



# ANNALES

DE

# L'INSTITUT FOURIER

Amadou Lamine FALL

**Bornes pour la régularité de Castelnovo-Mumford des schémas non lisses**

Tome 59, n° 3 (2009), p. 1015-1027.

[http://aif.cedram.org/item?id=AIF\\_2009\\_\\_59\\_3\\_1015\\_0](http://aif.cedram.org/item?id=AIF_2009__59_3_1015_0)

© Association des Annales de l'institut Fourier, 2009, tous droits réservés.

L'accès aux articles de la revue « Annales de l'institut Fourier » (<http://aif.cedram.org/>), implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://aif.cedram.org/legal/>). Toute reproduction en tout ou partie cet article sous quelque forme que ce soit pour tout usage autre que l'utilisation à fin strictement personnelle du copiste est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

cedram

*Article mis en ligne dans le cadre du  
Centre de diffusion des revues académiques de mathématiques  
<http://www.cedram.org/>*

# BORNES POUR LA RÉGULARITÉ DE CASTELNUOVO-MUMFORD DES SCHEMAS NON LISSES

par Amadou Lamine FALL

---

RÉSUMÉ. — Nous montrons dans cet article des bornes pour la régularité de Castelnuovo-Mumford d'un schéma admettant des singularités, en fonction des degrés des équations définissant le schéma, de sa dimension et de la dimension de son lieu singulier. Dans le cas où les singularités sont isolées, nous améliorons la borne fournie par Chardin et Ulrich et dans le cas général, nous établissons une borne doublement exponentielle en la dimension du lieu singulier.

ABSTRACT. — We establish bounds for the Castelnuovo-Mumford regularity of singular scheme, in terms of the degrees of the equations defining the scheme and of the dimension of the singular locus. In the case where the singularities are isolated, we improve the bound given by Chardin and Ulrich, and in the general case we establish a bound doubly exponential in the dimension of the singular locus.

## 1. Introduction

Nous étudions des bornes pour la régularité de Castelnuovo-Mumford d'un schéma, admettant des singularités en fonction des degrés des équations définissant le schéma, de sa dimension et de celle de son lieu singulier. Ce travail est une continuation des travaux de Bertram-Ein-Lazarsfeld d'une part et Chardin-Ulrich d'autre part.

Soit  $R = k[X_0, \dots, X_n]$ , un anneau de polynômes sur le corps  $k$ ,  $I \subset R$  un idéal homogène engendré par des éléments homogènes de degrés au plus  $D$ . Soit  $X = \text{Proj}(R/I)$  le schéma projectif sur  $k$  défini par  $I$ ,  $d$  sa dimension et  $r > 0$  sa codimension. Soit  $\delta$  la dimension du lieu singulier de  $X$  (avec la convention  $\delta = -1$  si  $X$  est lisse).

---

*Mots-clés* : régularité de Castelnuovo-Mumford, schéma, singularité, lieu singulier.  
*Classification math.* : 14H50, 14Q20, 13D02.

Si la caractéristique du corps  $k$  est nulle,  $X$  purement de codimension  $r$  et  $\delta \leq 0$ , Bertram-Ein-Lazarsfeld [1] dans le cas lisse et Chardin-Ulrich [6] dans le cas où les singularités sont isolées, ont montré la borne suivante :

$$\operatorname{reg}(I_X) \leq r(D - 1) + 1.$$

Dans cette note nous établissons les bornes suivantes, qui sont valables en toute caractéristique :

$$(1.1) \quad \operatorname{reg}(I_X) \leq (\dim X)!(r(D - 1) - 1) + 1 \quad \text{si } \delta \leq 1$$

$$(1.2) \quad \operatorname{reg}(I_X) \leq \lambda D^{(n-\delta)2^{\delta-2}} \quad \text{si } \delta \geq 2$$

où  $\lambda$  est explicité dans le Théorème 4.3 et ne dépend que de  $n$ ,  $d$  et  $\delta$ .

Pour établir nos bornes, nous procédons en deux étapes. Dans la première étape, nous établissons des bornes pour la régularité des schémas dont les singularités sont rationnelles et localement intersection complètes, hors d'un nombre fini de points. Nous utilisons pour cela la méthode de Chardin et Ulrich. Cette méthode décrite dans [6], utilise des techniques de liaison, une récurrence sur la dimension et une version améliorée du théorème d'annulation de Kodaira. Dans la deuxième étape, on se ramène au cas étudié dans la première étape, en utilisant un théorème de Bertini et une récurrence introduite par Caviglia et Sbarra dans [2] et développée par Chardin, Fall et Nagel dans [4].

**Remerciements.** *Je remercie Marc Chardin, qui m'a proposé le sujet et aidé par des discussions et remarques pertinentes à réaliser ce texte.*

## 2. Résultats préliminaires

Dans cette section nous rappelons les résultats et définitions qui seront utilisés dans les autres parties du texte.

Soit  $R = k[X_0, \dots, X_n]$  un anneau de polynômes sur un corps  $k$ ,  $\mathfrak{m} = (X_0, \dots, X_n)$  et  $M$  un  $R$ -module gradué de type fini. Posons  $b_i^R(M) = \max\{\mu / \operatorname{Tor}_i^R(M, k)_\mu \neq 0\}$  si  $\operatorname{Tor}_i^R(M, k) \neq 0$  et  $b_i^R(M) = -\infty$  sinon. Notons  $H_{\mathfrak{m}}^i(M)$  le  $i$ -ième module de cohomologie locale de  $M$  à support dans  $\mathfrak{m}$ ,  $a_i^R(M) = \max\{\mu / H_{\mathfrak{m}}^i(M)_\mu \neq 0\}$  si  $H_{\mathfrak{m}}^i(M) \neq 0$  et  $a_i^R(M) = -\infty$  sinon. On rappelle que l'on définit la régularité de Castelnuovo-Mumford de  $M$  par :

$$\operatorname{reg}(M) = \max_i \{a_i^R(M) + i\} = \max_i \{b_i^R(M) - i\}.$$

Le nombre minimal de générateurs d'un module  $M$  sur un anneau local (ou d'un  $R$ -module gradué  $M$ ) est noté  $\mu(M)$ .

## 2.1. Bornes pour la régularité des schémas en dimension au plus un

Soit  $I = (f_1, \dots, f_s) \subset R$  un idéal homogène de hauteur  $n - 1$ , engendré par  $s$  formes de degrés  $d_1 \geq d_2 \geq \dots \geq d_s$ , soit  $X = \text{Proj}(R/I)$  le schéma projectif défini par  $I$  et  $C$  la composante de dimension 1 de  $X$ . On a le résultat suivant qui améliore [6, Proposition 2.1 et Proposition 2.2] :

**THÉORÈME 2.1.** — [3, Proposition 5.12 et Théorème 5.13]  
Avec les notations et les hypothèses ci-dessus on a :

$$\text{reg}(R/I) = \sum_{i=1}^s (d_i - 1) \quad \text{si } s = n - 1.$$

Si  $C$  est réduite,

$$\text{reg}(R/I) \leq 2\left(\sum_{i=1}^{n-1} (d_i - 1) - 1\right) + d_n \quad \text{si } s \geq n.$$

Si de plus,  $\mu(I_{\mathfrak{p}}) \leq n$  pour tout idéal premier  $\mathfrak{p} \supset I_C$  tel que  $\dim(R/\mathfrak{p}) = 1$ , alors

$$\text{reg}(R/I) \leq \sum_{i=1}^{\min\{s, n+1\}} (d_i - 1).$$

## 2.2. Sur les singularités et sur un théorème de Bertini

Soit  $X \subset \mathbb{P}_k^n$  un schéma projectif sur un corps  $k$  et  $x \in X$  un point fermé de  $X$ .

**DÉFINITION 2.2.** — On dit que  $x$  est un point non singulier de  $X$  si l'anneau local  $\mathcal{O}_{X,x}$  est régulier. Si  $\mathcal{O}_{X,x}$  n'est pas régulier on dit que  $x$  est un point singulier de  $X$ .

Le lieu singulier du schéma  $X$ ,  $\text{Sing } X$ , est l'ensemble de ses points singuliers. Notons que  $\text{Sing}(X)$  est un fermé de  $X$ .

**DÉFINITION 2.3.** — Soit  $A$  un anneau noethérien. On dit que  $A$  vérifie la condition  $R_\ell$ , si  $A_{\mathfrak{p}}$  est régulier pour tout idéal premier  $\mathfrak{p}$  de  $A$  de hauteur au plus  $\ell$ .

**DÉFINITION 2.4.** — On dit qu'un schéma  $X$  vérifie la condition  $R_\ell$  si pour tout  $x \in X$ , l'anneau  $\mathcal{O}_{X,x}$  vérifie la condition  $R_\ell$ .

Le résultat suivant donne une version du théorème de Bertini qui est valable en toute caractéristique.

**THÉORÈME 2.5.** — [7, 3.4.14] *Soit  $X \subset \mathbb{P}_k^n$  un schéma projectif sur un corps infini  $k$ . Si  $X$  est régulier (respectivement normal, réduit, vérifie  $R_\ell$ ), alors pour tout hyperplan général  $H$ ,  $X \cap H$  est régulier (respectivement normal, réduit, vérifie  $R_\ell$ ).*

**COROLLAIRE 2.6.** — *Soit  $X \subset \mathbb{P}_k^n$  un schéma projectif et  $H$  un hyperplan général. Si  $\dim(\text{Sing}(X)) = s \geq 0$ , alors  $\dim(\text{Sing}(X \cap H)) \leq s - 1$ .*

*Démonstration.* — Soit  $Y_i$ ,  $i \in I$ , les composantes irréductibles de  $X$  et  $X_i$  l'adhérence schématique de  $X - \cup_{j \neq i} Y_j$ . Alors  $\text{Sing}(X) = \cup_i \text{Sing}(X_i) \cup \cup_{i \neq j} (Y_i \cap Y_j)$  et on a une décomposition similaire pour  $X \cap H$ . On note que  $(Y_i \cap Y_j) \cap H$  a pour dimension  $\dim(Y_i \cap Y_j) - 1 \leq s - 1$  si  $Y_i \cap Y_j \neq \emptyset$ . Ceci nous ramène au cas où  $X$  est irréductible.

Soit alors  $\ell := \dim(X) - \dim(\text{Sing}(X)) - 1$ . Si  $\ell = -1$ ,  $\text{Sing}(X \cap H) \subseteq X \cap H$  et  $X \cap H$  a dimension  $s - 1$ . Sinon, par le Théorème 2.5,  $X \cap H$  vérifie  $R_\ell$  puisque  $X$  vérifie  $R_\ell$ . Donc  $\dim(\text{Sing}(X \cap H)) \leq \dim(X \cap H) - \ell - 1 = \dim(X) - \ell - 2 = s - 1$ .  $\square$

Dans ce qui suit, nous rappelons les définitions de singularités de type rationnel et singularités  $F$ -rationnelles.

**DÉFINITION 2.7.** — *Soit  $X$  un schéma de type fini sur un corps  $k$ , on dit que  $X' \xrightarrow{\pi} X$  est une désingularisation de  $X$  si  $\pi$  est un morphisme propre birationnel et si  $X'$  est lisse sur  $k$ .*

**DÉFINITION 2.8.** — [8] *Soit  $X$  un schéma essentiellement de type fini sur un corps  $k$  de caractéristique zéro,  $X' \xrightarrow{\pi} X$  une désingularisation de  $X$ , soit  $R^i \pi_* \mathcal{O}_{X'}$  les images directes supérieures du faisceau  $\mathcal{O}_{X'}$ . On dit que  $X$  possède des singularités rationnelles si  $X$  est normal et si  $R^i \pi_* \mathcal{O}_{X'} = 0$  pour tout  $i > 0$ .*

Hochester et Huneke ont montré que les localisés d'un anneau  $F$ -rationnel sont  $F$ -rationnels, sous l'hypothèse que cet anneau est quotient d'un anneau de Cohen-Macaulay (même si l'on sait aujourd'hui que « tight closure » et localisation ne commutent pas). La définition suivante est donc cohérente, du moins si l'on se restreint aux schémas dont les anneaux locaux sont quotients d'anneaux de Cohen-Macaulay, ce qui est toujours le cas dans cet article.

**DÉFINITION 2.9.** — *Un anneau  $R$  de caractéristique première est  $F$ -rationnel si tout idéal de  $R$  engendré par un système de paramètres est*

étroitement clos (*tightly closed*). Un schéma est  $F$ -rationnel si tous ses anneaux locaux sont  $F$ -rationnels.

La notion de  $F$ -rationalité s'étend aux anneaux essentiellement de type fini sur un corps  $k$  de caractéristique zéro (voir [10, Définition 4.1]). Elle coïncide avec la notion de singularité rationnelle. Nous adoptons la terminologie de Chardin et Ulrich dans [6] :

DÉFINITION 2.10. — On dit qu'un anneau  $R$  est de type rationnel, s'il est de caractéristique  $p > 0$  et  $F$ -rationnel ou bien s'il est essentiellement de type fini sur un corps de caractéristique zéro et à singularités rationnelles. Un schéma  $X$  est de type rationnel si ses anneaux locaux sont de type rationnel.

### 3. Bornes pour la régularité des schémas en dimension au moins 2

Soit  $R$  un anneau de polynômes sur un corps. Le théorème suivant améliore le résultat de Chardin et Ulrich ([6, 4.7(b)]) :

THÉORÈME 3.1. — Soit  $R = k[X_0, \dots, X_n]$  un anneau de polynômes sur un corps  $k$ ,  $I = (f_1, \dots, f_s) \subset R$  un idéal non nul engendré par des formes de degrés  $d_1 \geq \dots \geq d_s \geq 2$  et  $X = \text{Proj}(R/I)$ . Posons  $r = \text{codim } X$  et  $\sigma = \sum_{i=1}^r (d_i - 1)$ . On suppose qu'il existe un schéma  $\mathcal{Z} \subset X$  de dimension zéro, tel que pour tout  $x \in X - \mathcal{Z}$ ,  $X$  est localement intersection complète en  $x$  et  $\mathcal{O}_{X,x}$  est de type rationnel.

Alors  $\text{reg}(R/I) \leq \sigma$  si  $R/I$  est de Cohen-Macaulay, et sinon

$$\begin{aligned} (0) \quad & \text{reg}(R/I) \leq \sum_{i=1}^{n+1} (d_i - 1) && \text{si } \dim X \leq 0, \\ (1) \quad & \text{reg}(R/I) \leq 2(\sigma - 1) + d_n && \text{si } \dim X = 1, \\ (2) \quad & \text{reg}(R/I) \leq (\dim X + 1)!(\sigma - 1) && \text{si } \dim X \geq 2. \end{aligned}$$

Dans [6, 4.7(b)] il est prouvé que  $\text{reg}(R/I) \leq \frac{1}{2}(\dim X + 2)!(\sigma - 1)$  si  $\dim X \geq 1$ , sous l'hypothèse plus restrictive que  $X$  est localement d'intersection complète et soit de type rationnel, soit de caractéristique zéro à singularités irracionnelles isolées.

Démonstration. — Si  $R/I$  est de Cohen-Macaulay,  $I$  est contenu dans une intersection complète  $\mathfrak{b}$  de degrés  $d_1 \geq d_2 \geq \dots \geq d_r$ . D'après [6, 4.1(a)],

$$\text{reg}(R/I) = \sigma - \text{indeg} \left( \frac{\mathfrak{b} : I}{\mathfrak{b}} \right) \leq \sigma.$$

Le (0) découle de [3, 3.3] (voir aussi [9]) et le (1) découle du Théorème 2.1.

Dans ce qui suit nous utilisons la méthode et les notations de [6, 4.4 et 4.7].

Soit  $r = \text{codim } X$ , si  $r = 1$ , on peut supposer que  $n \geq 3$ , il s'agit de montrer que  $\text{reg}(R/I) \leq n!(d_1 - 1)$ . Comme les  $f_i$  ont un facteur commun  $h$ , on posons  $f_i = hf'_i$  et  $I' = (f'_1, \dots, f'_r)$ , l'idéal  $I'$  est de codimension  $r' \geq 2$  et  $\text{reg}(I) = \text{deg}(h) + \text{reg}(I')$ .

Si  $r' \geq n$ , on a d'après (0),  $\text{reg}(R/I') \leq (n+1)(d_1 - \delta - 1)$ , où  $\delta = \text{deg}(h)$ , donc

$$\begin{aligned} \text{reg}(R/I) &\leq (n+1)(d_1 - \delta - 1) + \delta \\ &\leq (n+1)(d_1 - 1) \\ &\leq n!(d_1 - 1). \end{aligned}$$

Si  $r' \leq n$ , le fait que  $X$  soit localement intersection complète hors d'un schéma  $\mathcal{Z}$  de dimension zéro, implique que  $\dim(R/I') \leq 2$ . Donc, les inégalités (1) et (2) appliquées à  $I'$  donne la borne pour  $I$ .

Dans tout ce qui suit on suppose  $r \geq 2$ . Posons

$$a_{i,j} = \sum_{|\mu|=d_i-d_j} U_{i,j,\mu} X^\mu \quad 1 \leq i \leq r \quad \text{et} \quad r+1 \leq j \leq s,$$

où les  $U_{i,j,\mu}$  sont des variables,  $X^\mu = X_0^{\mu_0} \dots X_n^{\mu_n}$  et  $|\mu| = \mu_0 + \dots + \mu_n$ . Considérons la matrice  $A = (a_{i,j})$  et définissons  $\alpha_1, \dots, \alpha_r$  par :

$$(\alpha_1, \dots, \alpha_r) = (I_{r,r} \quad A) \begin{pmatrix} f_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ f_s \end{pmatrix},$$

où  $I_{r,r}$  est la matrice identité d'ordre  $r$ . Posons  $K = k(U_{i,j,\mu})$ ,  $R' = R \otimes_k K$ ,  $J = (\alpha_1, \dots, \alpha_r)R' : IR'$ ,  $\mathcal{Y} = \text{Proj}(R'/IR' + J)$ . Pour  $c = \dim R - 1$  et  $c' = \dim R - 2$ , le Théorème [6, 4.4(d)] montre que  $\mathcal{Y}$  est un schéma de type rationnel et localement intersection complète hors d'un schéma de dimension zéro. D'après [6, 1.7(iii)],  $\mathcal{Y}$  coïncide avec  $\mathcal{Y}' = \text{Proj}(R'/IR' + (J)_{\leq \sigma})$  hors d'un nombre fini de points. De plus, comme  $\mathcal{Y}'$  est localement intersection complète hors d'un nombre fini de points, il existe  $d = \dim X$  formes  $\beta_1, \dots, \beta_d \in J$  de degrés au plus  $\sigma$  telles que  $\mathcal{Y}'' = \text{Proj}(R'/(I, \beta_1, \dots, \beta_d))$  coïncide avec  $\mathcal{Y}'$  hors d'un nombre fini de points. Ainsi  $\mathcal{Y}''$  coïncide avec  $\mathcal{Y}$  hors d'un nombre fini de points. En posant  $J'' = (\alpha_1, \dots, \alpha_r, \beta_1, \dots, \beta_d)$ , on a la suite exacte suivante :

$$0 \longrightarrow R'/IR' \cap J'' \longrightarrow R'/IR' \oplus R'/J'' \longrightarrow R'/IR' + J'' \longrightarrow 0.$$

De cette suite on déduit que

$$\begin{aligned}
 (*) \quad \text{reg}(R/I) &= \text{reg}(R'/IR') \\
 &\leq \max\{\text{reg}(R'/IR' \cap J''), \text{reg}(R'/IR' + J'')\}.
 \end{aligned}$$

Comme  $IR' \cap J'' = (\alpha_1, \dots, \alpha_r)$  est une intersection complète de codimension  $r$ , on a

$$\text{reg}(R'/IR' \cap J') = \sigma.$$

Puisque  $\mathcal{Y}''$  coïncide avec  $\mathcal{Y}$  hors d'un nombre fini de points,  $\mathcal{Y}''$  est un schéma de dimension  $d - 1$ , de type rationnel et localement intersection complète hors d'un schéma de dimension zéro. Nous allons en déduire (2) par récurrence sur la dimension  $d$  de  $X$ .

Pour  $d = 2$ ,  $\mathcal{Y}''$  est défini par des équations de degrés  $\sigma \geq \sigma \geq d_1 \geq \dots \geq d_r$ . Comme  $\dim \mathcal{Y}'' = 1$ , on a

$$\begin{aligned}
 \text{reg}(R/I) &\leq \text{reg}(R'/IR' + J'') \\
 &= 2 \left( d(\sigma - 1) + \sum_{i=1}^{r-d} (d_i - 1) - 1 \right) + d_{r-d+1} \\
 &= 2 \left( 2(\sigma - 1) + \sum_{i=1}^{r-2} (d_i - 1) - 1 \right) + d_{r-1} \\
 &\leq 2(2(\sigma - 1) + (\sigma - 1)) \\
 &= 6(\sigma - 1).
 \end{aligned}$$

Pour  $d \geq 3$ ,  $\mathcal{Y}''$  est défini par des équations de degrés  $\underbrace{\sigma \geq \dots \geq \sigma}_{d \text{ fois}} \geq d_1 \geq \dots \geq d_{r-d}$ . D'après l'hypothèse de récurrence, si  $r \geq d$ , on a

$$\begin{aligned}
 \text{reg}(R'/IR' + J'') &\leq d! \left( d(\sigma - 1) + \sum_{i=1}^{r-d} (d_i - 1) - 1 \right) \\
 &\leq d!(d(\sigma - 1) + \sigma - 1) \\
 &= (d + 1)!(\sigma - 1).
 \end{aligned}$$

et si  $r \leq d$ , on a

$$\begin{aligned}
 \text{reg}(R'/IR' + J'') &\leq d!(r(\sigma - 1)) \\
 &\leq dd!(\sigma - 1) \\
 &= (d + 1)!(\sigma - 1).
 \end{aligned}$$

On en déduit dans tous les cas que,

$$\text{reg}(R/I) \leq (d + 1)!(\sigma - 1).$$



□

COROLLAIRE 3.2. — Soit  $X \subset \mathbb{P}^n$  un schéma projectif sur un corps  $k$ , de codimension  $r > 0$ , défini par des équations de degrés au plus  $D \geq 2$ . On suppose qu'il existe un schéma  $Z \subset X$  de dimension zéro, tel que  $\forall x \in X - Z$ ,  $X$  est localement intersection complète en  $x$  et  $\mathcal{O}_{X,x}$  est de type rationnel. Alors,

- (0)  $\text{reg}(R/I) \leq (n + 1)(D - 1)$  si  $\dim X \leq 0$ ,
- (1)  $\text{reg}(R/I) \leq (2r + 1)(D - 1) - 1$  si  $\dim X = 1$ ,
- (2)  $\text{reg}(R/I) \leq (\dim X + 1)!(r(D - 1) - 1)$  si  $\dim X \geq 2$ .

#### 4. Bornes pour la régularité des schémas non lisses

Soit  $R$  un anneau de polynômes sur un corps,  $I$  un idéal gradué de  $R$ , engendré par des éléments de degrés au plus  $D$  et soit  $l_1, \dots, l_{s+1}$  des formes linéaires générales. Posons  $M = R/I$ ,  $M_i := M/(l_1, \dots, l_i)M$ ,  $i = 0, \dots, s$  et  $K_i := \ker(M_i \xrightarrow{\times l_{i+1}} M_i[1])$ . En appliquant les résultats de la preuve de [4, 3.2] avec  $R = S$  et  $J = (0)$ , on a

$$\begin{aligned} r_i &= \max\{b_1^R(M) - 2, b_0^R(M) + \max\{1, b_0^S(J)\} - 2, \text{reg}(M_i)\} \\ &= \max\{b_1^R(M) - 2, b_0^R(M) - 1, \text{reg}(M_i)\} \\ &= \max\{D - 2, \text{reg}(M_i)\} \end{aligned}$$

On a ainsi le lemme suivant comme cas particulier de [4, 3.2] :

LEMME 4.1. — Avec les notations ci-dessus, on suppose que les  $K_i$  sont de longueur finie pour tout  $i$ . En posant  $Q_i = \max\{\text{reg}(M_i), \lambda(K_i), D - 2\} + 1$  pour  $0 \leq i \leq s$ , on a

$$Q_i \leq Q_{i+1}^2 \quad \forall i = 0, \dots, s - 1.$$

En particulier,

$$\text{reg}(M) \leq Q_s^{2^s}.$$

Le Lemme 4.1 et la proposition suivante nous permettent d'obtenir des bornes pour la régularité du schéma  $X$ .

PROPOSITION 4.2. — Soit  $R = k[X_0, \dots, X_n]$  un anneau de polynômes sur un corps  $k$ , avec  $n \geq 2$ ,  $\mathfrak{m} = (X_0, \dots, X_n)$ ,  $I \subset R$  un idéal engendré par des formes de degrés au plus  $D$  et  $X = \text{Proj}(R/I)$ . On désigne par  $d$  la dimension de  $X$  et par  $\delta$  celle de son lieu singulier. Soit  $l_1, \dots, l_s$ , avec

$s \geq \delta$  des formes linéaires générales, on pose  $S = R/I$ ,  $S_i := S/(l_1, \dots, l_i)S$ ,  $i = 0, \dots, s$ ,  $K_i := \ker(S_i \xrightarrow{\times l_{i+1}} S_i[1])$  et  $X_\delta = \text{Proj}(R/I + (l_1, \dots, l_\delta))$ . Supposons qu'il existe un schéma  $\mathcal{Z}_\delta \subset X_\delta$  de dimension zéro, tel que  $\forall x \in X_\delta - \mathcal{Z}_\delta$ ,  $X_\delta$  est localement intersection complète en  $x$  et  $\mathcal{O}_{X_\delta, x}$  est de type rationnel. Alors,

$$\lambda(K_{\delta-1}) \leq D^r \left( \frac{(r(D-1)(d+1)!)^{d+1-\delta}}{(d+1-\delta)!} \right).$$

*Démonstration.* — La suite exacte

$$0 \longrightarrow K_{\delta-1} \longrightarrow S_{\delta-1} \xrightarrow{\times l_\delta} S_{\delta-1}[1] \longrightarrow S_\delta \longrightarrow 0$$

donne une suite exacte en cohomologie locale

$$0 \longrightarrow K_{\delta-1} \longrightarrow H_m^0(S_{\delta-1}) \xrightarrow{\times l_\delta} H_m^0(S_{\delta-1}[1]) \longrightarrow H_m^0(S_\delta) \longrightarrow \dots,$$

qui montre que

$$\begin{aligned} \lambda(K_{\delta-1}) &\leq \lambda(H_m^0(S_{\delta-1})) - \lambda(H_m^0(S_{\delta-1}[1])) + \lambda(H_m^0(S_\delta)) \\ &= \lambda(H_m^0(S_{\delta-1})). \end{aligned}$$

Ainsi, nous avons

$$\begin{aligned} \lambda(K_{\delta-1}) &\leq \sum_{\nu=0}^{\text{reg}(S_\delta)} \lambda(H_m^0(S_\delta))_\nu \\ &\leq \sum_{\nu=0}^{\text{reg}(S_\delta)} H_{S_\delta}(\nu). \end{aligned}$$

L'idéal  $I + (l_1, \dots, l_\delta)$  contient un idéal  $J_\delta$  engendré par une suite régulière de degrés  $\underbrace{D, \dots, D}_r \text{ fois}, \underbrace{1, \dots, 1}_\delta \text{ fois}$ . Donc

$$\begin{aligned} H_{S_\delta}(\nu) &\leq H_{R/J_\delta}(\nu) \\ &= \sum_{i_1=0}^{D-1} \dots \sum_{i_r=0}^{D-1} \binom{\nu + d - \delta - (i_1 + \dots + i_r)}{d - \delta} \\ &\leq \binom{\nu + d - \delta}{d - \delta} D^r, \end{aligned}$$

et ainsi,

$$\begin{aligned} \lambda(K_{\delta-1}) &\leq D^r \sum_{\nu=0}^{\text{reg}(S_\delta)} \binom{\nu + d - \delta}{d - \delta} \\ &= D^r \binom{\text{reg}(S_\delta) + d + 1 - \delta}{d + 1 - \delta}. \end{aligned}$$

Comme  $\text{reg}(S_\delta) \leq (d+1)!(r(D-1)-1)$ , on a

$$\begin{aligned} \lambda(K_{\delta-1}) &\leq D^r \binom{(d+1)!(r(D-1)-1) + d+1-\delta}{d+1-\delta} \\ &\leq D^r \binom{r(d+1)!(D-1)}{d+1-\delta} \\ &\leq D^r \left( \frac{(r(D-1)(d+1)!)^{d+1-\delta}}{(d+1-\delta)!} \right). \end{aligned}$$

□

**THÉORÈME 4.3.** — Soit  $R = k[X_0, \dots, X_n]$  un anneau de polynômes sur un corps  $k$ ,  $I \subset R$  un idéal homogène,  $X = \text{Proj}(R/I)$ ,  $d = \dim X$  et  $\delta$  la dimension du lieu singulier de  $X$ . On suppose que  $I$  est engendré par des éléments de degrés au plus  $D \geq 2$ . On a alors

$$\text{reg}(R/I) \leq C(n, d, \delta) D^{(n+1-\delta)2^{\delta-1}},$$

$$\text{où } C(n, d, \delta) = \left( \frac{((n-d)(d+1)!)^{d+1-\delta}}{(d+1-\delta)!} \right)^{2^{\delta-1}}.$$

*Démonstration.* — Soit  $l_1, \dots, l_\delta$  des formes linéaires générales, on pose

$$S = R/I, \quad S_i := S/(l_1, \dots, l_i)S, \quad i = 0, \dots, \delta \quad \text{et} \quad K_i := \ker(S_i \xrightarrow{\times l_{i+1}} S_i[1]).$$

Si  $H_1, \dots, H_\delta$  désignent les hyperplans définis par les  $l_i$ , d'après le Corollaire 2.6, le schéma  $\mathcal{Z} = X \cap H_1 \cap \dots \cap H_\delta$  a au plus des singularités isolées, il vérifie donc les conditions du Corollaire 3.2. Comme  $(d+1-\delta)! < (d+1)!$ , on a

$$\text{reg}(S_\delta) \leq (d+1)!(r(D-1)-1).$$

D'après la preuve de [4, 3.2], nous avons

$$\text{reg}(S_{\delta-1}) \leq \text{reg}(S_\delta) + \lambda(K_{\delta-1}).$$

Donc,

$$\begin{aligned} Q_{\delta-1} &= \max\{\text{reg}(S_{\delta-1}), \lambda(K_{\delta-1}), D-2\} + 1 \\ &\leq \max\{\text{reg}(S_\delta) + \lambda(K_{\delta-1}), D-2\} + 1 \\ &\leq (d+1)!(r(D-1)-1) + \left( \frac{(r(D-1)(d+1)!)^{d+1-\delta}}{(d+1-\delta)!} \right) D^r \\ &\leq \left( \frac{(rD(d+1)!)^{d+1-\delta}}{(d+1-\delta)!} \right) D^r \\ &\leq \left( \frac{(r(d+1)!)^{d+1-\delta}}{(d+1-\delta)!} \right) D^{r+d+1-\delta} \\ &= \left( \frac{((n-d)(d+1)!)^{d+1-\delta}}{(d+1-\delta)!} \right) D^{n+1-\delta}. \end{aligned}$$

Ainsi d'après le Lemme 4.1, nous avons

$$\begin{aligned} \operatorname{reg}(R/I) &\leq Q_{\delta-1}^{2^{\delta-1}} \\ &\leq \left( \frac{((n-d)(d+1)!)^{d+1-\delta}}{(d+1-\delta)!} \right)^{2^{\delta-1}} D^{(n+1-\delta)2^{\delta-1}}. \end{aligned}$$

□

En utilisant les Théorèmes 3.1 et 4.3, les résultats de Bertram-Ein-Lazarsfeld [1] et les résultats de Chardin-Ulrich [6], nous avons le théorème suivant :

**THÉORÈME 4.4.** — *Soit  $X$  un schéma projectif sur un corps  $k$ , de dimension  $d$  et de codimension  $r > 0$ . Soit  $\delta$  la dimension du lieu singulier de  $X$  et  $I_X$  l'idéal saturé définissant  $X$ . On suppose que  $X$  est défini par des équations de degrés au plus  $D \geq 2$ .*

1) *Si  $\delta = -1$  ou si  $\delta = 0$  et la caractéristique de  $k$  est nulle, alors*

$$\operatorname{reg}(I_X) \leq r(D-1) + 1.$$

2) *Si  $\delta \leq 1$ , alors  $\operatorname{reg}(I_X) \leq (\dim X)!(r(D-1) - 1) + 1$ .*

3) *Si  $\delta \geq 2$  alors,*

$$\operatorname{reg}(I_X) \leq C(n, d-1, \delta-1) D^{(n-\delta)2^{\delta-2}},$$

où  $C(n, d, \delta)$  est définie dans le Théorème 4.3.

*Démonstration.* — La conclusion du 1) découle de [1, 4 (i)] et de [6, 0.1].

Soit  $R = k[X_0, \dots, X_n]$  et  $I_X = I^{sat}$  l'idéal saturé définissant le schéma  $X$ . Soit  $l$  une forme linéaire générale et  $H$  l'hyperplan défini par  $l$ , d'après [5, 2.5], on a

$$\begin{aligned} (*) \quad \operatorname{reg}(R/I_X) &= \max\{\operatorname{reg}(R/I_{X \cap H}), a_1(R/I_X) + 1\} \\ &\leq \max\{\operatorname{reg}(R/I + (l)), a_1(R/I_X) + 1\}. \end{aligned}$$

D'autre part la suite exacte, avec  $\lambda(K)$  fini,

$$0 \longrightarrow K \longrightarrow (R/I)(-1) \xrightarrow{\times l} R/I \longrightarrow R/I + (l) \longrightarrow 0,$$

donne une suite exacte en cohomologie locale

$$\begin{aligned} \dots \longrightarrow H_m^0(R/I + (l)) \longrightarrow H_m^1(R/I)(-1) \longrightarrow H_m^1(R/I) \longrightarrow \\ \longrightarrow H_m^1(R/I + (l)) \longrightarrow \dots \end{aligned}$$

qui montre que  $H_m^1(R/I)_\mu \simeq H_m^1(R/I)_{\mu-1} = 0$  pour  $\mu \geq \text{reg}(R/I + (l))$ .  
On en déduit que

$$\text{reg}(R/I + (l)) \geq a_1(R/I) + 1 = a_1(R/I_X) + 1,$$

et par suite d'après (\*) on a

$$(4.1) \quad \text{reg}(R/I_X) \leq \text{reg}(R/I + (l)).$$

Si  $\delta \leq 1$  le schéma,  $\mathcal{Z} = \text{Proj}(R/I + (l))$  est à singularités isolées. D'après le (2) du Théorème 3.1 on a,

$$\begin{aligned} \text{reg}(R/I + (l)) &\leq (\dim \mathcal{Z} + 1)!(r(D - 1) - 1) \\ &= (\dim X)!(r(D - 1) - 1). \end{aligned}$$

On en déduit que

$$\begin{aligned} \text{reg}(I_X) &= \text{reg}(R/I_X) + 1 \\ &\leq \text{reg}(R/I + (l)) + 1 \\ &\leq (\dim \mathcal{Z} + 1)!(r(D - 1) - 1) + 1 \\ &= (\dim X)!(r(D - 1) - 1) + 1. \end{aligned}$$

Si  $\delta \geq 2$ , l'inégalité (3) ci-dessus et le Théorème 4.3 appliqué à  $R/I + (l)$  donne la borne annoncée. □

## BIBLIOGRAPHIE

- [1] A. BERTRAM, L. EIN & R. LAZARSFELD, « Vanishing theorem , a theorem of Severi, and the equations defining projectives varieties », *J. Amer. Math. Soc.* **4** (1991), p. 587-602.
- [2] G. CAVIGLIA & E. SBARRA, « Characteristic-free bounds for the Castelnuovo-Mumford regularity », *Compositio Math.* **141** (2005), p. 1365-1373.
- [3] M. CHARDIN, « Regularity of ideals and their powers », Prépublication(institut de mathématiques de Jussieu), 364, mars 2004.
- [4] M. CHARDIN, A. L. FALL & U. NAGEL, « Bounds for the Castelnuovo-Mumford regularity of modules », *Math. Z.* **258** (2008), p. 69-80.
- [5] M. CHARDIN & G. MORENO-SOCIAS, « Regularity of lex-segment ideals : some closed formulas and applications », *Proc. Amer. Math. Soc.* **131** (2003), p. 1093-1102.
- [6] M. CHARDIN & B. ULRICH, « Liaison and the Castelnuovo-Mumford regularity », *Amer. J. Math.* **124** (2002), p. 1103-1124.
- [7] H. FLENNER, L. O'CARROLL & W. VOGEL, *Joins and Intersections*, Springer Monographs in Mathematics (New York), 1999.
- [8] G. KEMPF, F. KNUDSEN, D. MUMFORD & S. DONAT, *Toroidal Embeddings*, Lecture Notes in Math. (Springer-Verlag New York), 1973.
- [9] SJÖGREN, « On the regularity of graded  $k$ -algebras of Krull dimension  $\leq 1$  », *Math. Scand.* **71** (1992), p. 167-171.

- [10] K. SMITH, « F-rational rings have rational singularities », *Amer. J. Math.* **119** (1997), p. 159-180.

Manuscrit reçu le 8 février 2008,  
accepté le 3 juillet 2008.

Amadou Lamine FALL  
Université Cheikh Anta Diop  
Faculté des Sciences  
Département de Mathématiques  
Dakar Fann (Sénégal)  
fall@math.jussieu.fr