 = \bigcup_{0 \leq k \leq d-1} \{\lambda^{-(d-1+k)}\}$. Le mot 1 est le seul mot de longueur 1 spécial à gauche, $\mu(C_1) = \lambda^{-(d-1)}$ d'après 3.32, et on obtient par 3.31 que les $\mu(C_{h1})$, $1 \leq h \leq d$ prennent les valeurs $\lambda^{-(2d-2+k)}$, $0 \leq k \leq d - 1$. Si $l \neq 1$, l n'est pas spécial à gauche et $\mu(C_{(l-1)l}) = \mu(C_l)$. On en déduit que $E_2 = \bigcup_{0 \leq k \leq 2d-3} \{\lambda^{-(d+k)}\}$. On suppose que les propriétés annoncées sont vraies à tous les rangs $\leq n$.

Si u_n et u_{n-1} sont spéciaux à droite, il existe $j \in \mathbb{N}$ tel que $E_n = \bigcup_{0 \leq k \leq 2d-3} \{\lambda^{-(j+k)}\}$ par hypothèse de récurrence, et par 3.32, C_{u_n} est le seul cylindre de mesure λ^{-j} . On peut déduire de la proposition 3.31 que $E_{n+1} = \bigcup_{1 \leq k \leq 2d-2} \{\lambda^{-(j+k)}\}$.

Si u_n est spécial à droite, et u_{n-1} ne l'est pas, alors il existe $j \in \mathbb{N}$ tel que $E_n = \bigcup_{0 \leq k \leq 2d-2} \{\lambda^{-(j+k)}\}$ et C_{u_n} est le seul cylindre de mesure λ^{-j} .

On en déduit que $E_{n+1} = \bigcup_{1 \leq k \leq 2d-2} \{\lambda^{-(j+k)}\}$.

Si u_n n'est pas spécial à droite, et u_{n-1} est spécial à droite, alors il existe $j \in \mathbb{N}$ tel que $E_n = \bigcup_{0 \leq k \leq 2d-3} \{\lambda^{-(j+k)}\}$ et C_{u_n} n'est pas le seul cylindre de mesure λ^{-j} ; $E_{n+1} = \bigcup_{0 \leq k \leq 2d-2} \{\lambda^{-(j+k)}\}$.

Si u_n et u_{n-1} ne sont spéciaux à droite ni l'un ni l'autre, il existe $j \in \mathbb{N}$ tel que $E_n = \bigcup_{0 \leq k \leq 2d-2} \{\lambda^{-(j+k)}\}$ et C_{u_n} n'est pas le seul cylindre de mesure λ^{-j} . On a alors $E_{n+1} = E_n$.

Les propriétés passent donc aux successeurs. □

On peut finalement conclure que

- $\#(\mathcal{P}_1 / \sim) = d$, et pour $n \geq 2$,
- $\#(\mathcal{P}_n / \sim) = 2d - 2$ s'il existe un bispécial de longueur $n - 1$, et
- $\#(\mathcal{P}_n / \sim) = 2d - 1$ sinon.

Ce résultat est à rapprocher du théorème 3.29 et de la proposition 3.15.

THÉORÈME 3.34. — T_0 détermine \mathcal{P}_1 . Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'arbre T_n détermine une partition \mathcal{P}_m de Ω^+ avec $\#(\mathcal{P}_m / \sim) = 2d - 2$. Toute partition \mathcal{P}_m telle que $\#(\mathcal{P}_m / \sim) = 2d - 2$ est déterminée par un arbre T_n .

Il est à noter que ce théorème donne un sens au cardinal de l'alphabet A_τ considéré pour la substitution d'arbre.

3.5. Système d'isométries partielles et conjugaison en mesure

On définit finalement un système d'isométries partielles sur l'arbre limite T_τ (équation 3.1), et on montre que ce système d'isométries traduit géométriquement l'action du décalage sur le système symbolique substitutif.

On rappelle que f_Q est l'application définie par l'équation 3.4. Pour toute lettre a de A , on définit l'application

$$\begin{aligned} \varphi_a : f_Q(C_a) &\rightarrow f_Q(P_a) \\ x = f_Q(V), V = aV' &\mapsto \varphi_a(x) = f_Q(V'). \end{aligned}$$

PROPOSITION 3.35. — Pour tout $a \in A$, φ_a est une isométrie.

Démonstration. — Il suffit de vérifier la propriété pour les points de branchement. On rappelle que $\Omega_p^+ = \{S^n(\omega), n \in \mathbb{N}\}$. Soient $u^{-1}\omega$ et $v^{-1}\omega$ deux mots de $C_a \cap \Omega_p^+$. On suppose que $f_Q(u^{-1}\omega), f_Q(v^{-1}\omega)$ et leurs images $f_Q(a^{-1}u^{-1}\omega), f_Q(a^{-1}v^{-1}\omega)$ sont des éléments de \mathcal{W}_n (l'ensemble des points de degré d de T_n). On rappelle que γ_n est la fonction chemin (voir section 2.1) de T_n^s et que l'application f_0 est définie par l'équation 3.2 ; on note

- $w = \gamma_n(f_0^{-1}(u^{-1}), f_0^{-1}(v^{-1}))$, et
- $w_a = \gamma_n(f_0^{-1}(a^{-1}u^{-1}), f_0^{-1}(a^{-1}v^{-1}))$.

Les mots w et w_a vérifient $\sigma^n(p_*(w)) = uv^{-1}$ et $\sigma^n(p_*(w_a)) = uaa^{-1}v^{-1}$. Puisque $f_0^{-1}(u^{-1}), f_0^{-1}(v^{-1}), f_0^{-1}(a^{-1}u^{-1})$ et $f_0^{-1}(a^{-1}v^{-1})$ sont des points de branchement, w et w_a sont des mots de $(A \cup \bar{A})^*$ (ils ne contiennent aucune lettre \bar{k}, k avec $(d + 1) \leq k \leq (2d - 2)$). On en déduit que $w = w_a$ et on conclut immédiatement que

$$d_{T_\tau}(f_Q(u^{-1}\omega), f_Q(v^{-1}\omega)) = d_{T_\tau}(f_Q(a^{-1}u^{-1}\omega), f_Q(a^{-1}v^{-1}\omega)).$$

□

Ainsi, pour tout $a \in A$, l'application φ_a est une bijection isométrique qui vérifie $(f_Q \circ S)(V) = (\varphi_a \circ f_Q)(V)$ pour tout élément V de C_a .

On montre en plus que l'intersection $f_Q(C_a) \cap f_Q(C_b)$ entre deux domaines distincts ($a, b \in A$ et $a \neq b$) est constituée d'au plus un point. Pour cela, on précise la non-injectivité de l'application f_Q . Le lemme suivant est légèrement plus fort que ce dont nous avons besoin, mais il explicite une propriété intéressante de f_Q .

LEMME 3.36. — Si V_1 et V_2 sont deux mots de Ω^+ tels que $f_Q(V_1) = f_Q(V_2)$, alors il existe un mot infini à gauche U tel que $U.V_1$ et $U.V_2$ sont des mots de Ω .

Démonstration. — On suppose qu'il existe deux mots distincts $w_1, w_2 \in A^*$ avec $|w_1| = |w_2|$ et tels que $V_1 \in P_{w_1}, V_2 \in P_{w_2}$. Si $f_Q(V_1) = f_Q(V_2)$, alors d'après le lemme 3.28, $f_Q(V_1) = f_Q(V_2) = f_Q(S^k(\omega))$ pour un certain $k \in \mathbb{N}$.

Il reste à montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, le point $f_Q(S^k(\omega))$ n'a qu'un seul antécédent. On montre la propriété pour $f_Q(\omega)$; un raisonnement similaire pourra être utilisé pour ses décalés. On a déjà établi que f_Q est injective sur $\Omega_p^+ = \{S^n(\omega); n \in \mathbb{N}\}$. Si $V \in \Omega^+ \setminus \Omega_p^+$, alors il existe un mot U infini à gauche tel que $U.V \in \Omega$ et on obtient de la décomposition en préfixes-suffixes que $V \in P_{\sigma^{k_2}(1)\sigma^{k_1}(1)}$, pour $k_1, k_2 \in \mathbb{N}$. Or, une simple observation de la figure 3.2 montre l'équivalence :

$$f_Q(\omega) \in f_Q(P_w) \Leftrightarrow w = \sigma^k(1) \text{ pour un certain } k \in \mathbb{N}.$$

□

Le théorème 3.34 assure que pour tout $a \in A$, l'ensemble $f_Q(P_a)$ est connexe et fermé ; on en déduit qu'il en est de même pour $f_Q(C_a)$. L'intersection $f_Q(C_a) \cap f_Q(C_b)$ avec $a \neq b$ est également une partie connexe fermée de T_τ et peut donc posséder 0, 1, ou une infinité d'éléments. Si l'ensemble $f_Q(C_a) \cap f_Q(C_b)$ possède une infinité d'éléments, alors il contient un point de branchement, et on a montré dans le lemme 3.36 qu'un point de branchement possède un unique antécédent par f_Q . On en conclut que la proposition suivante est vérifiée.

PROPOSITION 3.37. — Si a et b sont deux éléments distincts de A , alors l'intersection $f_Q(C_a) \cap f_Q(C_b)$ possède au plus 1 élément.

On définit l'ensemble des singularités par

$$\mathfrak{S} = \bigcup_{\substack{a,b \in A \\ a \neq b}} (f_Q(C_a) \cap f_Q(C_b)) \cup \bigcup_{\substack{a,b \in A \\ a \neq b}} (f_Q(P_a) \cap f_Q(P_b))$$

et on note \mathfrak{S}^* l'ensemble des points appartenant aux orbites des points de \mathfrak{S} sous l'action du système d'isométries. L'ensemble \mathfrak{S} est fini d'après le lemme 3.28 et la proposition 3.37, ce qui fait de \mathfrak{S}^* un ensemble dénombrable.

On note β la dimension de Hausdorff de T_τ et \mathcal{H}^β sa mesure de Hausdorff associée (voir [13] pour une introduction à ces concepts et [8] pour le calcul

de cette dimension). Le réel β est forcément ≥ 1 puisque T_τ contient un intervalle, et on en déduit que $\mathcal{H}^\beta(\mathfrak{S}^*) = 0$.

Tout point de $T_\tau^* = T_\tau \setminus \mathfrak{S}^*$ est dans le domaine d'une unique isométrie φ_a et on note φ l'application bijective définie par

$$\begin{aligned} \varphi : T_\tau^* &\rightarrow T_\tau^* \\ x &\mapsto \varphi_a(x) \text{ si } x \text{ est dans le domaine de définition de } \varphi_a. \end{aligned}$$

THÉORÈME 3.38. — *Le système symbolique (Ω^+, S, μ) (où μ est l'unique mesure de probabilité invariante par S) engendré par la substitution σ est conjugué en mesure au système dynamique $(T_\tau^*, \varphi, \mathcal{H}^\beta)$ engendré par le système d'isométries et on obtient le diagramme commutatif suivant.*

$$\begin{array}{ccc} \Omega^+ & \xrightarrow{S} & \Omega^+ \\ f_Q \downarrow & & \downarrow f_Q \\ T_\tau & \xrightarrow[\varphi]{} & T_\tau \\ & & \text{presque partout} \end{array}$$

On explique dans la section 4 comment l'arbre et le système d'isométries peuvent être construit en utilisant les résultats de [15] et [19]. Il était cependant important de montrer que l'on pouvait retrouver ces résultats sur cette classe d'exemples de manière indépendante, en exploitant la substitution d'arbre, et en insistant sur le fait que la substitution d'arbre explique clairement l'organisation des points de l'arbre suivant leurs orbites (ce qui fait défaut aux autres constructions).

3.6. L'arbre T_τ vu dans le fractal de Rauzy

Pour $d = 3$, la substitution est de type Pisot ; sa matrice d'incidence a une valeur propre réelle > 1 et deux valeurs propres complexes conjuguées de modules < 1 . En remarquant que pour toute lettre i , le mot $\sigma^d(i)$ commence par le mot 12, on déduit que la condition de forte coïncidence est vérifiée : pour tout $i, j \in A = \{1, 2, 3\}$, il existe k, n (ici 2, d) tels que la k -ième lettre de $\sigma^n(i)$ et la k -ième lettre de $\sigma^n(j)$ sont égales et les abélianisés des préfixes de longueur $(k - 1)$ de $\sigma^n(i)$ et $\sigma^n(j)$ sont égaux. Ces propriétés permettent d'assurer (voir [2], [28, chapitre 3], [7]) que le système dynamique symbolique engendré par σ est conjugué en mesure à un échange de domaines sur une partie compact de \mathbb{R}^2 : le fractal de Rauzy associé à σ .

Pour tout mot u de $F(A) = F_3$, on note $|u|_i$ (pour $i \in A \cup A^{-1}$) le nombre d'occurrences de la lettre i dans u et on définit $[u]$ comme le vecteur (de \mathbb{Z}^3) dont la j -ème coordonnée ($j \in A$) est $|u|_j - |u|_{j^{-1}}$. On note Π le plan contractant associé aux deux valeurs propres de modules < 1 , et π_* l'application de F_3 dans Π qui à un mot u associe la projection de $[u]$ dans Π parallèlement à la direction dilatante (associée à la valeur propre dominante).

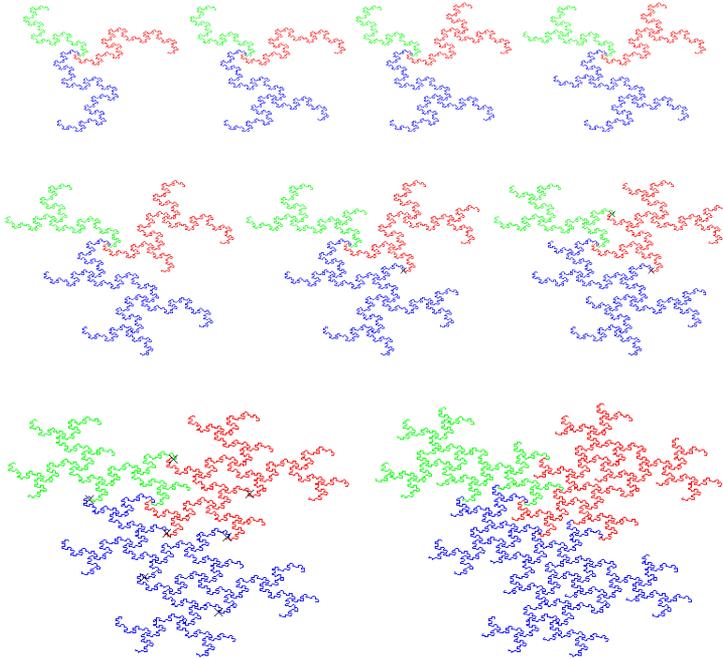


FIGURE 3.4. Représentation de $\zeta(T_0)$, $\zeta(T_1)$, $\zeta(T_2)$, $\zeta(T_3)$, $\zeta(T_4)$, $\zeta(T_5)$, $\zeta(T_6)$, $\zeta(T_8)$ et $\zeta(T_{10})$.

On définit l'application π de $\Omega_p^+ = \{S^n(\omega); n \in \mathbb{N}\}$ dans Π par :

- $\pi(\omega) = (0, 0, 0)$,
- pour tout mot $V = u^{-1}\omega$ de Ω_p^+ , $\pi(V) = \pi_*(u^{-1})$.

Le **fractal de Rauzy** R associé à σ est l'adhérence dans Π de $\pi(\Omega_p^+)$.

Pour toute partie X de Ω^+ , on définit $\bar{\pi}(X)$ comme l'adhérence dans Π de $\pi(X \cap \Omega_p^+)$. On donne finalement un moyen de représenter les arbres T_n dans le fractal de Rauzy en définissant l'application suivante (\mathcal{P} désigne

l'ensemble des parties).

$$\begin{aligned}\zeta : \mathcal{P}(T_\tau) &\rightarrow \mathcal{P}(R) \\ X &\mapsto \bar{\pi}(f_Q^{-1}(X)).\end{aligned}$$

On représente sur la figure 3.4 les images par ζ des premiers arbres de la substitution d'arbre. Les points marqués d'une croix (sur $\zeta(T_5)$, $\zeta(T_6)$ et $\zeta(T_8)$) indiquent des défauts de la représentation planaire; ce sont des couples de points de Ω_p^+ dont les images par f_Q sont distinctes, mais qui ont même image par π .

La figure 3.5 illustre le théorème 3.29; les arcs simples bleu, rouge et vert de T_0 déterminent respectivement P_a , P_b et P_c .

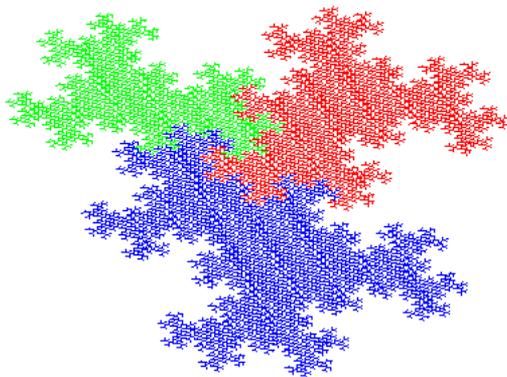


FIGURE 3.5. Représentation de $\zeta(T_{22})$.

La figure 3.6 illustre le fait que T_4 détermine \mathcal{P}_7 . On représente le fractal de Rauzy en attribuant une même couleur à $\bar{\pi}(P_u)$ et $\bar{\pi}(P_v)$ (où P_u et P_v sont dans \mathcal{P}_7) si $\mu(P_u) = \mu(P_v)$; les domaines $\bar{\pi}(P_u)$ et $\bar{\pi}(P_v)$ sont égaux à translation près. L'image par ζ de T_4 est également représentée; on note la correspondance entre les arcs simples et les cylindres.

4. Arbre répulsif et cœur compact

Dans [15], les auteurs associent un arbre réel muni d'une action du groupe libre par isométries à tout automorphisme de groupe libre. Dans cette section, on construit l'arbre $T_{\Phi^{-1}}$ associé à l'automorphisme σ^{-1} (de l'exemple proposé), et on montre que le compact T_τ (équation 3.1) construit précédemment peut être vu comme une partie de $\bar{T}_{\Phi^{-1}}$, le complété métrique de $T_{\Phi^{-1}}$.

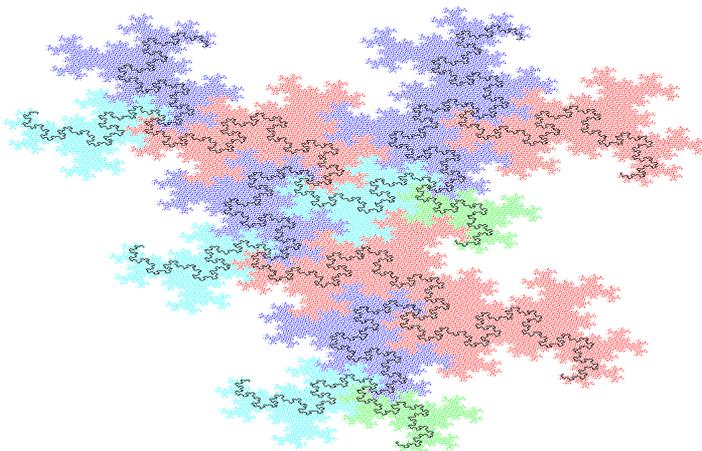


FIGURE 3.6. Représentation de R et $\zeta(T_4)$.

4.1. Représentants topologiques

On note $\text{Aut}(F_n)$ le groupe des automorphismes du groupe libre F_n . Si w est un élément de F_n , on note i_w l'automorphisme défini pour tout élément g de F_n par $i_w(g) = w^{-1}gw$; i_w est un **automorphisme intérieur** ou **conjugaison**. On note $\text{Inn}(F_n)$ l'ensemble des conjugaisons de $\text{Aut}(F_n)$ et $\text{Out}(F_n) = \text{Aut}(F_n)/\text{Inn}(F_n)$. On dit que $\text{Inn}(F_n)$ est l'ensemble des **automorphismes intérieurs**, et $\text{Out}(F_n)$ est l'ensemble des **automorphismes extérieurs**.

L'étude des représentants topologiques est faite dans [4]. Une très jolie introduction peut également être trouvée dans [1]. On se restreint ici au cas des représentants topologiques sur la rose à n pétales R_n ; c'est le graphe topologique constitué d'un sommet $*$ et de n arcs orientés (espaces topologiques homéomorphes à un segment de \mathbb{R}) de $*$ vers $*$. Un **chemin** (fini) de R_n est une immersion (application continue et localement injective) d'un segment $[a, b] \subset \mathbb{R}$ dans R_n . Cette définition implique qu'un chemin est automatiquement réduit.

On identifie le groupe fondamental $\pi_1(R_n, *)$ de R_n au groupe libre F_n . Une **équivalence d'homotopie** $f : R_n \rightarrow R_n$ est une application continue qui induit un automorphisme de $\pi_1(R_n, *)$. Cet automorphisme est défini à composition par conjugaison près, puisque l'identification entre $\pi_1(R_n, *)$ et $\pi_1(R_n, f(*))$ dépend du choix d'un chemin de $*$ à $f(*)$. L'application f induit donc un automorphisme extérieur.

Un **représentant topologique** d'un automorphisme extérieur Φ de $\text{Out}(F_n)$ sur la rose R_n est une application $f : R_n \rightarrow R_n$ telle que :

- l'image d'un sommet est un sommet,
- l'image d'un arc est un chemin (réduit) de R_n ,
- f induit Φ sur $F_n \simeq \pi_1(R_n, *)$ (en particulier, f est une équivalence d'homotopie).

Un chemin χ de R_n est dit **légal** pour un représentant topologique f si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f^n(\chi)$ est un chemin.

4.2. L'arbre invariant de σ^{-1}

THÉORÈME 4.1 ([15], [20]). — *Pour tout automorphisme α du groupe libre F , il existe un arbre réel T (appelé arbre invariant de α) tel que*

- F agit sur T par isométries de manière non-triviale (F ne fixe aucun point de T), minimale (il n'y pas de sous-arbre propre invariant par F), les stabilisateurs d'arcs sont triviaux,
- il existe η_α et une homothétie $H : T \rightarrow T$ de facteur η_α telle que, pour tout point P de T , et pour tout $w \in F$,

$$\alpha(w)H(P) = H(wP).$$

- si $\eta_\alpha > 1$, l'action est à orbites denses (voir [24, proposition 3.10]).

On construit ici l'arbre invariant de σ^{-1} (où σ est l'automorphisme défini dans la section précédente) ; on pourra se reporter à [15, partie E] pour la construction de cet arbre dans un cadre plus général. On note Φ^{-1} la classe extérieure de σ^{-1} . On rappelle que η est la valeur propre dominante de la matrice d'incidence de σ^{-1} et que le vecteur

$$\mathbf{V}_{\sigma^{-1}} = [1 \ \eta^{d-1} \ \eta^{d-2} \ \dots \ \eta^2 \ \eta]$$

est un vecteur propre à gauche associé à η .

R_d désigne la rose à d pétales. Un chemin $\chi : [0, 1] \rightarrow R_d$ où $\chi(0) = \chi(1) = *$ détermine un élément $\langle \chi \rangle$ du groupe fondamental $\pi_1(R_d, *)$ de R_d . On identifie $\pi_1(R_d, *)$ avec le groupe libre F_d ; si e est un arc de R_d , $\langle e \rangle$ est un élément de $A \cup A^{-1}$. On munit R_d de la métrique telle que si e_1, e_2, \dots, e_d sont les arcs de R_d , alors e_i est de longueur $\mathbf{V}_{\sigma^{-1}}(i)$.

On note h_0 l'équivalence d'homotopie de R_d dans R_d vérifiant, pour tout arc e de R_d , $\langle h_0(e) \rangle = \sigma^{-1}(\langle e \rangle)$. L'application h_0 multiplie la longueur de tout chemin légal par η et c'est un représentant topologique de Φ^{-1} . On remarque de plus que tout arc de R_d est un chemin légal.

On note $p : \widetilde{R}_d \rightarrow R_d$ une projection du revêtement universel \widetilde{R}_d de R_d . La métrique sur R_d induit une distance d_0 sur \widetilde{R}_d et F_d agit sur \widetilde{R}_d par isométries. On définit une application (continue) $h : \widetilde{R}_d \rightarrow \widetilde{R}_d$ qui vérifie $p \circ h(\tilde{e}) = h_0(e)$ pour tout arc e de R_d et pour tout relevé \tilde{e} de e , et telle que

$$\sigma^{-1}(w)h = hw$$

pour tout élément w de F_d . On note \mathcal{P} le relevé de $*$ fixe par h .

On définit pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ la pseudo-distance

$$d_k(x, y) = \eta^{-k}d_0(h^k(x), h^k(y))$$

sur \widetilde{R}_d et on note $d_\infty = \lim_{k \rightarrow +\infty} d_k$.

Un chemin de \widetilde{R}_d est légal s'il est le relevé d'un chemin légal de R_d . L'application h étend également tout chemin légal de η , et on a la proposition suivante.

PROPOSITION 4.2. — *Si $\chi : [0, 1] \rightarrow \widetilde{R}_d$ est un chemin légal de \widetilde{R}_d avec $\chi([0, 1]) = [x, y]$, alors la suite $(d_k(x, y))_{k \in \mathbb{N}}$ est constante et on a $d_\infty(x, y) = d_0(x, y)$.*

La fonction d_∞ est une pseudo-distance sur \widetilde{R}_d et une distance sur $T_{\Phi-1} = \widetilde{R}_d / \sim$ où $x \sim y$ si et seulement si $d_\infty(x, y) = 0$. Le groupe libre F_d agit encore sur $T_{\Phi-1}$ par isométries et h induit H sur $T_{\Phi-1}$. L'application H est une homothétie de rapport η qui vérifie

$$\sigma^{-1}(w)H = Hw$$

pour tout élément w de F_d . On note encore \mathcal{P} le point de $T_{\Phi-1}$ fixe par H . Finalement, $T_{\Phi-1}$ vérifie les propriétés du théorème précédent. C'est l'arbre invariant de σ^{-1} ; il est également appelé arbre répulsif de σ .

L'application Q

Le groupe libre F_d agit sur l'arbre réel $T_{\Phi-1}$ de manière non-triviale, minimale, avec stabilisateurs d'arcs triviaux. L'action est de plus à orbites denses puisque $\eta > 1$. Sous ces conditions, il est possible de construire l'application Q décrite dans [19] par G. Levitt et M. Lustig. L'application Q est équivariante et surjective de ∂F_d dans $\overline{T}_{\Phi-1} \cup \partial T_{\Phi-1}$ (où $\overline{T}_{\Phi-1}$ est le complété métrique de $T_{\Phi-1}$ et $\partial T_{\Phi-1}$ son bord de Gromov). Elle vérifie la proposition suivante.

PROPOSITION 4.3 ([19]). — *Soit $V \in \partial F$; pour tout Z de $\overline{T}_{\Phi-1}$, si la suite $(v_n)_n$ de F tend vers V (lorsque $n \rightarrow +\infty$) et si la suite $(v_n Z)_n$ converge (lorsque $n \rightarrow +\infty$) vers un point R de $\overline{T}_{\Phi-1}$, alors $R = Q(V)$.*

La propriété d'équivariance se traduit, pour tout élément u de F_d et tout élément V de ∂F_d , par $Q(uV) = uQ(V)$.

4.3. Le compact T_τ est une partie de $\overline{T}_{\Phi^{-1}}$

La distance d_∞ et l'homothétie H s'étendent naturellement à $\overline{T}_{\Phi^{-1}}$; on les note encore d_∞ et H . On va établir une bijection isométrique de T_τ (équation 3.1) dans $Q(\Omega^+)$. On rappelle que f_Q est l'application définie par l'équation 3.4 et qu'elle est surjective du système symbolique Ω^+ dans l'arbre T_τ (proposition 3.23). On montre d'abord que pour tout $u^{-1}\omega, v^{-1}\omega$ de Ω_p^+ , on a

$$d_\infty(Q(u^{-1}\omega), Q(v^{-1}\omega)) = d_{T_\tau}(f_Q(u^{-1}\omega), f_Q(v^{-1}\omega)).$$

On rappelle que \mathcal{P} est le point de $T_{\Phi^{-1}}$ fixe par H .

LEMME 4.4. — *Pour tout élément w de F_d , $Q(w\omega) = w\mathcal{P}$.*

Démonstration. — Par la propriété $\sigma^{-1}(w)H = Hw$ pour tout w de F_d , on déduit

$$d_\infty(\mathcal{P}, \sigma^n(1)\mathcal{P}) = \eta^{-n}d_\infty(\mathcal{P}, 1\mathcal{P}).$$

Ainsi, la suite $(\sigma^n(1))_n$ converge vers ω , et la suite $(\sigma^n(1)\mathcal{P})_n$ converge vers \mathcal{P} ; d'après la proposition 4.3, $Q(\omega) = \mathcal{P}$. On conclut grâce à l'équivariance de Q . □

PROPOSITION 4.5. — *Pour tout $u^{-1}\omega, v^{-1}\omega$ de Ω_p^+ ,*

$$d_\infty(Q(u^{-1}\omega), Q(v^{-1}\omega)) = d_{T_\tau}(f_Q(u^{-1}\omega), f_Q(v^{-1}\omega)).$$

Démonstration. — On rappelle que le vecteur $\mathbf{V}_{\sigma^{-1}}$ est défini par

$$\mathbf{V}_{\sigma^{-1}} = [1 \quad \eta^{d-1} \quad \eta^{d-2} \quad \dots \quad \eta^2 \quad \eta].$$

On suppose que $f_0^{-1}(u^{-1}) = x, f_0^{-1}(v^{-1}) = y$ (voir équation 3.2) et que x et y sont des points de branchement de T_n^s pour un certain $n \in \mathbb{N}$. On suppose de plus que $p_*(\gamma_n(x, y)) = w$ ($w \in F_d$) ; les points x et y étant des points de branchement, le mot $\gamma_n(x, y)$ ne contient aucune lettre k, \bar{k} avec $d + 1 \leq k \leq 2d - 2$. On peut ainsi déduire de la proposition 3.8 que

$$d_{T_\tau}(f_Q(u^{-1}\omega), f_Q(v^{-1}\omega)) = \eta^{-n} \sum_{i=0}^{|w|-1} \mathbf{V}_{\sigma^{-1}}(w_i),$$

où $|w|$ est la longueur de w , w_i est la i -ème lettre de w et $\mathbf{V}_{\sigma^{-1}}(w_i)$ désigne la k -ième coordonnée de $\mathbf{V}_{\sigma^{-1}}$ si $w_i = k$ ou $w_i = k^{-1}$.

Utilisant la proposition précédente, l'équivariance de Q et la propriété $\sigma^{-1}(w)H = Hw$, on obtient :

$$d_\infty(Q(u^{-1}\omega), Q(v^{-1}\omega)) = d_\infty(u^{-1}\mathcal{P}, u^{-1}\sigma^n(w)\mathcal{P}) = d_\infty(\mathcal{P}, \sigma^n(w)\mathcal{P}) = \eta^{-n}d_\infty(\mathcal{P}, w\mathcal{P}).$$

L'arbre T_n^s est discerné (voir section 2.1) quel que soit $n \in \mathbb{N}$; on en déduit que pour tout $k \in \mathbb{N}$, appliquer σ^{-k} à w ne produira aucune annulation (cf. proposition 3.5). Le chemin $[\mathcal{P}, w\mathcal{P}]$ est donc un chemin légal de \widetilde{R}_d et la proposition 4.2 assure que $d_\infty(\mathcal{P}, w\mathcal{P}) = \sum_{i=0}^{|w|-1} \mathbf{V}_{\sigma^{-1}(w_i)}$. □

Il s'agit d'étendre la propriété à l'ensemble Ω^+ . Soit $V \in \Omega^+ \setminus \Omega_p^+$ et soit U un mot infini à gauche tel que $U.V \in \Omega$ et $\Gamma(U.V) = (p_i, a_i, s_i)_{i \in \mathbb{N}}$. Soit $(u_n^{-1})_n$ la suite définie par $u_0^{-1} = p_0^{-1}$ et $u_{n+1}^{-1} = u_n^{-1}\sigma^{n+1}(p_{n+1}^{-1})$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On a défini $f_Q(V)$ comme la limite dans T_τ de la suite $(f_Q(u_n^{-1}\omega))_n$, et on veut montrer que la suite $(Q(u_n^{-1}\omega))_n$ de $Q(\Omega^+)$ converge vers $Q(V)$.

Pour tout mot $W = (W_i)_{i \in -\mathbb{N}^*}$ infini à gauche, on définit le mot W^{-1} de ∂F_d par $W^{-1} = (W_j)_{j \in \mathbb{N}}$ avec $W_j = W_{-j-1}^{-1}$. La suite (u_n^{-1}) est une suite de F_d convergente vers $U^{-1} \in \partial F_d$ (d'après le théorème 1.3). De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$d_\infty(Q(u_n^{-1}\omega), Q(u_{n+1}^{-1}\omega)) = \eta^{-(n+1)}d_\infty(\mathcal{P}, p_{n+1}^{-1}\mathcal{P}).$$

Quel que soit $n \in \mathbb{N}$, p_n est égal soit à 1, soit à ϵ ; la suite $(Q(u_n^{-1}\omega))_n$ est donc une suite de Cauchy de $Q(\Omega^+)$ et converge vers $Q(U^{-1})$ d'après la proposition 4.3.

PROPOSITION 4.6. — *Si $V \in \Omega^+$ et $U.V \in \Omega$ (U étant un mot infini à gauche), alors $Q(V) = Q(U^{-1})$.*

Démonstration. — On commence par montrer la proposition sur les mots de Ω_{per} . La suite $(\sigma^{nd}(1))_n$ converge vers ω et pour tout $1 \leq k \leq d$, la suite $(\sigma^{nd}(k^{-1}))_n$ converge vers un élément ω_k de ∂F_d . On déduit de la relation $\sigma^{-1}(w)H = Hw$ ($w \in F_d$) que

$$d_\infty(\mathcal{P}, \sigma^{nd}(1)\mathcal{P}) = \eta^{-nd}d_\infty(\mathcal{P}, 1\mathcal{P})$$

$$d_\infty(\mathcal{P}, \sigma^{nd}(k^{-1})\mathcal{P}) = \eta^{-nd}d_\infty(\mathcal{P}, k^{-1}\mathcal{P}).$$

Les suites $(\sigma^{nd}(1)\mathcal{P})_n$ et $(\sigma^{nd}(k^{-1})\mathcal{P})_n$ sont donc des suites de Cauchy convergentes vers \mathcal{P} . On déduit de la proposition 4.3 que $Q(\omega) = Q(\omega_k) = \mathcal{P}$ quel que soit $1 \leq k \leq d$.

Si $U.V \in (\bigcup_{n \in \mathbb{Z}} S^n(\Omega_{per}))$, alors il existe un élément w de F_d tel que $V = w\omega$ et $U^{-1} = w\omega_k$ pour un certain $1 \leq k \leq d$. La proposition reste vraie par équivariance de Q .

Soit $U.V \in \Omega \setminus (\bigcup_{n \in \mathbb{Z}} S^n(\Omega_{per}))$ et $\Gamma(U.V) = (p_i, a_i, s_i)_{i \in \mathbb{N}}$. On note $v_0 = a_0 s_0$, $u_0^{-1} = p_0^{-1}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = v_n \sigma^{n+1}(s_{n+1})$ et $u_{n+1}^{-1} = u_n^{-1} \sigma^{n+1}(p_{n+1}^{-1})$. Par le théorème 1.3, les suites $(v_n)_n$ et $(u_n^{-1})_n$ sont convergentes vers V et U^{-1} respectivement. De plus, les égalités

$$d_\infty(v_n \mathcal{P}, v_{n+1} \mathcal{P}) = d_\infty(\mathcal{P}, \sigma^{n+1}(s_{n+1}) \mathcal{P}) = \eta^{-(n+1)} d_\infty(\mathcal{P}, s_{n+1} \mathcal{P})$$

$$d_\infty(u_n^{-1} \mathcal{P}, u_{n+1}^{-1} \mathcal{P}) = d_\infty(\mathcal{P}, \sigma^{n+1}(p_{n+1}^{-1}) \mathcal{P}) = \eta^{-(n+1)} d_\infty(\mathcal{P}, p_{n+1}^{-1} \mathcal{P})$$

sont vérifiées ; les suites $(v_n \mathcal{P})_n$ et $(u_n^{-1} \mathcal{P})_n$ sont des suites de Cauchy de $T_{\Phi^{-1}}$ et convergent dans $\bar{T}_{\Phi^{-1}}$ vers $Q(V)$ et $Q(U^{-1})$ respectivement. On déduit de la proposition 1.1 que $u_n v_n = \sigma^{n+1}(k)$ pour une certaine lettre k de A ; ainsi,

$$d_\infty(u_n^{-1} \mathcal{P}, v_n \mathcal{P}) = d_\infty(\mathcal{P}, \sigma^{n+1}(k) \mathcal{P}) = \eta^{-(n+1)} d_\infty(\mathcal{P}, k \mathcal{P}),$$

et on peut conclure que $Q(V) = Q(U^{-1})$. □

On obtient ainsi la propriété suivante.

PROPOSITION 4.7. — *Pour tout V_1, V_2 de Ω^+ , on a*

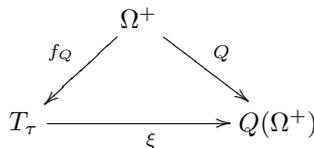
$$d_\infty(Q(V_1), Q(V_2)) = d_{T_\tau}(f_Q(V_1), f_Q(V_2)).$$

Les propriétés combinatoires de la substitution d'arbre, couplées avec celles de l'automate des préfixes-suffixes, ont ainsi permis de définir une application $f_Q : \Omega^+ \rightarrow T_\tau$ qui réplique, au sens de la propriété 4.7, l'application $Q : \Omega^+ \rightarrow Q(\Omega^+)$. On peut finalement définir une bijection isométrique de T_τ dans $Q(\Omega^+)$.

THÉORÈME 4.8. — *L'application ξ définie pour tout V de Ω^+ par*

$$\begin{aligned} \xi : T_\tau &\rightarrow Q(\Omega^+) \\ f_Q(V) &\mapsto Q(V) \end{aligned}$$

est une bijection isométrique.



5. Généralisation

On discute ici des difficultés liées à la généralisation des constructions et des résultats énoncés précédemment pour la classe d'exemples étudiée. On parlera de substitutions inversibles afin de pouvoir réutiliser les définitions et concepts de la dynamique symbolique, mais la discussion concerne tous les automorphismes de groupe libre.

Soit α une substitution primitive inversible sur un alphabet A ; on voit α comme un automorphisme de $F(A)$, le groupe libre de base A . On note (Ω_α^+, S) le système dynamique engendré par α . On suppose que l'automorphisme α^{-1} admet un représentant train-track, c'est-à-dire un représentant topologique $f : G \rightarrow G$ (cette fois G peut être différent de la rose) tel que tout arc de G est un chemin légal. On peut alors construire l'arbre $T_{\alpha^{-1}}$ invariant de α^{-1} ([15]) et l'application $Q_{\alpha^{-1}} : \partial F(A) \rightarrow \overline{T}_{\alpha^{-1}} \cup \partial T_{\alpha^{-1}}$ associée ([19]). L'action par isométries du groupe libre sur $T_{\alpha^{-1}}$ permet de représenter l'action du décalage sur Ω_α^+ par un système d'isométries partielles sur $Q_{\alpha^{-1}}(\Omega_\alpha^+)$. Notre but est de construire le compact $Q_{\alpha^{-1}}(\Omega_\alpha^+)$ par substitution d'arbre.

Les propriétés géométriques de ce compact sont étudiées dans [9] : suivant l'automorphisme α considéré, il peut être soit une forêt finie (une union finie d'arbres réels disjoints), soit un Cantor dont l'enveloppe convexe est un arbre réel. La non-connexité dans le cas d'une forêt finie n'est évidemment pas un obstacle. Pour ce qui est du cas Cantor, le problème peut être abordé de deux manières. La première consiste simplement à essayer de construire l'enveloppe convexe par substitution d'arbre, alors que la seconde consiste à définir des substitutions de graphe, qui permettraient d'obtenir directement l'ensemble de Cantor. Il semblerait que la meilleure solution soit en fait de coupler les deux approches. Dans [5], M. Boshernitzan et I. Kornfeld étudie l'un de ces cas ; ils représentent la dynamique d'un automorphisme par une translation d'intervalles. Il n'est évidemment pas très avantageux de décrire un intervalle par substitution d'arbre (par contre il serait intéressant de retrouver le Cantor), mais le phénomène de translation de domaines peut également se produire sur des arbres plus compliqués. Dans ce cas, obtenir l'enveloppe convexe par substitution d'arbre permettrait de représenter explicitement ces translations.

La représentation par substitution d'arbre repose sur un principe simple qui nécessite d'être adressé : un point (en se rappelant que ce point correspond à une orbite) placé à une étape finie est définitivement placé. C'est pour cette raison qu'il est essentiel que les arbres (simpliciaux) générés par la substitution d'arbre soient des arbres discernés. Le phénomène peut se

résumer simplement grâce à la proposition 4.2 (la notion de discernement est équivalente à celle de chemin légal). Essentiellement, si un arbre de la suite n'est pas discerné, alors il contient deux points dont le chemin est codé par $\bar{k}k$ (ou $k\bar{k}$) pour une certaine lettre k ; la substitution d'arbre a alors produit deux points distincts de même orbite.

On se reporte à la proposition 3.5 qui constate que, sur l'exemple proposé, le choix du tronc est complètement déterminé par l'automorphisme inverse. Ce choix a été rendu possible par le fait que l'automorphisme inverse était train-track et sans chemin de Nielsen. Combinatoirement, on dit qu'un automorphisme α^{-1} de $F(A)$ est train-track si pour tout $a \in A$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\alpha^{-n}(a)$ ne produit pas d'annulation; il est sans chemin de Nielsen si pour tout mot w de $F(A)$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, si w_r est l'expression réduite de $\alpha^{-N}(w)$, alors $\alpha^{N-n}(w_r)$ ne produit pas d'annulation.

Voici un exemple d'automorphisme qui ne vérifie pas la propriété train-track. Il s'agit de l'inverse de la substitution $a \mapsto ab, b \mapsto ac, c \mapsto a$ (dite de Tribonacci).

$$\begin{aligned}\phi^{-1} : a &\mapsto c \\ b &\mapsto c^{-1}a \\ c &\mapsto c^{-1}b.\end{aligned}$$

Appliquer ϕ^{-2} à la lettre c produit une annulation :

$$\phi^{-2}(c) = \phi^{-1}(c^{-1}b) = b^{-1}cc^{-1}a.$$

On donne également un automorphisme qui a un chemin de Nielsen. C'est l'inverse de la substitution $a \mapsto ba, b \mapsto babac, c \mapsto b$.

$$\begin{aligned}\phi^{-1} : a &\mapsto c^{-1}a \\ b &\mapsto c \\ c &\mapsto a^{-1}a^{-1}b.\end{aligned}$$

On peut vérifier facilement que ϕ^{-1} est train-track. Cependant, appliquer ϕ^{-1} au mot ac produit une annulation :

$$\phi^{-1}(ac) = c^{-1}aa^{-1}a^{-1}b = c^{-1}a^{-1}b.$$

Le mot obtenu contient $(ac)^{-1}$, et on en déduit qu'appliquer ϕ^{-1} successivement produira toujours une annulation.

Il existe des méthodes pour contourner ces difficultés. En fait, il est montré dans [4] que tout automorphisme dit *iwip* (irreducible with irreducible

power) admet un représentant train-track (et les auteurs donnent un algorithme pour le trouver). Par des procédés comparables, on peut parfois se débarrasser de certains chemins de Nielsen (c'est le cas pour l'exemple précédent). Cependant, même dans le cas iwip, il est parfois impossible d'effacer tous les chemins de Nielsen, et cela semble être une des limites de la représentation par substitution d'arbre.

Enfin, même si on a pu déterminer le tronc de la substitution d'arbre (c'est-à-dire qu'on a trouvé un représentant train-track sans chemin de Nielsen de l'automorphisme α^{-1}), il reste à décider les branchements à effectuer. Dans la section 3.4, on a expliqué les branchements de l'exemple proposé en montrant qu'ils respectaient les propriétés combinatoires du système dynamique. Il semble que ces propriétés soient un bon point de départ à la généralisation.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] P. ARNOUX, V. BERTHÉ, A. HILION & A. SIEGEL, « Fractal representation of the attractive lamination of an automorphism of the free group », *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)* **56** (2006), n° 7, p. 2161-2212, Numération, pavages, substitutions.
- [2] P. ARNOUX & S. ITO, « Pisot substitutions and Rauzy fractals », *Bull. Belg. Math. Soc. Simon Stevin* **8** (2001), n° 2, p. 181-207, Journées Montoises d'Informatique Théorique (Marne-la-Vallée, 2000).
- [3] M. BESTVINA, M. FEIGNN & M. HANDEL, « Laminations, trees, and irreducible automorphisms of free groups », *Geom. Funct. Anal.* **7** (1997), n° 2, p. 215-244.
- [4] M. BESTVINA & M. HANDEL, « Train tracks and automorphisms of free groups », *Ann. of Math. (2)* **135** (1992), n° 1, p. 1-51.
- [5] M. BOSHERNITZAN & I. KORNFELD, « Interval translation mappings », *Ergodic Theory Dynam. Systems* **15** (1995), n° 5, p. 821-832.
- [6] V. CANTERINI & A. SIEGEL, « Automate des préfixes-suffixes associé à une substitution primitive », *J. Théor. Nombres Bordeaux* **13** (2001), n° 2, p. 353-369.
- [7] ———, « Geometric representation of substitutions of Pisot type », *Trans. Amer. Math. Soc.* **353** (2001), n° 12, p. 5121-5144.
- [8] T. COULBOIS, « Fractal trees for irreducible automorphisms of free groups », *Journal of Modern Dynamics* (2010), n° 2, p. 359 - 391.
- [9] T. COULBOIS & A. HILION, « Rips induction : Index of the dual lamination of an \mathbb{R} -tree », [arXiv:1002.0972](https://arxiv.org/abs/1002.0972), 2010.
- [10] T. COULBOIS, A. HILION & M. LUSTIG, « \mathbb{R} -trees and laminations for free groups. II. The dual lamination of an \mathbb{R} -tree », *J. Lond. Math. Soc. (2)* **78** (2008), n° 3, p. 737-754.
- [11] ———, « \mathbb{R} -trees, dual laminations and compact systems of partial isometries », *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.* **147** (2009), n° 2, p. 345-368.
- [12] M. CULLER & K. VOGTMANN, « Moduli of graphs and automorphisms of free groups », *Invent. Math.* **84** (1986), n° 1, p. 91-119.
- [13] K. J. FALCONER, *The geometry of fractal sets*, Cambridge Tracts in Mathematics, vol. 85, Cambridge University Press, Cambridge, 1986, xiv+162 pages.

- [14] N. P. FOGG, *Substitutions in dynamics, arithmetics and combinatorics*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 1794, Springer-Verlag, Berlin, 2002, Edited by V. Berthé, S. Ferenczi, C. Mauduit and A. Siegel, xviii+402 pages.
- [15] D. GABORIAU, A. JAEGER, G. LEVITT & M. LUSTIG, « An index for counting fixed points of automorphisms of free groups », *Duke Math. J.* **93** (1998), n° 3, p. 425-452.
- [16] Y. JULLIAN, « Représentation géométrique des systèmes dynamiques substitutifs par substitutions d'arbre », Thèse, Université de la Méditerranée, 2009.
- [17] I. KAPOVICH & N. BENAKLI, « Boundaries of hyperbolic groups », in *Combinatorial and geometric group theory (New York, 2000/Hoboken, NJ, 2001)*, Contemp. Math., vol. 296, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2002, p. 39-93.
- [18] M. KEANE, « Interval exchange transformations », *Math. Z.* **141** (1975), p. 25-31.
- [19] G. LEVITT & M. LUSTIG, « Irreducible automorphisms of F_n have north-south dynamics on compactified outer space », *J. Inst. Math. Jussieu* **2** (2003), n° 1, p. 59-72.
- [20] ———, « Automorphisms of free groups have asymptotically periodic dynamics », *J. Reine Angew. Math.* **619** (2008), p. 1-36.
- [21] D. LIND & B. MARCUS, *An introduction to symbolic dynamics and coding*, Cambridge University Press, Cambridge, 1995, xvi+495 pages.
- [22] R. C. LYNDON & P. E. SCHUPP, *Combinatorial group theory*, Springer-Verlag, Berlin, 1977, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, Band 89, xiv+339 pages.
- [23] R. D. MAULDIN & S. C. WILLIAMS, « Hausdorff dimension in graph directed constructions », *Trans. Amer. Math. Soc.* **309** (1988), n° 2, p. 811-829.
- [24] F. PAULIN, « Sur les automorphismes extérieurs des groupes hyperboliques », *Ann. Sci. École norm. sup. (4)* **30** (1997), n° 2, p. 147-167.
- [25] M. QUEFFÉLEC, *Substitution dynamical systems—spectral analysis*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 1294, Springer-Verlag, Berlin, 1987, xiv+240 pages.
- [26] G. RAUZY, « Échanges d'intervalles et transformations induites », *Acta Arith.* **34** (1979), n° 4, p. 315-328.
- [27] ———, « Nombres algébriques et substitutions », *Bull. Soc. Math. France* **110** (1982), n° 2, p. 147-178.
- [28] A. SIEGEL, « Représentations géométrique, combinatoire et arithmétique des systèmes substitutifs de type Pisot », Thèse, Université de la Méditerranée, 2000.
- [29] W. A. VEECH, « Interval exchange transformations », *J. Analyse Math.* **33** (1978), p. 222-272.
- [30] M. VIANA, *Dynamics of interval exchange maps and Teichmüller flows*, Lecture notes of graduate courses, IMPA, 2005 and 2007.

Manuscrit reçu le 14 mai 2009,
révisé le 7 janvier 2010,
accepté le 26 mars 2010.

Yann JULLIAN
Université Paul Cézanne
LATP
Avenue de l'Escadrille Normandie-Niemen
Case A
13397 Marseille cedex 20 (France)
jullian@cmi.univ-mrs.fr