

OCTAVE GALVANI

La réalisation des connexions euclidiennes d'éléments linéaires et des espaces de Finsler

Annales de l'institut Fourier, tome 2 (1950), p. 123-146

http://www.numdam.org/item?id=AIF_1950__2__123_0

© Annales de l'institut Fourier, 1950, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'institut Fourier » (<http://annalif.ujf-grenoble.fr/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

LA RÉALISATION DES CONNEXIONS EUCLIDIENNES D'ÉLÉMENTS LINÉAIRES ET DES ESPACES DE FINSLER

par O. GALVANI (Grenoble).

I. — INTRODUCTION

1. — Les espaces de Finsler sont les espaces métriques définis par une distance élémentaire $ds = \mathcal{L}(x, dx)$, la fonction \mathcal{L} des coordonnées x et de leurs différentielles étant seulement assujettie à être positivement homogène du premier degré par rapport aux différentielles. Les espaces de Riemann en sont un cas bien particulier.

E. Cartan a montré que si \mathcal{L} a des dérivées troisièmes continues et conduit à un problème régulier de calcul des variations, on peut regarder l'espace F correspondant comme un espace d'éléments linéaires⁽¹⁾ à connexion euclidienne : F devient en somme un assemblage de morceaux infiniment petits d'espaces euclidiens, chaque morceau étant constitué par les éléments linéaires infiniment voisins d'un élément linéaire de F .

2. — On sait d'autre part qu'un espace R de Riemann analytique peut être localement considéré comme une variété euclidienne plongée dans un espace à nombre suffisant de dimensions, douée de la connexion induite par l'espace ambiant. Je vais montrer qu'il en est encore ainsi des espaces de Finsler F analytiques, mais alors que pour R l'élément générateur de la variété réalisante était le point, il faut prendre pour les variétés réalisant F un élément générateur plus complexe, à savoir l'ensemble S d'un élément linéaire L et d'un multiplan passant par L . L'espace F devient alors l'assemblage de

(1) Un élément linéaire est la figure formée par un point et une direction issue de ce point.

morceaux *finis* de variétés euclidiennes, chaque morceau consistant en un voisinage d'un élément S de la variété.

3. — L'existence des réalisations d'un F donné s'obtiendra comme conséquence d'un théorème plus général relatif aux connexions euclidiennes d'éléments linéaires, et par suite applicable aussi aux espaces variationnels généralisés de Lichnerowicz⁽²⁾.

4. — Les divers théorèmes d'existence qui font l'objet de cet article s'appuient sur la théorie des systèmes différentiels analytiques : ils supposent par suite l'analyticité des espaces réalisés. Ils sont d'autre part de nature *locale*.

Comme les espaces de Riemann, les réalisations d'une connexion euclidienne d'éléments linéaires dépendent de fonctions arbitraires — et aussi du nombre de dimension de l'espace où se fait la réalisation. On en profitera pour imposer aux réalisations certaines propriétés géométriques, par exemple « respecter » les points des espaces d'éléments linéaires ou les géodésiques des espaces de Finsler.

Les considérations du début de l'article relatives aux connexions d'éléments linéaires données *a priori* ou induites sur des variétés euclidiennes n'exigent que des hypothèses de continuité et de dérivabilité qui seront le plus souvent sous-entendues. Il est aisé d'en rétablir de suffisantes.

5. — **Notations générales.** — 1° Suppression du symbole Σ de sommation devant un indice figurant deux fois.

Utilisation du symbole δ_{ij} défini par :

$$(5; 1) \quad \delta_{ij} = 1 \quad \text{si } i = j; \quad \delta_{ij} = 0 \quad \text{si } i \neq j.$$

Représentation par :

$$(5; 2) \quad \mathcal{R}_{ij}, \quad (i, j) \leq n$$

de l'ensemble des \mathcal{R}_{ij} où i et j prennent les valeurs entières $\leq n$.

2° Nous désignerons par SDE l'ouvrage suivant de E. Cartan, auquel nous aurons souvent à nous reporter :

Les systèmes différentiels extérieurs et leurs applications géométriques, Paris, Hermann, 1945.

(2) Cf. A. Lichnerowicz, Les espaces variationnels généralisés (*Ann. Éc. Norm. Sup.*, t. 62, 1945, pp. 339-384).

Les notations $d\omega$, $[\omega\varphi]$ désigneront, comme dans SDE, une différentielle et un produit *extérieurs*.

3° *Méthode du repère mobile*⁽³⁾ : soit $R = (M\vec{e}_i)$, $i \leq n$, un repère mobile rectangulaire ($\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = \delta_{ij}$) de l'espace euclidien E_n , supposé différentiable (M et les \vec{e}_i différentiables). Les *composantes relatives* de R sont les ω_i , ω_j définis par

$$(5 ; 3) \quad dM = \omega_i \vec{e}_i; \quad d\vec{e}_i = \omega_{ij} \vec{e}_j.$$

Ce sont les composantes, rapportées à R , du *déplacement infinitésimal* qui amène R sur $(M + dM, \vec{e}_i + d\vec{e}_i)$. Elles vérifient

$$(5 ; 4) \quad \omega_{ij} = -\omega_{ji}.$$

On représentera par $\{\omega\}$ un système de ω_i , ω_{ij} vérifiant (5 ; 4) ; et à tout $\{\omega\}$ différentiable on associera $\{\Omega\}$, soit :

$$(5 ; 5) \quad \Omega_i = d\omega_i - [\omega_{ij}\omega_j]; \quad \Omega_{ij} = d\omega_{ij} - [\omega_{ik}\omega_{kj}].$$

Les relations de structure de E_n [intégrabilité des (5 ; 3)] s'écrivent

$$(5 ; 6) \quad \Omega_i = \Omega_{ij} = 0.$$

Soit $\{\omega\}$ un système de formes de Pfaff $\omega_i(u, du)$, $\omega_{ij}(u, du)$ vérifiant (5 ; 4) mais *non assujetti* à (5 ; 6). Et soit $\bar{R}(u) = (\bar{M}\vec{e}_i)$ un repère de E_n déduit d'un repère fixe $(M\vec{e}_i)$ par une rotation $\Theta(u)$ différentiable autour de \vec{e}_1 :

$$(5 ; 7) \quad \vec{e}_i = \alpha_{ij}(u)\vec{e}_j.$$

dM et $d\vec{e}_i$ étant encore définis par (5 ; 3), on aura $d\vec{e}_i$ par :

$$(5 ; 8) \quad d\vec{e}_i = d\alpha_{ij} \cdot \vec{e}_j + \alpha_{ij} d\vec{e}_j;$$

on dira que le système $\{\bar{\omega}\}$ défini par (5 ; 3, 7, 8) et

$$(5 ; 9) \quad d\bar{M} = \bar{\omega}_i \vec{e}_i, \quad d\vec{e}_i = \bar{\omega}_{ij} \vec{e}_j,$$

est le *transformé* de $\{\omega\}$ par les rotations $\Theta(u)$ autour de \vec{e}_1 .

(3) Cf. E. Cartan, *La méthode du repère mobile, la théorie des groupes continus et les espaces généralisés* (Exposés de Géométrie, Paris, 1935).

II. — LES CONNEXIONS EUCLIDIENNES D'ÉLÉMENTS LINÉAIRES \mathcal{L}_{2n-1}

6. — **Connexions \mathcal{L}_{2n-1} .** — D'après la théorie générale de E. Cartan (*), une connexion euclidienne d'éléments linéaires, soit \mathcal{L}_{2n-1} , est définie par un système $\{\omega\}$ de $\frac{n(n+1)}{2}$ formes de Pfaff ω_i, ω_{ij} ($i, j \leq n, \omega_{ij} = -\omega_{ji}$) à $2n-1$ variables u_i , telles que les $2n-1$ formes ω_i, ω_{1i} soient indépendantes :

$$(6; 1) \quad [\omega_1 \omega_2 \dots \omega_n \omega_{12} \dots \omega_{1n}] \neq 0.$$

A toute « courbe » $u = u(t)$ correspond alors dans l'espace euclidien E_n à n dimensions une famille de repères rectangulaires $R = [M(t), \vec{e}_i(t)]$ admettant $\{\omega[u(t)]\}$ comme composantes relatives. Les éléments $[M(t), \vec{e}_i(t)]$ seront regardés comme constituant la *carte* sur E_n de la courbe $u = u(t)$. Cette carte est définie à un déplacement près dans E_n .

La condition (6 ; 1) exprime que, si $[M\vec{e}_i]$ est un repère de E_n , il y a, en tout u , correspondance biunivoque entre du et l'élément linéaire $[M + \omega_i \vec{e}_i, \vec{e}_i + \omega_{1i} \vec{e}_i]$: la carte infinitésimale sur l'espace holonome tangent est biunivoque.

7. — **Systèmes équivalents de composantes relatives.** — Nous dirons que $\{\omega\}$ constitue un système de composantes relatives de \mathcal{L}_{2n-1} . Nous ne considérerons que des composantes rectangulaires ($\omega_{ij} = -\omega_{ji}$) dans lesquelles l'indice 1 joue le rôle particulier défini au n° 6 dans la construction de la carte : la *connexion de composantes* $\{\omega\}$ est ainsi bien déterminée.

Deux connexions doivent être regardées comme identiques si elles fournissent la même carte. Deux systèmes $\{\omega\}, \{\bar{\omega}\}$ définissant la même carte seront dits équivalents. Deux systèmes transformés l'un de l'autre par des rotations autour de \vec{e}_i [cf. (5 ; 7)] sont équivalents, car une telle transformation conserve les cartes. La conservation des cartes infinitésimales entraîne la nécessité de cette condition.

(*) Cf. E. Cartan, *La méthode du repère mobile* (loc. cit., n° 5), p. 59-61.

8. — **Connexions semi-ponctuelles.** — En général, le système

$$(8; 1) \quad \omega_i = 0, \quad i \leq n,$$

n'est pas complètement intégrable, et l'espace des u ne peut être engendré par des variétés U_{n-1} à $n - 1$ dimensions telles que la carte d'une courbe quelconque de U_{n-1} soit formée d'éléments linéaires de même centre.

Les connexions vérifiant (8; 1) seront dites *semi-ponctuelles*, l'espace des u doué d'une telle connexion *semi-ponctuel*.

9. — **Courbure et torsion des \mathcal{L}_{2n-1} .** — D'après (6; 1) les ω_i , ω_{ij} sont résolubles par rapport aux du , et les Ω (du n° 5) sont de la forme :

$$(9; 1) \quad \Omega_s = P_{shk}[\omega_h \omega_k] + Q_{shk}[\omega_h \omega_{1k}] + R_{shk}[\omega_{1h} \omega_{1k}], \quad s = i, ij$$

Les P , Q , R constituent les composantes de la *torsion* de \mathcal{L}_{2n-1} , pour $s = i$, et de sa *courbure* pour $s = ij$.

Les connexions *semi-ponctuelles* sont caractérisées par

$$(9; 2) \quad R_{ijk} = 0, \quad i, j, k \leq n.$$

Cela résulte immédiatement de (9; 1) et de la complète intégrabilité de (8; 1).

Rappelons que $P \equiv Q \equiv R \equiv 0$ caractérise les espaces holonomes : on a alors un espace d'éléments linéaires localement euclidien.

10. — **Espaces d'éléments linéaires L_{2n-1} à connexion euclidienne.** — Soit $x = (x_1, \dots, x_n)$ le point courant d'une variété différentielle V_n à n dimensions. En tout $x \in V_n$, les dx forment un espace vectoriel V' ; soit $x' = (x'_1 \dots x'_n)$ une direction de V' . Deux directions sont identiques si leurs x'_i sont proportionnels. Les éléments linéaires (x, x') de V_n forment une variété W_{2n-1} à $2n - 1$ dimensions.

On appellera faisceau d'éléments linéaires une variété à une dimension engendrée par des éléments linéaires de même centre.

Un espace d'éléments linéaires à connexion euclidienne est une variété W_{2n-1} douée d'une connexion \mathcal{L}_{2n-1} qui « respecte les points », c'est-à-dire telle que les faisceaux de W_{2n-1} aient pour cartes des faisceaux d'éléments linéaires de E_n . Ce sont donc des espaces « semi-ponctuels ». On les désignera par L_{2n-1} .

11. — **Composantes relatives des L_{2n-1} .** — On peut les exprimer à l'aide des coordonnées (surabondantes) x_i, x'_i . Les ω_i ne dépendent pas des dx'_i . Les $\{\omega\}$ sont de la forme :

$$(11; 1) \quad \left\{ \begin{array}{l} \omega_i = \xi_{ij}(x, x') dx_j \\ \omega_{ij} = \xi_{ijk}(x, x') dx_k + \gamma_{ijk}(x, x') dx'_k \end{array} \right.$$

et les ξ, γ sont homogènes de degré 0 par rapport aux x' , et vérifient

$$\begin{array}{ll} (11; 2) & x'_h \xi_{ih} = 0 \quad \text{pour} \quad 2 \leq i \leq n \\ (11; 3) & x'_h \gamma_{ijk} = 0 \quad \text{quels que soient } i, j. \end{array}$$

(11; 2) traduit la signification de x' dans V_n et le rôle que nous avons assigné à l'indice 1 : si $dx = x' dt$, dM est porté par \vec{e}_1 .

(11; 3) exprime l'homogénéité des coordonnées x'_i : les relations $dx = 0, dx' = x' dt$ définissent un élément linéaire (x, x') donc entraînent $\omega_i = \omega_{ij} = 0$.

12. — **Le ds^2 et la dérivation absolue dans les L_{2n-1} .** — Les vecteurs \vec{X} doués de l'élément d'appui (x, x') ⁽⁵⁾ forment un espace vectoriel euclidien $V'(x, x')$ en prenant

$$(12; 1) \quad \vec{X}^2 = g_{ij} X^i X^j$$

les g_{ij} étant définis par

$$ds^2 = \Sigma \omega_i^2 = g_{ij}(x, x') dx_i dx_j$$

et les X^i par $\vec{X} = X^i \vec{\mu}_i, \vec{\mu}_i$ étant le vecteur $dx_h = \delta_{ih}$.

Ce ds^2 est invariant dans les transformations $\Theta(u)$, et \vec{X}^2 ne dépend pas du choix des composantes ω_i, ω_{ij} , définissant L_{2n-1} .

Soit \vec{e}_i le vecteur de $V'(x, x')$ défini par $\omega_h = \delta_{ih}$: on a

$$\vec{\mu}_i = \lambda_{ij} \vec{e}_j$$

et on en déduit

$$d\vec{\mu}_i = d\lambda_{ij} \vec{e}_j + \lambda_{ik} \omega_{kj} \vec{e}_j = \omega_{ij}^j \vec{\mu}_j,$$

d'où la différentielle absolue de \vec{X} :

$$(12; 2) \quad DX^i = dX^i + X^k \omega_k^i.$$

(5) Cf. E. Cartan, Les espaces de Finsler (*Exposés de Géométrie*, Paris, 1934), pp. 4-6.

Soit $(\overline{\omega}_i, \overline{\omega}_{ij})$ un système déduit de ω_i, ω_{ij} par des rotations $\Theta(u)$: les repères \overrightarrow{e}_i correspondant à $\{\overline{\omega}\}$ se déduisent de \overrightarrow{e}_i par des rotations, et les μ_i restent fixes : donc les $\omega'_i(x, x', dx, dx')$ ne dépendent pas des composantes choisies.

Réciproquement les g_{ij} et les ω'_i caractérisent L_{2n-1} , et à partir d'eux on peut construire les $\{\omega\}$ du n° 11. On prendra dans $V(x, x')$ n vecteurs unitaires rectangulaires $\overrightarrow{e}_i, \overrightarrow{e}_i$, étant porté par x' (rappelons que \overrightarrow{X} et \overrightarrow{Y} sont rectangulaires si $g_{ij}X^iY^j = 0$). On en déduit les ω_i . Les ω'_i définissent ensuite les $d\overrightarrow{e}_i$, donc les ω_{ij} .

Une forme quadratique $g_{ij}X^iX^j$ définie positive arbitraire, et des ω'_i arbitraires définissent donc une L_{2n-1} . Si les g_{ij} et les ω'_i sont analytiques, on peut choisir les \overrightarrow{e}_i de façon que les ω_i et les ω_{ij} soient analytiques.

III. — LA CONNEXION \mathcal{L}_{2n-1} INDUITE SUR LES VARIÉTÉS EUCLIDIENNES V_{2n-1} D'ÉLÉMENTS MULTILINÉAIRES

13. — **Éléments S considérés.** — Dans l'espace euclidien E_n à $N > n$ dimensions, on considérera des éléments, que nous appellerons multilinéaires, formés d'un élément linéaire $L = (M, \Delta)$ et d'un n -plan P contenant L . Un tel élément sera représenté par $S = (L, P) = (M, \Delta, P)$ ou encore $(M\overrightarrow{e}_i, \overrightarrow{e}_i)$, \overrightarrow{e}_i étant un vecteur de Δ , et $\overrightarrow{e}_1, \overrightarrow{e}_i$ n vecteurs indépendants de P .

Inversement une notation telle que $P(S)$ désignera le n -plan support de l'élément S .

14. — **Variétés V_{2n-1} à $2n - 1$ dimensions d'éléments S de E_N .** — Quand $S = (M, \Delta, P)$ décrit une telle variété, son centre $M(S)$ décrit une variété ponctuelle $V_\mu(M)$ et l'élément linéaire $L(S) = (M, \Delta)$ décrit une variété $V_\lambda(L)$. Les nombres μ et λ de dimensions de ces variétés sont $\leq 2n - 1$. Nous ne considérerons que des V_{2n-1} telles que $\lambda = 2n - 1$.

La variété V_{2n-1} est différentielle (resp. p fois, analytique) si l'on peut trouver dans $P(S)$ n vecteurs unitaires rectangulaires \overrightarrow{e}_i , avec \overrightarrow{e}_i sur $\Delta(S)$ tels que les coordonnées de M et les composants des \overrightarrow{e}_i par

rapport à un repère fixe de E_N soient des fonctions différentielles (resp. p fois, analytiques) de $2n - 1$ variables $u = (u_1 \dots u_{2n-1})$.

15. — **Composantes relatives d'ordre 0 d'une V_{2n-1} différentielle.** — A tout $S(u) \in V_{2n-1}$ on associera un repère rectangulaire $R_N = (\vec{M}e_i e_\alpha)$ de E_n ($n < \alpha \leq N$) tel que $S = (\vec{M}e_i, \vec{e}_i)$ et que les $\vec{e}_i, \vec{e}_\alpha$ soient différentiables. Ces repères constituent une famille d'ordre 0 de repères de V_{2n-1} , et leurs composantes relatives $\{\omega\}$ un système de composantes d'ordre 0⁽⁶⁾. Deux systèmes de composantes d'ordre 0 se déduisent l'un de l'autre par des rotations évidentes.

On appellera $R_n(u)$ le repère $(\vec{M}e_i)$, et $R_n(u + du)$ le repère $(\vec{M} + d\vec{M}, \vec{e}_i + d\vec{e}_i)$.

16. — **Connexion \mathcal{L}_{2n-1} induite sur V_{2n-1} .** — Considérons la carte suivante de V_{2n-1} sur E_n : la carte infinitésimale $\gamma(S)$ représente tout S' voisin de S par la projection orthogonale sur $P(S)$ de l'élément linéaire $L(S')$; pour la V_{2n-1} générique $\gamma(S)$ est biunivoque ; le raccordement [dans la construction de la carte le long d'une $V_1(S)$] se fait en projetant orthogonalement $\gamma(S')$ sur $P(S)$. Cette « carte intrinsèque » de V_{2n-1} sur E_n définit, conformément à un principe général⁽⁷⁾ de réalisation des espaces de Cartan, la connexion d'éléments linéaires \mathcal{L}_{2n-1} induite sur V_{2n-1} par E_N .

Ces considérations conduisent à la définition analytique suivante :

DÉFINITION. — Soient $\{\omega\}$ les composantes, rapportées à $R_n(u)$, du déplacement infinitésimal de E_n qui amène $R_n(u)$ sur $R_n(u + du)$, les R_n étant les repères définis au n° 15. La connexion \mathcal{L}_{2n-1} induite sur V_{2n-1} , ou réalisée par V_{2n-1} , est la connexion de composantes $\{\omega\}$ (cf. n° 7).

Cette définition implique que V_{2n-1} ne réalise une \mathcal{L}_{2n-1} que si $\{\omega\}$ vérifie (6 ; 1), et n'est cohérente que si \mathcal{L}_{2n-1} est indépendante de la famille de repères d'ordre 0 choisie sur V_{2n-1} , ce que nous allons vérifier.

⁽⁶⁾ Cf. E. Cartan, *La méthode du repère mobile...* (loc. cit., n° 5), pp. 38-40.

⁽⁷⁾ Cf. O. Galvani, Sur la réalisation des espaces ponctuels à torsion en géométrie euclidienne (*Ann. Éc. Norm. Sup.*, t. 62, 1945, p. 6).

17. — Composantes $\{\omega\}$ de la connexion induite. — Dans E_N :

$$\begin{cases} M + dM = M + \varpi_i \vec{e}_i + \varpi_\alpha \vec{e}_\alpha, & (i, j) \leq n, \\ \vec{e}_i + d\vec{e}_i = \vec{e}_i + \varpi_{ij} \vec{e}_j + \varpi_{i\alpha} \vec{e}_\alpha, & n < \alpha \leq N. \end{cases}$$

et, les \vec{e}_α étant orthogonaux à $P(u)$:

$$(17; 1) \quad \omega_i = \varpi_i; \quad \omega_{ij} = \varpi_{ij}.$$

Les $\{\omega\}$ définissent donc une \mathcal{L}_{2n-1} si les ϖ_i, ϖ_{ij} (des R_N ; $i \leq n$) sont indépendantes. Les V_{2n-1} correspondantes seront dites *ordinaires*. Elles sont caractérisées par la propriété suivante : les $V_\lambda(L)$ sont à $2n - 1$ dimensions et aucune $V_1(L) \subset V_{2n-1}(L)$ n'est en $L(S)$ orthogonale à $P(S)$ tout le long de $\Delta(S)$.

Deux familles de R_N d'ordre 0 fournissent la même \mathcal{L}_{2n-1} , car les rotations des \vec{e}_α n'altèrent pas les ϖ_i, ϖ_{ij} et les rotations des \vec{e}_i ($2 \leq i \leq n$) les changent en un système équivalent (cf. n° 7). La définition du n° 16 est légitimée.

On appellera composantes *internes* d'ordre 0 de V_{2n-1} les ϖ d'indices $\leq n$. Les résultats précédents peuvent s'énoncer comme suit :

Théorèmes. — I. — Pour qu'une V_{2n-1} réalise une \mathcal{L}_{2n-1} , il faut et suffit qu'elle soit ordinaire.

II. — Les composantes de la \mathcal{L}_{2n-1} induite sont les composantes internes d'ordre 0 de V_{2n-1} .

18. — Variétés V_{2n-1} réalisant des espaces semi-punctuels. — Elles sont telles que le système :

$$(8; 1) \quad \varpi_i = 0 \quad i \leq n$$

soit complètement intégrable. Par tout $S \in V_{2n-1}$ passe alors une variété W_{n-1} vérifiant (8; 1). Les $M(S)$ correspondant à $S \in W_{n-1}$ décrivent une $W_{\mu'}(M)$ à $\mu' \leq n - 1$ dimensions. $V_\mu(M)$ est engendrée par les $W_\mu(M)$. En tout $M(S)$, $P(S)$ est d'après (8; 1) totalement perpendiculaire à $W_{\mu'}(M)$. Le cas $\mu' = 0$ peut être regardé comme un cas particulier de l'orthogonalité. On pourrait ainsi caractériser géométriquement les V_{2n-1} à \mathcal{L}_{2n-1} semi-punctuelle.

Les $W_\mu(M)$ sont les images des points (centres de faisceaux) de l'espace réalisé.

Une classe remarquable de V_{2n-1} est celle qu'on obtient à partir d'une V_n punctuelle de E_N , en associant à tout $M \in V_n$ un n -plan P , et

en prenant $S = (M, \Delta, P)$, avec Δ variable dans P . La connexion \mathcal{L}_{2n-1} induite est semi-ponctuelle. Les composantes relatives de ces $V_{2n-1}(S)$ vérifient les $(n+1)(N-n)$ équations (nécessaires et suffisantes) :

$$\begin{aligned} (18; 1) \quad & [\varpi_\alpha \varpi_1 \dots \varpi_n] = 0, \\ (18; 2) \quad & [\varpi_{i\alpha} \varpi_1 \dots \varpi_n] = 0, \end{aligned} \quad n < \alpha \leq N, i \leq n.$$

Une classe plus étendue est celle des V_{2n-1} qui vérifient seulement (18; 1), et qui seront dites *semi-ponctuelles*. Alors :

$$\mu' = 0, \quad \mu = n$$

et les images des points de l'espace réalisé sont des *points* d'une variété V_n ponctuelle de E_N . $V_{2n-1}(L)$ est une famille à n paramètres de cônes à $(n-1)$ dimensions, et $V_{2n-1}(S)$ s'obtient en associant à tout $L \in V_{2n-1}(L)$ un n -plan P passant par L .

IV. — RÉALISATION DES \mathcal{L}_{2n-1}

19. — On se propose maintenant de montrer que, étant donnée une \mathcal{L}_{2n-1} , il existe des V_{2n-1} qui la réalisent, du moins localement.

La connexion \mathcal{L}_{2n-1} est donnée par ses composantes relatives $\omega_i(u)$, $\omega_{ij}(u)$. D'après (17; 1) on est amené à chercher dans E_N une famille de repères R_N fonctions des u dont les composantes relatives soient $\omega_i \omega_{ij}$ ⁽⁸⁾.

Les repères rectangulaires de E_N dépendent de $\frac{N(N+1)}{2}$ paramètres z_s , analytiquement si le paramétrage est convenablement choisi. Leurs composantes relatives sont des formes de Pfaff analytiques déterminées de z , soient $\varpi_s(z)$, $\varpi_{st}(z)$, $s, t \leq N$. Le problème se ramène donc à l'existence de fonctions z des u vérifiant le système différentiel (Σ) :

$$\Sigma \left\{ \begin{aligned} \varpi_i(z) &= \omega_i(u) \\ \varpi_{ij}(z) &= \omega_{ij}(u) \end{aligned} \right. \quad i, j \leq n.$$

Toute solution du système Σ aux fonctions inconnues z des variables indépendantes u définit une réalisation de la \mathcal{L}_{2n-1} donnée.

(8) L'indépendance des ω_i , ω_{ij} assure alors celle des ϖ_i , ϖ_{ij} et (17; 1) est suffisante ; la V_{2n-1} est ordinaire.

Remarquons que seuls interviennent les z qui fixent l'origine et les n premiers vecteurs \vec{e}_i de R_N (cf. SDE, p. 129). On aura donc

$$\xi = \frac{n(n+1)}{2} + (N-n)(n+1)$$

fonctions inconnues.

20. — Quand la \mathcal{L}_{2n-1} donnée est analytique, Σ est analytique, et la théorie des systèmes en involution conduit au

THÉORÈME. — *Toute \mathcal{L}_{2n-1} analytique est réalisable dans l'espace euclidien à $N = 2n^2 - n$ dimensions, au voisinage de chacun de ses éléments générateurs. La solution générale dépend de $n(n^2 - 1)$ fonctions arbitraires de $2n - 1$ arguments.*

DÉMONSTRATION. — Compte tenu des équations de structure de E_N , la fermeture de Σ conduit au système :

$$\bar{\Sigma} \left\{ \begin{array}{l} \Sigma \left\{ \begin{array}{l} \varpi_i = \omega_i \\ \varpi_{ij} = \omega_{ij} \end{array} \right. \left. \begin{array}{l} \rho_1 = \frac{n(n+1)}{2} \text{ équations} \\ \rho_2 = \frac{n(n+1)}{2} \text{ équations.} \end{array} \right. \\ \Sigma' \left\{ \begin{array}{l} [\varpi_\alpha \varpi_{\alpha i}] = \Omega_i \\ [\varpi_\alpha \varpi_{\alpha i}] = \Omega_{ij} \end{array} \right. \end{array} \right.$$

Nous allons montrer que $\bar{\Sigma}$ est en involution en appliquant le critère suffisant (K) suivant :

21. — **Critère (K) d'involution.** — Pour qu'un système différentiel fermé composé de ρ_1 équations linéaires et de ρ_2 équations quadratiques aux fonctions inconnues z de ν variables indépendantes u soit en involution, il suffit qu'il existe, dans un élément intégral I_ν à ν dimensions n'introduisant aucune relation entre les du , une chaîne d'éléments linéaires I_q , $0 \leq q \leq \nu - 1$, à q dimensions :

$$I_0 \subset I_1 \subset I_2 \dots \subset I_{\nu-1} \subset I_\nu,$$

dont les caractères réduits σ (cf. SDE, p. 90) vérifient

$$\sigma_0 = \rho_1 \quad \sigma_p = \rho_2 \quad \text{pour} \quad 1 \leq p \leq \nu - 1.$$

22. — **Démonstration de (K).** — Soient \bar{s}'_p et \bar{s}_p les rangs des systèmes polaires réduit et non réduit (S'_p) et (S_p) de l'élément intégral générique à p dimensions ; posons :

$$22 ; 1) \quad \bar{\sigma}_p = \sigma_0 + \sigma_1 + \dots + \sigma_p = \rho_1 + p\rho_2 \quad \text{pour} \quad p \leq \nu - 1.$$

De par la formation de (S_p) :

$$(22; 2) \quad \bar{s}_p \ll \rho_1 + p\rho_2.$$

D'autre part

$$(22; 3) \quad \bar{s}'_p \ll \bar{s}_p \quad \text{et} \quad \bar{\sigma}_p \ll \bar{s}'_p.$$

Donc d'après (22; 1, 2, 3) :

$$(22; 4) \quad \bar{s}'_p = \bar{s}_p \quad \text{pour} \quad p \ll \nu - 1$$

et (S_p) n'introduit pour $p \ll \nu - 1$ aucune relation entre les du , le système donné est en involution (cf. SDE, p. 89).

23. — Application de (K) au système $\bar{\Sigma}$. — On va montrer qu'il existe un point intégral I_0 et ν éléments linéaires intégraux ε_p tels que les éléments $I_p = (I_0, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_p)$ soient intégraux pour $p \ll \nu$ et vérifient le critère.

Les éléments ε_h et tout élément linéaire inconnu x seront définis par :

$$\begin{cases} \varepsilon_h \left\{ \begin{array}{l} \omega'_i(h) = a_i(h), \quad \omega_{i,i}(h) = a_{i,i}(h), \quad \varpi_i(h), \quad \varpi_{i,i}(h), \\ \vec{a}(h) = \varpi_\alpha(h) \vec{u}_\alpha, \quad \vec{a}_i(h) = \varpi_{\alpha i}(h) \vec{u}_\alpha = a_{\alpha i} \vec{u}_\alpha, \end{array} \right. \\ x \left\{ \begin{array}{l} \omega_i(x), \quad \omega_{i,i}(x), \quad \varpi'_i(x), \quad \varpi_{i,i}(x), \\ \vec{x} = \varpi_\alpha(x) \vec{u}_\alpha, \quad \vec{x}_i = \varpi_{\alpha i}(x) \vec{u}_\alpha = x_{\alpha i} \vec{u}_\alpha, \end{array} \right. \end{cases}$$

les \vec{u}_α désignant $N - n$ vecteurs orthogonaux d'un espace euclidien auxiliaire E_α .

24. — Le système polaire (σ_p) de I_p s'écrit alors :

$$\begin{array}{l} (24; 1) \\ (24; 2) \\ (24; 3) \\ (24; 4) \end{array} \quad (\sigma_p) \left\{ \begin{array}{l} (1) \quad \varpi_i(x) = 0 \\ (2) \quad \varpi_{ij}(x) = 0 \\ (3) \quad \vec{x} \vec{a}_i(h) - \vec{x}_i \vec{a}(h) = 0 \\ (4) \quad \vec{x}_j \vec{a}_i(h) - \vec{x}_i \vec{a}_j(h) = 0 \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} \text{mod. } du. \\ h \ll p \\ i \ll n \end{array} \right.$$

Les équations (1), (2) laissent les du arbitraires et déterminent $\varpi_i(x)$, $\varpi_{ij}(x)$.

Les équations (3), (4) donnent les projections de \vec{x}_i sur les $\vec{a}(h)$ et les $\vec{a}_j(h)$ où $j < i$, en fonction des du , de \vec{x} et des produits scalaires $\vec{x}_i \vec{a}_j(h)$ où $j > i$. Pour que (σ_p) soit compatible, il suffit que les vecteurs $\vec{a}(h)$, $\vec{a}_j(h)$ où $j \ll n - 1$ soient indépendants. On prendra

alors arbitrairement les du , le vecteur \vec{x} , et les $\vec{x}_i \vec{a}_j(h)$ où $i < j \leq n - 1$, d'où les $\vec{x}_i \vec{a}(h)$ et les $\vec{x}_j \vec{a}_i(h)$. On a alors les projections des \vec{x}_i , où $i \leq n - 1$, sur les $\vec{a}(h)$, $a_1(h)$, ..., $\vec{a}_{n-1}(h)$.

Soient $\vec{a}_n(h_1)$ les $\vec{a}_n(h)$ qui forment avec les $\vec{a}(h)$, $\vec{a}_j(h)$ où $j \leq n - 1$, un système \mathcal{B} de vecteurs indépendants, et $\vec{a}_n(h_2)$ les $\vec{a}_n(h)$ qui sont des combinaisons linéaires des vecteurs de \mathcal{B} . On prendra arbitrairement les $\vec{x}_i \vec{a}_n(h_1)$ et on en déduira les $\vec{x}_i \vec{a}_n(h_2)$ (par combinaisons linéaires). On a alors les $\vec{x}_i \vec{a}_n(h)$ d'où les $\vec{x}_n \vec{a}_i(h)$, et finalement les \vec{x}_i ont des projections déterminées sur tous les \vec{a} indépendants compatibles avec leurs projections sur les autres \vec{a} .

Si le nombre de dimensions q de l'espace auxiliaire E_n est suffisant, on pourra prendre \vec{x} et les \vec{x}_i où $i \leq n - 1$ indépendants entre eux et indépendants des $\vec{a}(h)$, $\vec{a}_i(h)$ où $i \leq n - 1$: l'élément intégral (I_p, x) est alors un élément I_{p+1} dont le (σ_{p+1}) est compatible avec des du arbitraires. Pour $p \leq 2n - 2$, il suffit que le nombre q de dimensions de E_n soit :

$$q = N - n = (2n - 2)n.$$

On a alors une chaîne

$$I_0 \subset I_1 \subset \dots \subset I_{2n-1}$$

telle que I_{2n-1} n'introduit aucune relation entre les du .

De plus les équations $(24; 3, 4)$ réduites sont alors résolubles par rapport à $\vec{x}_i \vec{a}(h)$ et $\vec{x}_i \vec{a}_j(h)$ où $j < i$, et comme ces vecteurs \vec{a} sont indépendants, les équations $(24; 3, 4)$ sont indépendantes, et par suite de rang $p \frac{n(n+1)}{2}$; d'autre part, elles ne contiennent ni ω_i , ni ω_{ij} et le système réduit (σ_p) considéré comme système linéaire par rapport aux ω est de rang

$$\rho_1 + p\rho_2 = (p + 1) \frac{n(n+1)}{2}.$$

Les ω étant, en dz , des formes indépendantes, le système (σ_p) est par rapport aux dz de rang $\rho_1 + p\rho_2$. Les conditions (K) sont donc vérifiées ($\sigma_0 = \rho_1$, $\sigma_p = \rho_2$) et Σ est en involution.

25. — **Degré d'arbitraire de la solution générale.** — D'après (22 ; 4) on a

$$\sigma_p = \overline{s'_p} = \overline{s_p}$$

et l'on sait d'autre part (SDE, p. 74) que la solution générale dépend de

$$H = \xi - \overline{s_{2n-2}}$$

fonctions arbitraires des $2n - 1$ arguments u , ξ étant le nombre des fonctions inconnues. Ici :

$$N = 2n^2 - n$$

$$\xi = \frac{n(n+1)}{2} + 2n(n-1)(n+1)$$

$$\overline{s_{2n-2}} = \overline{\sigma_{2n-2}} = (2n-1) \frac{n(n+1)}{2}$$

d'où

$$H = n(n^2 - 1).$$

V. — RÉALISATIONS DES \mathcal{L}_{2n-1} SEMI-PONCTUELLES PAR DES V_{2n-1} SEMI-PONCTUELLES

26. — **Système différentiel correspondant à ces réalisations.** — C'est le système

$$\begin{array}{l} (26 ; 1) \\ (26 ; 2) \\ (26 ; 3) \\ (26 ; 4) \\ (26 ; 5) \end{array} \quad (\Sigma_1) \left\{ \begin{array}{l} (1) \quad \varpi_i = \omega_i \\ (2) \quad \varpi_{ij} = \omega_{ij} \\ (3) \quad [\varpi_\alpha \varpi_{\alpha i}] = \Omega_i \\ (4) \quad [\varpi_{\alpha j} \varpi_{\alpha i}] = \Omega_{ij} \\ (5) \quad [\varpi_\alpha \omega_1 \omega_2 \dots \omega_n] = 0 \end{array} \right.$$

obtenu en adjoignant à Σ la condition (18 ; 1) pour que V_{2n-1} soit semi-ponctuelle, et en y remplaçant les ϖ_i par les ω_i auxquels ils sont égaux d'après $(\overline{\Sigma}, 1)$, d'où (5).

Ce système Σ_1 est fermé. En effet, la connexion de composantes $\{\omega\}$ étant semi-ponctuelle

$$(26 ; 6) \quad d\omega_i = [\omega_j \omega_j] + P_{ijk}[\omega_j \omega_k] + Q_{ijk}[\omega_j \omega_1 k] \quad [R_{ijk} = 0, \text{ cf. } (9 ; 2)].$$

Soit

$$\Phi = [\omega_1 \omega_2 \dots \omega_n];$$

les relations (26 ; 6) donnent :

$$d\Phi = -[\Psi\Phi] \quad \text{avec} \quad \Psi = Q_{ik}\omega_{1k}.$$

Les (26 ; 5) s'écrivent :

$$(26 ; 7) \quad [\varpi_\alpha\Phi] = 0 \quad n < \alpha \leq N.$$

et leurs équations de fermeture sont

$$[d\varpi_\alpha\Phi] - [\Psi\varpi_\alpha\Phi] \equiv [\varpi_{\alpha i}\varpi_i\Phi] + [\varpi_{\alpha\beta}\varpi_\beta\Phi] - [\Psi\varpi_\alpha\Phi] = 0 \quad n < \beta \leq N$$

et sont conséquences de (26 ; 1 et 7) et de $[\omega_i\Phi] = 0$, qui est évidente.

27. — Nous allons montrer que, pour N assez grand, Σ_1 est en involution, si du moins il est analytique, ce qui établira le théorème suivant :

THÉORÈME. — *Toute \mathcal{Q}_{2n-1} semi-ponctuelle analytique est réalisable localement dans l'espace euclidien à $N = 2(n^2 - n + 1)$ dimensions, par des variétés V_{2n-1} semi-ponctuelles. La solution générale dépend de $n(n-1)^2$ fonctions arbitraires de $2n-1$ arguments.*

28. — **Démonstration de l'involution de Σ_1 .** — Nous cherchons une chaîne

$$(C) \quad I_0 \subset I_1 \subset \dots \subset I_{2n-1}$$

d'éléments intégraux I_q de Σ_1 à q dimensions telle que I_{2n-1} n'introduise aucune relation entre les du . Soit

$$\sigma_0 + \sigma_1 + \dots + \sigma_p$$

le rang du système polaire réduit de I_p ; posons

$$P = (2n-1)\sigma_0 + (2n-2)\sigma_1 + \dots + \sigma_{2n-2}.$$

Le système Σ_1 définit d'autre part un système d'équations entre les paramètres $t_{i,s}$ des équations

$$\varpi_\lambda = t_{i,s}\omega_s \quad (\lambda = i, ij ; s = i, 1i)$$

des éléments intégraux à $2n-1$ dimensions qui n'introduisent pas de relations entre les du . Soit X le nombre des équations indépendantes de ce système aux $t_{i,s}$. Pour que Σ_1 soit en involution, il suffit qu'on ait démontré pour une chaîne particulière (C) la relation

$$X \leq P.$$

C'est en effet la condition suffisante (SDE, p. 96), compte tenu de l'indépendance des ω et des ϖ .

29. — Recherche de la chaîne (C). — On cherchera les $I_p = (I_0 \varepsilon_1 \dots \varepsilon_p)$ contenant des ε_h de la forme :

$$\varepsilon_h \left\{ \begin{array}{l} \varpi_i = \delta_{ih}, \quad \varpi_{i'} = \delta_{hi'}, \quad i' = n + i - 1 \\ \vec{a}(h) = \omega_\alpha(h) \vec{u}_\alpha, \quad \vec{a}_i(h) = \omega_{\alpha i}(h) \vec{u}_\alpha \end{array} \right.$$

les \vec{u}_α étant $q = N - n$ vecteurs rectangulaires d'un E_α auxiliaire.

Il est clair qu'alors I_{2n-1} n'introduit aucune relation entre les du .

Les Ω sont des formes quadratiques des ω_i, ω_{ij} ; la forme bilinéaire associée à Ω est connue pour deux $\varepsilon_h, \varepsilon_k$ quelconques, et sera désignée par $\Omega(h, k)$.

En particulier, d'après (9; 2)

$$(29; 1) \quad \Omega_i(h, k) = 0 \quad \text{pour} \quad h > n \quad \text{et} \quad k > n.$$

30. — Détermination de (C). — Les ε_p se détermineront par récurrence. Pour plus de clarté, on remplacera $\vec{a}(p+1)$ par \vec{x} dans la recherche de ε_{p+1} .

1° Les calculs du n° 24 donnent les ε_p jusqu'à $p = n$, si toutefois q est assez grand pour que les $\vec{a}(h)$ et les $\vec{a}_i(h)$ où h et i sont $\leq n-1$ soient indépendants.

2° Pour $p > n$, soit $p' = p - n$; (26; 5) donne :

$$(30; 1) \quad \vec{x} = 0 \quad \text{donc} \quad (30; 2) \quad \vec{a}(n+p') = 0.$$

3° Les (26; 3) donnent :

$$(30; 3) \quad \vec{x}_i \vec{a}(h) = \Omega_i(h, p+1) \quad (\text{car } \vec{x} = 0).$$

Les (30; 3) où $h > n$ sont vérifiées identiquement d'après (29; 1) et (30; 2).

4° Les (26; 4) donnent

$$(30; 4) \quad \vec{x}_j \vec{a}_i(k) - \vec{x}_i \vec{a}_j(k) = \Omega_{ij}(k, p+1) \quad k \leq p.$$

Les raisonnements du n° 24 s'appliquent à (30; 3, 4) et conduisent à prendre q assez grand pour que les $\vec{a}(h)$ et $\vec{a}_i(k)$ où $h \leq n, i \leq n-1, k \leq 2n-2$ puissent être indépendants : cela donne

$$q = n + 2(n-1)^2.$$

5° Puisque $q \geq n^2$, on peut prendre (au 1°) les $\vec{a}(h)$ et les $\vec{a}_i(h)$ indépendants pour $i \leq n-1$, $h \leq n$.

Alors, $I_{n+p'-1}$ étant supposé connu et tel que ses $\vec{a}(h)$, $\vec{a}_i(k)$ soient indépendants pour $i \leq n-1$, les équations (30 ; 3, 4) sont compatibles si $n+p'-1 \leq 2n-2$, et permettent, si $n+p'-1 \leq 2n-3$, de prendre pour $i \leq n-1$ les \vec{x}_i indépendants entre eux et indépendants des $\vec{a}(h)$, $\vec{a}_i(k)$. D'où par récurrence la chaîne (C) cherchée, dont nous allons montrer qu'elle vérifie

$$X \leq P.$$

31. — Calcul de P. — Le calcul du n° 24 montre que

$$\sigma_p = \frac{n(n+1)}{2} \quad \text{pour} \quad p \leq n-1.$$

Pour $p = n$, les équations réduites tirées des $\bar{\Sigma}$ sont encore toutes indépendantes, puisque les vecteurs $\vec{a}(h)$, $\vec{a}_i(h)$ sont indépendants pour $i \leq n-1$, $h \leq n$. D'autre part, elles ne contiennent pas \vec{x} , et les équations réduites tirées de (26 ; 5) sont

$$\omega_a(x) = 0,$$

donc de rang q . Il en résulte que

$$\sigma_n = \frac{n(n+1)}{2} + q.$$

Pour $p > n$, toutes les équations réduites (3', 4') tirées de (30 ; 3, 4) sont indépendantes, mais les (3') sont les mêmes quel que soit p , de sorte que

$$\sigma_{n+1} = \sigma_{n+2} = \dots = \sigma_{2n-2} = \frac{n(n-1)}{2}.$$

Finalement :

$$P = \frac{n^2(n+1)(2n-1)}{2} + q(n-1) - \frac{n(n-1)(n-2)}{2}.$$

32. — Calcul de X. — Soit X_i , $i \leq 5$ les nombres de relations indépendantes en $t_{i,s}$ tirées des équations (26 ; i) :

$$\begin{aligned} X_1 &= n(2n-1) \\ X_2 &= \frac{n(n-1)(2n-1)}{2} \\ X_5 &= (n-1)q. \end{aligned}$$

Les relations tirées de $(\Sigma_1, 3)$ s'obtiennent par identification en $[\omega_i \omega_j]$ et en $[\omega_i \omega_{ij}]$, puisqu'aucun des 2 membres n'a de termes en $[\omega_i \omega_{ij}]$; donc :

$$X_3 \ll \left[\frac{n(n-1)}{2} + n(n-1) \right] n.$$

Enfin, les (26 : 4) ayant des termes en $[\omega_i \omega_j]$, $[\omega_i \omega_{ij}]$, $[\omega_i \omega_{ij}]$:

$$X_i \ll \left[\frac{n(n-1)}{2} + n(n-1) + \frac{(n-1)(n-2)}{2} \right] \frac{n(n-1)}{2}.$$

On trouve ainsi :

$$X \ll \Sigma X_i \ll \frac{n^2(n+1)(2n-1)}{2} + (n-1)q - \frac{n(n-1)(n-2)}{2}.$$

Le dernier membre est précisément P, donc $X \ll P$ c. q. f. d.

33. — **Degré d'arbitraire.** — La solution générale dépend de

$$H = \xi - \sigma_0 - \sigma_1 - \dots - \sigma_{2n-2}$$

fonctions arbitraires de $2n-1$ arguments. On a :

$$\sigma_0 + \sigma_1 + \dots + \sigma_{2n-2} = (2n-1) \frac{n(n+1)}{2} + q - n(n-2)$$

$$\text{et} \quad \xi = \frac{n(n+1)}{2} + q(n+1).$$

D'où $H = n(q - n^2 + n - 1)$ soit $H = n(n-1)^2$.

VI. — RÉALISATION DES ESPACES D'ÉLÉMENTS LINÉAIRES A CONNEXION EUCLIDIENNE

34. — Soit un L_{2n-1} défini (cf. n° 12) par les fonctions $g_{ij}(x, x')$ et les formes différentielles $\omega^i(x, x', dx, dx')$ qui donnent dans (12 ; 1) et (12 ; 2) la longueur d'un vecteur \vec{X} d'éléments d'appui (x, x') et sa différentielle absolue. Les formes $g_{ij}(x, x')X^i X^j$ sont supposées *définies positives*.

Si les g_{ij} et les ω^i sont analytiques on en déduit (n° 12) un système $\{\omega\}$ analytique de composantes de L_{2n-1} , et d'après les théorèmes des n°s 20 et 27, des réalisations locales de L_{2n-1} .

35. — **Réalisations générales**, c'est-à-dire celles du n° 20. Une telle réalisation V_{2n-1} se compose (cf. nos 14 et 18) d'une variété $V_{2n-1}(L)$ d'éléments linéaires $L = (M, \Delta)$ de E_N , à tout L de laquelle est attaché un n -plan $P(L)$ passant par L .

A toute courbe Γ de L_{2n-1} [lieu d'éléments linéaires tangents à $x = x(t)$], correspond une $V_1(L) \subset V_{2n-1}(L)$, qui sera dite l'image de Γ . Les images des Γ sont des $V_1(L)$ particulières, caractérisées par le fait que la tangente en M au lieu $V_1(M)$ des centres des $L \in V_1(L)$ se projette orthogonalement suivant $\Delta(L)$ sur $P(L)$, comme le montrent les relations

$$\omega_i = \varpi_i = 0, \quad 2 \leq i \leq n.$$

La longueur de Γ est donc le travail le long de $\Gamma^*(M)$ du vecteur unitaire de $\Delta(L)$. En résumé :

THÉORÈME. — *Tout L_{2n-1} analytique est localement réalisable dans l'espace euclidien E_N à $N = 2n^2 - n$ dimensions par des variétés V_{2n-1} ; la longueur d'une courbe de L_{2n-1} est, sur son image, le travail du vecteur unitaire du support Δ le long de la trajectoire du centre M .*

36. — **Réalisations semi-ponctuelles.** — D'après le n° 27, L_{2n-1} admet des réalisations semi-ponctuelles V_{2n-1} . A (x, x') correspond $S \in V_{2n-1}$, et $\Delta(S)$ est la projection orthogonale sur $P(S)$ de la direction dM définie par $dx = x'dt$.

On peut donc définir une variété réalisante V_{2n-1} par une variété ponctuelle $V_n(M)$ à tout élément linéaire (M, dM) de laquelle est attaché un n -plan $P(M, dM)$; soit $\Delta(M, dM)$ la projection orthogonale de la direction dM sur $P(M, dM)$: V_{2n-1} est engendrée par les éléments $S = [M, \Delta(M, dM), P(M, dM)]$.

A tout (x, x') de L_{2n-1} correspond un voisinage

$$w(x, x') = w(x) \times w(x')$$

dont l'image est une V_{2n-1} ; soit W le lieu des (M, dM) des $S \in V_{2n-1}$. Toute $V_1(M, dM) \subset W$ où dM est tangent à $V_1(M)$ est lieu des centres de l'image d'une $\Gamma \subset w$. La longueur de l'image de Γ est le travail du vecteur unitaire \vec{e}_1 de $\Delta(M, dM)$ le long de $V_1(M)$. En résumé :

THÉORÈME. — *Tout L_{2n-1} analytique est localement réalisable dans l'espace euclidien à $N = 2(n^2 - n + 1)$ dimensions par des variétés*

semi-ponctuelles V_{2n-1} ; chacune de ces V_{2n-1} est définie par une variété ponctuelle $V_n(M)$ à chaque élément linéaire (M, dM) de laquelle est attaché un n -plan $P(M, dM)$; V_{2n-1} est le lieu de

$$S = [M, \Delta(M, dM), P(M, dM)]$$

où Δ est la projection orthogonale de dM sur P ; la longueur d'une courbe de L_{2n-1} est le travail, le long de son image, du vecteur unitaire de $\Delta(M, dM)$.

VII. — RÉALISATION DES ESPACES DE FINSLER

37. — Soit $F_n = F_n(\mathcal{L})$ l'espace de Finsler à n dimensions défini par la distance élémentaire

$$ds = \mathcal{L}(x, dx)$$

où $x = (x_1, \dots, x_n)$, et où $\mathcal{L}(x, x')$ désigne une fonction : (37 ; 1) positivement homogène du premier degré par rapport aux x'_i , (37 ; 2) conduisant à un problème régulier du calcul des variations, (37 ; 3) admettant des dérivées partielles continues du troisième ordre.

La connexion de Cartan de F_n est définie par des conventions de nature intrinsèque qui déterminent les $g_{ij}(x, x')$ et les $\omega_i(x, x', dx, dx')$ attachés (cf. n° 12) à l'espace des éléments linéaires (x, x') . Voir à ce sujet E. Cartan, Les espaces de Finsler (*loc. cit.*, n° 12), pp. 1-17. Cet ouvrage sera désigné par la suite par EF.

En particulier :

$$(37 ; 4) \quad g_{ij}(x, x') = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 (\mathcal{L}^2)}{\partial x'_i \partial x'_j}, \quad (\text{EF, p. 11, vi})$$

et (37 ; 1, 2, 4) entraînent

$$g_{ij} X^i X^j > 0 \quad \text{quel que soit } \vec{X} \neq 0;$$

par suite (cf. n° 12) la connexion de Cartan admet des composantes $\{\omega\}$ — définies à des rotations près autour de \vec{e}_1 .

38. — Relations entre les $\{\omega\}$ d'un F_n ⁽⁹⁾. — Les conventions A, B, C, D, E de Cartan (EF, p. 10) entraînent (pour les $\{\omega\}$ du n° 11), les relations suivantes :

$$\begin{aligned} (38 ; 1) \quad & \omega_1 = \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta x'_i} dx_i. \\ (38 ; 2) \quad & \Omega_i = 0. \\ (38 ; 3) \quad & \Omega_i = T_{ijk}[\omega_j \omega_{1,k}]. \\ (38 ; 4) \quad & T_{ijk} = T_{jik}. \end{aligned}$$

La première traduit les conventions A et B ; E conduit à (38 ; 3), c'est-à-dire $P_{ijk} = 0$ dans (9 ; 1) ; C donne (38 ; 4), puis D (38 ; 2).

On peut voir que les (38 ; 1 à 4) suffisent pour que $\{\omega\}$ définisse la connexion de Cartan de $F_n(\mathcal{L})$.

A toute courbe de F_n nous associerons le lieu Γ de ses éléments linéaires tangents. La longueur d'un arc de F_n est :

$$(38 ; 5) \quad l = \int_{\Gamma} \omega_1.$$

Une V_{2n-1} quelconque ne réalise pas un F_n : il faut pour cela que ses $\{\varpi\}$ vérifient certaines relations correspondant aux (38 ; 2 à 4), et dont nous n'explicitons que celle qui se déduit de (38 ; 2) à savoir :

$$(38 ; 6) \quad [\varpi_{1\alpha} \varpi_{1\alpha}] = 0.$$

39. — Réalisation des espaces de Finsler analytiques. — Si $\mathcal{L}(x, x')$ vérifie (37 ; 1, 2) et de plus est *analytique* par rapport aux x_i, x'_i , la connexion de Cartan admet (cf. nos 37 et 12) des composantes $\{\omega\}$ analytiques, c'est un L_{2n-1} vérifiant les conditions des théorèmes des nos 20, 27 et 35, 36 :

THÉORÈME. — *Tout F_n analytique est réalisable dans les conditions des théorèmes des nos 35 et 36.*

(9) Les $\{\omega\}$ s'introduiraient directement à partir de $\mathcal{L}(x, dx)$. La géométrie de Finsler est en effet l'étude des invariants de $\mathcal{L}(x, dx)$ par rapport aux changements de coordonnées ; donc l'étude des conditions d'équivalence de $\mathcal{L}(x, dx)$ et de $\mathcal{L}(\bar{x}, d\bar{x})$ par rapport à un groupe infini de transformations ponctuelles. Cf. E. Cartan, Sur un problème d'équivalence et la théorie des espaces métriques généralisés (*Mathematica*, t. 4, 1930, pp. 114-136), où les $\{\omega\}$ sont obtenus, dans le cas $n = 2$, par application des théories d'équivalence.

Nous allons maintenant étudier une autre forme de réalisation, applicable à une classe de L_{2n-1} qui comprend les F_n . Nous raisonnerons sur les F_n .

40. — **Réalisations géodésiques.** — On appellera ainsi les réalisations de F_n telles que l'image d'une géodésique γ de F_n soit formée d'éléments $S = (M, \Delta, P)$ dont le centre décrit une géodésique de $V_\mu(M)$ (cf. n° 14) tangente en chacun de ses points $M(S)$ à $\Delta(S)$.

Cela impose en particulier à Δ de se trouver dans le μ -plan $P_\mu(M)$ tangent en M à $V_\mu(M)$.

41. — **THÉORÈME.** — Pour qu'une réalisation de composantes $\{\varpi\}$ soit géodésique, il faut et suffit que

$$(41; 1) \quad [\varpi_\alpha \varpi_2 \dots \varpi_n \varpi_{1,2} \dots \varpi_{1,n}] = 0.$$

La condition est nécessaire, car les géodésiques de F_n sont les courbes

$$\omega_i = \omega_{1i} = 0, \quad 2 \leq i \leq n,$$

leurs images vérifient donc

$$(41; 2) \quad \varpi_i = \varpi_{1i} = 0, \quad 2 \leq i \leq n,$$

et si le lieu Γ de $M(S)$ est tangent à $\Delta(S)$:

$$(41; 3) \quad \varpi_\alpha = 0, \quad n < \alpha \leq N.$$

Donc si la réalisation est géodésique (41; 2) entraîne (41; 3), donc $\{\varpi\}$ vérifie (41; 1).

La condition est suffisante : d'après (41; 1) et (41; 2) Γ est tangent à $\Delta(M)$. Le fait que Γ est une géodésique de $V_\mu(M)$ va résulter du

LEMME. — Si p est le rang des ϖ_α , $n < \alpha \leq N$, on peut prendre les repères R_N tels que seules les p premières ϖ_α soient $\neq 0$; ces p formes ϖ_α sont indépendantes.

En effet, soit ϖ_α p formes ϖ_α indépendantes, $\varpi_\tau = a_{\tau\sigma} \varpi_\sigma$ les autres :

$$(41; 4) \quad \varpi_\alpha \vec{e}_\alpha = \varpi_\sigma (\vec{e}_\sigma + a_{\tau\sigma} \vec{e}_\tau)$$

Les vecteurs $\vec{e}_\sigma + a_{\tau\sigma} \vec{e}_\tau$ forment un p -plan dans lequel on prendra p vecteurs \vec{e}_α^* , et

$$(41; 5) \quad \varpi_\alpha \vec{e}_\alpha = \varpi_\alpha^* \vec{e}_\alpha^*.$$

Les ϖ_α^* sont indépendants, sinon il y aurait du tel que $\varpi_\alpha^* e_\alpha^* = 0$, et $\varpi_\alpha = 0$; et

$$(41; 6) \quad dM = \varpi_i \vec{e}_i + \varpi_\alpha^* \vec{e}_\alpha^* \quad \text{le nombre des } \alpha \text{ étant } p.$$

CONSÉQUENCES. — Soient $\{\varpi^*\}$ les composantes de

$$R^* = (M \vec{e}_i \vec{e}_\alpha^*), \quad n + p < \beta \leq N$$

déduit de R par rotation des \vec{e}_α . Les ϖ_β sont nuls.

L'hyperplan $P_\mu(M)$ tangent à $V_\mu(M)$ est contenu dans

$$P' = (M \vec{e}_i \vec{e}_\alpha^*), \quad i \leq n, \quad n < \alpha \leq n + p;$$

d'après (38; 6) ($[\varpi_{i\alpha}^* \varpi_\alpha^*] = 0$) et l'indépendance des ϖ_α^* , Γ vérifiant $\varpi_\alpha^* = 0$ vérifie aussi $\varpi_{i\alpha}^* = 0$, donc [cf. (41; 2)] $\varpi_{i\alpha} = \varpi_{i\alpha}^* = 0$ et la projection de \vec{de}_i sur P' est nulle; donc aussi la projection de \vec{de}_i sur $P_\mu(M) \subset P'$, et Γ est une géodésique de $V_\mu(M)$.

42. — **Propriétés des réalisations géodésiques.** — A un point Q de F_n correspond la variété $q = V_{\mu-n}$ de $V_\mu(M)$, définie par $\varpi_i = 0$, $i \leq n$; q est orthogonal à \vec{e}_i donc à Γ : les Γ sont des trajectoires orthogonales des images des points à F_n . La distance de 2 points Q_1, Q_2 de F_n est une valeur stationnaire de la longueur des arcs de courbes qui joignent q_1 à q_2 .

Toute géodésique de $V(M)$ n'est évidemment pas une image de géodésique de F_n : il faut et suffit pour cela qu'elle soit tangente en chacun de ses points à Δ . Car $\vec{de}_i = 0$ donne $\varpi_{i\alpha} = \varpi_{i\alpha}^* = 0$; $\varpi_i = 0$, $2 \leq i \leq n$ donne $\varpi_\alpha = 0$.

43. — **Existence des réalisations géodésiques.** — La démonstration de théorème du n° 20 est à peine modifiée: ajouter à Σ les q équations supplémentaires:

$$(43; 1) \quad [\varpi_\alpha \omega_2 \dots \omega_n \omega_{12} \dots \omega_{1n}] = 0, \quad n < \alpha \leq N.$$

Le système obtenu est fermé.

Les ϖ_α d'un élément linéaire en involution avec I_p restent arbitraires pour $p \leq 2n - 3$. Pour $p = 2n - 2$, ils sont complètement

déterminés par le choix de $\omega_1 \omega_2 \dots \omega_{1n}$ et les q équations indépendantes :

$$\begin{vmatrix} \varpi_\alpha & \omega_2 & \dots & \omega_{1n} \\ \varpi_\alpha(1) & \varpi_2(1) & \dots & \varpi_{1n}(1) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \varpi_\alpha(2n-2) & \varpi_2(2n-2) & \dots & \varpi_{1n}(2n-2) \end{vmatrix} = 0.$$

Les $\varpi_{\alpha i}$ sont ensuite déterminés comme au n° 24, par

$$\frac{(2n-2)n(n+1)}{2}$$

équations indépendantes. Le système est encore en involution par $q = 2n^2 - n$. Pour le degré d'arbitraire (cf. n° 25), s_{2n-2} est augmenté de q et $K = n(n-1)^2$. Conclusion :

THÉORÈME. — *Tout F_n analytique admet des réalisations géodésiques (locales) dans l'espace à $N = 2n^2 - n$ dimensions. La solution générale dépend de $n(n-1)^2$ fonctions arbitraires de l'élément linéaire de F_n .*

44. — Ce théorème ne s'applique pas seulement aux F_n : le n° 41 s'applique à tout L_{2n-1} pour lequel $\Omega_1 = 0$.

On ne peut en général imposer aux réalisations de cumuler les deux propriétés des théorèmes n°s 27 et 43 : on aurait alors

$$[\varpi_\alpha \varpi_2 \dots \varpi_n] = 0,$$

et on en déduirait que l'espace F_n réalisé vérifie $T_{ijk} = 0$ et par suite se réduit à un espace de Riemann. La signification géométrique de la connexion induite rend d'ailleurs ce fait évident. J'indiquerai dans un prochain article les propriétés particulières⁽¹⁰⁾ des réalisations dans le cas $n = 2$. On peut alors réaliser F par des variétés plongées dans un espace de Riemann à 3 dimensions ; la démonstration fait intervenir un prolongement du système différentiel qui donne les variétés réalisantes. Il est possible qu'un prolongement analogue permette d'étendre ce résultat à n quelconque.

⁽¹⁰⁾ Cf. O. Galvani, *C. R. Acad. Sc.*, 1946, t. 222, pp. 1200-1202 et t. 223, pp. 1088-1090.