

# ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

GEORGES LION

## **Familles d'opérateurs et frontière en théorie du potentiel**

*Annales de l'institut Fourier*, tome 16, n° 2 (1966), p. 389-453

[http://www.numdam.org/item?id=AIF\\_1966\\_\\_16\\_2\\_389\\_0](http://www.numdam.org/item?id=AIF_1966__16_2_389_0)

© Annales de l'institut Fourier, 1966, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'institut Fourier » (<http://annalif.ujf-grenoble.fr/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

## FAMILLES D'OPÉRATEURS ET FRONTIÈRE EN THÉORIE DU POTENTIEL

Par Georges LION

---

### Introduction.

Le présent travail a trouvé son point de départ dans un mémoire fort important de G. A. Hunt, paru dans *Illinois Journal of Mathematics* [20].

Cet auteur y établit, sous des hypothèses générales, l'existence de liens étroits entre, d'une part, la théorie des processus de Markov, et d'autre part, la théorie du Potentiel, au point où l'ont conduite les travaux de Henri Cartan, Brelot, Choquet et Deny.

Au chapitre xv de son mémoire, Hunt associe un semi-groupe fortement continu à tout noyau continu  $V$  tendant vers 0 à l'infini,

- vérifiant le principe complet du maximum,
- et tel que toute fonction continue, tendant vers 0 à l'infini, soit limite uniforme d'une suite de  $V$ -potentiels.

L'intermédiaire essentiel de cette démonstration est la construction d'une famille résolvante. Nous avons pensé que cet intermédiaire pouvait mériter un sort plus autonome; de plus, nous nous sommes efforcés d'étudier la situation en l'absence de l'hypothèse de densité des  $V$ -potentiels.

Le résultat est un théorème d'existence et d'unicité de la famille résolvante associée à tout noyau continu, tendant vers 0 à l'infini, et vérifiant soit le principe de domination, soit le principe complet du maximum.

Dans l'étude des noyaux non bornés, nous avons repris l'idée d'approximation de Hunt, mais nous n'avons pas eu recours à la notion de changement de temps.

Réciproquement, nous avons caractérisé les familles résolvantes relativement aux deux principes cités ci-dessus.

Ayant déterminé ces familles résolvantes, il était naturel de tenter de leur associer des semi-groupes. Il s'agit là d'un problème très ardu en toute généralité.

Dans la lecture d'un article de D. Ray [30], nous avons puisé l'idée d'une hypothèse de séparation moins restrictive que l'hypothèse de densité de Hunt, et permettant d'associer un semi-groupe à la famille résolvante  $(V_\lambda)$ .

En vue d'appliquer les résultats de Ray, il faut passer de l'espace localement compact de départ à son compactifié; les théorèmes de prolongement correspondants font l'objet du chapitre III.

Ensuite, il nous a paru utile de simplifier la démonstration de Ray, et cela nous a conduit à partir d'une hypothèse un peu plus générale, énoncée grâce à la notion de fonction surmédiane. Cette hypothèse est suffisante pour retrouver les conclusions du théorème de Ray, à savoir :

- l'existence de  $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \lambda V_\lambda f(x)$ , pour tout  $x$  et toute  $f$  continue;
- l'existence et la continuité à droite du semi-groupe.

Nous avons pu caractériser les cas où la fonction limite est continue en  $x$ . Enfin nous avons situé le problème qui nous intéresse ici par rapport à la notion de mesures maximales relatives à un cône de fonctions continues.

Des divers résultats qui précèdent nous avons déduit les théorèmes de représentation d'un noyau continu par l'intégrale d'un semi-groupe. Le cas des noyaux vérifiant le principe complet du maximum et l'hypothèse de séparation citée ci-dessus a fait l'objet d'une note ([26]). Outre ce cas, mentionnons :

- Les noyaux vérifiant le principe complet, sur un espace discret;
- Les noyaux continus vérifiant le principe de domination et l'hypothèse de densité de Hunt, sur un espace compact;
- Les noyaux strictement positifs vérifiant le principe de domination sur un espace fini.

Dans le chapitre VI, nous avons introduit des familles d'opérateurs généralisant effectivement les familles résolvantes. A leur sujet, nous avons obtenu des résultats similaires à ceux du chapitre IV. Quant aux méthodes, elles sont différentes; ici, rien ne correspond plus à la notion de fonctions surmédianes, essentielle au chapitre IV; en outre, nous n'avons pas fait d'hypothèse de séparation. Par contre, l'étude faite au chapitre IV n'entre pas dans ce nouveau cadre; en effet, nous raisonnons sur un espace métrisable, et nous utilisons le théorème de représentation intégrale de Choquet.

Nous avons terminé par un exemple qui met en évidence le caractère partiel des résultats obtenus ici. Partant d'un semi-groupe et de la famille résolvante associée, nous montrons que  $\lambda V_\lambda f(x)$  peut ne pas avoir de limite, lorsque  $\lambda$  tend vers l'infini. Ce fait prouve que la méthode présentée au chapitre IV est loin d'épuiser toutes les possibilités de construction de semi-groupes.

Il m'est agréable de conclure cette introduction en exprimant ma reconnaissance envers M. Choquet, qui a bien voulu reconnaître à ce travail la qualité de thèse, et en présider le jury. Je remercie également M. Deny, dont les encouragements et les conseils n'ont jamais cessé de m'être utiles, M. Serre qui s'est préoccupé du second sujet et P. A. Meyer qui a su orienter mes recherches aux tournants décisifs.

« Après la rédaction de ce travail, nous avons eu connaissance du livre de P. A. Meyer : *Probabilités et Potentiels*. Y figure une démonstration du théorème de Ray identique à celle que nous avons donnée ci-dessus. Ajoutons qu'une remarque simple de l'auteur permet de montrer l'équivalence de l'hypothèse de Ray et de l'hypothèse notée présentement (H). »



## TABLE DES MATIÈRES

<b>CHAPITRE PREMIER. — Principes Classiques en théorie du Potentiel . . .</b>	<b>395</b>
1. Notations . . . . .	395
2. Les noyaux . . . . .	395
3. Énoncé de principes . . . . .	396
4. Équivalence des principes . . . . .	397
5. Prolongement des principes . . . . .	398
 <b>CHAPITRE II. — Familles Résolvantes . . . . .</b>	 <b>400</b>
1. Notations . . . . .	400
2. Famille résolvente associée à un noyau borné . . . . .	401
3. Famille résolvente associée à un noyau non borné . . . . .	403
4. Étude des réciproques . . . . .	406
 <b>CHAPITRE III. — Prolongement au Compactifié . . . . .</b>	 <b>409</b>
1. Position du problème . . . . .	409
2. Prolongement d'une famille résolvente sous-markovienne . . . . .	409
3. Prolongement d'un noyau continu à l'espace $K$ . . . . .	410
 <b>CHAPITRE IV. — Fonctions surmédianes . . . . .</b>	 <b>416</b>
1. Introduction . . . . .	416
2. Résultats préliminaires . . . . .	417
3. Frontière de l'espace $K$ . . . . .	418
4. Mesures maximales . . . . .	423
5. Cas particulier : l'ensemble $A$ est fermé . . . . .	425
6. Étude d'un exemple . . . . .	426
 <b>CHAPITRE V. — Noyaux et semi-groupes . . . . .</b>	 <b>427</b>
1. Le théorème de Hille-Yosida . . . . .	427
2. Principe complet du maximum et semi-groupes sous-markoviens . . . . .	428
3. Étude d'un cas particulier . . . . .	430
4. Principe de domination et semi-groupes . . . . .	431
5. Cas des espaces discrets . . . . .	432
6. Étude d'un exemple . . . . .	436

CHAPITRE VI. — Frontière de Choquet et Familles d'opérateurs .....	437
1. Notations .....	437
2. Relations d'équivalence et espace quotient associés à $H$ .....	438
3. Applications du théorème de Choquet .....	439
4. Critère de continuité de la fonction limite .....	442
5. Étude d'un cas particulier .....	445
6. Solution du problème lorsque $K$ est fini .....	449
7. Un contre exemple .....	450

## CHAPITRE PREMIER

### PRINCIPES CLASSIQUES EN THÉORIE DU POTENTIEL

#### 1. Notations.

Soit  $X$  un espace localement compact; soit  $K$  le compactifié d'Alexandroff de  $X$ ; soit  $\omega$  le point à l'infini.

Si  $X$  est compact, on désignera par  $K$  l'espace compact obtenu par adjonction à  $X$  du point isolé  $\omega$ .

Notons  $\mathcal{C}_K$  l'espace vectoriel des fonctions numériques réelles, continues sur  $X$ , et à supports compacts.

Notons  $\mathcal{C}_0$  l'espace vectoriel des fonctions numériques réelles, continues sur  $X$ , et tendant vers 0 à l'infini.

Notons  $\mathcal{C}$  l'espace vectoriel des fonctions numériques réelles, continues sur  $X$ , et tendant vers une limite à l'infini.

L'espace  $\mathcal{C}$  sera souvent identifié à l'espace des fonctions numériques réelles continues sur  $K$ , en raison de l'isomorphisme canonique déterminé par l'injection de  $X$  dans  $K$ .

Les trois espaces  $\mathcal{C}_K$ ,  $\mathcal{C}_0$ ,  $\mathcal{C}$  sont normés par la norme de la convergence uniforme sur  $X$ .

Enfin notons  $\mathcal{C}_K^+$ ,  $\mathcal{C}_0^+$ ,  $\mathcal{C}^+$ , les cônes des fonctions positives <sup>(1)</sup> de chacun des trois espaces  $\mathcal{C}_K$ ,  $\mathcal{C}_0$ ,  $\mathcal{C}$ .

#### 2. Les noyaux.

**DÉFINITION.** — *On appelle noyau continu sur  $X$ , toute application linéaire  $V$  de  $\mathcal{C}_K$  dans  $\mathcal{C}_0$ , telle que  $V(\mathcal{C}_K^+)$  soit contenu dans  $\mathcal{C}_0^+$ .*

Le noyau  $V$  est dit borné <sup>(2)</sup> s'il existe une constante  $M$  telle l'inégalité :  $\|f\| \leq 1$ , entraîne :  $\|Vf\| \leq M$ .

<sup>(1)</sup> Le terme positif est pris au sens large (positif ou nul).

<sup>(2)</sup> Deny emploie dans ce cas le qualificatif « uniforme » (voir [14]).

Par contre, on trouve « borné » dans un sens très différent, dans Choquet-Deny [7].

Tout noyau borné peut être prolongé à l'espace  $\mathcal{C}_0$  de la façon suivante : soit  $f$  une fonction de  $\mathcal{C}_0^+$ , et soit  $Vf$  l'enveloppe supérieure des fonctions  $V\varphi$ , pour  $\varphi$  appartenant à  $\mathcal{C}_K^+$  et majorée par  $f$ ; ainsi définie, la fonction  $Vf$  appartient à  $\mathcal{C}_0^+$ , car  $\mathcal{C}_K^+$  est dense dans  $\mathcal{C}_0^+$ .

Si l'espace  $X$  est compact, tout noyau continu est borné.

On dit qu'un noyau est strictement positif, si pour tout  $x$  de  $X$ , il existe dans  $\mathcal{C}_K$  une fonction  $f$  telle que  $Vf(x)$  soit strictement positif.

*Exemples.* — I. Prenons pour espace  $X$  l'espace euclidien  $\mathbf{R}^n$  ( $n > 2$ ); et posons :

$$Vf(x) = \int_{\mathbf{R}^n} \frac{f(y)}{|x - y|^{n-2}} dy \quad (f \in \mathcal{C}_K).$$

Le noyau  $V$  n'est pas borné.

II. Soit  $\mu$  une mesure positive à support compact dont le potentiel newtonien  $U^\mu$  est continu.

Posons :

$$Vf(x) = \int_{\mathbf{R}^n} \frac{f(y)}{|x - y|^{n-2}} d\mu(y).$$

Si  $f$  appartient à  $\mathcal{C}^+$ , la fonction  $Vf$  est à priori semi-continue inférieurement; si  $k$  désigne la borne supérieure de  $f$  sur le support de  $\mu$ , la fonction  $V(k - f)$  est de même semi-continue inférieurement; or nous avons :

$$Vf = kU^\mu - V(k - f).$$

Ainsi la fonction  $Vf$  est continue sur  $\mathbf{R}^n$ , et le noyau  $V$  est borné.

III. Si  $X$  est un espace fini, tout noyau peut être représenté par une matrice carrée à coefficients positifs et réciproquement (voir Choquet-Deny [8]).

### 3. Énoncé des principes.

a) Principe complet du maximum.

Pour tous  $a \geq 0$ ,  $f$  et  $g \in \mathcal{C}_K^+$ , l'inégalité :

$$Vf(x) \leq Vg(x) + a,$$

a lieu partout sur  $X$  pourvu qu'elle ait lieu sur le support de  $f$ .

b) Principe du maximum positif faible.

Si, pour  $f$  appartenant à  $\mathcal{C}_K$ , la fonction  $Vf$  n'est pas négative, elle atteint son maximum (strictement positif) en au moins un point de  $X$  où  $f$  est positive.

c) Principe fort du maximum.

Pour toute fonction  $f$  de  $\mathcal{C}_K$ , l'inégalité :  $Vf(x) \leq 1$ , a lieu partout sur  $X$  pourvu qu'elle ait lieu sur le support de  $f$ .

d) Principe classique du maximum.

Pour toute fonction  $f$  de  $\mathcal{C}_K^+$ , l'inégalité :  $Vf(x) \leq 1$ , a lieu partout sur  $X$  pourvu qu'elle ait lieu sur le support de  $f$ .

e) Principe de domination.

Pour toutes  $f$  et  $g$  dans  $\mathcal{C}_K^+$ , l'inégalité :  $Vf(x) \leq Vg(x)$ , a lieu partout sur  $X$  pourvu qu'elle ait lieu sur le support de  $f$ .

Les noyaux définis dans les exemples I et II, vérifient le principe a) (voir Cartan-Deny [4], et Brelot [3]).

#### 4. Équivalence des principes.

THÉORÈME. — *Les principes a) et b), sont équivalents.*

Hunt a remarqué l'implication : a) entraîne b).

Démontrons par l'absurde la réciproque.

Supposons qu'il existe une constante  $a$  positive, et deux fonctions  $f$  et  $g$  de  $\mathcal{C}_K^+$ , telles que l'on ait :  $Vf(x) \leq Vg(x) + a$ , pour tout  $x$  du support de  $f$ .

Supposons d'autre part, qu'il existe un point  $x_0$ , hors du support de  $f$ , vérifiant l'inégalité :  $Vf(x_0) > Vg(x_0) + a$ .

Posons :

$$b = Vf(x_0) - Vg(x_0); \quad \text{et soit } c = b - a.$$

Soit  $U = \left\{ x \in X; Vf(x) - Vg(x) > b - \frac{c}{2} \right\}$ . Cet ensemble  $U$  est ouvert, disjoint du support de  $f$ , et contient  $x_0$ .

Il existe dans  $\mathcal{C}_K^+$  une fonction  $\varphi$ , égale à 1 en tout point de  $U$ . Si la fonction  $V\varphi$  est identiquement nulle, posons  $k = 1$ , sinon, posons :  $k = \sup_{x \in \bar{X}} V\varphi(x)$ .

La fonction  $\psi = f - g - \frac{c}{3k} \varphi$ , contredit le principe b); en effet, pour  $x \notin U$ , on a :

$$V\psi(x) \leq b - \frac{c}{2} \quad \text{et} \quad V\psi(x_0) \geq b - \frac{c}{3}.$$

Ainsi, la fonction  $V\psi$  a un maximum strictement positif, qu'elle ne peut atteindre que dans  $U$  où la fonction  $\psi$  n'est jamais positive.

*Remarque.* — On connaît les implications:  $a$ ) entraîne  $c$ ) et  $e$ ); et  $c$ ) entraîne  $d$ ) (voir Deny [16]). Tenant compte du théorème qui précède, on en conclut:  $b$ ) entraîne  $c$ ).

Lorsque  $X$  est un espace discret, nous allons démontrer la réciproque:  $c$ ) entraîne  $b$ ).

Supposons qu'il existe une fonction  $f$  de  $\mathcal{C}_X$ , telle que soient disjoints les ensembles  $A$  et  $B$  définis ainsi:

$$\begin{aligned} A &= \{x \in X; f(x) \geq 0\}, \\ B &= \{x \in X; \forall f(x) = b > 0\}, \end{aligned}$$

(où  $b$  est le maximum de  $Vf$ ).

Soit  $\varphi$  la fonction caractéristique de l'ensemble compact  $B$ .

Posons:  $f^- = \sup(-f, 0)$ , et  $g = f + f^- \varphi$ ; la fonction  $g$  est nulle sur  $B$ ; en vertu du principe  $d$ ), qui découle de  $c$ ), on a:

$$\begin{aligned} c &= \sup_{x \in \bar{X}} Vf^- \varphi(x) = \sup_{x \in \bar{B}} Vf^- \varphi(x), \\ \text{et} \quad b + c &= \sup_{x \in \bar{X}} Vg(x) = \sup_{x \in \bar{B}} Vg(x). \end{aligned}$$

Or, pour tout élément  $y$  du support de  $g$ , on a:

$$Vg(y) = Vf(y) + Vf^- \varphi(y) < b + c.$$

La fonction  $g$  contredit donc le principe  $c$ ); cette contradiction signifie que l'hypothèse de départ est impossible, et le principe  $b$ ) est vérifié par le noyau  $V$ .

Dans ce même ordre d'idées, Kishi a démontré complètement les équivalences:  $a) \iff c) \iff d)$  et  $e)$ , sous les hypothèses suivantes: le noyau  $V$  est un noyau-fonction, strictement positif, et régulier (voir à ce sujet Kishi [21], ou Durier [18]).

### 5. Prolongement des principes.

Soit  $f$  une fonction de  $\mathcal{C}_0^+$ ; posons, lorsque cette expression est finie:

$$Vf(x) = \sup_{\substack{\varphi \leq f \\ \varphi \in \mathcal{C}_x^+}} V\varphi(x), \quad (x \in X).$$

Les fonctions  $f$  pour lesquelles  $Vf(x)$  définit sur  $X$  une fonction continue, engendrent dans  $\mathcal{C}_0$  un sous-espace vectoriel noté  $\mathcal{D}(V)$ . La fonction  $Vf$  peut ne pas appartenir à  $\mathcal{C}_0$ . Lorsque le noyau  $V$  est borné, le sous-espace  $\mathcal{D}(V)$  est égal à  $\mathcal{C}_0$ .

Nous allons étudier deux cas où un principe, valable pour des fonctions de  $\mathcal{C}_\mathbf{k}^+$ , vaut encore pour des fonctions de  $\mathcal{D}(V)^+$

a) Principe de domination pour un noyau strictement positif.

Supposons l'inégalité :  $Vf(x) \leq Vg(x)$ , vérifiée pour tout  $x$  du support de  $f$  ( $f$  et  $g$  appartenant à  $\mathcal{D}(V)^+$ ).

Soit  $\varphi$  dans  $\mathcal{C}_\mathbf{k}^+$ , majorée par  $f$ ; pour tout  $x$  du support de  $\varphi$ , on a :  $V\varphi(x) \leq Vg(x)$ ; d'autre part, il existe dans  $\mathcal{C}_\mathbf{k}^+$  une fonction  $h$  telle que  $Vh(x)$  majore 1, pour tout  $x$  du support de  $\varphi$ .

La fonction  $g$  est limite d'une suite croissante de fonctions  $g_n$  de  $\mathcal{C}_\mathbf{k}^+$ ; ainsi  $Vg$  est limite de la suite croissante  $Vg_n$ ; sur le support de  $\varphi$ , la convergence est uniforme.

Soit  $\varepsilon > 0$ , pour  $n$  assez grand on a donc :

$$Vg(x) \leq Vg_n(x) + \varepsilon \quad (x \text{ appartenant au support de } \varphi),$$

d'où :

$$V\varphi(x) \leq Vg_n(x) + \varepsilon Vh(x) \quad (x \text{ appartenant au support de } \varphi).$$

En vertu du principe de domination, cette inégalité a lieu partout sur  $X$ ; en passant à la limite successivement sur  $n$ ,  $\varepsilon$  et  $\varphi$ , on en conclut l'inégalité demandée :  $Vf \leq Vg$ .

b) Principe complet du maximum;

Reprenons les mêmes notations et soit  $a$  une constante positive; si l'inégalité :  $Vf(x) \leq Vg(x) + a$ , a lieu pour tout  $x$  du support de  $f$  l'inégalité :  $V\varphi(x) \leq Vg_n(x) + a + \varepsilon$ , a lieu pour tout  $x$  du support de  $\varphi$ ; cette inégalité a donc lieu partout sur  $X$ . On conclut de même :  $Vf \leq Vg + a$ .

## CHAPITRE II

### FAMILLES RÉSOVANTES

#### 1. Notations.

Soit une famille d'opérateurs linéaires continus de  $\mathcal{C}_0$  dans lui-même, notés  $V_\lambda$ , définis pour  $\lambda > 0$ , ou pour  $\lambda \geq 0$ , selon les cas.

Nous dirons que  $(V_\lambda)$  est une famille *résolvante* si l'on a pour tous  $\lambda$  et  $\mu$ , l'égalité :

$$(\mu - \lambda)V_\lambda V_\mu = V_\lambda - V_\mu.$$

En conséquence, les opérateurs  $V_\lambda$  sont permutables; l'image et le noyau de ces opérateurs ne dépendent pas de  $\lambda$ .

La famille résolvante  $(V_\lambda)$  est dite *positive*, si pour tout  $\lambda$ , l'opérateur  $V_\lambda$  est positif (c'est-à-dire que  $V_\lambda(\mathcal{C}_0^+)$  est contenu dans  $\mathcal{C}_0^+$ ).

La famille résolvante  $(V_\lambda)$  est *sous-markovienne*, si pour tout  $\lambda$ , on a :  $\lambda \|V_\lambda\| \leq 1$ , (il s'agit là de la norme de l'opérateur  $V_\lambda$ , dans l'espace de Banach  $\mathcal{L}(\mathcal{C}_0)$ ).

**PROPOSITION.** — *L'application :  $\lambda \rightarrow V_\lambda$ , de  $\mathbf{R}_+$  dans  $\mathcal{L}(\mathcal{C}_0)$  est analytique.*

En effet, de l'équation résolvante, on déduit, pour tout entier  $n$  :

$$(\mu - \lambda)^n V_\lambda V_\mu^n = (\mu - \lambda)^n V_\mu^{n+1} + (\mu - \lambda)^{n+1} V_\lambda V_\mu^{n+1}.$$

Fixons  $\mu$ , et prenons  $\lambda$  dans l'intervalle défini par l'inégalité :

$$|\lambda - \mu| < \frac{1}{\|V_\mu\|};$$

par addition membres à membres des égalités précédentes, nous obtenons :

$$V_\lambda = \sum_{n=0}^{\infty} (\mu - \lambda)^n V_\mu^{n+1}.$$

Nous avons ainsi le développement en série de  $V_\lambda$ .

## 2. Famille résolvente associée à un noyau borné.

**THÉORÈME I.** — a) Soit un noyau continu  $V$ , borné, strictement positif et vérifiant le principe de domination; alors il existe une famille résolvente  $(V_\lambda)$ , et une seule, telle que l'on ait :  $V = V_0$ ; de plus, une telle famille est positive.

b) Soit un noyau continu  $V$ , borné, et vérifiant le principe complet du maximum; alors il existe une famille résolvente  $(V_\lambda)$ , et une seule, telle que l'on ait :  $V = V_0$ ; de plus, une telle famille est positive et sous-markovienne.

*Démonstration.* — Pour  $\lambda < \frac{1}{\|V\|}$ , la série  $\sum_{n=0}^{\infty} (-\lambda)^n V^{n+1}$  définit un opérateur  $V_\lambda$  qui vérifie la condition :

$$V - V_\lambda = \lambda V V_\lambda = \lambda V_\lambda V \quad (1).$$

Il existe un prolongement analytique maximal de cette fonction  $V_\lambda$  : notons encore  $V_\lambda$  ce prolongement, et soit  $[0, k[$  son intervalle de définition; dans cet intervalle la condition (1) reste vérifiée.

Prenons  $\lambda$  et  $\mu$  dans l'intervalle  $[0, k[$ ; on a alors :

$$V_\mu(I - \lambda V_\lambda) = (I - \mu V_\mu) V(I - \lambda V_\lambda) = (I - \mu V_\mu) V_\lambda.$$

De cette égalité, on déduit l'équation résolvente.

Montrons à présent que les opérateurs  $V_\lambda$  sont positifs. Soit  $f$  une fonction de  $\mathcal{C}_0^+$ , et soit  $V_\lambda f = h^+ - h^-$ ; de l'égalité

$$\lambda V V_\lambda f = V f - V_\lambda f,$$

on déduit l'inégalité :

$$V f(x) \geq \lambda V h^+(x) - \lambda V h^-(x),$$

pour tout  $x$  du support de  $h^+$ .

En vertu du chapitre I, § 5, et dans chacun des cas présents, la même inégalité a lieu sur tout l'espace X. Donc  $V_\lambda f$  appartient à  $\mathcal{C}_0^+$ .

De ce fait, on déduit l'inégalité :  $\|V_\lambda\| \leq \|V\|$ , pour tout  $\lambda \in [0, k[$ .

Supposons que  $k$  soit un nombre fini, et prenons

$$\mu > k - \frac{1}{\|V\|};$$

la série  $\sum_{n=0}^{\infty} (\mu - \lambda)^n V_\mu^{n+1}$  converge vers  $V_\lambda$ , pour  $\lambda < k$  (en vertu de la proposition préliminaire); d'autre part, cette série prolonge la définition de  $V_\lambda$ , à l'intervalle  $\left[0, \mu + \frac{1}{\|V\|}\right[$ ; ainsi  $k$  n'est pas fini.

L'unicité de la famille résolvente se déduit aussitôt de la proposition préliminaire.

Il nous reste à prouver l'inégalité :  $\lambda \|V_\lambda\| \leq 1$ , dans le cas b).

Soit  $f$  une fonction de  $\mathcal{C}_0^+$  inférieure à 1; soit  $a$  le maximum de  $V_\lambda f$ ; il existe dans X un élément  $x_0$  tel que l'on ait :

$$V_\lambda f(x_0) = a,$$

et :

$$f(x_0) - \lambda V_\lambda f(x_0) \geq 0$$

(en vertu du principe du maximum positif faible appliqué à  $V_\lambda f = V(f - \lambda V_\lambda f)$ ).

Nous trouvons l'inégalité cherchée :  $\lambda a \leq f(x_0) \leq 1$ .

*Remarque.* — Si l'espace X est compact, le théorème I a) subsiste sans la restriction : « V est strictement positif ».

Cette restriction entraîne l'existence de deux constantes  $a$  et  $b$ , telles que l'on ait :

$$0 < a \leq V(1) \leq b,$$

d'où l'on déduit :

$$\lambda V_\lambda(a) \leq \lambda V_\lambda V(1) \leq V(1) \leq b;$$

ainsi on a :

$$\lambda \|V_\lambda\| \leq \frac{b}{a}$$

Dans [20], Hunt démontre la partie *b*) du théorème I, sous l'hypothèse supplémentaire: « L'espace  $V(\mathcal{C}_K)$  est partout dense dans  $\mathcal{C}_0$  ».

### 3. Famille résolvente associée à un noyau non borné.

**THÉORÈME II.** — Soit  $X$  un espace localement compact, dénombrable à l'infini, et  $V$  un noyau continu sur  $X$ , vérifiant le principe complet du maximum; alors il existe une famille résolvente  $(V_\lambda)$ , et une seule, telle que l'on ait:

$$Vf - V_\lambda f = V_\lambda Vf = VV_\lambda f, \quad (f \in \mathcal{C}_K, \lambda > 0).$$

De plus, la famille  $(V_\lambda)$  est positive et sous-markovienne; et, quand  $\lambda$  tend vers 0,  $V_\lambda f$  tend vers  $Vf$ , uniformément sur  $X$ .

Pour démontrer ce théorème, nous allons procéder par étapes.

1) Construisons une suite de noyaux bornés  $V_n$ , tendant en croissant vers  $V$ . Soit  $(K_n)$  une suite de compacts de  $X$ , vérifiant les conditions:

$$K_n \subset K_{n+1} \quad \text{et} \quad X = \bigcup_n K_n.$$

Pour tout entier  $n$ , il existe une application continue  $\varphi_n$  de  $X$  dans  $[0, 1]$ , égale à 1 sur  $K_n$ , nulle hors de  $K_{n+1}$ ; pour toute  $f$  de  $\mathcal{C}_K$ , posons:  $V_n(f) = V(\varphi_n f)$ .

Cette formule définit un noyau continu  $V_n$ , vérifiant le principe complet du maximum et borné; dès que  $K_n$  contient le support de  $f$ , on a:  $V_n f = Vf$ .

2) Associons à chaque noyau  $V_n$ , la famille résolvente  $(V_\lambda^n)$ , dont l'existence est assurée par le théorème I.

Soit  $f$  une fonction de  $\mathcal{C}_K^+$ , et  $S_f$  le support (compact) de  $f$ . Choisissons  $m$  assez grand pour que  $K_m$  contienne  $S_f$ .

On a alors:

$$Vf = V_m f = V_\lambda^m f + \lambda V_\lambda^m V_m f = V_\lambda^m f + \lambda V_m V_\lambda^m f.$$

Pour  $n \geq m$ , posons:  $h_n = V_\lambda^n f$ , et  $h_m = V_\lambda^m f$ ; de la formule précédente, nous déduisons:

$$h_n + \lambda V(\varphi_n h_n) = h_m + \lambda V(\varphi_m h_m).$$

Soit  $h = \text{Inf}(h_n, h_m)$ ,  $g_n = h_n - h$ , et:  $g_m = h_m - h$ .

Retranchons la fonction  $h + \lambda V_{\varphi_m} h$ , nous obtenons l'égalité :

$$g_n + \lambda V(\varphi_n h_n - \varphi_m h) = g_m + \lambda V(g_m \varphi_m),$$

qui entraîne, l'inégalité :

$$\lambda V_{\varphi_m} g_m(x) \leq \lambda V(\varphi_n h_n - \varphi_m h)(x),$$

valable pour tout  $x$  du support de  $g_m$ ; cette inégalité a lieu partout sur  $X$  en vertu du principe de domination; ainsi on a :  $g_m \geq g_n$ , et  $h_m \geq h_n$ .

En résumé, dès que  $K_n$  contient le support de  $f$ , la suite des fonctions  $V_{\lambda}^n f$  est décroissante; elle tend donc vers une limite que nous noterons  $V_{\lambda} f$ .

3) Montrons que la convergence est uniforme sur  $X$ .

Soit  $g = Vf = V_{\lambda}^n f + \lambda V_{\lambda}^n Vf$ ; pour  $n$  assez grand, la suite des fonctions  $V_{\lambda}^n g$  est croissante.

Soit  $\varepsilon > 0$ ; il existe un compact  $K$ , hors duquel  $g(x)$  est majoré par  $\varepsilon$ ; si  $u$  est une application continue de  $X$  dans  $[0, 1]$ , à support compact, égale à 1 sur  $K$ , la fonction  $g - gu$  est majorée par  $\varepsilon$  sur  $X$ .

Prenons  $K_m$  contenant les supports de  $u$  et de  $f$ , et  $m \leq n$ ; on a :

$$V_{\lambda}^n(gu) \leq V_{\lambda}^m(gu) \leq V_{\lambda}^m g \leq V_{\lambda}^n g \leq V_{\lambda}^n(gu) + \frac{\varepsilon}{\lambda}.$$

d'où l'on déduit :

$$0 \leq V_{\lambda}^n g - V_{\lambda}^m g \leq \frac{\varepsilon}{\lambda},$$

donc :

$$V_{\lambda}^m f - V_{\lambda}^n f \leq \varepsilon, \quad (f \in \mathcal{C}_K^+).$$

La convergence uniforme de  $V_{\lambda}^n f$  vers  $V_{\lambda} f$  est ainsi vérifiée pour toute fonction de  $\mathcal{C}_0$ , car  $\mathcal{C}_K$  y est dense et on a :

$$\lambda \|V_{\lambda}^n\| \leq 1.$$

Les opérateurs  $V_{\lambda}$ , limites fortes de  $V_{\lambda}^n$ , constituent une famille résolvente sous-markovienne, positive.

De l'égalité :  $Vf = V_{\lambda}^n f + \lambda V_{\lambda}^n Vf$ , on déduit, par passage à la limite sur  $n$ ;

$$Vf = V_{\lambda} f + \lambda V_{\lambda} Vf \quad (f \in \mathcal{C}_K).$$

Prenons de nouveau  $f$  dans  $\mathcal{C}_K^+$ ; de l'inégalité:  $V_\lambda f \leq Vf$ , on déduit:  $\lim_{\lambda > 0} \lambda V_\lambda f = 0$ , uniformément sur  $X$ ; si  $g$  appartient à  $\mathcal{C}_0$ , il en est de même de  $\lambda V_\lambda g$ , donc  $V_\lambda f$  tend vers  $Vf$  quand  $\lambda$  tend vers 0, uniformément sur  $X$ .

Démontrons l'égalité:

$$VV_\lambda f = V_\lambda Vf \quad (f \in \mathcal{C}_K^+).$$

Soit  $h$  une fonction de  $\mathcal{C}_K^+$ , majorée par  $V_\lambda f$ ; dès que  $K_n$  contient les supports de  $f$  et de  $h$ , on a l'inégalité:

$$h \leq \varphi_n V_\lambda^n f,$$

qui entraîne:

$$Vh \leq V_n V_\lambda^n f = V_\lambda^n Vf.$$

En passant à la limite sur  $n$ , puis sur  $h$ , on démontre l'inégalité:

$$VV_\lambda f \leq V_\lambda Vf.$$

D'autre part, on a, pour tout  $\mu > 0$ :  $VV_\lambda f \geq V_\mu V_\lambda f = V_\lambda V_\mu f$ ; faisons tendre  $\mu$  vers 0, il vient:

$$VV_\lambda f \geq V_\lambda Vf.$$

Ainsi est démontrée l'égalité:

$$\lambda VV_\lambda f = \lambda V_\lambda Vf = Vf - V_\lambda f, \quad (f \in \mathcal{C}_K).$$

4) Il reste à démontrer l'unicité de la famille résolvente.

Supposons qu'il existe deux telles familles  $(V_\lambda)$  et  $(W_\lambda)$ , vérifiant la condition:

$$V_\lambda f + \lambda VV_\lambda f = W_\lambda f + \lambda VW_\lambda f, \quad (f \in \mathcal{C}_K^+, \lambda > 0).$$

Posons:

$$\begin{aligned} g_1 &= V_\lambda f - \text{Inf}(V_\lambda f, W_\lambda f), \\ g_2 &= W_\lambda f - \text{Inf}(V_\lambda f, W_\lambda f). \end{aligned}$$

Ainsi, on a:  $g_1 + \lambda Vg_1 = g_2 + \lambda Vg_2$ ; pour tout  $x$  du support de  $g_1$ , a lieu l'inégalité:  $Vg_1(x) \leq Vg_2(x)$ , cette inégalité a donc lieu partout sur  $X$ , ce qui entraîne:  $g_1 \geq g_2$ ; on démontrerait de même l'inégalité inverse, d'où l'on déduit finalement:

$$V_\lambda f = W_\lambda f.$$

*Remarques.* — 1) A l'exception de la partie 3), les mêmes raisonnements s'appliquent à tout noyau continu, strictement positif, et vérifiant le principe de domination.

2) Hunt a démontré le présent théorème en usant d'une méthode probabiliste, et sous l'hypothèse supplémentaire citée à la fin du § 2.

#### 4. Étude des réciproques.

**THÉORÈME III.** — a) Soit  $(V_\lambda)_{\lambda \geq 0}$  une famille résolvante d'opérateurs strictement positifs, définis sur  $\mathcal{C}_0$ ; alors tout opérateur  $V_\lambda$  vérifie le principe de domination.

b) Soit  $(V_\lambda)_{\lambda > 0}$  une famille résolvante d'opérateurs positifs et sous-markovienne; alors tout opérateur  $V_\lambda$  vérifie le principe complet du maximum.

*Remarque.* — Dans la partie a) il suffit que l'un des opérateurs  $V_\lambda$  soit strictement positif, pour que tous les autres le soient.

Introduisons de nouvelles notations. Pour  $\mu > \lambda$ , désigne par  $\mathcal{E}_\lambda^\mu$  l'ensemble des fonctions de  $\mathcal{C}_0^+$ , vérifiant la condition :

$$(\mu - \lambda)V_\mu f \leq f.$$

On vérifie aussitôt que  $\mathcal{E}_\lambda^\mu$  est un cône convexe, semi-réticulé inférieurement; si  $f$  appartient à  $\mathcal{C}_0^+$ ,  $V_\lambda f$  appartient à  $\mathcal{E}_\lambda^\mu$ , en vertu de l'équation résolvante :

$$(\mu - \lambda)V_\mu V_\lambda f = V_\lambda f - V_\mu f \leq V_\lambda f.$$

Posons  $T_\lambda^\mu f = V_\lambda f + \frac{f}{\mu - \lambda}$ ; si  $f$  appartient à  $\mathcal{C}_0^+$ , alors  $T_\lambda^\mu f$  appartient à  $\mathcal{E}_\lambda^\mu$ . En effet, on a la formule :

$$(\mu - \lambda)V_\mu T_\lambda^\mu f = V_\lambda f - V_\mu f + V_\mu f = V_\lambda f \leq T_\lambda^\mu f.$$

Réciproquement, pour toute fonction  $u$  de  $\mathcal{E}_\lambda^\mu$ , il existe une fonction  $f$  dans  $\mathcal{C}_0^+$ , telle que l'on ait :  $u = T_\lambda^\mu f$ ; on calcule  $f$  ainsi :

$$f = (\mu - \lambda)(T_\lambda^\mu f - V_\lambda f) = (\mu - \lambda)(u - (\mu - \lambda)V_\mu u),$$

et cette formule détermine bien une fonction positive.

Démontrons un lemme préliminaire :

LEMME I. — Soient  $f \in \mathcal{C}_0^+$  et  $u \in \mathcal{E}_\lambda^\mu$ ; si l'inégalité :

$$T_\lambda^\mu f(x) \leq u(x),$$

a lieu pour tout  $x$  du support de  $f$ , alors elle a lieu sur tout  $X$ .

Posons  $\nu = \text{Inf}(T_\lambda^\mu f, u)$ , et soit  $g$  une fonction de  $\mathcal{C}_0^+$  telle que l'on ait :  $\nu = T_\lambda^\mu g$ ; on a donc :

$$V_\lambda g = (\mu - \lambda)V_\mu T_\lambda^\mu g \leq (\mu - \lambda)V_\mu T_\lambda^\mu f = V_\lambda f;$$

c'est-à-dire :

$$T_\lambda^\mu g - \frac{g}{\mu - \lambda} \leq T_\lambda^\mu f - \frac{f}{\mu - \lambda}.$$

Par hypothèse on a, pour tout  $x$  du support de  $f$ , l'égalité :  $T_\lambda^\mu f(x) = \nu(x) = T_\lambda^\mu g(x)$ , et ceci entraîne  $g(x) \geq f(x)$ ; cette inégalité a donc lieu partout sur  $X$ , et ainsi on a :

$$T_\lambda^\mu g \geq T_\lambda^\mu f,$$

c'est-à-dire :  $T_\lambda^\mu f = T_\lambda^\mu g = \nu$ , d'où découle aussitôt la conclusion du lemme.

Nous pouvons démontrer la partie a) du théorème : supposons l'inégalité :  $V_\lambda f(x) \leq V_\lambda g(x)$ , vérifiée pour tout  $x$  du support de  $f$  ( $\lambda \geq 0$ ,  $f$  et  $g \in \mathcal{C}_\mathbb{K}^+$ ).

Pour tout tel  $x$ , on a donc :

$$T_\lambda^\mu f(x) \leq V_\lambda g(x) + \frac{f(x)}{\mu - \lambda}.$$

L'opérateur  $V_\lambda$  étant strictement positif, il existe dans  $\mathcal{C}_\mathbb{K}^+$  une fonction  $h$  donnant lieu, pour tout  $x$  du support de  $f$ , à l'inégalité :  $f(x) \leq V_\lambda h(x)$ .

Ainsi, l'inégalité :  $T_\lambda^\mu f \leq V_\lambda g + \frac{V_\lambda h}{\mu - \lambda}$ , a lieu sur tout  $X$ .

En faisant tendre  $\mu$  vers l'infini, nous obtenons l'inégalité demandée :  $V_\lambda f \leq V_\lambda g$ .

Lorsque la famille est sous-markovienne on a le résultat suivant :

LEMME II. — Si les fonctions  $u$  et  $\nu$  appartiennent à  $\mathcal{E}_\lambda^\mu$ , alors la fonction  $\text{Inf}(u, \nu + 1)$  appartient aussi à  $\mathcal{E}_\lambda^\mu$ .

Soit  $h_n$  une suite croissante de fonctions de  $\mathcal{C}_0^+$ , tendant vers 1.

Posons  $\varpi_n = \text{Inf}(u, \nu + h_n)$ ; quand  $n$  tend vers l'infini,  $\varpi_n$  tend vers  $\varpi = \text{Inf}(u, \nu + 1)$ ; et la convergence est uniforme sur tout compact, donc aussi sur  $X$ , car  $\varpi$  appartient à  $\mathcal{C}_0^+$ .

Or on a :

$$(\mu - \lambda)V_\mu \varpi_n \leq (\mu - \lambda)V_\mu \nu + (\mu - \lambda)V_\mu h_n \leq \nu + 1,$$

donc, à la limite :

$$(\mu - \lambda)V_\mu \varpi \leq \nu + 1.$$

D'autre part on sait :

$$(\mu - \lambda)V_\mu \varpi \leq (\mu - \lambda)V_\mu u \leq u;$$

ainsi  $\varpi$  appartient à  $\mathcal{E}_\lambda^\mu$ .

Démontrons l'assertion *b)* du théorème.

L'inégalité :  $V_\lambda f(x) \leq V_\lambda g(x) + a$ , ( $f, g \in \mathcal{C}_K^+$ ,  $a \geq 0$ ), ayant lieu sur le support de  $f$ , entraîne pour un tel  $x$  :

$$T_\lambda^\mu f(x) \leq V_\lambda g(x) + a + \frac{f(x)}{\mu - \lambda} \leq V_\lambda g(x) + a + \frac{k}{\mu - \lambda},$$

où  $k$  est la borne supérieure de  $f$  sur  $X$ .

En vertu du lemme II la fonction

$$\text{Inf} \left( T_\lambda^\mu f, V_\lambda g + a + \frac{k}{\mu - \lambda} \right)$$

appartient à  $\mathcal{E}_\lambda^\mu$ ; donc on a d'après le lemme I :

$$T_\lambda^\mu f \leq V_\lambda g + a + \frac{k}{\mu - \lambda},$$

qui conduit de même à :

$$V_\lambda f \leq V_\lambda g + a.$$

*Remarque.* — Supposons la famille  $(V_\lambda)$  sous-markovienne; supposons de plus que, pour toute fonction  $f$  de  $\mathcal{C}_K$ ,  $V_\lambda f$  tende vers une fonction  $Vf$ , uniformément sur  $X$ , quand  $\lambda$  tend vers 0. L'application  $f \rightarrow Vf$  définit alors un noyau continu vérifiant le principe complet du maximum, mais non borné en général.

## CHAPITRE III

### PROLONGEMENT AU COMPACTIFIÉ

#### 1. Position du problème.

Partant d'un noyau continu, défini sur  $\mathcal{C}_X$  ou sur  $\mathcal{C}_0$ , et vérifiant le principe complet du maximum, nous sommes arrivés à une famille résolvente  $(V_\lambda)$  sous-markovienne, définie sur  $\mathcal{C}_0$ ; dans le but d'appliquer à cette famille résolvente les résultats de Ray [30] et de Choquet [5], nous devons nous placer sur un espace compact; c'est-à-dire étendre de  $\mathcal{C}_0$  à  $\mathcal{C}$ , l'espace de définition des opérateurs  $V_\lambda$ .

D'autre part l'image  $V_\lambda(\mathcal{C})$  devra contenir les fonctions constantes; nous cherchons donc à prolonger l'opérateur  $V_\lambda$  de façon que l'on ait :  $V_\lambda(1) = \frac{1}{\lambda}$ .

Nous verrons qu'un tel prolongement est possible et qu'il est unique.

*Remarque.* — Si l'espace  $X$  est compact, il y a lieu de lui adjoindre un point isolé, qui jouera un rôle analogue au point à l'infini d'un espace localement compact non compact.

#### 2. Prolongement d'une famille résolvente sous-markovienne.

**PROPOSITION.** — Soit  $(V_\lambda)_{\lambda > 0}$ , une famille résolvente, positive, sous-markovienne, définie sur  $\mathcal{C}_0$  pour  $\lambda > 0$ .

Si on a, de plus, pour tout  $\lambda > 0$  :

$$\|V_\lambda\| \leq \frac{1}{k + \lambda},$$

alors il existe une famille résolvante  $(W_\lambda)_{\lambda > 0}$ , positive, sous-markovienne, définie sur  $\mathcal{C}$  pour  $\lambda > 0$ , et telle que :

Pour toute fonction  $f$  de  $\mathcal{C}_0$ , on ait :  $W_\lambda f = V_\lambda f$ , et

$$W_\lambda(1) = \frac{1}{k + \lambda}.$$

De plus une telle famille est unique.

Démonstration. — a) Soit  $g$  une fonction de  $\mathcal{C}$ , et

$$f = g - g(\omega).$$

Ainsi  $f$  appartient à  $\mathcal{C}_0$  et l'on a nécessairement :

$$W_\lambda g(x) = W_\lambda f(x) + W_\lambda[g(\omega)] = V_\lambda f(x) + \frac{g(\omega)}{k + \lambda}, \quad (x \in X),$$

et

$$W_\lambda g(\omega) = \frac{g(\omega)}{k + \lambda}.$$

Ces inégalités suffisent à déterminer  $W_\lambda g$ .

b) Vérifions l'équation résolvante à propos de  $(W_\lambda)$  :

$$\begin{aligned} (\mu - \lambda)W_\mu W_\lambda g &= (\mu - \lambda)W_\mu \left[ V_\lambda f + \frac{g(\omega)}{k + \lambda} \right] \\ &= (\mu - \lambda)V_\mu V_\lambda f + (\mu - \lambda) \frac{g(\omega)}{(k + \mu)(k + \lambda)} \\ &= V_\lambda f - V_\mu f + \frac{g(\omega)}{k + \lambda} - \frac{g(\omega)}{k + \mu} = W_\lambda g - W_\mu g. \end{aligned}$$

L'opérateur  $W_\lambda$  est positif :

Soit  $g$  une fonction de  $\mathcal{C}^+$ ; on a :

$$f = g - g(\omega) \geq -g(\omega),$$

d'où :

$$W_\lambda f = V_\lambda f \geq \frac{-g(\omega)}{k + \lambda} \quad \text{et} \quad W_\lambda g = V_\lambda f + \frac{g(\omega)}{k + \lambda} \geq 0.$$

Et l'inégalité :  $\|W_\lambda\| \leq \frac{1}{k + \lambda}$ , entraîne que la famille  $(W_\lambda)$  est sous-markovienne.

### 3. Prolongement d'un noyau continu à l'espace $K$ .

Soit  $V$  un noyau continu borné, défini sur  $X$  et vérifiant le principe complet du maximum.

DÉFINITION. — On dit que l'on prolonge le noyau  $V$  en posant  $W(1) = \frac{1}{k}$ , si l'opérateur  $W$ , défini sur  $\mathcal{C}$  par la formule :

$$Wg = V(g - g(\omega)) + \frac{g(\omega)}{k},$$

est un noyau continu vérifiant le principe complet du maximum.

Remarque. — Pour que ce prolongement ait lieu, il faut que la norme de  $V$  dans  $\mathcal{L}(\mathcal{C}_0)$  soit majorée par  $\frac{1}{k}$ .

Cette condition n'est pas suffisante, comme le prouve l'exemple suivant :

Soit  $X$  l'ensemble des deux éléments  $x_1$  et  $x_2$ .

Soit  $V$  le noyau représenté par la matrice :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ce noyau  $V$  vérifie le principe  $b)$  du chapitre 1, donc le principe complet.

Soit  $W$  un prolongement de  $V$ , représenté par la matrice :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{k} & -1 \\ 1 & 1 & \frac{1}{k} & -2 \\ 0 & 0 & \frac{1}{k} & \end{pmatrix}, \quad \left(0 < k < \frac{1}{2}\right).$$

Soit

$$g(x_1) = \frac{1}{k} - 1, \quad g(x_2) = -\frac{1}{2}, \quad g(\omega) = -1;$$

Calculons  $Wg$  :

$$Wg(x_1) = 0, \quad Wg(x_2) = \frac{1}{2}, \quad Wg(\omega) = -\frac{1}{k}.$$

Ainsi, quel que soit le nombre  $k$ , le noyau  $W$  ne vérifie pas le principe complet du maximum.

Démontrons trois lemmes :

LEMME I. — Si l'on peut prolonger le noyau  $V$  en posant  $W(1) = \frac{1}{k}$ , alors il existe une famille résolvente  $(T_\lambda)_{\lambda > 0}$ , positive, sous-markovienne, définie sur  $\mathcal{C}_0$  pour  $\lambda > 0$  et telle que l'on ait :  $V = T_k$ .

Le noyau  $W$  vérifie le principe complet du maximum, il existe donc une famille résolvente  $(W_\lambda)$  d'opérateurs de  $\mathcal{C}$ , définis pour  $\lambda > 0$  et tels que l'on ait  $W_0 = W$ . (Au chapitre II le résultat a été démontré pour  $\mathcal{C}_0$ ).

On peut donc écrire la formule :

$$W_\lambda - W = -\lambda W_\lambda W = -\lambda W W_\lambda, \quad (\lambda \geq 0).$$

D'autre part, l'inégalité :  $\|W\| \leq \frac{1}{k}$ , permet de définir l'opérateur  $U_\mu$  somme de la série

$$\sum_{n=0}^{\infty} (k - \mu)^n W^{n+1}, \quad (0 < \mu \leq k).$$

L'opérateur  $U_\mu$  est évidemment positif sur  $\mathcal{C}$ ; de plus on a :

$$(k - \mu) W U_\mu = (k - \mu) U_\mu W = U_\mu - W, \quad (0 < \mu \leq k).$$

Prolongeons la famille  $U_\mu$  en posant :

$$U_\mu = W_{\mu-k}, \quad (\mu > k).$$

La famille  $(U_\mu)_{\mu > 0}$  est positive; pour tout  $\mu > 0$  on a l'égalité :

$$(k - \mu) U_\mu W = (k - \mu) W U_\mu = U_\mu - W,$$

d'où l'on déduit :

$$\begin{aligned} U_\mu (I + (k - \lambda) U_\lambda) &= (I + (k - \mu) U_\mu) W (I + (k - \lambda) U_\lambda) \\ &= (I + (k - \mu) U_\mu) U_\lambda, \end{aligned}$$

c'est-à-dire :

$$U_\mu - U_\lambda = (\lambda - \mu) U_\mu U_\lambda.$$

Il s'agit donc d'une famille résolvente.

Pour  $\mu \leq k$ , on a

$$U_\mu(1) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(k - \mu)^n}{k^{n+1}} = \frac{1}{\mu};$$

par prolongement analytique, cette égalité a lieu pour tout  $\mu > k$ .

La famille  $(U_\mu)_{\mu > 0}$  est donc sous-markovienne et  $U_k = W$ .

Prenant la restriction  $T_\mu$  de  $U_\mu$  à  $\mathcal{C}_0$ , on obtient la famille cherchée.

LEMME II. — Soit  $(V_\lambda)_{\lambda > 0}$  une famille résolvante, positive, définie sur  $\mathcal{C}_0$ ; s'il existe une famille  $(T_\mu)_{\mu > 0}$  résolvante, positive, sous-markovienne et telle que l'on ait, pour tout  $\lambda > 0$ ,  $V_\lambda = T_{k+\lambda}$ .

Alors la norme  $\|V_\lambda\|$  est majorée par  $\frac{1}{k + \lambda}$ .

Ce lemme est évident car la famille  $(T_\mu)$  est sous-markovienne.

LEMME III. — Soit  $(V_\lambda)$  une famille résolvante, positive, définie sur  $\mathcal{C}_0$  pour  $\lambda \geq 0$  et telle que l'on ait, pour tout  $\lambda \geq 0$ ,

$$\|V_\lambda\| \leq \frac{1}{k + \lambda}, \quad (k > 0);$$

Alors tout opérateur  $W_\lambda$  de la famille prolongée à  $\mathcal{C}$  vérifie le principe complet du maximum sur  $K$ .

Le prolongement  $(W_\lambda)_{\lambda \geq 0}$  existe en vertu du théorème I du présent chapitre; de plus, pour tout  $\lambda > 0$ , le noyau défini par  $W_\lambda$  vérifie le principe complet du maximum (chapitre II, théorème III).

Il reste donc à vérifier ce principe pour le noyau  $W = W_0$ .

Soient  $a \geq 0$ ,  $f$  et  $g$  dans  $\mathcal{C}^+$ , tels que l'inégalité :

$$Wf(x) \leq Wg(x) + a,$$

soit vérifiée pour tout élément  $x$  du support de  $f$ .

Lorsque  $\lambda$  tend vers 0,  $W_\lambda f$  tend vers  $Wf$  uniformément sur  $K$ , et de même  $W_\lambda g$  tend vers  $Wg$ .

Soit  $\varepsilon > 0$ ; pour  $\lambda$  assez petit, l'inégalité :

$$W_\lambda f(x) \leq W_\lambda g(x) + a + \varepsilon,$$

est vérifiée sur le support de  $f$ .

Par application du principe complet, on obtient :

$$W_\lambda f \leq W_\lambda g + a + \varepsilon,$$

d'où, par convergence uniforme :

$$Wf \leq Wg + a + \varepsilon.$$

Cette inégalité ayant lieu pour tout  $\varepsilon > 0$ , on en conclut :

$$Wf \leq Wg + a.$$

**THÉORÈME II.** — Soit  $V$  un noyau continu sur  $X$ , vérifiant le principe complet du maximum; soit  $(V_\lambda)_{\lambda > 0}$  la famille résolvente associée à  $V$ . Les trois nombres suivants sont égaux :

$$\left\{ \begin{array}{l} a = \inf_{\lambda > 0} \left( \frac{1}{\|V_\lambda\|} - \lambda \right) \\ b = \sup \left\{ k > 0; \text{ on prolonge } V \text{ en posant } W(1) = \frac{1}{k} \right\} \\ c = \sup \left\{ k > 0; \text{ il existe une famille résolvente sous-markovienne } (T_\lambda)_{\lambda > 0} \text{ telle que } V_\lambda = T_{k+\lambda} \right\}. \end{array} \right.$$

*Démonstration.* — Quatre cas sont possibles a priori :

- 1)  $b \neq 0$ ; on a alors :  $b \leq c$  (lemme I);
- 2)  $c \neq 0$ ; on a alors :  $c \leq a$  (lemme II);
- 3)  $a \neq 0$ ; on a alors :  $a \leq b$  (lemme III);
- 4)  $a = b = c = 0$ .

Ces quatre cas conduisent à l'égalité  $a = b = c$ .

*Exemples.* — I. Au noyau cité plus haut on associe la famille résolvente définie ainsi :

$$V_\lambda = \begin{pmatrix} \frac{1}{1+\lambda} & 0 \\ \frac{1}{(1+\lambda)^2} & \frac{1}{1+\lambda} \end{pmatrix}, \quad (\lambda > 0).$$

On peut calculer :

$$\|V_\lambda\| = \frac{2+\lambda}{(1+\lambda)^2}, \quad \text{et} \quad \frac{1}{\|V_\lambda\|} - \lambda = \frac{1}{2+\lambda}.$$

Ainsi, on retrouve le fait que  $V$  n'est pas prolongeable. (Pour :  $0 > \lambda > -1$ , les opérateurs  $V_\lambda$  sont positifs, mais ils ne vérifient pas le principe complet du maximum).

II. Construisons un exemple où l'on ait :

$$\frac{1}{\|V\|} \neq a \neq 0.$$

Il suffit de considérer :

$$V = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \text{d'où} \quad \frac{1}{\|V\|} = \frac{1}{3},$$

et

$$V_\lambda = \begin{pmatrix} \frac{2}{1+2\lambda} & 0 \\ \frac{1}{(1+2\lambda)^2} & \frac{2}{1+2\lambda} \end{pmatrix},$$

ce qui donne :

$$\frac{1}{\|V_\lambda\|} - \lambda = \frac{\lambda + 1}{4\lambda + 3};$$

d'où l'on déduit :

$$a = \frac{1}{4} \neq \frac{1}{\|V\|}.$$

## CHAPITRE IV

### FONCTIONS SURMÉDIANES

#### 1. Introduction.

Dans ce chapitre  $K$  désigne un espace compact et  $\mathcal{C}$  désigne l'espace vectoriel des fonctions numériques continues sur  $K$ .

Soit  $(V_\lambda)$  une famille résolvente, positive, définie sur  $\mathcal{C}$  pour  $\lambda > 0$ , on suppose de plus l'égalité :  $\lambda V_\lambda(1) = 1$ .

Ray s'est préoccupé de savoir sous quelles hypothèses on peut conclure que chaque opérateur  $V_\lambda$  est l'intégrale d'un semi-groupe sous-markovien (voir [30]). Le théorème de Hille-Yosida (voir chapitre v) permet de ramener cette question à la suivante :

Lorsque la fonction  $f$  appartient à  $\mathcal{C}$ , la fonction  $\lambda V_\lambda f(x)$  a-t-elle une limite quand  $\lambda$  tend vers l'infini?

Ray a répondu positivement sous la condition suivante : les fonctions 1-surmédianes <sup>(3)</sup> séparent les points de  $K$ . Notons  $\hat{f}$  la limite (simple) de  $\lambda V_\lambda f$ ; Ray a montré que pour tout  $x$  d'un ensemble  $A$  et pour toute  $f$  de  $\mathcal{C}$  on a :  $\hat{f}(x) = f(x)$ .

Il a ensuite étudié le semi-groupe associé à  $(V_\lambda)$  et les processus de Markov qui s'en déduisent.

Notre propos est d'étendre les premiers résultats de Ray au cas où c'est le cône de toutes les fonctions surmédianes qui sépare les points de  $K$ ; les méthodes s'en trouveront d'autant simplifiées; puis nous ferons le lien du problème étudié ici avec les travaux de Bauer sur la frontière de Choquet, et aussi avec la notion de mesures maximales; enfin, nous

<sup>(3)</sup> C'est-à-dire les fonctions de  $\mathcal{C}^+$  vérifiant pour tout  $\lambda > 0$  l'inégalité :

$$\lambda V_{\lambda+1} f \leq f.$$

donnerons une condition nécessaire et suffisante pour que la fonction  $\hat{f}$  soit continue sur  $K$ , et un exemple où ceci n'a pas lieu.

**2. Résultats préliminaires.**

**DÉFINITION.** — *On dit qu'une fonction  $f$  de  $\mathcal{C}^+$  est  $\lambda$ -surmédiane si, pour tout  $\mu > \lambda$ , on a l'inégalité:  $(\mu - \lambda)V_\mu f \leq f$ .*

L'ensemble  $\mathcal{E}_\lambda$  des fonctions  $\lambda$ -surmédiennes est un cône convexe, semi-réticulé inférieurement.

Toute constante positive appartient à  $\mathcal{E}_\lambda$ .

Si la fonction  $g$  appartient à  $\mathcal{C}^+$ , en vertu de l'équation résolvente la fonction  $V_\lambda g$  appartient à  $\mathcal{E}_\lambda$ .

**LEMME I.** — *Si la fonction  $f$  est  $\lambda$ -surmédiane, alors l'inégalité:  $\mu' \geq \mu$ , entraîne  $(\mu' - \lambda)V_{\mu'} f \geq (\mu - \lambda)V_\mu f$ .*

En effet on peut écrire :

$$\begin{aligned} (\mu' - \lambda)V_{\mu'} f - (\mu - \lambda)V_\mu f &= (\mu' - \lambda)(V_{\mu'} f - V_\mu f) + (\mu' - \mu)V_\mu f \\ &= (\mu' - \mu)[V_{\mu'} f - (\mu' - \lambda)V_\mu V_{\mu'} f] \\ &= V_\mu [(\mu' - \mu)(f - (\mu' - \lambda)V_\mu f)], \end{aligned}$$

et cette dernière fonction est bien positive.

Soit  $x$  un élément de  $K$ , et  $f$  une fonction  $\lambda$ -surmédiane; puisque  $(\mu - \lambda)V_\mu f(x)$  croît avec  $\mu$ , cette quantité tend vers une limite lorsque  $\mu$  tend vers l'infini. Soit  $\hat{f}(x)$  cette limite. Nous savons d'autre part :

$$\mu V_\mu f = (\mu - \lambda)V_\mu f + \lambda V_\mu f,$$

et

$$\|\lambda V_\mu f\| \leq \frac{\lambda \|f\|}{\mu}.$$

Donc nous avons :

$$\hat{f}(x) = \lim_{\mu \rightarrow \infty} \mu V_\mu f(x), \quad (x \in K; f \in \mathcal{E}_\lambda).$$

**LEMME II.** — *L'inégalité:  $\lambda' \geq \lambda$  entraîne l'inclusion:  $\mathcal{E}_{\lambda'} \supset \mathcal{E}_\lambda$ .*

En effet soit  $f$  appartenant à  $\mathcal{E}_\lambda$ ; nous avons, pour  $\mu > \lambda'$  :

$$(\mu - \lambda')V_\mu f = (\mu - \lambda)V_\mu f + (\lambda - \lambda')V_\mu f \leq (\mu - \lambda)V_\mu f \leq f.$$

Donc la fonction  $f$  appartient à  $\mathcal{E}_{\lambda'}$ .

La réunion  $\mathcal{E}$  des cônes  $\mathcal{E}_\lambda$  est un cône convexe, semi-réticulé inférieurement. Nous dirons dorénavant qu'une fonction de  $\mathcal{C}$  est surmédiane si elle appartient au cône  $\mathcal{E}$ .

Démontrons un résultat général sur les familles résolvantes. Notons  $H$  l'adhérence de l'espace vectoriel  $V_\lambda(\mathcal{C})$  dans  $\mathcal{C}$ .

PROPOSITION. — *Pour que l'on ait, pour tout  $x$  de  $K$ , l'égalité :*

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \lambda V_\lambda f(x) = f(x), \quad (1)$$

*il faut et il suffit que  $f$  appartienne à  $H$ .*

*Et alors la convergence est uniforme sur  $K$ .*

1) Démontrons que la condition est nécessaire; l'espace  $H$  est l'intersection des hyperplans fermés le contenant. Soit donc  $L$  une forme linéaire continue sur  $\mathcal{C}$  et nulle sur  $H$ ; on peut écrire:  $L = L^+ - L^-$ , où  $L^+$  et  $L^-$  définissent deux mesures positives sur  $K$ .

Si la fonction continue  $f$  vérifie la condition (1), on a en vertu du théorème de Lebesgue:

$$L^+(f) = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} L^+(\lambda V_\lambda f) \quad \text{et} \quad L^-(f) = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} L^-(\lambda V_\lambda f).$$

Ayant, pour tout  $\lambda$ , l'égalité:  $L(\lambda V_\lambda f) = 0$ , on en déduit:  $L(f) = 0$ , et  $f$  appartient à  $H$ .

2) Réciproquement, supposons qu'il existe une fonction  $g$  de  $\mathcal{C}$  telle que l'on ait  $f = V_\mu g$ .

Alors l'équation résolvante:

$$\lambda V_\lambda V_\mu g = V_\mu g + \mu V_\lambda V_\mu g - V_\lambda g,$$

entraîne la convergence, uniforme sur  $K$ , de  $\lambda V_\lambda f$  vers  $f$ .

En vertu de l'égalité:  $\lambda V_\lambda(1) = 1$ , on a le même résultat pour toute fonction  $f$  de  $H$ .

Nous ferons l'hypothèse suivante:

(H): *L'ensemble des fonctions surmédianes sépare les points de  $K$ .*

THÉORÈME I. — *Lorsque  $f$  appartient à  $\mathcal{C}$ , et  $x$  à  $K$ ,  $\lambda V_\lambda f(x)$  tend vers une limite  $\hat{f}(x)$ , quand  $\lambda$  tend vers l'infini.*

En effet, la propriété a lieu pour toute fonction  $f$  surmédiane; elle a donc aussi lieu pour toute fonction appartenant à l'espace vectoriel  $D$  engendré par  $\mathcal{E}$ .

Or cet espace  $D$  contient les constantes, sépare les points de  $K$ , est réticulé. D'après le théorème de Stone-Weierstrass, cet espace vectoriel  $D$  est partout dense dans  $\mathcal{C}$ .

Soit donc  $f$  une fonction de  $\mathcal{C}$ , et  $(f_n)$  une suite de fonctions de  $D$  tendant vers  $f$  uniformément sur  $K$ . Nous avons :

$$\lambda V_\lambda f(x) - \lambda' V_{\lambda'} f(x) = \lambda V_\lambda (f - f_n)(x) - \lambda' V_{\lambda'} (f - f_n)(x) + (\lambda V_\lambda - \lambda' V_{\lambda'}) f_n(x).$$

Les deux premiers termes sont majorés en valeur absolue par  $\|f - f_n\|$ .

Ainsi la convergence est démontrée.

*Remarque.* — Pour toute fonction  $f$  de  $\mathcal{E}$ , on a l'inégalité :  $\hat{f} \leq f$ .

L'égalité  $f = V_\lambda g$ , entraîne :  $f = \hat{f}$  (et la convergence est uniforme).

L'inégalité :  $f \geq 0$ , entraîne :  $\hat{f} \geq 0$ .

### 3. Frontière de l'espace $K$ .

Soit  $\Gamma$  l'ensemble des fonctions  $f$  de  $\mathcal{C}$  vérifiant l'inégalité :  $\hat{f} \leq f$ . L'ensemble  $\Gamma$  est un cône convexe, semi-réticulé inférieurement, fermé et il contient le cône  $\mathcal{E}$ .

Introduisons les notations de Bauer (voir [22]).

Soit  $\mathcal{M}_1^+$  l'ensemble des mesures positives de masse 1 sur  $K$ .

Pour toute fonction  $f$  de  $\mathcal{C}$ , désignons par  $S(f)$  le compact où la fonction  $f$  atteint son minimum.

Pour toute mesure  $\mu$  de  $\mathcal{M}_1^+$ , notons  $S_\mu$  le support de  $\mu$ .

Pour tout  $x$  de  $K$  on note  $M_x$ , l'ensemble des mesures  $\mu$  de  $\mathcal{M}_1^+$ , vérifiant pour toute fonction  $f$  de  $\Gamma$ , l'inégalité :

$$\mu(f) \leq f(x).$$

L'ensemble  $M_x$  n'est pas vide, car il contient la mesure  $\varepsilon_x$ . Cet ensemble contient aussi la mesure  $\mu_x$  définie ainsi :

$$\mu_x(f) = \hat{f}(x), \quad (f \in \mathcal{C}).$$

Pour toute mesure  $\mu$  de  $M_x$ , on a :

$$\mu(V_\lambda f) = V_\lambda f(x), \quad (f \in \mathcal{C}).$$

En effet la fonction  $V_\lambda f$  appartient à  $\Gamma \cap (-\Gamma) = H$ .

LEMME I. — Pour toute  $f$  de  $\mathcal{E}$ , et toute  $\mu$  de  $M_x$ , on a l'inégalité :

$$\mu(f) \geq \mu_x(f).$$

En effet soit  $f \in \mathcal{E}_\lambda$  et  $k > \lambda$ ; nous avons :

$$\mu(f) \geq \mu[(k - \lambda)V_k f] = (k - \lambda)V_k f(x).$$

Passant à la limite on obtient :

$$\mu(f) \geq \hat{f}(x) = \mu_x(f).$$

LEMME II. — Les deux conditions suivantes sont équivalentes :

- a) pour toute fonction  $f$  de  $\mathcal{E}$ , on a :  $f(x) = \hat{f}(x)$ ;
- b) l'ensemble  $M_x$  se réduit à  $\varepsilon_x$ .

La condition a) signifie l'égalité :  $\mu_x = \varepsilon_x$ ; donc b) entraîne a).

Réciproquement la condition a) entraîne pour toute  $f$  de  $\mathcal{E}$  et toute  $\mu$  de  $M_x$  :  $\mu(f) \geq f(x)$ , (lemme I).

On a l'inégalité inverse par définition de  $M_x$ , donc les mesures  $\mu$  et  $\varepsilon_x$  coïncident sur le cône  $\mathcal{E}$ , donc sur l'espace  $D$ , et aussi sur  $\mathcal{C}$  par convergence uniforme.

DÉFINITION. — L'ensemble  $A$  des éléments  $x$  de  $K$  vérifiant la condition a) (ou b)) est appelé frontière de Choquet de  $K$  relativement au cône  $\Gamma$ .

Remarque. — On obtiendrait la même frontière en partant du cône  $\mathcal{E}$ .

Il nous faut maintenant montrer que cet ensemble  $A$  n'est pas vide, suivons pour cela la méthode de Choquet-Bauer.

On dit qu'un compact  $E$  de  $K$  est extrémal<sup>(4)</sup> si, pour tout  $x$  de  $E$  et toute  $\mu$  de  $M_x$ , le support  $S_\mu$  est contenu dans  $E$ .

L'ensemble des compacts extrémaux, ordonné par inclusion, est inductif vers le bas; il y a donc des éléments minimaux.

LEMME III. — L'ensemble  $A$  n'est pas vide et toute fonction de  $\Gamma$  y atteint son minimum.

Montrons d'abord que, pour toute  $f$  appartenant à  $\Gamma$ , le compact  $S(f)$  est extrémal.

En effet soit  $x \in S(f)$  et  $\mu \in M_x$ ; l'inégalité :  $\mu(f) \leq f(x)$ , entraîne que  $S_\mu$  est contenu dans  $S(f)$ .

(4) Au lieu d'extrémal on dit parfois stable.

Soit donc  $M$  un compact extrémal minimal contenu dans  $S(f)$ .

Si l'ensemble  $M$  contenait deux points distincts, il existerait dans  $\Gamma$  une fonction  $g$  non constante sur  $M$ . Soit  $M'$  le compact où la restriction de  $g$  à  $M$  atteint son minimum. Soit  $x$  dans  $M'$  et  $\mu$  dans  $M_x$ ; on sait déjà que l'ensemble  $S_\mu$  est contenu dans  $M$ ; donc l'inégalité:  $\mu(g) \leq g(x)$ , entraîne, comme plus haut, l'inclusion:  $S_\mu \subset M'$ ; le compact  $M'$  serait donc extrémal et distinct de  $M$ .

Le compact  $M$  est donc nécessairement réduit à un point  $\xi$ .

Toute mesure de  $M_\xi$  est ponctuelle donc égale à  $\varepsilon_\xi$ , et  $\xi$  appartient à l'ensemble  $A$ .

Soient  $x$  un élément de  $K$  et  $f$  une fonction de  $\mathcal{C}$ ; posons:

$$\bar{f}(x) = \inf_{\substack{v_A \geq f_A \\ v \in \Gamma}} v(x), \quad \text{et} \quad \underline{f}(x) = \sup_{\substack{w_A \leq f_A \\ w \in -\Gamma}} w(x),$$

(nous désignons par  $f_A, v_A, w_A$ , les restrictions à  $A$  des fonctions  $f, v, w$ ).

Le fait que  $\Gamma$  soit un cône entraîne les inégalités:

$$\overline{f+g} \leq \bar{f} + \bar{g}, \quad \text{et} \quad \underline{f+g} \geq \underline{f} + \underline{g}.$$

Pour de telles fonctions  $v$  et  $w$ , la fonction  $v - w$  atteint son minimum sur  $A$ , donc cette fonction est positive partout sur  $K$ .

Nous en déduisons l'inégalité:  $f \leq \bar{f}$ .

Enfin si la fonction  $f$  appartient à  $\Gamma$  on a:  $f \geq \underline{f}$ .

LEMME IV. — a) Pour toute fonction  $f$  de  $\mathcal{E}$ , on a l'égalité:  $\hat{f} = \underline{f}$ ; b) pour toute fonction  $f$  de  $D$ , on a les inégalités:

$$\underline{f} \leq \hat{f} \leq \bar{f}.$$

*Démonstration.* — a) Soit  $f$  appartenant à  $\mathcal{E}_\lambda$ ; pour tout  $k > \lambda$ , on a:  $(k - \lambda) \mathbf{V}_k f \leq f$ , or la fonction  $(k - \lambda) \mathbf{V}_k f$  appartient à  $-\Gamma$ , et ceci entraîne:  $(k - \lambda) \mathbf{V}_k f(x) \leq \underline{f}(x)$ , qui donne l'inégalité:  $\hat{f} \leq \underline{f}$ , en passant à la limite sur  $k$ .

D'autre part, soit  $w$  une fonction de  $-\Gamma$ , telle que l'on ait:  $w_A \leq f_A$ .

La fonction  $f - w$  appartient au cône  $\Gamma$ , étant positive sur  $A$ , elle est positive partout sur  $K$ .

Ainsi pour tout  $k > \lambda$ , on a :  $(k - \lambda)V_k \omega \leq (k - \lambda)V_k f$  ; cette inégalité entraîne :  $\hat{\omega} \leq \hat{f}$ .

L'appartenance :  $\omega \in -\Gamma$ , entraîne l'inégalité :  $\omega \leq \hat{\omega}$  ; finalement on a bien :  $\underline{f} \leq \hat{f}$ .

b) Soit  $h$  une fonction de  $D$ , égale à  $f - g$ , où  $f$  et  $g$  appartiennent à  $\mathcal{E}$ .

On a :

$$\hat{h} = \hat{f} - \hat{g} = \underline{f} - \underline{g} \geq (\underline{f - g}) = \underline{h}.$$

Et de même on a :  $\hat{h} \leq \bar{h}$ .

THÉORÈME II. — Pour tout  $x$  de  $K$ , le support de la mesure  $\mu_x$  est contenu dans  $\bar{A}$ .

En effet soit une fonction  $f$  de  $\mathcal{C}^+$ , nulle sur  $A$  ; pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe dans  $D$  une fonction  $h$  différant de  $f$  d'au plus  $\varepsilon$ .

La fonction  $h$  étant majorée sur  $A$  par  $\varepsilon$ , la fonction  $\bar{h}$  est majorée par  $\varepsilon$ , il en est de même de la fonction  $\hat{h}$ .

Ainsi pour tout  $x$  de  $K$ , on a :

$$0 \leq \mu_x(f) \leq \mu_x(h) + \varepsilon \leq 2\varepsilon,$$

d'où :

$$\mu_x(f) = 0.$$

Remarque. — Le compact  $\bar{A}$  est la frontière de Silov de  $K$  relativement à  $\Gamma$ .

Pour toute mesure de Radon  $\mu$ , notons  $\mu V_\lambda$  la mesure définie par :

$$\langle \mu, V_\lambda f \rangle = \langle \mu V_\lambda, f \rangle, \quad (f \in \mathcal{C}).$$

COROLLAIRE I. — Pour tous  $x$  dans  $K$  et  $\lambda > 0$ , la mesure  $\varepsilon_x V_\lambda$  a son support contenu dans le compact  $\bar{A}$ .

Prenons une fonction  $f$  de  $\mathcal{C}^+$ , nulle sur l'ensemble  $A$  ; on a :  $\hat{f} = 0$ .

En vertu de l'équation résolvante, et en posant  $\mu = \varepsilon_x V_\lambda$ , on a :

$$V_\lambda f(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} k V_k V_\lambda f(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_K k V_k f(y) d\mu(y).$$

Invoquons le théorème de Lebesgue :

$$V_\lambda f(x) = \int_K \hat{f}(y) d\mu(y) = 0.$$

**COROLLAIRE II.** — *Le noyau de l'opérateur linéaire  $V_\lambda$  est identique à l'idéal des fonctions continues nulles sur le compact  $\bar{A}$ .*

Nous connaissons déjà l'un des deux résultats à démontrer.

Réciproquement supposons que  $V_\lambda f$  soit nulle sur  $K$ .

Alors pour tout  $\mu$ , la fonction  $V_\mu f$  est nulle; la fonction  $f$  étant égale à  $\hat{f}$  sur  $A$ , est bien nulle sur le compact  $\bar{A}$ .

**COROLLAIRE III.** — *Si la fonction  $V_\lambda f$  a un maximum strictement positif, elle atteint ce maximum en au moins un point de  $\bar{A}$  où la fonction  $f$  est positive.*

Soient  $C$  le compact où  $V_\lambda f$  atteint son maximum, et  $D$  le compact où  $f$  est positive. Supposons que les deux compacts  $C \cap D$  et  $\bar{A}$  soient disjoints.

Il existe une fonction  $g$  continue, positive, nulle sur l'ensemble  $\bar{A}$ , et majorant la fonction  $\sup(1, 2f)$  sur le compact  $C \cap D$ .

La fonction  $V_\lambda(f - g)$ , égale à  $V_\lambda f$ , atteint son maximum seulement sur  $C$ .

Hors du compact  $D$ , la fonction  $f - g$  est strictement négative.

Sur le compact  $C \cap D$  on a l'inégalité :

$$f(x) - g(x) \leq \inf(-f(x), f(x) - 1) < 0.$$

Ainsi le principe du maximum positif faible, vérifié par le noyau  $V_\lambda$ , est contredit par la fonction  $f - g$ ; donc  $C \cap D$  rencontre  $\bar{A}$ .

#### 4. Mesures maximales.

Prenons les notations de Choquet, Meyer et Mokobodzki (voir [6], [10], [27], [29]).

**DÉFINITION.** — *Soit  $\mu$  et  $\nu$  deux mesures positives sur  $K$ ; par définition on dira :  $\mu \prec \nu$ , si pour toute fonction  $f$  de  $\Gamma$  on a l'inégalité :  $\mu(f) \geq \nu(f)$ .*

On vérifie aisément qu'il s'agit là d'une relation d'ordre. Cette relation entraîne, pour toute  $f$  de  $H$ , l'égalité :

$$\mu(f) = \nu(f).$$

Ainsi pour toute fonction  $f$  de  $\mathcal{C}$ , on a :  $\mu(\hat{f}) = \nu(\hat{f})$ .

LEMME I. — Soit  $\mu$  une mesure positive sur  $K$ ; les deux conditions suivantes sont équivalentes :

- a) la mesure  $\mu$  est maximale pour l'ordre  $\succ$  ;  
 b) pour toute fonction  $f$  de  $\mathcal{C}$  on a :  $\mu(f) = \mu(\hat{f})$ .

Démontrons : a)  $\implies$  b) ; posons :  $\nu(f) = \mu(\hat{f})$ , ( $f \in \mathcal{C}$ ) ; ainsi  $\nu$  est une mesure positive sur  $K$  ; si l'on choisit  $f$  dans  $\Gamma$ , on a :

$$\nu(f) = \mu(\hat{f}) \leq \mu(f).$$

Et  $\nu$ , qui majore  $\mu$  pour l'ordre  $\succ$ , lui est identique.

Démontrons b)  $\implies$  a) ; soit  $\nu$  une mesure majorant  $\mu$  pour l'ordre  $\succ$ . Prenons une fonction  $f$  dans le cône  $\Gamma$  ; on a :

$$\nu(\hat{f}) \leq \nu(f) \leq \mu(f) = \mu(\hat{f}) ;$$

or on connaît l'égalité :

$$\mu(\hat{f}) = \nu(\hat{f}) ;$$

on en déduit :  $\mu(f) = \nu(f)$ . Cette égalité se prolonge à l'espace  $\mathcal{C}$  par densité. Ainsi  $\mu$  est maximale.

LEMME II. — Toute mesure maximale est portée par les ensembles  $A_f = \{x \in X; f(x) = \hat{f}(x)\}$  et réciproquement, ( $f \in \mathcal{C}$ ).

En effet le résultat est évident si la fonction  $f$  appartient à  $\Gamma$  ; si  $f$  est la différence de deux fonctions  $g$  et  $h$  de  $\Gamma$ , on a l'inclusion :  $A_f \supset A_g \cap A_h$  ; et de même, si  $f$  est la limite uniforme d'une suite de fonctions  $f_n$  appartenant à  $\Gamma - \Gamma$ , on a :  $A_f \supset \bigcap_n A_{f_n}$ .

La réciproque est immédiate.

LEMME III. — Toute mesure positive  $\mu$  est majorée par une mesure maximale unique.

Soit  $\nu$  une mesure maximale majorant  $\mu$  ; on a :

$$\nu(f) = \nu(\hat{f}) = \mu(\hat{f}), \quad (f \in \mathcal{C}).$$

Cette égalité détermine complètement la mesure  $\nu$ .

En particulier l'unique mesure maximale majorant  $\epsilon_x$  est la mesure  $\mu_x$ .

Pour  $\mu \in M_x$  et  $f \in \mathcal{C}$ , on a :  $\mu(\hat{f}) = \hat{f}(x)$ , et pour  $f \in \Gamma$  :  $\mu(f) \geq \mu_x(f)$ .

Ainsi on a la relation :  $\mu_x \succ \mu$ .

THÉORÈME III. — *Le dual de l'espace vectoriel H est réticulé.*

En effet, soit  $p$  une forme linéaire positive sur H; pour toute mesure  $\mu$  positive, prolongeant  $p$ , on a :

$$\mu(\hat{f}) = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} p(\lambda V_\lambda f), \quad (f \in \mathcal{C}).$$

Cette égalité détermine complètement une seule mesure maximale associée à la forme  $p$ . Or le cône des mesures maximales est identique au cône des mesures positives portées par les ensembles  $A_\lambda$ , (lemme II). C'est donc un ensemble réticulé.

### 5. Cas particulier : l'ensemble A est fermé.

THÉORÈME IV. — *Les trois conditions sont équivalentes :*

A) *Pour toute fonction  $f$  de  $\mathcal{C}$ , la fonction  $\lambda V_\lambda f$  tend vers  $\hat{f}$ , quand  $\lambda$  tend vers l'infini, uniformément sur K;*

B) *Pour toute fonction  $f$  de  $\mathcal{C}$ , la fonction  $\hat{f}$  est continue sur K.*

C) *L'ensemble A est fermé dans K.*

Les implications A)  $\implies$  B)  $\implies$  C) sont aisées.

Démontrons C)  $\implies$  A), et pour cela considérons seulement le cas des fonctions  $f$  de  $\mathcal{E}$ , (car  $D = \mathcal{E} - \mathcal{E}$  est partout dense dans  $\mathcal{C}$ ).

Si  $f$  appartient à  $\mathcal{E}_\lambda(k - \lambda) V_k f$  tend vers  $\hat{f}$  en croissant; sur A, où  $f$  coïncide avec  $\hat{f}$ , la convergence est uniforme, en vertu du lemme de Dini. Pour tout  $x$  hors de A, on a :

$$(k - \lambda) V_k f(x) = \int_A (k - \lambda) V_k f(y) d\mu_x(y);$$

or la masse totale de  $\mu_x$  vaut 1 quel que soit  $x$ ; ainsi la convergence de  $(k - \lambda) V_k f$  vers  $\hat{f}$  est uniforme sur K.

COROLLAIRE I. — *L'espace de Banach H est isomorphe à l'espace des fonctions continues sur le compact A.*

Soit  $\varphi$  une fonction continue sur A; quelle que soit la fonction  $\Phi$  continue sur K et prolongeant  $\varphi$ , on a :

$$\hat{\Phi}(x) = \int_A \varphi(y) d\mu_x(y).$$

Ainsi,  $\hat{\Phi}$  appartient à H.

Réciproquement, la restriction de  $\hat{\Phi}$  à A est égale à  $\varphi$ .

COROLLAIRE II. — *Tout opérateur  $V_\lambda$  induit sur  $A$  un noyau de Hunt.*

En effet, la restriction de  $V_\lambda$  à  $A$  vérifie le principe complet du maximum (voir § 3, corollaire III, et chapitre 1).

De plus, l'image de  $\mathcal{C}(A)$  par  $V_\lambda$  est dense dans  $\mathcal{C}(A)$ , isomorphe à  $H$ .

### 6. Étude d'un exemple.

Soit  $X$  l'espace topologique somme des trois demi-axes :

$$D_1 = ]-\infty, a]; \quad D_2 = ]-\infty, b]; \quad D_3 = [c, +\infty[ ,$$

où les abscisses de  $a$ ,  $b$  et  $c$ , sont nulles.

Soit  $K$  le compactifié d'Alexandroff de  $X$ ,  $\omega$  le point à l'infini. Pour toute  $f$  continue sur  $K$ , soit  $f_i$  la restriction de  $f$  à  $D_i$ .

Si  $f(\omega)$  est nul, on pose :

$$V_\lambda f(x) = \begin{cases} e^{-\lambda x} \int_{-\infty}^x e^{\lambda u} f_1(u) du, & (x \in D_1); \\ e^{-\lambda x} \int_{-\infty}^x e^{\lambda u} f_2(u) du, & (x \in D_2); \\ e^{-\lambda x} \int_{-\infty}^0 e^{\lambda u} \left( \frac{f_1(u) + f_2(u)}{2} \right) du + e^{-\lambda x} \int_0^x e^{\lambda u} f_3(u) du, & (x \in D_3). \end{cases}$$

Enfin, si  $f(\omega)$  n'est pas nul, on pose :

$$V_\lambda f = V_\lambda(f - f(\omega)) + \frac{f(\omega)}{\lambda}.$$

Il s'en suit, pour tout  $x$  différent de  $c$  :  $\hat{f}(x) = f(x)$ ; et

$$\hat{f}(c) = \frac{f(a) + f(b)}{2}, \quad \mu_c = \frac{\varepsilon_a + \varepsilon_b}{2}.$$

Ainsi, la fonction  $f$  n'est pas toujours continue sur  $K$ , et l'ensemble  $A$  est dans ce cas l'ouvert  $K - \{c\}$ .

## CHAPITRE V

### NOYAUX ET SEMI-GROUPES

Dans ce chapitre, nous allons établir certaines conditions suffisantes pour qu'un noyau soit l'intégrale d'un semi-groupe.

#### 1. Le théorème de Hille-Yosida.

**DÉFINITIONS.** — Soit  $E$  un espace de Banach réel; on appelle semi-groupe défini sur  $E$ , toute famille d'opérateurs linéaires continus  $K_t$ , de  $E$  dans lui-même, définis pour  $t \geq 0$ , et vérifiant l'égalité :

$$K_t K_{t'} = K_{t+t'}, \quad (t \text{ et } t' \geq 0).$$

L'opérateur  $K_0$  est idempotent, et parfois égal à l'identité.

On dira que le semi-groupe  $(K_t)$  est fortement continu si, pour tout  $x$  de  $E$ , l'application :  $t \rightarrow K_t x$ , de  $\mathbf{R}_+$  dans  $E$ , est continue.

On dira que le semi-groupe  $(K_t)$  est sous-markovien si, pour tout  $t \geq 0$ , on a l'inégalité :  $\|K_t\| \leq 1$ .

Rappelons le théorème de Hille-Yosida (voir [19]).

**THÉORÈME.** — Soit  $(V_\lambda)_{\lambda > 0}$ , une famille résolvante d'opérateurs de  $E$ , vérifiant la condition suivante :

$$\text{Pour tout entier } n > 0, \text{ on a : } \|V_\lambda^n\| \leq \frac{\alpha}{\lambda^n}.$$

Alors il existe un semi-groupe fortement continu d'opérateurs  $K_t$ , définis sur l'espace  $\overline{V(E)}$ , et tels que l'on ait :

- a)  $V_\lambda x = \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} K_t x dt, \quad (\lambda > 0, x \in \overline{V(E)}),$
- b)  $\|K_t\| \leq \alpha,$
- c)  $K_0 = I.$

On a noté  $V(E)$  l'image de  $E$  par un opérateur  $V_\lambda$  quelconque.

Esquissons une démonstration rapide du théorème :

On vérifie les résultats suivants, pour tout  $x$  appartenant à  $\overline{V(E)}$  :

$$\lim_{k \rightarrow \infty} kV_k x = x; \quad \lim_{k \rightarrow \infty} B_k V_\lambda x = \lambda V_\lambda x - x,$$

(en posant  $B_k = k(kV_k - I)$ ); pour  $k$  fixé, les opérateurs  $\text{Exp}(tB_k)$  forment un semi-groupe fortement continu, et on a :  $\|\text{Exp}(tB_k)\| \leq \alpha$ ; enfin, quand  $k$  tend vers l'infini,  $\text{Exp}(tB_k)x$  tend vers un élément de  $\overline{V(E)}$ , noté  $K_t x$ .

Pour vérifier la formule intégrale, posons

$$S_{\lambda,k} x = \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} \text{Exp}(tB_k) x dt,$$

on a :

$$\begin{aligned} V_\lambda x &= S_{\lambda,k}(\lambda I - B_k)V_\lambda x = \lambda S_{\lambda,k} V_\lambda x - S_{\lambda,k}[k(\lambda V_\lambda - I)]V_k x \\ &= S_{\lambda,k} x + (\lambda S_{\lambda,k} V_\lambda - S_{\lambda,k})(x - kV_k x). \end{aligned}$$

Ainsi on obtient :

$$\lim_{k \rightarrow \infty} S_{\lambda,k} x = V_\lambda x = \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} K_t x dt.$$

## 2. Principe complet du maximum et semi-groupes sous-markoviens.

Soit  $V$  un noyau continu vérifiant le principe complet du maximum sur un espace  $X$  localement compact <sup>(5)</sup>.

Désignons par  $(V_\lambda)_{\lambda > 0}$  la famille résolvente sous-markovienne associée à  $V$ . Nous ferons dans ce paragraphe l'hypothèse suivante :

(H) *L'ensemble des fonctions surmédianes relativement à  $(V_\lambda)$ , sépare les points de  $K$ .*

Cette hypothèse signifie que cet ensemble sépare les points de  $X$ , et que, pour tout  $x$  de  $X$ , il existe une fonction surmédiane non nulle en  $x$ ; c'est le cas, en particulier, si l'espace vectoriel  $V(\mathcal{C}_X)$  sépare les points de  $K$ .

Soit  $(W_\lambda)$  la famille résolvente, définie sur  $\mathcal{C}$ , qui prolonge  $(V_\lambda)$ ; le cône des fonctions surmédianes relativement à  $(W_\lambda)$  sépare les points de  $K$ , et contient les constantes. On peut donc appliquer la théorie du chapitre iv.

<sup>(5)</sup> Si le noyau  $V$  n'est pas borné, on supposera  $X$  dénombrable à l'infini.

Désignons par  $\mathfrak{B}$  l'espace des fonctions boréliennes bornées sur  $K$  <sup>(6)</sup>.

THÉORÈME I. — Soit  $V$  un noyau continu sur  $X$ , vérifiant le principe complet du maximum et l'hypothèse (H). Il existe alors un semi-groupe d'opérateurs  $P_t$ , définis sur  $\mathfrak{B}$  pour  $t \geq 0$ , sous-markoviens, positifs tels que l'on ait :

$$\begin{aligned} P_0 f(x) &= \hat{f}(x) & (x \in X, f \in \mathcal{C}_K), \\ Vf(x) &= \int_0^{+\infty} P_t f(x) dt & (x \in X, f \in \mathcal{C}_K), \end{aligned}$$

de plus, l'application :  $t \rightarrow P_t f(x)$  est continue à droite et pourvue de limite à gauche ( $f \in \mathcal{C}_K$ ).

L'essentiel de ce théorème a été démontré par Ray, qui a établi la formule de représentation pour tout opérateur  $W_\lambda (\lambda > 0)$ , sous l'hypothèse précisée au chapitre IV.

Résumons en quelques points la démonstration du théorème; d'après le théorème précédent, il existe un semi-groupe d'opérateurs  $K_t$ , définis sur l'espace  $\overline{W(\mathcal{C})}$ . Soit  $t \geq 0$ , et  $x \in K$ , la forme linéaire :  $h \rightarrow K_t h(x)$  peut être prolongée à  $\mathcal{C}$ , et définit sur  $K$  une mesure positive  $\mu$ . Le théorème de Lebesgue prouve alors l'existence de  $\lim_{k \rightarrow \infty} K_t W_k f(x) = \mu(\hat{f})$ , pour toute  $f$  de  $\mathcal{C}$ . Notons  $P_t f(x)$  cette limite; la forme linéaire ainsi définie sur  $\mathcal{C}$  se prolonge à  $\mathfrak{B}$ , de façon unique.

Le même théorème de Lebesgue permet de démontrer, pour  $f$  continue, l'égalité :  $P_{t+t'} f = P_t P_{t'} f$ ; par passage à la limite cette égalité a lieu pour toute fonction de  $\mathfrak{B}$ .

Démontrons la formule intégrale; soit  $f \in \mathcal{C}$ , et  $x \in K$ .

On a :

$$\begin{aligned} W_\lambda f(x) &= \lim_{k \rightarrow \infty} W_\lambda W_k f(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} K_t W_k f(x) dt \\ &= \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} P_t f(x) dt. \end{aligned}$$

Si maintenant  $f$  appartient à  $\mathcal{C}_K^+$ , on sait d'après le chapitre II, que  $V_\lambda f$  tend vers  $Vf$ , quand  $\lambda$  tend vers 0; on a donc, par convergence monotone, l'égalité :

$$Vf(x) = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} P_t f(x) dt = \int_0^{+\infty} P_t f(x) dt.$$

(6) Si  $K$  n'est pas métrisable,  $\mathfrak{B}$  désigne le plus petit espace vectoriel de fonctions bornées, contenant  $\mathcal{C}$ , et stable pour les passages à la limite simple.

Passons à la dernière assertion de l'énoncé; soit  $x \in X$  et  $f \in \mathcal{C}$ .

Prenons  $g$  dans  $\mathcal{C}^+$ , et soit  $f = W_\lambda W_\mu g$ ; on a :

$$e^{-\lambda t} K_t f(x) = e^{-\lambda t} K_t \int_0^\infty e^{-\lambda u} K_u W_\mu g(x) du = \int_t^\infty e^{-\lambda v} K_v W_\mu g(x) dv.$$

Cette fonction est continue et décroissante de  $t$ .

Par convergence uniforme il en est de même pour toute fonction  $f$  appartenant à  $W_\lambda(\mathcal{C}^+)$ .

Prenons maintenant  $f$  dans le cône  $\mathcal{E}_\lambda$ ; pour tout  $k > 0$ , on a :

$$kW_{k+\lambda}f = kW_\lambda(f - kW_{k+\lambda}f) \quad \text{et} \quad f - kW_{k+\lambda}f \geq 0.$$

La fonction  $e^{-\lambda t} K_t kW_{k+\lambda}f(x)$  est une fonction continue et décroissante de  $t$ . Elle tend en croissant (chapitre IV, § 2, lemme I) vers  $e^{-\lambda t} P_t f(x)$  lorsque  $k$  tend vers l'infini.

Ainsi,  $e^{-\lambda t} P_t f(x)$  est décroissante, et continue à droite.

La fonction  $P_t f(x)$  est continue à droite et pourvue de limite à gauche, lorsque  $f$  appartient à  $\mathcal{E}$ . Il en est de même pour toute fonction de  $D$ , et aussi pour toute fonction de  $\mathcal{C}$ , par convergence uniforme.

*Remarque.* — La famille résolvente  $(W_\lambda)$  étant donnée, il existe un *seul* semi-groupe  $(P_t)$  tel que l'on ait :

$$W_\lambda f(x) = \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} P_t f(x) dt, \quad (\lambda > 0, f \in \mathcal{C}, x \in K),$$

et que l'application :  $t \rightarrow P_t f(x)$ , soit continue à droite.

C'est un résultat d'unicité de la transformation de Laplace.

D'autre part, si le noyau  $V$  est borné, il existe une seule famille résolvente  $(V_\lambda)$  telle que l'on ait :  $V = V_0$  : le prolongement d'une telle famille à  $\mathcal{C}$  est unique.

Ainsi, le semi-groupe associé à  $V$  est unique, si  $V$  est borné.

### 3. Étude d'un cas particulier.

Précisons le théorème précédent dans la situation du chapitre IV, § 5.

**THÉORÈME II.** — *Soit  $V$  un noyau continu sur  $X$ , vérifiant le principe complet du maximum, l'hypothèse (H), et tel que, pour toute fonction  $f$  continue, la fonction  $\hat{f}$  soit continue; alors il existe un semi-groupe fortement continu d'opérateurs  $P_t$ ,*

définis sur  $\mathcal{C}$  pour  $t \geq 0$ , sous-markoviens, positifs, et un seul, tel que l'on ait :

$$Vf(x) = \int_0^{+\infty} P_t f(x) dt, \quad (f \in \mathcal{C}_K, x \in X).$$

*Démonstration.* — a) Existence; la fonction  $\hat{f}$  appartient à l'espace  $\overline{W(\mathcal{C})}$ , ainsi la formule :  $P_t f = K_t \hat{f}$ , définit sur  $\mathcal{C}$  un semi-groupe fortement continu.

b) Unicité: la méthode employée par Deny dans [14], convient. Soit  $(P_t)$  un tel semi-groupe,  $f$  une fonction de  $\mathcal{C}_K^+$ , et  $x \in X$ ; posons :

$$V_\lambda f(x) = \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} P_t f(x) dt;$$

la fonction  $V_\lambda f$  est à priori semi-continue inférieurement sur  $X$ ; il en est de même de la fonction :

$$\int_0^{+\infty} (1 - e^{-\lambda t}) P_t f(x) dt = Vf(x) - V_\lambda f(x).$$

Ces fonctions sont donc continues sur  $X$ .

D'autre part, le théorème de Fubini permet d'écrire :

$$Vf - V_\lambda f = \lambda V V_\lambda f.$$

Au chapitre II, on a prouvé l'unicité d'une telle famille  $(V_\lambda)$ ; comme plus haut, l'unicité du semi-groupe tient à la transformation de Laplace.

*Remarques.* — I. On peut démontrer ce théorème en appliquant le théorème de Hunt (voir [20]) au noyau  $V$  restreint au compact  $A$ .

II. Courrège et Priouret (voir [11]), utilisent le présent résultat dans le cas où l'on sait d'avance :  $f = \hat{f}$ .

III. Cette démonstration d'unicité est valable même si le noyau  $V$  n'est pas borné.

#### 4. Principe de domination et semi-groupes.

Soit  $K$  un espace compact,  $\mathcal{C}$  l'espace des fonctions continues sur  $K$ .

**THÉORÈME III.** — Soit  $V$  un noyau continu vérifiant le principe de domination, et tel que l'espace vectoriel  $V(\mathcal{C})$  soit

partout dense dans  $\mathcal{C}$ ; alors il existe un semi-groupe fortement continu d'opérateurs  $P_t$ , définis sur  $\mathcal{C}$  pour  $t \geq 0$ , positifs, et un seul tel que l'on ait :

$$Vf(x) = \int_0^{+\infty} P_t f(x) dt, \quad (f \in \mathcal{C}, x \in K) \quad \text{et} \quad P_0 = I.$$

*Démonstration.* — a) Existence; l'hypothèse de densité citée ci-dessus entraîne que le noyau  $V$  est strictement positif. Donc, en vertu du théorème I, chapitre II, il existe une famille résolvente  $(V_\lambda)$  telle que  $V = V_0$ ; d'autre part, on a déjà remarqué (chapitre II, fin du § 2) l'existence de deux constantes  $a$  et  $b$ , strictement positives et donnant lieu à l'inégalité :

$$\lambda V_\lambda a \leq V(1) \leq b.$$

On en déduit, par récurrence sur  $n$ :  $\lambda^n V_\lambda^n(a) \leq b$ .

Il reste donc à appliquer le théorème de Hille-Yosida, en prenant :

$$\alpha = \frac{b}{a}, \quad \text{et} \quad E = \overline{V(\mathcal{C})} = \mathcal{C}.$$

De la formule :

$$V_\lambda f(x) = \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} P_t f(x) dt, \quad (\lambda > 0, f \in \mathcal{C}, x \in K),$$

on déduit la formule de l'énoncé en faisant tendre  $\lambda$  vers 0.

b) Unicité; elle a été démontrée par Deny (voir [17], § 3) qui démontre également la réciproque du présent théorème.

### 5. Cas des espaces discrets.

Soit  $X$  un espace discret; soit  $(V_\lambda)_{\lambda > 0}$  une famille résolvente d'opérateurs positifs, définis sur  $\mathcal{C}_0$ .

On suppose de plus les deux conditions suivantes vérifiées

- 1) Pour tout entier  $n$ , on a :  $\lambda^n \|V_\lambda^n\| \leq \alpha$ ;
- 2) L'un au moins des opérateurs  $V_\lambda$  vérifie le principe de domination, pour tout couple de fonctions appartenant à  $\mathcal{C}_0^+$ .

LEMME. — Sous les deux conditions 1) et 2), il existe un semi-groupe fortement continu d'opérateurs  $P_t$ , positifs, définis sur  $\mathcal{C}_0$ ,

et un seul, tel que l'on ait :

$$V_\lambda f(x) = \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} P_t f(x) dt, \quad (\lambda > 0, f \in \mathcal{C}_0, x \in X),$$

et

$$\|P_t\| \leq \alpha^2.$$

*Démonstration.* — L'unicité du semi-groupe tient simplement à la transformation de Laplace; pour l'existence divisons le raisonnement en plusieurs étapes.

a) Notons  $V$  l'opérateur de la famille  $(V_\lambda)$  qui vérifie le principe de domination. On dira :  $xRy$  s'il existe un nombre  $k > 0$ , tel que pour toute fonction  $f$  de  $\mathcal{C}_0$ , on ait l'égalité :

$$Vf(y) = k Vf(x);$$

la relation  $R$  est une relation d'équivalence; on notera  $R(\omega)$  la classe d'équivalence des éléments de  $X$  où s'annulent toutes les fonctions  $Vf$ , et  $R(x)$  la classe d'équivalence de  $x$ .

On dit qu'une fonction  $g$  de  $\mathcal{C}_0$  est compatible avec la relation  $R$ , si  $g$  est nulle sur  $R(\omega)$ , et si la relation  $xRy$  entraîne  $g(y) = kg(x)$ .

L'ensemble des fonctions compatibles est un sous-espace vectoriel  $G$ , fermé, de  $\mathcal{C}_0$ , et contient  $V(\mathcal{C}_0)$ ; soit  $\mathcal{E}_1$  le cône des fonctions surmédianes compatibles; l'espace vectoriel

$$D_1 = \mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_1,$$

est réticulé et contenu dans  $G$ ; d'autre part, il contient  $V(\mathcal{C}_0)$ .

Soit  $h$  une fonction compatible; soit  $(x, y)$  un couple d'éléments de  $X$ ; dans tous les cas, il existe dans  $\mathcal{C}_0$  une fonction  $f$ , telle que l'on ait :

$$Vf(x) = h(x) \quad \text{et} \quad Vf(y) = h(y);$$

la fonction  $Vf$  appartenant à  $D_1$ , on en conclut que  $G$  est l'adhérence de  $D_1$ , d'après le théorème de Stone (voir [31]).

Étudions maintenant la suite de fonctions  $kV_k h$ , ( $h \in G$ ).

Si  $f$  appartient à  $\mathcal{E}_\lambda$ , on sait que, lorsque  $k$  tend vers l'infini,  $kV_{k+\lambda} f$  tend en croissant vers une limite  $\hat{f}$ ; la convergence a lieu uniformément sur  $X$  en vertu du théorème de Dini.

La même conclusion subsiste pour la suite  $kV_k f$ , en vertu de la formule :

$$kV_k f = kV_{k+\lambda} f + k\lambda V_k V_{k+\lambda} f.$$

Et cette conclusion s'étend à toute fonction de  $G$  (car :  $G = \overline{D}_1$  et  $k||V_k|| \leq \alpha$ ).

*Remarque.* — Si  $f$  appartient à  $\overline{V(C_0)}$ , alors on a :  $f = \hat{f}$ .

b) Pour toute fonction  $f$  appartenant à  $C_K^+$  nous allons construire une fonction  $h$  de  $G$  telle que l'on ait :

$$Vh = Vf.$$

Il suffira d'effectuer cette construction pour les fonctions  $f$  nulles hors d'une classe d'équivalence notée  $S$ , et différente de  $R(\omega)$ .

Il existe dans  $S$  un élément  $\xi$  où, pour toute fonction  $g$  de  $C_0^+$ , la fonction  $Vg$  restreinte à  $S$  atteint son maximum.

Ainsi le quotient :

$$k(y) = \frac{Vg(y)}{Vg(\xi)}, \quad (y \in S),$$

ne dépend pas du choix de  $g$  dans  $C_0^+$ , et est compris entre 0 et 1.

Soit  $\varphi_y$  la fonction caractéristique de  $\{y\}$ ; posons

$$\beta(y) = V\varphi_y(\xi).$$

On a la formule :

$$k = \sum_{y \in S} \varphi_y k(y).$$

La fonction  $k$  appartient à  $C_0^+$ ; on peut donc calculer :

$$Vk(\xi) = \sum_{y \in S} k(y) \beta(y).$$

Posons maintenant :  $h = \frac{Vf}{Vk(\xi)}$ , sur l'ensemble  $S$ , et  $h = 0$  ailleurs.

La fonction  $h$  est compatible; d'autre part on a :

$$Vh(\xi) = \sum_{y \in S} h(y) \beta(y) = h(\xi) \sum_{y \in S} k(y) \beta(y) = Vf(\xi).$$

Pour tout  $y$  de  $S$  on a :

$$Vh(y) = k(y) Vh(\xi) = k(y) Vf(\xi) = Vf(y).$$

Enfin le principe de domination entraîne partout  $Vh = Vf$ .

Pour tout  $k > 0$  on a donc :  $V_k f = V_k h$ ; ceci entraîne l'existence de  $\lim_{k \rightarrow \infty} k V_k f = \hat{f}$ , la convergence ayant lieu unifor-

mément sur  $X$ ; enfin on a :

$$\| \cdot \| \leq \alpha \|f\|.$$

c) Appliquons maintenant le théorème 1 de ce chapitre. On a :

$$V_\lambda f(x) = \int_0^\infty e^{-\lambda t} K_t f(x) dt, \quad (x \in X; f \in \overline{V(\mathcal{C}_0)}; \lambda > 0),$$

et

$$\|K_t\| \leq \alpha.$$

Prenons maintenant  $f$  dans  $\mathcal{C}_0$  :

$$V_\lambda k V_k f(x) = \int_0^\infty e^{-\lambda t} K_t k V_k f(x) dt.$$

Lorsque  $k$  tend vers l'infini, on obtient :

$$V_\lambda f(x) = \int_0^\infty e^{-\lambda t} K_t \hat{f}(x) dt,$$

d'où le résultat, en posant  $P_t f = K_t \hat{f}$ , car on a l'inégalité :

$$\|P_t f\| \leq \|K_t\| \|\hat{f}\| \leq \alpha^2 \|f\|.$$

**COROLLAIRE I.** — Soit  $X$  un espace fini,  $V$  un noyau strictement positif vérifiant le principe de domination; alors il existe un semi-groupe fortement continu, d'opérateurs positifs  $P_t$ , définis sur  $\mathcal{C}$ , et un seul, tel que l'on ait :

$$Vf(x) = \int_0^\infty P_t f(x) dt, \quad (x \in X, f \in \mathcal{C}).$$

En effet, la famille résolvente associée à un tel noyau vérifie la condition 2), et on voit comme au § 4 que la condition 1) est satisfaite.

**COROLLAIRE II.** — Soit  $X$  un espace discret,  $V$  un noyau continu <sup>(7)</sup>, vérifiant le principe complet du maximum; alors il existe un semi-groupe fortement continu d'opérateurs positifs sous-markoviens  $P_t$ , définis sur  $\mathcal{C}_0$ , et un seul tel que l'on ait :

$$Vf(x) = \int_0^\infty P_t f(x) dt, \quad (x \in X, f \in \mathcal{C}_K).$$

En effet d'après le chapitre II, la famille résolvente associée à  $V$  est sous-markovienne; on a donc :  $\alpha = 1$ .

(7) Si le noyau  $V$  n'est pas borné on devra supposer que  $X$  est dénombrable.

### 6. Étude d'un exemple.

Soit  $V$  le noyau défini au chapitre 1, § 2, II; le support de  $\mu$  est compact, supposons qu'il ne soit contenu dans aucun hyperplan de  $\mathbf{R}^n$ ; ainsi, l'espace des  $V$ -potentiels sépare les points de  $\mathbf{R}^n$ , et on peut appliquer le théorème I du présent chapitre. L'ensemble  $A$  associé à la résolvante du noyau  $V$  a pour adhérence le support de  $\mu$ ; c'est un ensemble finement fermé; P. A. Meyer propose la conjecture suivante :

L'ensemble  $A$  est-il le support fin de  $\mu$ ?

Dans ce chapitre, on a vu que l'existence de  $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \lambda V_\lambda f$ , permettrait de construire un semi-groupe; à la fin du chapitre suivant, on verra que cette méthode n'englobe pas toutes les possibilités de construction de semi-groupes.

## CHAPITRE VI

### FRONTIÈRE DE CHOQUET ET FAMILLES D'OPÉRATEURS

#### 1. Notations.

Dans tout ce chapitre,  $K$  désigne un espace compact *métrisable*.

L'ensemble  $I$  est filtré par un filtre  $\mathcal{F}$  ayant une base dénombrable.

Nous étudierons des familles d'opérateurs linéaires continus de  $\mathcal{C}$ , positifs, notés  $A_i$ , et tels que :

- i) Pour tous  $i$  et  $j$ , on ait :  $A_i A_j = A_j A_i$  ( $i, j \in I$ );
- ii) Pour toute  $f$  de  $\mathcal{C}$ , on ait :

$$\lim_{\mathcal{F}} A_i A_{i_0} f = A_{i_0} f,$$

La convergence étant uniforme sur  $K$ ;

- iii) Tout opérateur  $A_i$  laisse invariants les fonctions constantes sur  $K$ .

*Exemples.* — I. Soit  $(V_i)$  une famille résolvante sous-markovienne.

Posons  $I = \mathbf{R}_+$ ,  $A_i = iV_i$ , et prenons pour  $\mathcal{F}$  le filtre engendré par les demi-droites  $[n, +\infty[$ .

II. Soit  $(P_i)$  un semi-groupe fortement continu d'opérateurs markoviens définis sur  $\mathcal{C}$  pour  $i > 0$ ; posons :  $I = \mathbf{R}_+^*$  et prenons pour  $\mathcal{F}$  le filtre des voisinages de 0 dans  $\mathbf{R}_+^*$ . Les propriétés i), ii), iii) sont vérifiées.

Dans ce chapitre, nous tenterons de répondre à la question suivante : Pour  $x$  dans  $K$ , et  $f$  dans  $\mathcal{C}$ ,  $A_i f(x)$  a-t-il une limite suivant  $\mathcal{F}$ ?

Notons  $H$  le sous-espace vectoriel fermé de  $\mathcal{C}$ , engendré par  $A_i(\mathcal{C})$  lorsque  $i$  parcourt  $I$ .

PROPOSITION. — *Pour que l'on ait, pour tout  $x$  de  $K$ , l'égalité :*

$$\lim_{\mathcal{F}} A_i f(x) = f(x),$$

*il faut et il suffit que  $f$  appartienne à  $H$ ; et alors la convergence est uniforme sur  $K$ .*

Si l'on remarque que, le filtre  $\mathcal{F}$  étant à base dénombrable, on peut appliquer le théorème de Lebesgue, la démonstration est identique à celle de la proposition analogue au début du chapitre IV.

## 2. Relation d'équivalence et espace quotient associés à $H$ .

Nous dirons :  $xRy$ , si pour toute fonction  $h$  de  $H$ , on a :

$$h(x) = h(y);$$

la relation  $R$  est une relation d'équivalence; deux éléments  $x$  et  $y$  de  $K$ , non équivalents, peuvent être inclus dans deux ouverts saturés et disjoints; ainsi l'espace quotient  $K/R$  est séparé donc compact. De plus cet espace est métrisable (Bourbaki, Topologie chapitre IX, § 2).

Dans la suite,  $R(x)$  désigne la classe d'équivalence de  $x$ ; c'est un ensemble fermé dans  $K$ . Notons  $\mathcal{C}'$  l'espace vectoriel des fonctions continues sur  $K' = K/R$ ; notons  $H'$  le sous-espace de  $\mathcal{C}'$  isomorphe à  $H$ ,  $\mathcal{C}_1$  le sous-espace de  $\mathcal{C}$  isomorphe à  $\mathcal{C}'$ ; soit  $\varphi$  la surjection de  $K$  sur  $K'$ .

Pour tout  $x$  de  $K$ , soit  $M_x$  l'ensemble des mesures positives  $\mu$  vérifiant pour toute fonction  $h$  de  $H$ , l'égalité :

$$\mu(h) = h(x).$$

Pour tout  $x'$  de  $K'$ , on définit de même  $M_{x'}$ .

Toute mesure de  $M_x$  (et de  $M_{x'}$ ) est de masse égale à 1. La relation :  $xRy$ , entraîne :  $M_x = M_y$ .

Soit  $F$  l'ensemble des éléments  $x$  de  $K$ , tels que  $M_x$  coïncide avec l'ensemble des mesures positives, de masse 1, portées par  $R(x)$ .

De même, soit  $F'$  l'ensemble des éléments  $x'$  de  $K'$ , tels que  $M_{x'}$  soit réduit à la seule mesure  $\varepsilon_{x'}$ .

Rappelons que  $F'$  est la frontière de Choquet de  $K'$  relativement à  $H'$ . Rappelons aussi le théorème de représentation

intégrale de Choquet, qui s'applique ici puisque  $H'$  sépare les points de  $K'$ , et dont les conclusions sont :

- L'ensemble  $F'$  n'est pas vide;
- Pour tout  $x'$  de  $K'$  il existe une mesure  $\nu$  de  $M_{x'}$  portée par  $F'$ ;
- L'ensemble  $F'$  est un  $G_\delta$ .

Nous allons traduire ces résultats sur l'espace  $K$ .

### 3. Applications du théorème de Choquet.

**THÉORÈME I.** — *L'ensemble  $F$  est identique à  $\varphi^{-1}(F')$ ; c'est un  $G_\delta$  non vide.*

a) Démontrons l'inclusion :  $F \subset \varphi^{-1}(F')$ .

Soit  $x \in F$ ,  $x' = \varphi(x)$  et  $\nu$  une mesure de  $M_{x'}$ . En vertu du théorème de Hahn-Banach, il existe une mesure  $\mu$ , que l'on peut supposer positive, telle que l'on ait :  $\nu = \varphi(\mu)$ .

Soit  $h'$  dans  $H'$  et  $h = h' \circ \varphi$ ; nous avons les égalités :

$$\mu(h) = \nu(h') = h'(x') = h(x),$$

donc  $\mu$  appartient à  $M_x$ .

Or  $x$  appartient à  $F$ , la mesure  $\mu$  a donc son support contenu dans  $R(x)$  et la mesure  $\nu$  a pour support  $\{x'\}$  (voir Bourbaki, Intégration chap. v, § 6); ainsi  $x'$  appartient à  $F'$ .

b) Démontrons l'inclusion inverse :  $F \supset \varphi^{-1}(F')$ .

Soit  $x$  dans  $K$ , tel que  $\varphi(x) = x'$  appartienne à  $F'$ .

Si  $\mu$  appartient à  $M_{x'}$ ,  $\varphi(\mu)$  appartient à  $M_x$ ; donc  $\varphi(\mu)$  est égale à  $\varepsilon_x$ .

Si  $S$  est le support de  $\mu$ ,  $\varphi(S)$  est le support de  $\varphi(\mu)$ , donc on a :

$$\varphi(S) = \{x'\}.$$

Le support  $S$  de  $\mu$  est contenu dans  $R(x)$  et  $x$  appartient à  $F$ .

La seconde partie de l'énoncé découle aussitôt du théorème de Choquet.

**THÉORÈME II.** — *Pour tout  $x$  de  $K$  il existe une mesure  $\mu$  de  $M_x$  portée par  $F$ .*

En effet, soit :  $x' = \varphi(x)$ , et  $\nu$  une mesure de  $M_{x'}$  portée par  $F'$ . Il existe une mesure  $\mu$  dans  $M_x$  telle que l'on ait :  $\nu = \varphi(\mu)$ .

L'ensemble  $F$  étant un borélien saturé de  $K$ , on peut écrire :

$$\mu(F) = \nu(F') = 1.$$

THÉORÈME III. — *Pour tout  $x$  dans  $K$  et toute  $f$  dans  $\mathcal{C}_1$ ,  $A_i f(x)$  tend suivant  $\mathcal{F}$  vers une limite  $\hat{f}(x)$ , égale à  $f(x)$  lorsque  $x$  appartient à  $F$ .*

Soit  $x$  dans  $F$ ,  $\varepsilon_x A_i$  la mesure positive sur  $K$  définie par :

$$\varepsilon_x A_i(f) = A_i f(x).$$

Posons

$$\nu_i^x = \varphi(\varepsilon_x A_i) \quad \text{et} \quad x' = \varphi(x).$$

Lorsque  $J$  parcourt  $\mathcal{F}$ , les ensembles  $\{\nu_i^x\}_{i \in J}$  forment une base de filtres  $\mathcal{B}_{x'}$ , sur l'espace  $\mathcal{M}_1^+(K')$  des mesures positives sur  $K'$ , de masse 1.

Par compacité vague de  $\mathcal{M}_1^+(K')$ , il existe des mesures vaguement adhérentes à  $\mathcal{B}_{x'}$ ; soit  $\nu$  une telle mesure.

Pour toute  $h'$  de  $H'$ ,  $\nu_i^x(h') = A_i(h' \circ \varphi)(x)$  tend vers  $h'(x')$  suivant  $\mathcal{F}$  (par application de la proposition préliminaire).

Il s'en suit nécessairement :

$$\nu(h') = h'(x'), \quad \nu \in M_{x'}, \quad \text{et} \quad \nu = \varepsilon_{x'}.$$

La base de filtre  $\mathcal{B}_{x'}$ , n'ayant qu'une seule valeur d'adhérence, converge vers  $\varepsilon_{x'}$ .

Ainsi, pour toute  $f$  de  $\mathcal{C}_1$ ,  $A_i f(x)$  tend vers  $f(x)$  suivant  $\mathcal{F}$ .

Prenons maintenant  $x$  hors de  $F$  et soit  $\mu$  dans  $M_x$  portée par  $F$ .

Soit  $f$  dans  $\mathcal{C}_1$ ; on a :

$$A_i f(x) = \int_F A_i f(y) d\mu(y).$$

Le filtre  $\mathcal{F}$  étant à base dénombrable, on peut appliquer le théorème de Lebesgue :

Suivant  $\mathcal{F}$ ,  $A_i f(x)$  tend vers une limite  $\hat{f}(x)$  égale à :

$$\int_F \lim_{\mathcal{F}} A_i f(y) d\mu(y) = \int_F f(y) d\mu(y).$$

COROLLAIRE I. — *Pour tout  $x'$  de  $K'$ , il existe dans  $M_{x'}$  une seule mesure portée par  $F'$ .*

Soit  $\nu$  une telle mesure, et  $f'$  une fonction de  $\mathcal{C}'$ .

Posons  $f = f' \circ \varphi$ ; la fonction  $A_i f$  appartient à  $H$ , il lui correspond dans  $H'$  une fonction  $f'_i$ . Suivant  $\mathcal{F}$ ,  $A_i f$  tend simplement vers  $\hat{f}$ , égale à  $f$  sur  $F$ . Donc on a :

$$\nu(f') = \int_{F'} f'(y') d\nu(y') = \int_{F'} \lim_{\mathcal{F}} f'_i(y') d\nu(y') = \lim_{\mathcal{F}} f'_i(x'),$$

d'où :

$$\nu(f') = \widehat{f' \circ \varphi}(x), \quad (x \in \varphi^{-1}(x')).$$

Cette égalité détermine entièrement  $\nu$ , qui sera notée  $\nu_{x'}$ .

On peut en déduire <sup>(8)</sup> que le dual de  $H'$  (donc celui de  $H$ ) est réticulé.

**COROLLAIRE II.** — *Pour que  $x$  appartienne à  $F$  il faut et il suffit que, pour toute fonction  $f$  de  $\mathcal{C}_1$ , on ait :  $f(x) = \hat{f}(x)$ .*

La condition a été reconnue comme nécessaire.

Réciproquement soit  $f'$  dans  $\mathcal{C}'$ ; on a :

$$\nu_{x'}(f') = \widehat{f' \circ \varphi}(x) = f' \circ \varphi(x) = f'(x')$$

donc :  $\nu_{x'} = \varepsilon_{x'}$ ; cette mesure étant portée par  $F'$ ,  $x'$  appartient à  $F'$  et  $x$  appartient à  $F$ .

**THÉORÈME IV.** — *Pour tout  $i$  dans  $I$ , la mesure  $\varepsilon_x A_i$  est portée par  $F$ .*

Soit  $\Gamma_1$  le sous-ensemble de  $\mathcal{C}_1$  défini par la condition  $\hat{f} \leq f$ .

C'est un cône convexe, semi-réticulé inférieurement, contenant  $H$ .

D'après le théorème de Stone,  $\Gamma_1$  engendre un espace vectoriel  $D_1$  partout dense dans  $\mathcal{C}_1$ . L'espace  $K'$  étant métrisable, il existe dans  $\mathcal{C}'$ , donc dans  $\mathcal{C}_1$ , un ensemble dénombrable dense.

Nous pouvons supposer que cet ensemble est contenu dans  $D_1$ ; notons le  $(h_n)_{n \geq 0}$ . On a :  $h_n = f_n - g_n$ , où  $f_n$  et  $g_n$  appartiennent à  $\Gamma_1$ . Pour toute fonction  $f$  de  $\mathcal{C}_1$  on peut écrire :

$$\int_K \hat{f}(y) d\varepsilon_x A_i(y) = \lim_{\mathcal{F}} \int_K A_i f(y) d\varepsilon_x A_i(y) = \lim_{\mathcal{F}} A_i A_i f(x) = A_i f(x),$$

et

$$A_i f(x) = \int_K f(y) d\varepsilon_x A_i(y).$$

<sup>(8)</sup> Voir Choquet-Meyer [10].

Pour tout  $n \geq 0$ , on peut donc écrire :

$$\int_K |f_n(y) - \hat{f}_n(y)| d\varepsilon_x A_i(y) = \int_K |g_n(y) - \hat{g}_n(y)| d\varepsilon_x A_i(y) = 0.$$

L'ensemble  $G_n$  où la fonction  $f_n$  diffère de  $\hat{f}_n$  est négligeable pour  $\varepsilon_x A_i$ .

Il en est de même de  $G'_n$ , où  $g_n$  diffère de  $\hat{g}_n$ ; si bien que l'on a :

$$\varepsilon_x A_i \left[ \bigcup_n (G_n \cup G'_n) \right] = 0.$$

Pour tout  $\xi$  n'appartenant pas à cette réunion, on a :

$$f_n(\xi) = \hat{f}_n(\xi) \quad \text{et} \quad g_n(\xi) = \hat{g}_n(\xi),$$

d'où, par convergence uniforme :

$$f(\xi) = \hat{f}(\xi),$$

pour toute  $f$  de  $\mathcal{C}_1$ ; l'élément  $\xi$  appartient à  $F$  et l'on en déduit :  $\varepsilon_x A_i(F) = 1$ .

**COROLLAIRE.** — *Le noyau de l'opérateur  $A_i$  contient l'idéal des fonctions nulles sur  $F$ .*

#### 4. Critère de continuité de la fonction limite.

Démontrons un théorème analogue au théorème IV (chap. IV).

**THÉORÈME V.** — *Les conditions suivantes sont équivalentes :*

A) *Pour toute fonction  $f$  de  $\mathcal{C}_1$ ,  $A_i f$  tend vers  $\hat{f}$  suivant  $\mathcal{F}$ , uniformément sur  $K$ .*

B) *Pour toute fonction  $f$  de  $\mathcal{C}_1$ ,  $\hat{f}$  est continue sur  $K$ .*

C) *L'ensemble  $F$  est fermé dans  $K$ .*

Les implications  $A \Rightarrow B \Rightarrow C$  sont aisées compte tenu du corollaire II, théorème III, § 3 de ce chapitre.

*Démontrons :  $C \Rightarrow B$ ; pour toute fonction  $f$  de  $\mathcal{C}$  posons :*

$$\bar{f}(x) = \inf_{\substack{h_{\mathcal{F}} \geq f_{\mathcal{F}} \\ h \in \mathbf{H}}} h(x), \quad \underline{f}(x) = \sup_{\substack{h_{\mathcal{F}} \leq f_{\mathcal{F}} \\ h \in \mathbf{H}}} h(x)$$

où  $f_{\mathcal{F}}$  et  $h_{\mathcal{F}}$  désignent les restrictions de  $f$  et de  $h$  à l'ensemble  $F$ .

D'après le théorème de représentation intégrale de Choquet, si  $h$  est positive sur  $F$ ,  $h$  est positive partout sur  $K$ .

Donc pour tout  $x$  de  $K$ , on a :  $\underline{f}(x) \leq \overline{f}(x)$ , et pour toute  $h$  de  $H$  :  $h = \overline{h} = \underline{h}$ .

L'application  $f \rightarrow \overline{f}(x)$  est une fonctionnelle sous-linéaire.

Choisissons une fonction  $f_0$  de  $\mathcal{C}$ ; il existe, d'après le théorème de Hahn-Banach, une mesure  $\pi$  telle que l'on ait :

$$\begin{cases} \pi(f_0) = \overline{f_0}(x), \\ \pi(f) \leq \overline{f}(x) \end{cases} \quad \text{pour toute fonction } f \text{ de } \mathcal{C}.$$

Si  $h$  appartient à  $H$ , les inégalités :

$$\pi(h) \leq \overline{h}(x) = h(x),$$

et

$$-\pi(h) \leq \overline{(-h)}(x) = -h(x),$$

entraînent :

$$\pi(h) = h(x).$$

Enfin, si  $g$  est négative, on a :

$$\pi(g) \leq \overline{g}(x) \leq 0,$$

donc  $\pi$  appartient à  $M_x$ .

Montrons maintenant que  $\pi$  est portée par  $F$ .

Soit  $\xi \notin F$ ; le complémentaire  $U$  de  $F$  est un voisinage ouvert de  $\xi$ , et pour toute fonction  $g$  de  $\mathcal{C}^+$ , dont le support est contenu dans  $U$ ,  $\pi(g)$  est nul; donc  $\xi$  n'appartient pas au support de  $\pi$ .

D'après le paragraphe précédent, si l'on suppose  $f_0$  appartenant à  $\mathcal{C}_1$ , on en déduit :

$$\overline{f_0}(x) = \pi(f_0) = \hat{f}_0(x).$$

De même :  $\hat{f}_0(x) = \underline{f_0}(x)$ .

Ainsi  $\hat{f}_0$  est à la fois semi-continue inférieurement et supérieurement.

*Remarque.* — On peut aussi démontrer, pour tout  $x$  de  $F$ , et toute  $f$  de  $\mathcal{C}$  :

$$\overline{f}(x) = \sup_{\xi \in R_x} f(\xi).$$

Démontrons maintenant :  $B \Rightarrow A$ ; soit  $f$  une fonction de  $\mathcal{C}_1$  :

Nous avons démontré la formule :

$$\hat{f}(x) = \inf_{\substack{h_F \geq f_F \\ h \in H}} h(x) = \sup_{\substack{h_F \leq f_F \\ h \in H}} h(x).$$

Pour tout  $\varepsilon > 0$ , et pour tout  $x$  de  $K$ , il existe une fonction  $h_x$  dans  $H$  telle que l'on ait :  $\hat{f}(x) - h_x(x) < \varepsilon$ , et que  $f$  majore  $h_x$  sur  $F$ . Par représentation intégrale,  $\hat{f}$  majore  $h_x$  partout sur  $K$ .

Soit  $U_x$  l'ouvert de  $K$  défini par :

$$U_x = \{y \in K; \hat{f}(y) - h_x(y) < \varepsilon\}.$$

Les ouverts  $U_x$  recouvrent  $K$ ; on peut en déduire un recouvrement fini :  $U_1, U_2, \dots, U_n$ , associés à  $h_1, h_2, \dots, h_n$ . On a les inégalités :

$$0 \leq \hat{f} - \sup(h_1, h_2, \dots, h_n) < \varepsilon.$$

De même il existe dans  $H$ ,  $m$  fonctions  $h'_1, h'_2, \dots, h'_m$  telles que l'on ait :

$$0 \leq \text{Inf}(h'_1, h'_2, \dots, h'_m) - \hat{f} < \varepsilon.$$

Posons :  $u = \sup(h_1, h_2, \dots, h_n)$  et

$$v = \text{Inf}(h'_1, h'_2, \dots, h'_m).$$

Sachant l'égalité :  $A_i f = A_i \hat{f}$ , on peut écrire :

$$u_i = \sup(A_i h_1, \dots, A_i h_n) \leq A_i u \leq A_i \hat{f},$$

et :

$$A_i \hat{f} \leq A_i v \leq \text{inf}(A_i h'_1, \dots, A_i h'_m) = v_i.$$

Suivant  $\mathcal{F}$ ,  $u_i$  tend vers  $u$ ,  $v_i$  tend vers  $v$ , uniformément sur  $K$ . Il existe donc  $J$  dans  $\mathcal{F}$ , tel que, pour tout  $i$  dans  $J$ , on ait :

$$\|u - u_i\| \leq \varepsilon, \quad \text{et} \quad \|v - v_i\| \leq \varepsilon;$$

ce qui entraîne :  $\|u_i - v_i\| \leq 4\varepsilon$ .

Ainsi, pour  $i$  dans  $J$ , on a :

$$\|\hat{f} - A_i \hat{f}\| \leq \|\hat{f} - u\| + \|u - u_i\| + \|u_i - A_i \hat{f}\| \leq 6\varepsilon.$$

*Remarque.* — Comme au début de ce chapitre on peut prouver directement que, si la fonction  $\hat{f}$  est continue sur  $K$ , elle appartient à  $H$ .

### 5. Étude d'un cas particulier.

Soit  $x$  un élément de  $K$ ; posons pour toute fonction  $f$  de  $\mathcal{C}$  :

$$p_x(f) = \limsup_{\mathcal{F}} A_i f(x).$$

La fonctionnelle  $p_x$  est une fonction sous-linéaire sur  $\mathcal{C}$ , dont la restriction au sous-espace  $\mathcal{C}_1$  est une forme linéaire. On dira que  $\xi$  appartient au support de  $p_x$  si, pour tout voisinage  $V$  de  $\xi$ , il existe une fonction  $f$  de  $\mathcal{C}$ , nulle hors de  $V$ , et telle que  $p_x(f)$  ne soit pas nul. Le support de  $p_x$  est un ensemble compact.

LEMME I. — Soit  $f_0$  une fonction de  $\mathcal{C}$ ,  $x$  un élément de  $K$ . Il existe dans  $M_x$  une mesure  $\mu$  telle que l'on ait :

$$\mu(f_0) = p_x(f_0) \quad \text{et} \quad \mu(g) \leq p_x(g),$$

pour toute fonction  $g$  de  $\mathcal{C}$ .

De plus toute mesure vérifiant cette condition appartient à  $M_x$ .

Il s'agit là d'une simple application du théorème de Hahn-Banach; la démonstration s'achève comme au paragraphe précédent.

LEMME II. — Pour tout  $x$  de  $F$  et toute  $f$  de  $\mathcal{C}$ , on a l'inégalité :

$$p_x(f) \leq \sup_{\xi \in R_x} f(\xi).$$

C'est une conséquence du lemme I et du fait que  $x$  appartient à  $F$ .

*Remarques.* — I) Si  $x$  appartient à  $F$  le support de  $p_x$  est contenu dans  $R(x)$ .

II. Soit  $\Gamma$  le sous-ensemble de  $\mathcal{C}$  défini par la condition : pour tout  $x$  de  $F$  on a :  $p_x(f) \leq f(x)$ . Cette condition entraîne :

$$p_x(f) \leq \inf_{\xi \in R_x} f(\xi).$$

Or on peut démontrer l'inégalité similaire à l'inégalité du lemme II :

$$\liminf_{\mathcal{F}} A_i f(x) \geq \inf_{\xi \in R_x} f(\xi), \quad (f \in \mathcal{C}).$$

Finalement, pour toute  $f$  de  $\Gamma$  et tout  $x$  de  $F$ ,  $\lim_{\mathcal{F}} A_i f(x)$  existe et est égale à :

$$\inf_{\xi \in R_x} f(\xi).$$

Par représentation intégrale, la convergence a lieu en tout  $x$  de  $K$ .

L'ensemble  $\Gamma$  est un cône convexe, semi-réticulé inférieurement; si l'on sait de plus que ce cône  $\Gamma$  sépare les points de  $K$ , l'espace vectoriel engendré est partout dense dans  $\mathcal{C}$  et la convergence de  $A_i f(x)$  a lieu pour tout  $f$  de  $\mathcal{C}$ .

III. Si  $(A_i)$  est une famille résolvente, le cône  $\Gamma$  associé contient le cône des fonctions surmédianes, nous avons donc retrouvé le résultat du théorème I du chapitre IV, dans le cas métrisable.

Revenons au cône  $\Gamma$  :

**THÉORÈME VI.** — *Si le cône  $\Gamma$  sépare les points de  $F$ ,*

*a) pour tout  $x$  de  $F$  le support de  $p_x$  est ponctuel,*

*b) pour tout  $x$  de  $K$  et toute  $f$  de  $\mathcal{C}$ ,  $A_i f(x)$  a une limite suivant  $\mathcal{F}$ .*

*Démonstration.* — a) Soit  $x$  dans  $F$ ; supposons que le support de  $p_x$ , qui est contenu dans  $R(x)$ , contienne deux points  $\alpha$  et  $\beta$ . Soit  $f$  une fonction de  $\Gamma$  vérifiant l'inégalité :  $f(\alpha) < f(\beta)$ . Soit :

$$0 < \varepsilon < f(\beta) - f(\alpha), \quad B = f^{-1}(]f(\alpha) + \varepsilon, + \infty[)$$

et

$$B' = f^{-1}(]-\infty, f(\alpha) + \varepsilon]).$$

L'ensemble  $B$  est ouvert et contient  $\beta$ ; l'ensemble  $B'$  est fermé et contient  $\alpha$ ; ils forment une partition de  $K$ .

Soit  $\varphi_1$  une application continue de  $K$  dans  $[0,1]$ , dont le support est contenu dans  $B$ , et telle que  $p_x(\varphi_1)$  soit strictement positif.

Soit une mesure  $\mu$  associée à  $\varphi_1$  dans les conditions du lemme I.

Nous avons :

$$p_x(f) \geq \mu(f) \geq \mu(B') (\inf_{\xi \in R_x} f(\xi)) + \mu(B)(f(\alpha) + \varepsilon),$$

et

$$p_x(f) = \inf_{\xi \in R_x} f(\xi),$$

(car  $f$  appartient à  $\Gamma$ ).

On en déduit :

$$p_x(f) \mu(B) \geq \mu(B) (f(\alpha) + \varepsilon),$$

tandis que l'on sait :

$$p_x(f) \leq f(\alpha).$$

Ces deux inégalités ne sont compatibles que si  $\mu(B)$  est nul; or on a :

$$\mu(B) \geq \mu(\varphi_1) = p_x(\varphi_1) > 0.$$

Cette contradiction entraîne : le support de  $p_x$  est ponctuel.

b) Soit  $x$  dans  $F$  et  $\{x_0\}$  le support de  $p_x$ ; soit  $f$  dans  $\mathcal{C}$  et  $\mu$  associée à  $f$  dans les conditions du lemme I. Le support de  $\mu$  est contenu dans celui de  $p_x$ , donc on a :  $\mu = \varepsilon_{x_0}$ . Ainsi on a :

$$\limsup_{\mathcal{F}} A_i f(x) = p_x(f) = f(x_0).$$

La fonction  $p_x$  est donc linéaire sur  $\mathcal{C}$ , et  $A_i f(x)$  tend vers  $f(x_0)$  suivant  $\mathcal{F}$ .

Par représentation intégrale on peut conclure, à l'existence de  $\lim_{\mathcal{F}} A_i f(x) = \hat{f}(x)$ , pour tout  $x$  de  $K$  et toute  $f$  de  $\mathcal{C}$ .

*Remarques.* — I. Soit  $x$  dans  $F$  et  $x_0$  le support de  $p_x$ ; pour toute fonction  $f$  de  $\Gamma$ , on sait :

$$p_x(f) = f(x_0) = \inf_{\xi \in R_x} f(\xi).$$

Donc en  $x_0$  la restriction de  $f$  à  $R(x)$  atteint son minimum.

II. Si  $x$  n'appartient pas à  $F$ , le support de  $p_x$  ne peut pas être ponctuel; sinon, soit  $\{a\}$  ce support. Pour toute  $h$  dans  $H$  l'égalité  $h(x) = h(a)$  a lieu, si bien que l'on a :  $xRa$ ; d'autre part, on a pour toute  $f$  de  $\mathcal{C}_1$  :  $\hat{f}(x) = f(a) = \hat{f}(a)$ , si bien que  $a$  appartient à  $F$ , et il en est de même de  $x$ .

III. La mesure  $p_x$  est portée par  $F$  et appartient à  $M_x$ ; c'est l'une des mesures dont l'existence est assurée par le théorème II; posant  $x' = \varphi(x)$ , on peut écrire :

$$\varphi(p_x) = \nu_{x'}.$$

Lorsque  $x$  parcourt  $F$ , soit  $A$  le sous-ensemble de  $F$  constitué par les supports des mesures  $p_x$ .

Si  $x$  appartient à  $A$ , l'égalité :  $f(x) = \hat{f}(x)$ , est vérifiée pour toute fonction  $f$  de  $\mathcal{C}$ ; réciproquement l'égalité :  $p_x = \varepsilon_x$ , entraîne :  $x \in A$ .

Donnons une autre caractérisation de l'ensemble  $A$ .

PROPOSITION. — *Pour que l'élément  $x$  de  $F$  appartienne à  $A$ , il faut et il suffit que pour toute mesure positive  $\mu$ , distincte de  $\varepsilon_x$ , il existe une fonction  $f$  dans  $\Gamma$  vérifiant l'inégalité :*

$$\mu(f) > f(x).$$

a) Démontrons que la condition est suffisante : en effet, si  $x$  n'appartient pas à  $A$ , la mesure  $p_x$  est distincte de  $\varepsilon_x$ , et donne lieu, pour toute  $f$  de  $\Gamma$ , à l'inégalité :

$$p_x(f) \leq f(x).$$

b) Réciproquement, soit :  $x \in A$ ,  $y \in R(x)$ , et  $f \in \Gamma$ ; il s'en suit :

$$f(y) \geq f(x) = \hat{f}(x) = \hat{f}(y).$$

Soit  $\mu$  une mesure positive, vérifiant l'inégalité :  $\mu(f) \leq f(x)$ , pour toute  $f$  de  $\Gamma$ . Une telle mesure appartient à  $M_x$  car  $\Gamma$  contient  $H$ . Le support de  $\mu$  est donc contenu dans  $R(x)$ ; ainsi on a :  $\mu(f) = f(x)$ , et l'égalité :  $\mu = \varepsilon_x$ , découle du fait que  $\Gamma$  sépare les points de  $F$ .

*Remarques.* — I. Si une fonction  $f$  de  $\mathcal{C}$  est nulle sur  $A$ , la fonction  $\hat{f}$  est nulle sur  $K$ . Donc les supports des mesures  $p_x$  et  $\varepsilon_x A_i$  sont contenus dans  $\bar{A}$ , ( $x \in K$ ,  $i \in I$ ).

II. Si le cône  $\Gamma$  sépare les points de  $K$ , on peut démontrer que ces mesures sont portées par l'ensemble  $A$  (la démonstration est analogue à celle du théorème IV).

III. Pour tout élément  $y'$  de  $F'$ , l'intersection :  $A \cap \varphi^{-1}(y')$ , est réduite à un seul élément de  $A$ , noté  $s(y')$ ; on peut alors

écrire une formule de désintégration de la mesure  $p_x$  :

$$p_x = \int_{\mathbb{F}'} \varepsilon_{s(y')} d\nu_{\varphi(x)}(y').$$

IV. En raisonnant comme dans la démonstration du théorème V, on voit que, pour que l'ensemble A soit fermé, il faut et il suffit que, pour toute  $f$  de  $\mathcal{C}$ , la fonction  $\hat{f}$  soit continue sur K.

**6. Solution du problème lorsque K est fini.**

THÉORÈME VII. — *Pour tout  $x$  dans K,  $A_i f(x)$  tend vers une limite suivant  $\mathcal{F}$ .*

Soit  $f$  une fonction définie sur K,  $g$  sa restriction à F; on a pour tout  $i$  l'égalité:  $A_i f = A_i g$ ; soient  $R_1, \dots, R_n$ , les classes d'équivalence contenues dans F, et  $f_k$  la restriction de  $f$  à  $R_k$ ; on a :

$$g = f_1 + \dots + f_n.$$

Pour  $k \neq j$ , et  $x \in R_k$ , le support de  $p_x$  étant contenu dans  $R_k$ , on a :

$$p_x(f_j) = 0,$$

ce qui entraîne :

$$\lim_{\mathcal{F}} A_i f_j(x) = 0.$$

Il reste donc à examiner  $A_i u(x)$ , pour  $u$  nulle hors de  $R(x)$ .

Il existe un filtre  $\mathcal{F}'$ , plus fin que  $\mathcal{F}$ , et tel que, suivant  $\mathcal{F}'$ ,  $A_i u(x)$  ait une limite  $l$ . Soit  $h$  la fonction de  $\mathcal{C}_1$ , égale à  $l$  sur  $R(x)$ , et nulle en dehors. Nous avons, pour tout  $y$  de F :

$$h(y) = \lim_{\mathcal{F}'} A_i u(y);$$

Pour tout  $i'$  de I, on peut donc écrire :

$$A_{i'} h = \lim_{\mathcal{F}'} A_{i'} A_i u = \lim_{\mathcal{F}} A_i A_{i'} u = A_{i'} u,$$

car la mesure  $\varepsilon_x A_{i'}$  est portée par F, et le filtre  $\mathcal{F}'$  est plus fin que  $\mathcal{F}$ .

La convergence, suivant  $\mathcal{F}$ , de  $A_{i'} u$ , découle de l'égalité :

$$A_{i'} u = A_{i'} h,$$

et du fait que  $h$  appartient à  $\mathcal{C}_1$ .

## 7. Un contre exemple.

Nous allons voir que, dans certains cas,  $A_i f(x)$  n'a pas de limite suivant  $\mathcal{F}$ .

Soit  $X$  l'espace produit  $\mathbf{R}_+ x \{ \alpha, \beta \}$ . Soit  $K$  le compactifié de  $X$ ,  $\omega$  le point à l'infini. Soit  $a$  un nombre  $> 1$ , dont la valeur sera précisée par la suite.

Pour :

$$a^{2p-\frac{1}{2}} < t \leq a^{2p+\frac{1}{2}}, \quad \text{on pose :} \quad g(t) = \alpha;$$

pour :

$$a^{2p-1-\frac{1}{2}} < t \leq a^{2p-\frac{1}{2}}, \quad \text{on pose :} \quad g(t) = \beta, \quad (p \in \mathbf{Z}).$$

Soit  $f$  une fonction continue sur  $K$ , et  $\lambda > 0$ ; posons :

$$V_\lambda f(x, \alpha) = V_\lambda f(x, \beta) = \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} f[x+t, g(x+t)] dt,$$

et

$$V_\lambda f(\omega) = \frac{f(\omega)}{\lambda}.$$

Il est aisé de vérifier que l'intégrale posée a un sens, qu'elle définit une fonction continue sur  $K$ , et que la famille des opérateurs  $V_\lambda$  est une famille résolvente positive et sous-markovienne.

Choisissons la fonction  $f$  ainsi :

$$f(t, \alpha) = e^{-t}, \quad f(t, \beta) = -e^{-t}.$$

On a alors :

$$\lambda V_\lambda f(0, \alpha) = \lambda V_\lambda f(0, \beta) = \lambda \int_0^{+\infty} e^{-(\lambda+1)t} s(t) dt,$$

où la fonction  $s(t)$  vaut  $+1$  (ou  $-1$ ), selon que  $g(t)$  est égal à  $\alpha$  (ou à  $\beta$ ). Ainsi on a :

$$\lambda V_\lambda f(0) = \frac{\lambda}{\lambda+1} \int_0^{+\infty} e^{-u} s\left(\frac{u}{\lambda+1}\right) du.$$

Soit  $n$  un entier positif;

a) pour  $\lambda+1 = a^{2n}$ , on a :  $s\left(\frac{u}{\lambda+1}\right) = s(u)$ , d'où l'on déduit

$$\lambda V_\lambda f(0) = \frac{\lambda}{\lambda+1} \int_0^{+\infty} e^{-u} s(u) du;$$

b) pour  $\lambda + 1 = a^{2n+1}$ , on a :

$$s\left(\frac{u}{\lambda + 1}\right) = -s(u),$$

d'où l'on déduit :

$$\lambda V_\lambda f(0) = \frac{-\lambda}{\lambda + 1} \int_0^{+\infty} e^{-u} s(u) du;$$

or on a l'inégalité :

$$\int_0^{+\infty} e^{-u} s(u) du \geq \int_{\frac{1}{\sqrt{a}}}^{\sqrt{a}} e^{-u} du - \int_0^{\frac{1}{\sqrt{a}}} e^{-u} du - \int_{\sqrt{a}}^{+\infty} e^{-u} du,$$

et la première de ces intégrales est strictement positive dès que  $a$  est assez grand pour que  $\int_{\frac{1}{\sqrt{a}}}^{\sqrt{a}} e^{-u} du$  majore  $\frac{2}{3}$ .

Donc on a :

$$\limsup_{\lambda \rightarrow \infty} \lambda V_\lambda f(0) > 0, \quad \text{et} \quad \liminf_{\lambda \rightarrow \infty} \lambda V_\lambda f(0) < 0.$$

Ainsi l'existence de  $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} A_\lambda f(x)$  n'est pas assurée en général, même pour une famille résolvente définie comme intégrale d'un semi-groupe.

Il semble donc, que, pour représenter une famille résolvente par l'intégrale d'un semi-groupe, on doit explorer d'autres voies que le calcul de  $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \lambda V_\lambda f(x)$ .

## BIBLIOGRAPHIE

- [1] H. BAUER, Frontière de Silov et problème de Dirichlet, *Séminaire BreLOT, Choquet, Deny*: Théorie du potentiel, t. 3 (1958-59), n° 7, 23 p.
- [2] N. BOURBAKI, Éléments de Mathématiques, Livres III, V, VI, *Actualités scientifiques et industrielles, Hermann, Paris*.
- [3] M. BRELOT, Éléments de la théorie classique du potentiel (1959), Centre de documentation Universitaire, Paris, Cours rédigé par Christian Houzel.
- [4] CARTAN et DENY, Le principe du maximum en théorie du potentiel et la notion de fonction surharmonique, *Acta. scient. Math. Szeged*, t. 12 (1950), 81-100.
- [5] G. CHOQUET, Le théorème de représentation intégrale dans les ensembles convexes compacts, *Ann. Inst. Fourier, Grenoble*, t. 10 (1960), 333-344.

- [6] G. CHOQUET, Remarques à propos de la démonstration d'unicité de P. A. Meyer, *Séminaire Brelot, Choquet, Deny*, théorie du potentiel. t. 6 (1962), n° 8.
- [7] G. CHOQUET et J. DENY, Aspects linéaires de la théorie du potentiel, Noyaux de composition satisfaisant au principe du balayage sur tout ouvert, *C. R. Acad. Sc. Paris*, t. 250 (1960), 4260-4262.
- [8] G. CHOQUET et J. DENY, Modèles finis en théorie du potentiel, *journal d'analyse mathématique*, t. 5 (1956-57), 77-135.
- [9] G. CHOQUET et J. DENY, Ensembles semi-réticulés et ensembles réticulés de fonctions continues, *Journal Maths pures et appliquées*, 9<sup>e</sup> série, t. 36 (1957), 179-189.
- [10] G. CHOQUET et P. A. MEYER, Existence et unicité des représentations intégrales dans les convexes compact quelconques; *Ann. Inst. Fourier, Grenoble*, t. 13 (1962), 139-154.
- [11] COURREGÉ et PRIOURET, Axiomatique du problème de Dirichlet et processus de Markoff, *Séminaire Brelot, Choquet, Deny*, th. du potentiel, t. 8 (1963-64), n° 8.
- [12] J. DENY, Familles fondamentales, noyaux associés, *Ann. Inst. Fourier, Grenoble*, t. 3 (1951), 73-101.
- [13] J. DENY, Les noyaux élémentaires, *Séminaire Brelot, Choquet, Deny*, Théorie du potentiel, t. 4 (1959-60), n° 4, 12 p.
- [14] J. DENY, Les principes fondamentaux de la théorie du potentiel; *Séminaire Brelot, Choquet, Deny: Théorie du potentiel*, t. 5 (1960-61), n° 6.
- [15] J. DENY, Éléments de théorie du potentiel par rapport à un noyau de Hunt, *Séminaire Brelot, Choquet, Deny, Théorie du potentiel*, t. 5 (1960-61), n° 8.
- [16] J. DENY, Les principes du maximum en théorie du potentiel, *Séminaire Brelot, Choquet, Deny, Théorie du potentiel*, t. 6 (1962), n° 10.
- [17] J. DENY, Noyaux de convolution de Hunt et noyaux associés à une famille fondamentale, *Ann. Inst. Fourier*, t. 12 (1962), 643-667.
- [18] R. DURIER, Travaux de Kishi sur les relations entre divers principes de théorie du potentiel, *Séminaire Brelot, Choquet, Deny, Théorie du potentiel*, t. 9 (1964-65), n° 8.
- [19] HILLE and PHILIPS, Functional analysis and semi-groups, *American mathematical society colloquium publications*, Providence R I 1957.
- [20] G. A. HUNT, Markoff processes and Potentials, *Illinois Journal of Math.* t. 1 (1957), 44-93 et 316-369, t. 2 (1958), 151-215.
- [21] M. KISHI, Maximum principles in the potential theory, *Nagoya maths-journal*, t. 23 (1963), 165-187.
- [22] P. KREE, Frontière de Silov, d'après H. Bauer, *Séminaire Choquet, Initiation à l'analyse*, 1<sup>re</sup> année (1962), n° 3 bis.
- [23] G. LION, Construction du semi-groupe associé à un noyau de Hunt, *Séminaire Brelot, Choquet, Deny, théorie du potentiel*, t. 5 (1960-61), n° 7.
- [24] G. LION, Théorème de représentation d'un noyau par l'intégrale d'un semi-groupe, *Séminaire Brelot, Choquet, Deny: Th. du Potentiel*, t. 6, n° 3.

- [25] G. LION, Familles résolvantes et frontières de Choquet, *Séminaire BreLOT, Choquet, Deny, Th. du potentiel*, 9<sup>e</sup> année (1964-65), n<sup>o</sup> 6.
- [26] G. LION, Principe complet du maximum et semi-groupes sous-markoviens, *C. R. Acad. Sc. Paris*, t. 258 (1964), 3621-3623.
- [27] P. A. MEYER, Sur les démonstrations nouvelles du théorème de Choquet, *Séminaire BreLOT, Choquet, Deny, théorie du potentiel*, t. 6 (1961-62), n<sup>o</sup> 7.
- [28] P. A. MEYER, BreLOT's axiomatic theory of the Dirichlet problem and Hunt's theory, *Ann. Inst. Fourier, Grenoble*, t. 13 (1963), 357-372.
- [29] G. MOKOBODZKI, Principe de balayage, principe de domination, *Séminaire Choquet, Initiation à l'analyse*, 1<sup>re</sup> année (1962), n<sup>o</sup> 1.
- [30] D. RAY, Resolvents, transition functions and strongly Markovian processes, *Annals of Maths*, série 2, t. 70 (1959), 43-72.
- [31] M. H. STONE, The generalized Weierstrass approximation theorem; *Maths. Mag.* t. 21 (1948), 167-184 et 237-254.

(Thèse, Fac. Sciences Orsay, 1966.)

Georges LION,  
Les Payauds,  
23-Auriat.