



# ANNALES

DE

# L'INSTITUT FOURIER

Cédric BONNAFÉ & Raphaël ROUQUIER

**Compactification des variétés de Deligne-Lusztig**

Tome 59, n° 2 (2009), p. 621-640.

[http://aif.cedram.org/item?id=AIF\\_2009\\_\\_59\\_2\\_621\\_0](http://aif.cedram.org/item?id=AIF_2009__59_2_621_0)

© Association des Annales de l'institut Fourier, 2009, tous droits réservés.

L'accès aux articles de la revue « Annales de l'institut Fourier » (<http://aif.cedram.org/>), implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://aif.cedram.org/legal/>). Toute reproduction en tout ou partie cet article sous quelque forme que ce soit pour tout usage autre que l'utilisation à fin strictement personnelle du copiste est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

cedram

*Article mis en ligne dans le cadre du  
Centre de diffusion des revues académiques de mathématiques  
<http://www.cedram.org/>*

## COMPACTIFICATION DES VARIÉTÉS DE DELIGNE-LUSZTIG

par Cédric BONNAFÉ & Raphaël ROUQUIER

---

RÉSUMÉ. — Nous construisons explicitement la normalisation de la compactification de Bott-Samelson-Demazure-Hansen des variétés de Deligne-Lusztig  $\mathbf{X}(w)$  dans leur revêtement  $\mathbf{Y}(w)$  et retrouvons ainsi un résultat de Deligne-Lusztig sur la monodromie locale autour des diviseurs de la compactification.

ABSTRACT. — We construct explicitly the normalisation of the Bott-Samelson-Demazure-Hansen compactification of Deligne-Lusztig varieties  $\mathbf{X}(w)$  in their covering  $\mathbf{Y}(w)$ : we retrieve a result by Deligne-Lusztig about the local monodromy around the divisors of the compactification.

### Introduction

Dans [1], nous avons étudié le prolongement de certains systèmes locaux sur les variétés de Deligne-Lusztig en vue d'une application algébrique (équivalence de Morita donnée par la décomposition de Jordan, conjecturée par Broué). Dans cette étude, nous utilisons un résultat crucial de Deligne-Lusztig sur la ramification de ces systèmes locaux [3, lemme 9.13]. Une des motivations du présent travail est de fournir une alternative "explicite" au calcul local effectué dans la preuve de Deligne et Lusztig.

Plus précisément, si  $w$  est un élément du groupe de Weyl d'un groupe réductif connexe  $\mathbf{G}$  muni d'une isogénie  $F$  dont une puissance est un endomorphisme de Frobenius, il lui est associé deux variétés de Deligne-Lusztig  $\mathbf{X}(w)$  et  $\mathbf{Y}(w)$  ainsi qu'un morphisme fini étale  $\mathbf{Y}(w) \rightarrow \mathbf{X}(w)$  faisant de  $\mathbf{X}(w)$  un quotient de  $\mathbf{Y}(w)$  par l'action du groupe fini  $\mathbf{T}^F$  des points rationnels d'un tore maximal  $F$ -stable  $\mathbf{T}$  de  $\mathbf{G}$  (voir [3, §1] : la variété  $\mathbf{Y}(w)$  y

est notée  $\tilde{\mathbf{X}}(\dot{w})$ ). Deligne et Lusztig [3, lemme 9.11] ont construit une compactification lisse  $\overline{\mathbf{X}}(w)$  de  $\mathbf{X}(w)$  à la Bott-Samelson-Demazure-Hansen. Le but principal de cet article est de construire explicitement la *normalisation*  $\overline{\mathbf{Y}}(w)$  de  $\overline{\mathbf{X}}(w)$  dans  $\mathbf{Y}(w)$  :

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{Y}(w) & \hookrightarrow & \overline{\mathbf{Y}}(w) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbf{X}(w) & \hookrightarrow & \overline{\mathbf{X}}(w). \end{array}$$

Une fois cette construction explicite réalisée, nous en déduisons les propriétés fondamentales de  $\overline{\mathbf{Y}}(w)$  (voir le théorème 1.2) permettant d'en déduire une nouvelle preuve du lemme 9.13 de Deligne-Lusztig [3] qui détermine la monodromie locale du revêtement le long d'une des composantes de  $\overline{\mathbf{X}}(w) - \mathbf{X}(w)$ . Ce lemme est un point clef dans la preuve de Deligne-Lusztig des conjectures de Macdonald associant une représentation irréductible de  $\mathbf{G}^F$  à un caractère en position générale de  $\mathbf{T}^F$ .

## Notations

Tout au long de cet article, nous fixons un groupe réductif connexe  $\mathbf{G}$  défini sur une clôture algébrique  $\mathbb{F}$  du corps fini à  $p$  éléments  $\mathbb{F}_p$ , où  $p$  est un nombre premier. Nous supposons de plus que  $\mathbf{G}$  est muni d'une isogénie  $F : \mathbf{G} \rightarrow \mathbf{G}$  dont une puissance est un endomorphisme de Frobenius de  $\mathbf{G}$ .

Fixons un sous-groupe de Borel  $F$ -stable  $\mathbf{B}$  de  $\mathbf{G}$ , un tore maximal  $F$ -stable  $\mathbf{T}$  de  $\mathbf{B}$  et notons  $\mathbf{U}$  le radical unipotent de  $\mathbf{B}$ . Notons  $W = N_{\mathbf{G}}(\mathbf{T})/\mathbf{T}$  le groupe de Weyl de  $\mathbf{G}$  relativement à  $\mathbf{T}$ ,  $X(\mathbf{T})$  (resp.  $Y(\mathbf{T})$ ) le réseau des caractères (resp. des sous-groupes à un paramètre) de  $\mathbf{T}$ ,  $\Phi$  (resp.  $\Phi^\vee$ ) le système de racines (resp. coracines) de  $\mathbf{G}$  relativement à  $\mathbf{T}$ ,  $\Delta$  (resp.  $\Delta^\vee$ ) la base de  $\Phi$  (resp.  $\Phi^\vee$ ) associée à  $\mathbf{B}$  et  $\Phi_+$  (resp.  $\Phi_+^\vee$ ) l'unique système de racines (resp. coracines) positives contenant  $\Delta$  (resp.  $\Delta^\vee$ ).

Si  $\alpha \in \Phi$ , on notera  $\alpha^\vee$  sa coracine associée,  $s_\alpha \in W$  la réflexion par rapport à  $\alpha$ ,  $\mathbf{U}_\alpha$  le sous-groupe unipotent à un paramètre normalisé par  $\mathbf{T}$  associé à  $\alpha$ ,  $\mathbf{T}_{\alpha^\vee}$  le sous-tore de  $\mathbf{T}$  image de  $\alpha^\vee$  et  $\mathbf{G}_\alpha$  le sous-groupe de  $\mathbf{G}$  engendré par  $\mathbf{U}_\alpha$  et  $\mathbf{U}_{-\alpha}$ .

Posons  $S = \{s_\alpha | \alpha \in \Delta\}$  et  $\bar{S} = S \cup \{1\}$ . Nous noterons  $\ell : W \rightarrow \mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$  la fonction longueur relativement à  $S$ . Nous noterons  $B$  le groupe de tresses associé à  $(W, S)$ , de générateurs  $\{s_\alpha | \alpha \in \Delta\}$ . Soit  $f : B \rightarrow W$  le morphisme canonique (*i.e.*, l'unique morphisme tel que  $f(s_\alpha) = s_\alpha$  pour tout  $\alpha \in \Delta$ ) et soit  $\sigma : W \rightarrow B$  l'unique application

telle que  $\sigma(s_\alpha) = s_\alpha$  pour tout  $\alpha \in \Delta$  et  $\sigma(vw) = \sigma(v)\sigma(w)$  si  $\ell(vw) = \ell(v) + \ell(w)$ . Cette application vérifie  $f \circ \sigma = \text{Id}_W$ .

### 1. Variétés de Deligne-Lusztig

Le lecteur pourra trouver dans [4] les résultats généraux sur les variétés de Deligne-Lusztig que nous utiliserons ici.

#### 1.1. Définition

Si  $n \in N_{\mathbf{G}}(\mathbf{T})$  et si  $g\mathbf{U}, h\mathbf{U} \in \mathbf{G}/\mathbf{U}$ , nous écrirons  $g\mathbf{U} \xrightarrow{n} h\mathbf{U}$  si  $g^{-1}h \in \mathbf{U}n\mathbf{U}$ . Si  $w \in W$  et si  $g\mathbf{B}, h\mathbf{B} \in \mathbf{G}/\mathbf{B}$ , nous écrirons  $g\mathbf{B} \xrightarrow{w} h\mathbf{B}$  si  $g^{-1}h \in \mathbf{B}w\mathbf{B}$ .

Si  $\mathbf{n} = (n_1, \dots, n_r)$  est une suite d'éléments de  $N_{\mathbf{G}}(\mathbf{T})$  et si  $\mathbf{w} = (w_1, \dots, w_r)$  désigne la suite de leurs images respectives dans  $W$ , on pose

$$\mathbf{U}(\mathbf{n}) = \{ (g_1\mathbf{U}, \dots, g_r\mathbf{U}, g_{r+1}\mathbf{U}) \in (\mathbf{G}/\mathbf{U})^{r+1} \mid g_1\mathbf{U} \xrightarrow{n_1} g_2\mathbf{U} \xrightarrow{n_2} \dots \xrightarrow{n_{r-1}} g_r\mathbf{U} \xrightarrow{n_r} g_{r+1}\mathbf{U} \}$$

et

$$\mathbf{B}(\mathbf{w}) = \{ (g_1\mathbf{B}, \dots, g_r\mathbf{B}, g_{r+1}\mathbf{B}) \in (\mathbf{G}/\mathbf{B})^{r+1} \mid g_1\mathbf{B} \xrightarrow{w_1} g_2\mathbf{B} \xrightarrow{w_2} \dots \xrightarrow{w_{r-1}} g_r\mathbf{B} \xrightarrow{w_r} g_{r+1}\mathbf{B} \}$$

Si  $t \in \mathbf{T}$  et  $(g_1\mathbf{U}, \dots, g_r\mathbf{U}, g_{r+1}\mathbf{U}) \in \mathbf{U}(\mathbf{n})$ , on pose

$$(g_1\mathbf{U}, g_2\mathbf{U}, \dots, g_r\mathbf{U}, g_{r+1}\mathbf{U}) \cdot t = (g_1t\mathbf{U}, g_2^{n_1}t\mathbf{U}, \dots, g_r^{n_{r-1} \cdots n_1}t\mathbf{U}, g_{r+1}^{n_r \cdots n_1}t\mathbf{U}).$$

Il est alors facile de vérifier que, si  $\mathbf{g} \in \mathbf{U}(\mathbf{n})$ , alors  $\mathbf{g} \cdot t \in \mathbf{U}(\mathbf{n})$  et cela définit une action à droite de  $\mathbf{T}$  sur  $\mathbf{U}(\mathbf{n})$ . De plus, le morphisme canonique  $\mathbf{G}/\mathbf{U} \rightarrow \mathbf{G}/\mathbf{B}$  induit un morphisme

$$\pi_{\mathbf{n}} : \begin{array}{ccc} \mathbf{U}(\mathbf{n}) & \longrightarrow & \mathbf{B}(\mathbf{w}) \\ (g_1\mathbf{U}, \dots, g_r\mathbf{U}) & \longmapsto & (g_1\mathbf{B}, \dots, g_r\mathbf{B}) \end{array}$$

et ce dernier induit un isomorphisme

$$(1.1) \quad \mathbf{U}(\mathbf{n})/\mathbf{T} \xrightarrow{\sim} \mathbf{B}(\mathbf{w}).$$

Posons maintenant

$$\mathbf{v}_{\mathbf{n}} : \begin{array}{ccc} \mathbf{U}(\mathbf{n}) & \longrightarrow & \mathbf{G}/\mathbf{U} \times \mathbf{G}/\mathbf{U} \\ (g_1\mathbf{U}, \dots, g_{r+1}\mathbf{U}) & \longmapsto & (g_1\mathbf{U}, g_{r+1}\mathbf{U}) \end{array}$$

et 
$$\beta_{\mathbf{w}} : \begin{array}{ccc} \mathcal{B}(\mathbf{w}) & \longrightarrow & \mathbf{G}/\mathbf{B} \times \mathbf{G}/\mathbf{B} \\ (g_1\mathbf{B}, \dots, g_{r+1}\mathbf{B}) & \longmapsto & (g_1\mathbf{B}, g_{r+1}\mathbf{B}). \end{array}$$

Alors le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{U}(\mathbf{n}) & \xrightarrow{v_{\mathbf{n}}} & \mathbf{G}/\mathbf{U} \times \mathbf{G}/\mathbf{U} \\ \pi_{\mathbf{n}} \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{B}(\mathbf{w}) & \xrightarrow{\beta_{\mathbf{w}}} & \mathbf{G}/\mathbf{B} \times \mathbf{G}/\mathbf{B} \end{array}$$

est commutatif (la flèche verticale de droite étant la projection canonique).

Notons  $\mathcal{U}_F$  (resp.  $\mathcal{B}_F$ ) le graphe du morphisme de Frobenius  $F : \mathbf{G}/\mathbf{U} \rightarrow \mathbf{G}/\mathbf{U}$  (resp.  $F : \mathbf{G}/\mathbf{B} \rightarrow \mathbf{G}/\mathbf{B}$ ). Les variétés de Deligne-Lusztig associées à  $\mathbf{n}$  et  $\mathbf{w}$  sont respectivement définies par

$$\mathbf{Y}(\mathbf{n}) = v_{\mathbf{n}}^{-1}(\mathcal{U}_F) \quad \text{et} \quad \mathbf{X}(\mathbf{w}) = \beta_{\mathbf{w}}^{-1}(\mathcal{B}_F).$$

Notons toujours  $\mathbf{w} : \mathbf{T} \rightarrow \mathbf{T}$  la conjugaison par  $w_1 \cdots w_r$ . Alors le groupe  $\mathbf{T}^{\mathbf{w}F}$  agit sur  $\mathbf{Y}(\mathbf{n})$  (par restriction de l'action de  $\mathbf{T}$  sur  $\mathcal{U}(\mathbf{n})$ ) et le morphisme canonique  $\pi_{\mathbf{n}} : \mathbf{Y}(\mathbf{n}) \rightarrow \mathbf{X}(\mathbf{w})$  obtenu par restriction de  $\pi_{\mathbf{n}}$  induit un isomorphisme

$$(1.2) \quad \mathbf{Y}(\mathbf{n})/\mathbf{T}^{\mathbf{w}F} \xrightarrow{\sim} \mathbf{X}(\mathbf{w}).$$

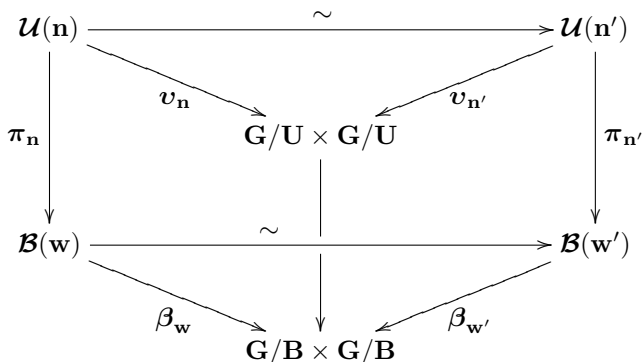
Pour finir, notons  $v_{\mathbf{n}} : \mathbf{Y}(\mathbf{n}) \rightarrow \mathbf{G}/\mathbf{U}$  et  $\beta_{\mathbf{w}} : \mathbf{X}(\mathbf{w}) \rightarrow \mathbf{G}/\mathbf{B}$  les premières projections. Alors le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{Y}(\mathbf{n}) & \xrightarrow{v_{\mathbf{n}}} & \mathbf{G}/\mathbf{U} \\ \pi_{\mathbf{n}} \downarrow & & \downarrow \\ \mathbf{X}(\mathbf{w}) & \xrightarrow{\beta_{\mathbf{w}}} & \mathbf{G}/\mathbf{B} \end{array}$$

est commutatif (la flèche verticale de droite étant la projection canonique).

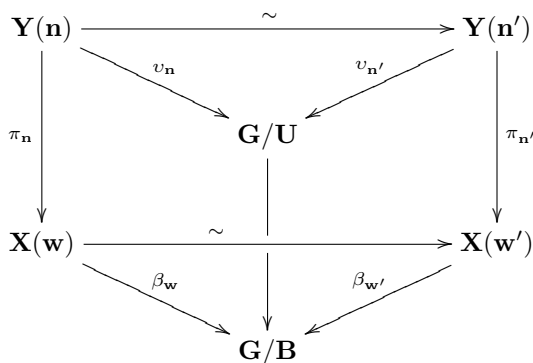
*Remarque 1.1.* — Prolongeons l'application  $\sigma : W \rightarrow B$  aux suites d'éléments de  $W$  en posant  $\sigma(\mathbf{w}) = \sigma(w_1) \cdots \sigma(w_r)$ . Si  $\mathbf{n}'$  est une autre suite d'éléments de  $N_{\mathbf{G}}(\mathbf{T})$  dont la suite des images dans  $W$  est  $\mathbf{w}'$ , et si  $\sigma(\mathbf{w}) = \sigma(\mathbf{w}')$ , alors les variétés  $\mathcal{B}(\mathbf{w})$  et  $\mathcal{B}(\mathbf{w}')$  sont canoniquement

isomorphes et les  $\mathbf{T}$ -variétés  $\mathcal{U}(\mathbf{n})$  et  $\mathcal{U}(\mathbf{n}')$  sont isomorphes, ces isomorphismes rendant le diagramme



commutatif.

De plus,  $\mathbf{T}^{\mathbf{w}F} = \mathbf{T}^{\mathbf{w}'F}$  et les  $\mathbf{T}^{\mathbf{w}F}$ -variétés  $\mathbf{Y}(\mathbf{n})$  et  $\mathbf{Y}(\mathbf{n}')$  (resp. les variétés  $\mathbf{X}(\mathbf{w})$  et  $\mathbf{X}(\mathbf{w}')$ ) sont isomorphes (resp. canoniquement isomorphes), les isomorphismes rendant le diagramme



commutatif.

### 1.2. Compactification de Bott-Samelson-Demazure-Hansen

Pour tout  $\alpha \in \Delta$ , on fixe un représentant  $\dot{s}_\alpha$  de  $s_\alpha$  dans  $\mathbf{G}_\alpha$ . La remarque 1.1 montre que, dans le but de construire une compactification des variétés  $\mathbf{Y}(\mathbf{n})$  et  $\mathbf{X}(\mathbf{w})$ , il est suffisant de travailler sous les hypothèses suivantes :

**HYPOTHÈSE.** — *Nous fixons une suite  $(\alpha_1, \dots, \alpha_r)$  d'éléments de  $\Delta$  et, si  $1 \leq i \leq r$ , nous posons pour simplifier  $s_i = s_{\alpha_i}$  et  $\dot{s}_i = \dot{s}_{\alpha_i}$ . Nous supposons de plus que  $\mathbf{n} = (\dot{s}_1, \dots, \dot{s}_r)$  et  $\mathbf{w} = (s_1, \dots, s_r)$ .*

Si  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_r)$  et  $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_r)$  sont deux suites d'éléments de  $\bar{S} = S \cup \{1\}$  (de même longueur), nous écrirons  $\mathbf{x} \preccurlyeq \mathbf{y}$  si, pour tout  $i \in \{1, 2, \dots, r\}$ , on a  $x_i \in \{1, y_i\}$ . On pose aussi  $\dot{\mathbf{x}} = (\dot{x}_1, \dots, \dot{x}_r)$ , où nous choisirons toujours  $\dot{1} = 1$ . Par exemple,  $\dot{\mathbf{w}} = \mathbf{n}$  et, pour simplifier les notations, nous noterons  $\pi_{\dot{\mathbf{x}}}$ ,  $\pi_{\mathbf{x}}$ ,  $\nu_{\mathbf{x}}$  et  $\nu_{\dot{\mathbf{x}}}$  les applications  $\pi_{\dot{\mathbf{x}}}$ ,  $\pi_{\mathbf{x}}$ ,  $\nu_{\mathbf{x}}$  et  $\nu_{\dot{\mathbf{x}}}$ , et la variété  $\mathbf{Y}(\dot{\mathbf{x}})$  sera notée  $\mathbf{Y}(\mathbf{x})$ . Pour finir, on pose  $I_{\mathbf{x}} = \{1 \leq i \leq r \mid x_i = 1\}$  et on définit, comme dans [1, §4.4.2],

$$Y_{\mathbf{w}, \mathbf{x}} = \sum_{i \in I_{\mathbf{x}}} \mathbb{Z} s_1 \cdots s_{i-1}(\alpha_i^\vee).$$

Bott-Samelson, Demazure et Hansen ont construit une compactification lisse  $\bar{\mathcal{B}}(\mathbf{w})$  de  $\mathcal{B}(\mathbf{w})$  :

$$\begin{aligned} \bar{\mathcal{B}}(\mathbf{w}) &= \coprod_{\mathbf{x} \preccurlyeq \mathbf{w}} \mathcal{B}(\mathbf{x}) \\ &= \{(g_1 \mathbf{B}, \dots, g_{r+1} \mathbf{B}) \in (\mathbf{G}/\mathbf{B})^{r+1} \mid \forall 1 \leq i \leq r, g_i^{-1} g_{i+1} \in \mathbf{G}_{\alpha_i} \mathbf{B}\}. \end{aligned}$$

Alors  $\bar{\mathcal{B}}(\mathbf{w})$  est lisse, projective, irréductible et contient  $\mathcal{B}(\mathbf{w})$  comme sous-variété ouverte. Posons

$$\begin{aligned} \bar{\beta}_{\mathbf{w}} : \quad \bar{\mathcal{B}}(\mathbf{w}) &\longrightarrow \mathbf{G}/\mathbf{B} \times \mathbf{G}/\mathbf{B} \\ (g_1 \mathbf{B}, \dots, g_{r+1} \mathbf{B}) &\longmapsto (g_1 \mathbf{B}, g_{r+1} \mathbf{B}). \end{aligned}$$

Alors  $\bar{\beta}_{\mathbf{w}}$  prolonge  $\beta_{\mathbf{w}}$  (et en fait coïncide avec  $\beta_{\mathbf{x}}$  sur  $\mathcal{B}(\mathbf{x})$  pour tout  $\mathbf{x} \preccurlyeq \mathbf{w}$ ). On pose alors, suivant [3, §9.10],

$$\bar{\mathbf{X}}(\mathbf{w}) = \bar{\beta}_{\mathbf{w}}^{-1}(\mathcal{B}_F).$$

Notons que

$$(1.3) \quad \bar{\mathbf{X}}(\mathbf{w}) = \coprod_{\mathbf{x} \preccurlyeq \mathbf{w}} \mathbf{X}(\mathbf{x}).$$

Alors  $\bar{\mathbf{X}}(\mathbf{w})$  est une variété lisse, projective et contient  $\mathbf{X}(\mathbf{w})$  comme sous-variété ouverte [3, lemme 9.11].

### 1.3. Normalisation

Avant de parler de la compactification de  $\mathbf{Y}(\mathbf{n})$  et avant d'énoncer le résultat principal de cet article, nous aurons besoin de quelques notations. Tout d'abord, fixons un entier naturel non nul  $d$  et une puissance  $q$  de  $p$  tels que, pour tout  $t \in \mathbf{T}$  et pour tout  $w \in W$ , on ait  $(wF)^d(t) = t^q$ . On fixe une racine primitive  $(q - 1)$ -ième de l'unité  $\zeta$  dans  $\mathbf{G}_m$ . On note encore  $\mathbf{w}F$  :

$Y(\mathbf{T}) \rightarrow Y(\mathbf{T})$  l'endomorphisme de groupes induits par l'endomorphisme  $\mathbf{w}F : \mathbf{T} \rightarrow \mathbf{T}$  et on pose

$$\begin{aligned} N_{\mathbf{w}} : Y(\mathbf{T}) &\longrightarrow \mathbf{T}^{\mathbf{w}F} \\ \lambda &\longmapsto N_{F^d/\mathbf{w}F}(\lambda(\zeta)), \end{aligned}$$

où  $N_{F^d/\mathbf{w}F} : \mathbf{T} \rightarrow \mathbf{T}$ ,  $t \mapsto t \cdot \mathbf{w}F t \dots (\mathbf{w}F)^{d-1} t$ . Rappelons que  $N_{\mathbf{w}}$  est surjective et induit un isomorphisme

$$Y(\mathbf{T})/(\mathbf{w}F - 1)Y(\mathbf{T}) \xrightarrow{\sim} \mathbf{T}^{\mathbf{w}F}.$$

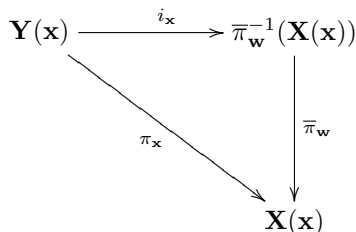
Le morphisme  $\pi_{\mathbf{w}} : \mathbf{Y}(\mathbf{w}) \rightarrow \mathbf{X}(\mathbf{w})$  étant fini, on peut définir la *normalisation*  $\overline{\mathbf{Y}}(\mathbf{w})$  de  $\overline{\mathbf{X}}(\mathbf{w})$  dans  $\mathbf{Y}(\mathbf{w})$  : c'est l'unique variété normale  $\mathbf{Z}$  contenant  $\mathbf{Y}(\mathbf{w})$  comme sous-variété ouverte dense et munie d'un morphisme fini  $\overline{\pi}_{\mathbf{w}} : \mathbf{Z} \rightarrow \overline{\mathbf{X}}(\mathbf{w})$  prolongeant  $\pi_{\mathbf{w}}$ . Le morphisme  $\overline{\pi}_{\mathbf{w}} : \overline{\mathbf{Y}}(\mathbf{w}) \rightarrow \overline{\mathbf{X}}(\mathbf{w})$  étant fini,  $\overline{\mathbf{Y}}(\mathbf{w})$  est une variété projective. Le but de cet article est de la construire explicitement et d'en déduire les propriétés suivantes :

THÉORÈME 1.2. — Avec les notations précédentes, on a :

- (a) La variété  $\overline{\mathbf{Y}}(\mathbf{w})$  est une variété projective, normale, rationnellement lisse, de lieu singulier contenu dans

$$\overline{\pi}_{\mathbf{w}}^{-1}\left(\bigcup_{\substack{\mathbf{x} \preceq \mathbf{w} \\ |I_{\mathbf{x}}| \geq 2}} \mathbf{X}(\mathbf{x})\right).$$

- (b) La variété  $\overline{\mathbf{Y}}(\mathbf{w})$  est munie d'une action de  $\mathbf{T}^{\mathbf{w}F}$  prolongeant l'action sur  $\mathbf{Y}(\mathbf{w})$  et telle que  $\overline{\pi}_{\mathbf{w}}$  induit un isomorphisme  $\overline{\mathbf{Y}}(\mathbf{w})/\mathbf{T}^{\mathbf{w}F} \xrightarrow{\sim} \overline{\mathbf{X}}(\mathbf{w})$ .
- (c) Si  $\mathbf{x} \preceq \mathbf{w}$ , le stabilisateur dans  $\mathbf{T}^{\mathbf{w}F}$  d'un élément de  $\overline{\pi}_{\mathbf{w}}^{-1}(\mathbf{X}(\mathbf{x}))$  est égal à  $N_{\mathbf{w}}(Y_{\mathbf{w},\mathbf{x}})$ .
- (d) Si  $\mathbf{x} \preceq \mathbf{w}$ , alors il existe un morphisme canonique  $i_{\mathbf{x}} : \mathbf{Y}(\mathbf{x}) \rightarrow \overline{\pi}_{\mathbf{w}}^{-1}(\mathbf{X}(\mathbf{x}))$  rendant le diagramme suivant commutatif



et induisant un isomorphisme  $\mathbf{Y}(\mathbf{x})/N_{\mathbf{x}}(Y_{\mathbf{w},\mathbf{x}}) \xrightarrow{\sim} \overline{\pi}_{\mathbf{w}}^{-1}(\mathbf{X}(\mathbf{x}))$ .



Rassemblons les constructions précédentes dans le diagramme commutatif suivant :

$$(1.4) \quad \begin{array}{ccccc} \mathbf{Y}(\mathbf{w}) & \xleftarrow{i_{\mathbf{w}}} & \overline{\mathbf{Y}}(\mathbf{w}) & \xleftarrow{\pi_{\mathbf{w}}^{-1}} & \mathbf{X}(\mathbf{x}) & \xleftarrow{i_{\mathbf{x}}} & \mathbf{Y}(\mathbf{x}) \\ \downarrow \pi_{\mathbf{w}} & & \downarrow \overline{\pi}_{\mathbf{w}} & & \downarrow & \searrow \pi_{\mathbf{x}} & \\ \mathbf{X}(\mathbf{w}) & \xleftarrow{\quad} & \overline{\mathbf{X}}(\mathbf{w}) & \xleftarrow{\quad} & \mathbf{X}(\mathbf{x}) & & \end{array}$$

Remarque 1.3. — L'énoncé (c) du théorème précédent montre que

$$\mathbf{X}(\mathbf{x}) \simeq \overline{\pi}_{\mathbf{w}}^{-1}(\mathbf{X}(\mathbf{x})) / (\mathbf{T}^{\mathbf{w}^F} / N_{\mathbf{w}}(Y_{\mathbf{w},\mathbf{x}}))$$

tandis que l'énoncé (d) montre que

$$\mathbf{X}(\mathbf{x}) \simeq \overline{\pi}_{\mathbf{w}}^{-1}(\mathbf{X}(\mathbf{x})) / (\mathbf{T}^{\mathbf{x}^F} / N_{\mathbf{x}}(Y_{\mathbf{w},\mathbf{x}})).$$

Ceci n'est pas une incohérence car

$$\mathbf{T}^{\mathbf{w}^F} / N_{\mathbf{w}}(Y_{\mathbf{w},\mathbf{x}}) \simeq \mathbf{T}^{\mathbf{x}^F} / N_{\mathbf{x}}(Y_{\mathbf{w},\mathbf{x}})$$

d'après [1, proposition 4.4 (4)].

La section suivante est consacrée à la démonstration du théorème 1.2. Avant cela, montrons que ce théorème fournit une autre preuve de [3, lemme 9.13]. Tout d'abord, si  $1 \leq i \leq r$ , notons  $\mathbf{w}(i) = (s_1, \dots, s_{i-1}, 1, s_{i+1}, \dots, s_r) \preceq \mathbf{w}$ . Alors

$$\overline{\mathbf{X}}(\mathbf{w}) \setminus \mathbf{X}(\mathbf{w}) = \bigcup_{i=1}^r \overline{\mathbf{X}(\mathbf{w}(i))}$$

et les  $\overline{\mathbf{X}(\mathbf{w}(i))}$  sont des diviseurs lisses à croisements normaux.

On en déduit alors [3, Lemma 9.13] :

COROLLAIRE 1.4. — *Le  $\mathbf{T}^{\mathbf{w}^F}$ -torseur  $\mathbf{Y}(\mathbf{w})$  (au-dessus de  $\mathbf{X}(\mathbf{w})$ ) se ramifie le long de  $\mathbf{X}(\mathbf{w}(i))$  de la même façon que le changement de base sous  $s_1 \cdots s_{i-1}(\alpha_i^{\vee}) : \mathbf{G}_m \rightarrow \mathbf{T}$  du revêtement de Lang  $\mathbf{T} \rightarrow \mathbf{T}$ ,  $t \mapsto t^{-1} \cdot \mathbf{w}^F t$ , se ramifie en 0.*

## 2. Démonstration du théorème 1.2

### 2.1. Première réduction

La preuve que nous proposons du théorème 1.2 passe par une construction explicite de  $\overline{\mathbf{Y}}(\mathbf{w})$ . Cependant, pour simplifier cette construction, il

convient de remarquer qu'en raisonnant comme dans [1, §6.2], on peut supposer (et nous le ferons) que l'hypothèse suivante est satisfaite :

**HYPOTHÈSE.** — *Dorénavant, et ce jusqu'à la fin de §2, nous supposons que le groupe dérivé de  $\mathbf{G}$  est simplement connexe.*

Notons que ceci implique que  $\mathbf{G}_\alpha \simeq \mathbf{SL}_2$  et que  $\alpha^\vee$  est injective pour toute racine  $\alpha$  (en particulier,  $Y(\mathbf{T})/\mathbb{Z}\alpha^\vee$  est sans torsion).

### 2.2. Fonctions bi-invariantes sur $\mathbf{G}_\alpha\mathbf{U}$

Avant de procéder à la construction explicite de  $\overline{\mathbf{Y}}(\mathbf{w})$ , nous aurons besoin de quelques résultats préliminaires sur les fonctions régulières sur  $\mathbf{G}_\alpha\mathbf{U}$  invariantes par l'action de  $\mathbf{U} \times \mathbf{U}$  par translations à gauche et à droite (ici,  $\alpha$  est une racine simple). Commençons par étudier le cas du groupe  $\mathbf{SL}_2$ .

Notons

$$\begin{aligned} \varphi : \quad \mathbf{SL}_2 &\longrightarrow \mathbf{A}^1 \\ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} &\longmapsto c \end{aligned}$$

et notons  $\mathbf{U}_2$  le sous-groupe de  $\mathbf{SL}_2$  formé des matrices unipotentes triangulaires supérieures. Il est alors facile de vérifier que  $\varphi$  est invariante par l'action de  $\mathbf{U}_2 \times \mathbf{U}_2$  sur  $\mathbf{SL}_2$  (par translations à gauche et à droite). En fait, en notant  $\mathbf{B}_2$  le groupe des matrices triangulaires supérieures de  $\mathbf{SL}_2$ , on a :

**PROPOSITION 2.1.** — *Soient  $g \in \mathbf{SL}_2$ ,  $z \in \mathbf{G}_m$ ,  $t = \text{diag}(z, z^{-1})$  et  $s = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ . Alors :*

- (a)  $\mathbb{F}[\mathbf{SL}_2]^{\mathbf{U}_2 \times \mathbf{U}_2} = \mathbb{F}[\varphi]$ .
- (b)  $\varphi(tg) = z^{-1}\varphi(g)$  et  $\varphi(gt) = z\varphi(g)$ .
- (c)  $\varphi(t^{-1}g^st) = \varphi(g)$ .
- (d) On a  $\varphi(g) = 0$  si et seulement si  $g \in \mathbf{B}_2$ .
- (e) On a  $\varphi(g) = 1$  si et seulement si  $g \in \mathbf{U}_2s\mathbf{U}_2$ .

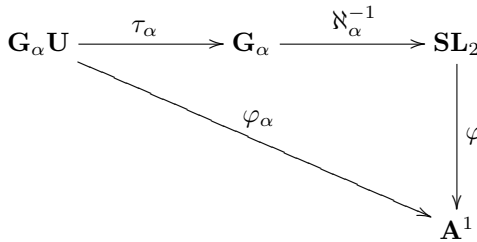
*Démonstration.* — (a) Soit  $\psi \in \mathbb{F}[\mathbf{SL}_2]^{\mathbf{U}_2 \times \mathbf{U}_2}$ . Il existe un unique polynôme  $P \in \mathbb{F}[T]$  tel que, pour tout  $c \in \mathbf{A}^1$ ,  $\psi \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ c & 1 \end{pmatrix} = P(c)$ . Alors  $\psi - P(\varphi)$  est une fonction  $\mathbf{U}_2 \times \mathbf{U}_2$ -invariante sur  $\mathbf{SL}_2$  et nulle sur  ${}^s\mathbf{U}_2$ . Par conséquent, elle est nulle sur  $\mathbf{U}_2{}^s\mathbf{U}_2\mathbf{U}_2$  : or, cet ensemble est dense dans  $\mathbf{SL}_2$ , donc  $\psi - P(\varphi) = 0$ .

(b), (c), (d) et (e) découlent de calculs élémentaires. □

Revenons aux groupes  $\mathbf{G}_\alpha \mathbf{U}$ . Fixons une racine simple  $\alpha \in \Delta$ . Choisissons un isomorphisme  $\aleph_\alpha : \mathbf{SL}_2 \xrightarrow{\sim} \mathbf{G}_\alpha$  de sorte que

$$\aleph_\alpha(\mathbf{U}_2) = \mathbf{U}_\alpha, \quad \aleph_\alpha(s) = \dot{s}_\alpha, \quad \text{et} \quad \aleph_\alpha \begin{pmatrix} z & 0 \\ 0 & z^{-1} \end{pmatrix} = \alpha^\vee(z)$$

pour tout  $z \in \mathbf{G}_m$ . Notons  $\mathbf{U}_\alpha^*$  le sous-groupe de  $\mathbf{U}$  engendré par la famille  $(\mathbf{U}_\beta)_{\beta \in \Phi^+ \setminus \{\alpha\}}$ . On a alors  $\mathbf{G}_\alpha \mathbf{U} = \mathbf{G}_\alpha \mathbf{U}_\alpha^* = \mathbf{G}_\alpha \times \mathbf{U}_\alpha^*$ . On note  $\tau_\alpha : \mathbf{G}_\alpha \times \mathbf{U}_\alpha^* \rightarrow \mathbf{G}_\alpha$  la projection naturelle. Notons pour finir  $\varphi_\alpha$  la composition  $\varphi \circ \aleph_\alpha^{-1} \circ \tau_\alpha : \mathbf{G}_\alpha \mathbf{U} \rightarrow \mathbf{A}^1$ , de sorte que le diagramme



soit commutatif. C'est une fonction régulière sur  $\mathbf{G}_\alpha \mathbf{U}$ . Notons de plus que

$$(2.1) \quad \varphi_\alpha(\dot{s}_\alpha) = 1,$$

car  $\varphi(s) = 1$ .

PROPOSITION 2.2. — Soient  $g \in \mathbf{G}_\alpha \mathbf{U}$ ,  $u, v \in \mathbf{U}$ ,  $t \in \mathbf{T}$  et  $z \in \mathbf{G}_m$ . Alors

- (a)  $\varphi_\alpha(ugv) = \varphi_\alpha(g)$ .
- (b)  $\varphi_\alpha(g\alpha^\vee(z)) = z\varphi_\alpha(g)$  et  $\varphi_\alpha(\alpha^\vee(z)g) = z^{-1}\varphi_\alpha(g)$ .
- (c)  $t^{-1}g \mathop{s_\alpha}t \in \mathbf{G}_\alpha \mathbf{U}$  et  $\varphi_\alpha(t^{-1}g \mathop{s_\alpha}t) = \varphi_\alpha(g)$ .
- (d)  $\varphi_\alpha(g) = 0$  si et seulement si  $g \in \mathbf{B}$  (c'est-à-dire si et seulement si  $g \in \mathbf{T}_{\alpha^\vee} \mathbf{U} = \mathbf{B} \cap \mathbf{G}_\alpha \mathbf{U}$ ).
- (e)  $\varphi_\alpha(g) = 1$  si et seulement si  $g \in \mathbf{U}\dot{s}_\alpha \mathbf{U}$ .

Démonstration. — Les assertions (a), (b), (d) et (e) découlent facilement de la proposition 2.1 et du fait que  $\mathbf{U}_\alpha^*$  est normalisé par  $\mathbf{U}$  et  $\mathbf{G}_\alpha$ . Seul le (c) nécessite un commentaire. Tout d'abord, comme  $\mathbf{T}$  est engendré par  $\text{Ker } \alpha$  et  $\mathbf{T}_{\alpha^\vee}$ , il suffit de montrer le résultat dans les deux cas suivants :  $\alpha(t) = 1$  ou  $t = \alpha^\vee(z)$ ,  $z \in \mathbf{G}_m$ . Le deuxième cas se traite immédiatement par la proposition 2.1. Dans le premier cas, on remarque que  $t$  commute avec  $\mathbf{G}_\alpha$  (et donc  $\mathop{s_\alpha}t = t$ ) et, comme il normalise  $\mathbf{U}_\alpha^*$ , on a  $\tau_\alpha(t^{-1}g \mathop{s_\alpha}t) = \tau_\alpha(g)$ .  $\square$

### 2.3. Construction de la variété $\overline{Y}(\mathbf{w})$ : première étape

Posons pour commencer

$$\tilde{\mathcal{U}}(\mathbf{w}) = \{(g_1\mathbf{U}, \dots, g_{r+1}\mathbf{U}) \in (\mathbf{G}/\mathbf{U})^{r+1} \mid \forall 1 \leq i \leq r, g_i^{-1}g_{i+1} \in \mathbf{G}_{\alpha_i}\mathbf{U}\}$$

et notons

$$\tilde{\pi}_{\mathbf{w}} : \tilde{\mathcal{U}}(\mathbf{w}) \longrightarrow \overline{\mathcal{B}}(\mathbf{w})$$

l'application canonique. Notons  $\tilde{v}_{\mathbf{w}} : \tilde{\mathcal{U}}(\mathbf{w}) \rightarrow \mathbf{G}/\mathbf{U} \times \mathbf{G}/\mathbf{U}, (g_1\mathbf{U}, \dots, g_{r+1}\mathbf{U}) \mapsto (g_1\mathbf{U}, g_{r+1}\mathbf{U})$  l'extension de  $v_{\mathbf{w}}$ . La variété  $\tilde{\mathcal{U}}(\mathbf{w})$  est irréductible, quasi-affine, lisse et de dimension  $2r + \dim \mathbf{G}/\mathbf{U}$ .

Nous définissons

$$\begin{aligned} \varphi_{\mathbf{w}} : \quad & \tilde{\mathcal{U}}(\mathbf{w}) && \longrightarrow & \mathbf{A}^r \\ & (g_1\mathbf{U}, \dots, g_{r+1}\mathbf{U}) && \longmapsto & (\varphi_{\alpha_1}(g_1^{-1}g_2), \dots, \varphi_{\alpha_r}(g_r^{-1}g_{r+1})). \end{aligned}$$

D'après la proposition 2.2 (a), l'application  $\varphi_{\mathbf{w}}$  est bien définie et est un morphisme de variétés. Fixons maintenant un  $r$ -uplet d'entiers naturels non nuls  $\mathbf{d} = (d_1, \dots, d_r)$ , notons  $f_{\mathbf{d}} : \mathbf{A}^r \rightarrow \mathbf{A}^r, (\xi_1, \dots, \xi_r) \mapsto (\xi_1^{d_1}, \dots, \xi_r^{d_r})$  et posons

$$\tilde{\mathcal{U}}_{\mathbf{d}}(\mathbf{w}) = \{(\mathbf{g}, \boldsymbol{\xi}) \in \tilde{\mathcal{U}}(\mathbf{w}) \times \mathbf{A}^r \mid \varphi_{\mathbf{w}}(\mathbf{g}) = f_{\mathbf{d}}(\boldsymbol{\xi})\}.$$

PROPOSITION 2.3. — La variété  $\tilde{\mathcal{U}}_{\mathbf{d}}(\mathbf{w})$  est lisse, de dimension  $2r + \dim \mathbf{G}/\mathbf{U}$ .

Démonstration. — Si  $\alpha \in \Delta$  et  $d \in \mathbb{N}^*$ , posons

$$\mathcal{U}_{\alpha,d} = \{(g, \xi) \in \mathbf{G}_{\alpha}\mathbf{U}/\mathbf{U} \times \mathbf{A}^1 \mid \varphi_{\alpha}(g) = \xi^d\}.$$

Les isomorphismes  $\aleph_{\alpha} : \mathbf{G}_{\alpha} \xrightarrow{\sim} \mathbf{SL}_2$  et  $\mathbf{SL}_2/\mathbf{U}_2 \xrightarrow{\sim} \mathbf{A}^2 - \{(0,0)\}, \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto (a,c)$  induisent un isomorphisme  $\mathbf{G}_{\alpha}\mathbf{U}/\mathbf{U} \xrightarrow{\sim} \mathbf{A}^2 \setminus \{(0,0)\}$  et finalement

$$\mathcal{U}_{\alpha,d} \xrightarrow{\sim} \{(x, y, \xi) \in \mathbf{A}^3 \mid (x, y) \neq (0,0) \text{ et } y = \xi^d\} \simeq \mathbf{A}^2 \setminus \{(0,0)\}.$$

En particulier,  $\mathcal{U}_{\alpha,d}$  est lisse.

Soient  $\mathbf{w}_i = (s_1, \dots, s_i)$  et  $\mathbf{d}_i = (d_1, \dots, d_i)$ . On dispose d'une suite de morphismes canoniques

$$\tilde{\mathcal{U}}_{\mathbf{d}}(\dot{\mathbf{w}}) = \tilde{\mathcal{U}}_{\mathbf{d}_r}(\dot{\mathbf{w}}_r) \longrightarrow \tilde{\mathcal{U}}_{\mathbf{d}_{r-1}}(\dot{\mathbf{w}}_{r-1}) \longrightarrow \dots \longrightarrow \tilde{\mathcal{U}}_{\mathbf{d}_1}(\dot{\mathbf{w}}_1) \longrightarrow \mathbf{G}/\mathbf{U}$$

(consistant à chaque étape à oublier le dernier terme de  $\mathbf{g}$  et  $\boldsymbol{\xi}$ ) qui sont des fibrations successives de fibres successivement isomorphes à des variétés de la forme  $\mathcal{U}_{\alpha,d}$ , donc lisses. La lissité de  $\tilde{\mathcal{U}}_{\mathbf{d}}(\dot{\mathbf{w}})$  s'en déduit.  $\square$

**2.4. Construction de la variété  $\tilde{\mathbf{Y}}(\mathbf{w})$  : deuxième étape**

Si  $1 \leq i \leq r$ , il existe un unique  $\lambda_i \in Y(\mathbf{T})$  et un unique  $m_i \in \mathbb{Z}$  vérifiant les trois propriétés suivantes :

$$\begin{cases} \lambda_i - \mathbf{w}F(\lambda_i) = m_i s_1 \cdots s_{i-1}(\alpha_i^\vee), \\ m_i > 0, \\ Y(\mathbf{T})/\mathbb{Z}\lambda_i \text{ est sans torsion.} \end{cases}$$

Ceci découle de l'injectivité de  $\text{Id}_{Y(\mathbf{T})} - \mathbf{w}F$  et du fait que  $Y(\mathbf{T})/\mathbb{Z}\alpha_i^\vee$  est sans torsion.

*Remarque 2.4.* — Les  $m_i$  ne sont pas divisibles par  $p$  car l'égalité qui les définit implique que

$$(2.2) \quad m_i N_{F^d/\mathbf{w}F}(s_1 \cdots s_{i-1}(\alpha_i^\vee)) = (q - 1)\lambda_i,$$

donc

$$(2.3) \quad m_i \text{ divise } q - 1,$$

car  $Y(\mathbf{T})/\mathbb{Z}\lambda_i$  est sans torsion.

Posons alors  $\mathbf{m} = (m_1, \dots, m_r)$  et

$$\tilde{\mathbf{Y}}(\mathbf{w}) = \{(\mathbf{g}; \boldsymbol{\xi}) \in \tilde{\mathbf{U}}_{\mathbf{m}}(\mathbf{w}) \mid \tilde{\mathbf{v}}_{\mathbf{w}}(\mathbf{g}) \in \mathbf{U}_F\}.$$

En d'autres termes,  $\tilde{\mathbf{Y}}(\mathbf{w})$  est formée des éléments  $(g_1\mathbf{U}, \dots, g_{r+1}\mathbf{U}; \xi_1, \dots, \xi_r) \in (\mathbf{G}/\mathbf{U})^{r+1} \times \mathbf{A}^r$  tels que

$$(2.4) \quad \begin{cases} \forall i \in \{1, 2, \dots, r\}, g_i^{-1}g_{i+1} \in \mathbf{G}_{\alpha_i}\mathbf{U} \text{ et } \varphi_{\alpha_i}(g_i^{-1}g_{i+1}) = \xi_i^{m_i}; \\ g_{r+1}\mathbf{U} = F(g_1)\mathbf{U}. \end{cases}$$

Rappelons le lemme suivant :

**LEMME 2.5** (Deligne-Lusztig). — *Soient  $\mathbf{H}$  un sous-groupe fermé  $F$ -stable de  $\mathbf{G}$ ,  $\mathbf{Z}$  une  $\mathbf{G}$ -variété lisse et  $\theta : \mathbf{Z} \rightarrow \mathbf{G}/\mathbf{H} \times \mathbf{G}/\mathbf{H}$  un morphisme  $\mathbf{G}$ -équivariant. Alors le graphe de  $F : \mathbf{G}/\mathbf{H} \rightarrow \mathbf{G}/\mathbf{H}$  est transverse à  $\theta$ .*

*Démonstration.* — Ce lemme est montré dans [3, Preuve du lemme 9.11] dans le cas où  $\mathbf{H} = \mathbf{B}$  mais la preuve reste valable mot pour mot dans le cas général. □

Le morphisme  $\tilde{\mathbf{U}}_{\mathbf{m}}(\mathbf{w}) \rightarrow \mathbf{G}/\mathbf{U} \times \mathbf{G}/\mathbf{U}, (\mathbf{g}, \boldsymbol{\xi}) \mapsto \mathbf{v}_{\mathbf{w}}(\mathbf{g})$  est  $\mathbf{G}$ -équivariant et la variété  $\tilde{\mathbf{U}}_{\mathbf{m}}(\mathbf{w})$  est lisse d'après la proposition 2.3. On déduit donc du lemme 2.5 que

$$(2.5) \quad \tilde{\mathbf{Y}}(\mathbf{w}) \text{ est lisse, purement de dimension } 2r.$$

Notons

$$\begin{aligned} \tilde{\pi}_{\mathbf{w}} : \tilde{\mathbf{Y}}(\mathbf{w}) &\longrightarrow \overline{\mathbf{X}}(\mathbf{w}) \\ (\mathbf{g}, \xi) &\longmapsto \tilde{\pi}_{\mathbf{w}}(\mathbf{g}). \end{aligned}$$

Nous allons maintenant construire une action à droite de  $\mathbf{T}^{\mathbf{w}F} \times (\mathbf{G}_m)^r$  sur  $\tilde{\mathbf{Y}}(\mathbf{w})$ . Tout d'abord posons, pour tout  $\mathbf{z} = (z_1, \dots, z_r) \in (\mathbf{G}_m)^r$ ,

$$\begin{cases} \gamma_1(\mathbf{z}) = \lambda_1(z_1) \cdots \lambda_r(z_r) \\ \gamma_{i+1}(\mathbf{z}) = s_i \gamma_i(\mathbf{z}) \alpha_i^\vee(z_i^{m_i}), \text{ pour } i \in \{1, 2, \dots, r\}. \end{cases}$$

Alors

$$(2.6) \quad F(\gamma_1(\mathbf{z})) = \gamma_{r+1}(\mathbf{z}).$$

*Démonstration.* — En effet,

$$\gamma_{r+1}(\mathbf{z}) = \mathbf{w}^{-1} \gamma_1(\mathbf{z}) s_r \cdots s_2 \alpha_1^\vee(z_1^{m_1}) s_r \cdots s_3 \alpha_2^\vee(z_2^{m_2}) \cdots \alpha_r^\vee(z_r^{m_r})$$

et donc

$$\begin{aligned} \mathbf{w}^F \gamma_1(\mathbf{z})^{-1} \mathbf{w} \gamma_{r+1}(\mathbf{z}) &= (\lambda_1(z_1) \cdots \lambda_r(z_r)) \mathbf{w}^F (\lambda_1(z_1) \cdots \lambda_r(z_r))^{-1} \\ &\quad \times \alpha_1^\vee(z_1^{-m_1}) s_1 \alpha_2^\vee(z_2^{-m_2}) \cdots s_1 \cdots s_{r-1} \alpha_r^\vee(z_r^{-m_r}) = 1, \end{aligned}$$

la dernière égalité découlant de la définition des  $\lambda_i$ . □

Si  $\mathbf{z} = (z_1, \dots, z_r) \in (\mathbf{G}_m)^r$ , si  $t \in \mathbf{T}^{\mathbf{w}F}$  et si  $(g_1\mathbf{U}, \dots, g_r\mathbf{U}, F(g_1)\mathbf{U}; \xi_1, \dots, \xi_r) \in \tilde{\mathbf{Y}}(\mathbf{w})$ , on pose

$$\begin{aligned} (g_1\mathbf{U}, \dots, g_r\mathbf{U}, F(g_1)\mathbf{U}; \xi_1, \dots, \xi_r) * \mathbf{z} = \\ (g_1\gamma_1(\mathbf{z})\mathbf{U}, \dots, g_r\gamma_r(\mathbf{z})\mathbf{U}, F(g_1)\gamma_{r+1}(\mathbf{z})\mathbf{U}; z_1\xi_1, \dots, z_r\xi_r) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} (g_1\mathbf{U}, \dots, g_r\mathbf{U}, F(g_1)\mathbf{U}; \xi_1, \dots, \xi_r) * t = \\ (g_1t\mathbf{U}, g_2^{s_1}t\mathbf{U}, \dots, g_r^{s_{r-1}\cdots s_1}t\mathbf{U}, F(g_1)^{s_r\cdots s_1}t\mathbf{U}; \xi_1, \dots, \xi_r). \end{aligned}$$

**PROPOSITION 2.6.** — *Les formules ci-dessus définissent une action de  $\mathbf{T}^{\mathbf{w}F} \times (\mathbf{G}_m)^r$  sur la variété  $\tilde{\mathbf{Y}}(\mathbf{w})$ . De plus, le morphisme  $\tilde{\pi}_{\mathbf{w}} : \tilde{\mathbf{Y}}(\mathbf{w}) \rightarrow \overline{\mathbf{X}}(\mathbf{w})$  induit un isomorphisme  $\tilde{\mathbf{Y}}(\mathbf{w})/(\mathbf{T}^{\mathbf{w}F} \times (\mathbf{G}_m)^r) \xrightarrow{\sim} \overline{\mathbf{X}}(\mathbf{w})$ .*

*Démonstration.* — Montrons que l'on a bien défini une action. Soient  $(\mathbf{g}; \xi) \in \tilde{\mathbf{Y}}(\mathbf{w})$ ,  $t \in \mathbf{T}^{\mathbf{w}F}$  et  $\mathbf{z} \in (\mathbf{G}_m)^r$ . Il suffit de montrer que  $(\mathbf{g}; \xi) * t$  et  $(\mathbf{g}; \xi) * \mathbf{z}$  appartiennent à  $\tilde{\mathbf{Y}}(\mathbf{w})$  (les axiomes des actions de groupes sont clairement vérifiés). Écrivons

$$\mathbf{g} = (g_1\mathbf{U}, \dots, g_{r+1}\mathbf{U}), \quad \xi = (\xi_1, \dots, \xi_r) \quad \text{et} \quad \mathbf{z} = (z_1, \dots, z_r).$$

Commençons par montrer que  $(\mathbf{g}; \boldsymbol{\xi}) * t \in \tilde{\mathbf{Y}}(\mathbf{w})$ . Posons pour simplifier  $t_i = s_i^{-1} \cdots s_1 t$ . On a alors

$$(g_i t_i)^{-1} (g_{i+1} t_{i+1}) = t_i^{-1} (g_i^{-1} g_{i+1}) s_i t_i$$

et donc, d'après la proposition 2.2 (c), on a  $(g_i t_i)^{-1} (g_{i+1} t_{i+1}) \in \mathbf{G}_{\alpha_i} \mathbf{U}$  et

$$\varphi_{\alpha_i}((g_i t_i)^{-1} (g_{i+1} t_{i+1})) = \varphi_{\alpha_i}(g_i^{-1} g_{i+1}) = \xi_i^{m_i}.$$

D'autre part, puisque  $t \in \mathbf{T}^{\mathbf{w}^F}$ , on a  $F(g_1 t_1) \mathbf{U} = g_{r+1} F t \mathbf{U} = g_{r+1} \mathbf{w}^{-1} t \mathbf{U} = g_{r+1} t_{r+1} \mathbf{U}$ . Donc  $(\mathbf{g}; \boldsymbol{\xi}) * t \in \tilde{\mathbf{Y}}(\mathbf{w})$ .

Montrons maintenant que  $(\mathbf{g}; \boldsymbol{\xi}) * \mathbf{z} \in \tilde{\mathbf{Y}}(\mathbf{w})$ . D'une part, on a

$$(g_i \gamma_i(\mathbf{z}))^{-1} (g_{i+1} \gamma_{i+1}(\mathbf{z})) = \gamma_i(\mathbf{z})^{-1} (g_i^{-1} g_{i+1}) s_i \gamma_i(\mathbf{z}) \alpha_i^\vee(z_i^{m_i}),$$

donc  $(g_i \gamma_i(\mathbf{z}))^{-1} (g_{i+1} \gamma_{i+1}(\mathbf{z})) \in \mathbf{G}_{\alpha_i} \mathbf{U}$  et son image par le morphisme  $\varphi_{\alpha_i}$  est  $z_i^{m_i} \varphi_{\alpha_i}(g_i^{-1} g_{i+1}) = (z_i \xi_i)^{m_i}$  (voir la proposition 2.2 (b) et (c)). D'autre part, d'après 2.6, on obtient  $g_{r+1} \gamma_{r+1}(\mathbf{z}) \mathbf{U} = F(g_1 \gamma_1(\mathbf{z})) \mathbf{U}$ . Donc  $(\mathbf{g}; \boldsymbol{\xi}) * \mathbf{z} \in \tilde{\mathbf{Y}}(\mathbf{w})$ .

Il nous reste à montrer la dernière assertion de la proposition. Tout d'abord, il est clair que les  $(\mathbf{T}^{\mathbf{w}^F} \times (\mathbf{G}_m)^r)$ -orbites sont contenues dans les fibres de  $\tilde{\pi}_{\mathbf{w}}$ . Réciproquement, montrons que les fibres de  $\tilde{\pi}_{\mathbf{w}}$  sont des orbites. Soient donc  $(\mathbf{g}; \boldsymbol{\xi})$  et  $(\mathbf{g}'; \boldsymbol{\xi}')$  deux éléments de  $\tilde{\mathbf{Y}}(\mathbf{w})$  tels que  $\tilde{\pi}_{\mathbf{w}}(\mathbf{g}; \boldsymbol{\xi}) = \tilde{\pi}_{\mathbf{w}}(\mathbf{g}'; \boldsymbol{\xi}')$ . Écrivons

$$\mathbf{g} = (g_1 \mathbf{U}, \dots, g_{r+1} \mathbf{U}), \quad \boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \dots, \xi_r),$$

$$\mathbf{g}' = (g'_1 \mathbf{U}, \dots, g'_{r+1} \mathbf{U}) \quad \text{et} \quad \boldsymbol{\xi}' = (\xi'_1, \dots, \xi'_r).$$

Par hypothèse, il existe  $t_i \in \mathbf{T}$  tels que  $g'_i \mathbf{U} = g_i t_i \mathbf{U}$ . Mais, puisque  $g_i^{-1} g'_{i+1}$  et  $g_i^{-1} g_{i+1}$  appartiennent à  $\mathbf{G}_{\alpha_i} \mathbf{U}$ , cela montre que  $t_i^{-1} t_{i+1}$  appartient à  $\mathbf{T}_{\alpha_i^\vee}$ , ou encore que  $s_i t_i^{-1} t_{i+1}$  appartient à  $\mathbf{T}_{\alpha_i^\vee}$ . Soit donc  $z_i \in \mathbf{G}_m$  tel que  $t_{i+1} = s_i t_i \alpha_i^\vee(z_i^{m_i})$ . Posons  $\mathbf{z} = (z_1, \dots, z_r)$ . Alors, quitte à remplacer  $(\mathbf{g}; \boldsymbol{\xi})$  par  $(\mathbf{g}; \boldsymbol{\xi}) * \mathbf{z}$ , et quitte à multiplier  $z_i$  par une racine  $m_i$ -ième de l'unité, on peut supposer que  $\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{\xi}'$  et  $t_{i+1} = s_i t_i$ . Mais alors, le fait que  $g_{r+1} \mathbf{U} = F(g_1) \mathbf{U}$  et  $g'_{r+1} \mathbf{U} = F(g'_1) \mathbf{U}$  impose que  $t_{r+1} = F(t_1)$ , et donc que  $t \in \mathbf{T}^{\mathbf{w}^F}$ . Par conséquent,  $(\mathbf{g}'; \boldsymbol{\xi}') = (\mathbf{g}; \boldsymbol{\xi}) * t$ .

Les variétés  $\tilde{\mathbf{Y}}(\mathbf{w})$  et  $\tilde{\mathbf{X}}(\mathbf{w})$  étant lisses et les fibres de  $\tilde{\pi}_{\mathbf{w}}$  étant des  $(\mathbf{T}^{\mathbf{w}^F} \times (\mathbf{G}_m)^r)$ -orbites, il suffit maintenant de montrer que  $\tilde{\pi}_{\mathbf{w}}$  est séparable [2, proposition 6.6]. Pour cela, notons  $\Pi(\boldsymbol{\xi}) = \xi_1 \cdots \xi_r$  si  $(\xi_1, \dots, \xi_r) \in \mathbf{A}^r$  et posons

$$\tilde{\mathbf{Y}}_\emptyset(\mathbf{w}) = \{(\mathbf{g}; \boldsymbol{\xi}) \in \tilde{\mathbf{Y}}(\mathbf{w}) \mid \Pi(\boldsymbol{\xi}) \neq 0\}.$$

Notons  $\tilde{t}_{\mathbf{w}} : \mathbf{Y}(\mathbf{w}) \rightarrow \tilde{\mathbf{Y}}(\mathbf{w})$ ,  $\mathbf{g} \mapsto (\mathbf{g}; 1, \dots, 1)$ . Le fait que  $\tilde{t}_{\mathbf{w}}(\mathbf{g}) \in \tilde{\mathbf{Y}}(\mathbf{w})$  découle de ce que  $\varphi_{\alpha_i}(s_i) = 1$  d'après 2.1. Alors  $\tilde{\mathbf{Y}}_\emptyset(\mathbf{w})$  est un ouvert de

$\tilde{\mathbf{Y}}(\mathbf{w})$  contenant  $\tilde{l}_{\mathbf{w}}(\mathbf{Y}(\mathbf{w}))$  et son image par  $\tilde{\pi}_{\mathbf{w}}$  est  $\mathbf{X}(\mathbf{w})$  (voir la proposition 2.2 (d)). Le morphisme  $\mathbf{Y}(\mathbf{w}) \rightarrow \mathbf{X}(\mathbf{w})$  étant séparable, il suffit de remarquer que l'application

$$\begin{aligned} \mathbf{Y}(\mathbf{w}) \times (\mathbf{G}_m)^r &\longrightarrow \tilde{\mathbf{Y}}_{\emptyset}(\mathbf{w}) \\ (\mathbf{g}, \mathbf{z}) &\longmapsto \tilde{l}_{\mathbf{w}}(\mathbf{g}) * \mathbf{z} \end{aligned}$$

est un isomorphisme de variétés : cela vient du fait que, si  $\mathbf{g} \in (\mathbf{G}/\mathbf{U})^{r+1}$  vérifie  $(\mathbf{g}; 1, \dots, 1) \in \tilde{\mathbf{Y}}(\mathbf{w})$ , alors  $\mathbf{g} \in \mathbf{Y}(\mathbf{w})$  d'après la proposition 2.2 (e).  $\square$

On a donc un diagramme commutatif, où les flèches verticales sont des morphismes quotients par les actions des groupes indiqués :

$$\begin{array}{ccc} \tilde{\mathbf{Y}}_{\emptyset}(\mathbf{w}) & \xrightarrow{\text{ouvert}} & \tilde{\mathbf{Y}}(\mathbf{w}) \\ (\mathbf{G}_m)^r \downarrow & & \downarrow \mathbf{T}^{\mathbf{w}^F} \times (\mathbf{G}_m)^r \\ \mathbf{Y}(\mathbf{w}) & & \\ \mathbf{T}^{\mathbf{w}^F} \downarrow & & \downarrow \\ \mathbf{X}(\mathbf{w}) & \xrightarrow{\text{ouvert}} & \bar{\mathbf{X}}(\mathbf{w}) \end{array}$$

Si  $I$  est une partie de  $\{1, 2, \dots, r\}$ , on pose

$$\tilde{\mathbf{Y}}_I(\mathbf{w}) = \{(\mathbf{g}; \xi_1, \dots, \xi_r) \in \tilde{\mathbf{Y}}(\mathbf{w}) \mid \forall i \in \{1, 2, \dots, r\}, i \in I \iff \xi_i = 0\}$$

et

$$\begin{aligned} H_I &= \{\mathbf{z} = (z_1, \dots, z_r) \in (\mathbf{G}_m)^r \mid \gamma_1(\mathbf{z}) = \dots = \gamma_{r+1}(\mathbf{z}) = 1 \\ &\quad \text{et } \forall i \notin I, z_i = 1\}. \end{aligned}$$

Alors  $\tilde{\mathbf{Y}}_I(\mathbf{w})$  est une sous-variété localement fermée de  $\tilde{\mathbf{Y}}(\mathbf{w})$ , stable par l'action de  $\mathbf{T}^{\mathbf{w}^F} \times (\mathbf{G}_m)^r$ , et

(2.7) *le stabilisateur d'un élément de  $\tilde{\mathbf{Y}}_I(\mathbf{w})$  dans  $(\mathbf{G}_m)^r$  est égal à  $H_I$ .*

D'autre part, il résulte facilement de la proposition 2.2 (d) que, si  $\mathbf{x} \preccurlyeq \mathbf{w}$ , alors

$$(2.8) \quad \tilde{\pi}_{\mathbf{w}}^{-1}(\mathbf{X}(\mathbf{x})) = \tilde{\mathbf{Y}}_{I_{\mathbf{x}}}(\mathbf{w}).$$

En particulier, on a une partition en sous-variétés localement fermées

$$(2.9) \quad \tilde{\mathbf{Y}}(\mathbf{w}) = \coprod_{I \subset \{1, 2, \dots, r\}} \tilde{\mathbf{Y}}_I(\mathbf{w}).$$

PROPOSITION 2.7. — *Soit  $I$  une partie de  $\{1, 2, \dots, r\}$ . Alors :*

- (a)  $H_I$  est un groupe fini, contenu dans  $H_{\{1, 2, \dots, r\}}$ .
- (b) Si  $|I| \leq 1$ , alors  $H_I = 1$ .



*Démonstration.* — (a) Il est tout d’abord évident que  $H_I$  est contenu dans  $H_{\{1,2,\dots,r\}}$ . Il suffit donc de montrer que ce dernier est fini. Or, si  $\mathbf{z} = (z_1, \dots, z_r) \in H_{\{1,2,\dots,r\}}$ , alors puisque  $\gamma_i(\mathbf{z}) = \gamma_{i+1}(\mathbf{z}) = 1$ , il résulte de la définition des  $\gamma_i$  que  $\alpha_i^\vee(z_i^{m_i}) = 1$ . Puisque  $\alpha_i^\vee$  est injectif (car  $\mathbf{G}_{\alpha_i} \simeq \mathbf{SL}_2$ ), on en déduit que  $z_i$  est une racine  $m_i$ -ième de l’unité. D’où le résultat.

(b) Si  $I = \emptyset$ , alors  $H_I = 1$  par définition. Si  $I = \{i\}$  et si  $\mathbf{z} = (z_1, \dots, z_r) \in H_I$ , alors  $z_1 = \dots = z_{i-1} = z_{i+1} = \dots = z_r = 1$ . Mais de plus  $\gamma_1(\mathbf{z}) = 1$ , ce qui implique que  $\lambda_i(z_i) = 1$ . Donc  $z_i = 1$  car, puisque  $Y(\mathbf{T})/\mathbb{Z}\lambda_i$  est sans torsion, le morphisme  $\lambda_i : \mathbf{G}_m \rightarrow \mathbf{T}$  est injectif.  $\square$

Posons maintenant

$$\overline{\mathbf{Y}}(\mathbf{w}) = \tilde{\mathbf{Y}}(\mathbf{w})/(\mathbf{G}_m)^r,$$

notons  $\text{proj}_{\mathbf{w}} : \tilde{\mathbf{Y}}(\mathbf{w}) \rightarrow \overline{\mathbf{Y}}(\mathbf{w})$  la projection canonique et notons  $\overline{\pi}_{\mathbf{w}} : \overline{\mathbf{Y}}(\mathbf{w}) \rightarrow \overline{\mathbf{X}}(\mathbf{w})$  le morphisme de variétés induit par  $\tilde{\pi}_{\mathbf{w}}$ . Si  $I \subset \{1, 2, \dots, r\}$ , on note  $\xi_I$  la fonction caractéristique du complémentaire de  $I$ , que l’on voit comme un élément de  $\mathbf{A}^r$ . On pose aussi  $\overline{\mathbf{Y}}_I(\mathbf{w}) = \tilde{\mathbf{Y}}_I(\mathbf{w})/(\mathbf{G}_m)^r \subset \overline{\mathbf{Y}}(\mathbf{w})$ . On a bien sûr

$$\overline{\mathbf{Y}}(\mathbf{w}) = \coprod_{I \subset \{1,2,\dots,r\}} \overline{\mathbf{Y}}_I(\mathbf{w}).$$

Soit  $\mathbf{x} \preccurlyeq \mathbf{w}$ . Comme dans la preuve de la proposition 2.6, on montre qu’on a un morphisme bien défini

$$\begin{aligned} \mathbf{Y}(\mathbf{x}) \times (\mathbf{G}_m)^r/H_{I_{\mathbf{x}}} &\rightarrow \tilde{\mathbf{Y}}_{I_{\mathbf{x}}}(\mathbf{w}) \\ (g, z) &\mapsto (g, \xi_{I_{\mathbf{x}}}) * z \end{aligned}$$

et que c’est un isomorphisme. En particulier,  $\tilde{\mathbf{Y}}_{I_{\mathbf{x}}}(\mathbf{w})$  est lisse.

On définit alors

$$\begin{aligned} i_{\mathbf{x}} : \mathbf{Y}(\mathbf{x}) &\longrightarrow \overline{\mathbf{Y}}_{I_{\mathbf{x}}}(\mathbf{w}) \\ \mathbf{g} &\longmapsto \text{proj}_{\mathbf{w}}(\mathbf{g}, \xi_{I_{\mathbf{x}}}). \end{aligned}$$

Il est clair que

$$(2.10) \quad \overline{\pi}_{\mathbf{w}}^{-1}(\mathbf{X}(\mathbf{x})) = \overline{\mathbf{Y}}_{I_{\mathbf{x}}}(\mathbf{w}).$$

Le morphisme canonique  $\tilde{\mathbf{Y}}_{I_{\mathbf{x}}}(\mathbf{w}) \rightarrow \overline{\mathbf{Y}}_{I_{\mathbf{x}}}(\mathbf{w})$  est le quotient par l’action libre de  $(\mathbf{G}_m)^r/H_{I_{\mathbf{x}}}$  et  $\tilde{\mathbf{Y}}_{I_{\mathbf{x}}}(\mathbf{w})$  est lisse, donc  $\overline{\mathbf{Y}}_{I_{\mathbf{x}}}(\mathbf{w})$  est lisse.

Nous allons montrer que  $\overline{\mathbf{Y}}(\mathbf{w})$  est la normalisation de  $\overline{\mathbf{X}}(\mathbf{w})$  dans  $\mathbf{Y}(\mathbf{w})$  et que les énoncés (a), (b), (c) et (d) du théorème 1.2 sont vérifiés.

**2.5. Fin de la démonstration**

Dans la preuve de la proposition 2.6, il a été remarqué que l'application

$$\begin{aligned} \mathbf{Y}(\mathbf{w}) \times (\mathbf{G}_m)^r &\longrightarrow \tilde{\mathbf{Y}}_\emptyset(\mathbf{w}) \\ (\mathbf{g}, \mathbf{z}) &\longmapsto \tilde{l}_\mathbf{w}(\mathbf{g}) * \mathbf{z} \end{aligned}$$

est un isomorphisme de variétés. Cela montre que  $i_\mathbf{w} : \mathbf{Y}(\mathbf{w}) \rightarrow \overline{\mathbf{Y}}(\mathbf{w})$  est une immersion ouverte, d'image  $\overline{\mathbf{Y}}_\emptyset(\mathbf{w}) = \pi_\mathbf{w}^{-1}(\overline{\mathbf{X}}(\mathbf{w}))$ . On a donc un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{Y}(\mathbf{w}) & \xhookrightarrow{i_\mathbf{w}} & \overline{\mathbf{Y}}(\mathbf{w}) \\ \pi_\mathbf{w} \downarrow & & \downarrow \overline{\pi}_\mathbf{w} \\ \mathbf{X}(\mathbf{w}) & \xhookrightarrow{\quad} & \overline{\mathbf{X}}(\mathbf{w}). \end{array}$$

D'autre part, par construction,  $i_\mathbf{w}$  est  $\mathbf{T}^{\mathbf{w}F}$ -équivariant et il résulte de la proposition 2.6 que  $\overline{\pi}_\mathbf{w}$  induit un isomorphisme de variétés

$$(2.11) \quad \overline{\mathbf{Y}}(\mathbf{w})/\mathbf{T}^{\mathbf{w}F} \xrightarrow{\sim} \overline{\mathbf{X}}(\mathbf{w}).$$

D'autre part, posons  $H = H_{\{1,2,\dots,r\}}$ . Alors  $\tilde{\mathbf{Y}}(\mathbf{w})/H$  est une variété normale et rationnellement lisse (car  $\tilde{\mathbf{Y}}(\mathbf{w})$  est lisse et  $H$  est fini) et le groupe  $(\mathbf{G}_m)^r/H$  agit librement sur  $\tilde{\mathbf{Y}}(\mathbf{w})/H$ . Donc

$$(2.12) \quad \overline{\mathbf{Y}}(\mathbf{w}) \text{ est une variété normale et rationnellement lisse}$$

et

$$(2.13) \quad \text{le morphisme } \overline{\pi}_\mathbf{w} \text{ est un morphisme fini.}$$

Par conséquent,  $\overline{\mathbf{Y}}(\mathbf{w})$  est bien la normalisation de  $\overline{\mathbf{X}}(\mathbf{w})$  dans  $\mathbf{Y}(\mathbf{w})$ .

*Preuve du (a).* — Puisque  $\overline{\pi}_\mathbf{w}$  est un morphisme fini (voir 2.13), c'est un morphisme projectif. La variété  $\overline{\mathbf{X}}(\mathbf{w})$  étant projective,  $\overline{\mathbf{Y}}(\mathbf{w})$  est aussi projective.

Le morphisme canonique  $\tilde{\mathbf{Y}}(\mathbf{w})/H_{\{1,\dots,r\}} \rightarrow \overline{\mathbf{Y}}(\mathbf{w})$  est lisse et la description du lieu singulier de  $\overline{\mathbf{Y}}(\mathbf{w})$  se ramène donc au cas de la variété  $\tilde{\mathbf{Y}}(\mathbf{w})/H_{\{1,\dots,r\}}$ . Puisque  $H_{\{1,\dots,r\}}$  agit librement sur  $\coprod_{|I|\leq 1} \tilde{\mathbf{Y}}_I(\mathbf{w})$  (d'après la proposition 2.7 (b)), on obtient la dernière assertion de (a).

*Remarque 2.8.* — Le lieu de ramification du morphisme quotient  $\tilde{\mathbf{Y}}(\mathbf{w}) \rightarrow \tilde{\mathbf{Y}}(\mathbf{w})/H_{\{1, \dots, r\}}$  est de codimension  $> 1$ . La variété  $\tilde{\mathbf{Y}}(\mathbf{w})$  est lisse, donc le théorème de pureté du lieu de ramification [5, X, Théorème 3.1] montre que le lieu singulier de  $\tilde{\mathbf{Y}}(\mathbf{w})/H_{\{1, \dots, r\}}$  est l'image de  $\coprod_{|H_I|>1} \tilde{\mathbf{Y}}_I(\mathbf{w})$ .

Il existe des exemples où la variété normale  $\overline{\mathbf{Y}}(\mathbf{w})$  n'est pas lisse : si  $\mathbf{G} = \mathbf{GL}_3$ , si  $F$  est l'endomorphisme de Frobenius déployé standard sur le corps fini  $\mathbb{F}_{q_0}$ , et si  $s$  et  $t$  sont les deux réflexions simples, alors la variété  $\overline{\mathbf{Y}}(s, t)$  n'est pas lisse car le groupe fini  $H_{1,2}$  est cyclique d'ordre  $1 + q_0 + q_0^2$ .

*Preuve du (b).* — Cela a été démontré dans 2.11.

*Preuve du (c).* — Soit  $t \in \mathbf{T}^{\mathbf{w}F}$  et soit  $\mathbf{x} \preccurlyeq \mathbf{w}$ . Alors  $t$  stabilise un élément de  $\pi_{\mathbf{w}}^{-1}(\mathbf{X}(\mathbf{x}))$  si et seulement si il existe  $\mathbf{z} = (z_1, \dots, z_r) \in (\mathbf{G}_m)^r$  tel que, pour tout  $i \in \{1, 2, \dots, r\}$ , on ait

$$\gamma_i(\mathbf{z}) = s_{i-1} \cdots s_1 t \text{ pour tout } i \text{ et } z_i = 1 \text{ pour } i \notin I_{\mathbf{x}}.$$

Si tel est le cas, on a  $z_i^{m_i} = 1$  pour tout  $i$  et  $t = \lambda_1(z_1) \cdots \lambda_r(z_r)$ . D'après 2.3, il existe donc  $e_i \in \mathbb{Z}$  tel que  $z_i = (\zeta^{(q-1)/m_i})^{e_i}$ , donc

$$t = N_{\mathbf{w}} \left( \sum_{i \in I_{\mathbf{x}}} e_i s_1 \cdots s_{i-1} (\alpha_i^{\vee}) \right)$$

d'après 2.2. Donc  $t \in N_{\mathbf{w}}(Y_{\mathbf{w}, \mathbf{x}})$ . La réciproque se montre de façon analogue.

*Preuve du (d).* — Soit  $\mathbf{x} \preccurlyeq \mathbf{w}$ . On a construit un morphisme canonique  $i_{\mathbf{x}} : \mathbf{Y}(\mathbf{x}) \rightarrow \pi_{\mathbf{w}}^{-1}(\mathbf{X}(\mathbf{x}))$ . Tout d'abord, la surjectivité de  $i_{\mathbf{x}}$  résulte du fait suivant : si  $(\mathbf{g}; \boldsymbol{\xi}) \in \tilde{\mathbf{Y}}(\mathbf{w})$  et si  $\mathbf{x} \preccurlyeq \mathbf{w}$ , alors  $\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{\xi}_{I_{\mathbf{x}}}$  si et seulement si  $\mathbf{g} \in \mathbf{Y}(\mathbf{x})$  (voir la proposition 2.2 (e)). De plus, puisque  $\pi_{\mathbf{w}}^{\mathbf{x}} \circ i_{\mathbf{x}} = \pi_{\mathbf{x}}$  (où  $\pi_{\mathbf{w}}^{\mathbf{x}}$  désigne la restriction de  $\pi_{\mathbf{w}}$  à  $\pi_{\mathbf{w}}^{-1}(\mathbf{X}(\mathbf{x})) \rightarrow \mathbf{X}(\mathbf{x})$ ), le morphisme  $i_{\mathbf{x}}$  est séparable. Les variétés  $\mathbf{Y}(\mathbf{x})$  et  $\pi_{\mathbf{w}}^{-1}(\mathbf{X}(\mathbf{x}))$  étant lisses, il suffit de montrer que les fibres de  $i_{\mathbf{x}}$  sont les  $N_{\mathbf{x}}(Y_{\mathbf{w}, \mathbf{x}})$ -orbites.

Écrivons  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_r)$ , où  $x_i \in \{1, s_i\}$  pour tout  $i$ . Comme  $\pi_{\mathbf{w}}^{\mathbf{x}} \circ i_{\mathbf{x}} = \pi_{\mathbf{x}}$ , les fibres de  $(\pi_{\mathbf{w}}^{\mathbf{x}})^{-1}$  sont contenues dans des  $\mathbf{T}^{\mathbf{x}F}$ -orbites. Soit  $t \in \mathbf{T}^{\mathbf{x}F}$  et soit  $\mathbf{g} \in \mathbf{Y}(\mathbf{x})$ . Alors  $i_{\mathbf{x}}(\mathbf{g} \cdot t) = i_{\mathbf{x}}(\mathbf{g})$  si et seulement si il existe  $\mathbf{z} = (z_1, \dots, z_r)$  dans  $(\mathbf{G}_m)^r$  tel que

$$(*) \quad \begin{cases} \forall 1 \leq i \leq r + 1, & x_{i-1} \cdots x_1 t = \gamma_i(\mathbf{z}), \\ \forall i \notin I_{\mathbf{x}}, & z_i = 1. \end{cases}$$

Posons, comme dans [1, §4.4.3],

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_{\mathbf{w}, \mathbf{x}} &= \{(a_1, \dots, a_{r+1}) \in \mathbf{T}^{r+1} \mid a_{r+1} = F(a_1), \\ &\forall i \notin I_{\mathbf{x}}, a_{i+1} = x_i a_i \text{ et } \forall i \in I_{\mathbf{x}}, a_i^{-1} a_{i+1} \in \mathbf{T}_{\alpha_i^{\vee}}\}. \end{aligned}$$

Alors

$$\mathbf{S}_{\mathbf{w}, \mathbf{x}} = \{(a_1, \dots, a_{r+1}) \in \mathbf{T}^{r+1} \mid a_{r+1} = F(a_1), \\ \forall i \notin I_{\mathbf{x}}, a_{i+1} = x_i a_i \text{ et } \forall i \in I_{\mathbf{x}}, x_i a_i^{-1} a_{i+1} \in \mathbf{T}_{\alpha_i^\vee}\}$$

et donc l'application

$$\mu_{\mathbf{x}} : \mathbf{T}^{\mathbf{x}F} \longrightarrow \mathbf{S}_{\mathbf{w}, \mathbf{x}} \\ t \longmapsto (t, x_1 t, \dots, x_{r-1} \cdots x_1 t, x_r \cdots x_1 t)$$

est bien définie (et est un morphisme de groupes injectif). D'autre part, si  $\mathbf{R}_{\mathbf{x}}$  est l'ensemble des  $(z_1, \dots, z_r) \in (\mathbf{G}_m)^r$  tels que  $z_i = 1$  si  $i \notin I_{\mathbf{x}}$ , alors l'application

$$\gamma_{\mathbf{x}} : \mathbf{R}_{\mathbf{x}} \longrightarrow \mathbf{S}_{\mathbf{w}, \mathbf{x}} \\ \mathbf{z} \longmapsto (\gamma_1(\mathbf{z}), \dots, \gamma_{r+1}(\mathbf{z}))$$

est un morphisme de groupes qui est bien défini et dont il est facile de vérifier que le noyau est fini (c'est  $H_{I_{\mathbf{x}}}$ ). Donc son image est de dimension  $|I_{\mathbf{x}}|$ , ce qui est aussi la dimension de  $\mathbf{S}_{\mathbf{w}, \mathbf{x}}$  (voir [1, page 17]). Donc

$$\mathbf{S}_{\mathbf{w}, \mathbf{x}}^\circ = \text{Im}(\gamma_{\mathbf{x}}).$$

Mais la condition (\*) est équivalente à dire que  $\mu_{\mathbf{x}}(t) \in \text{Im}(\gamma_{\mathbf{x}})$ . Le résultat découle alors de [1, proposition 4.11 (4)]. La preuve du théorème 1.2 est complète.

## BIBLIOGRAPHIE

- [1] C. BONNAFÉ & R. ROUQUIER, « Catégories dérivées et variétés de Deligne-Lusztig », *Publ. Math. I.H.E.S.* **97** (2003), p. 1-59.
- [2] A. BOREL, *Linear algebraic groups*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 126, Springer-Verlag, 1991, Second edition.
- [3] P. DELIGNE & G. LUSZTIG, « Representations of reductive groups over finite fields », *Ann. of Math.* **103** (1976), p. 103-161.
- [4] F. DIGNE, J. MICHEL & R. ROUQUIER, « Cohomologie de certaines variétés de Deligne-Lusztig », *Adv. Math.* **209** (2007), p. 749-822.

- [5] A. GROTHENDIECK, *SGA1 Revêtements étales et groupe fondamental*, Lecture Notes in Math., vol. 224, Springer, 1971.

Manuscrit reçu le 2 mai 2008,  
accepté le 29 août 2008.

Cédric BONNAFÉ  
Université de Franche-Comté  
Laboratoire de Mathématiques de Besançon  
(CNRS : UMR 6623)  
16 route de Gray  
25030 Besançon Cedex (France)  
cedric.bonnafe@univ-fcomte.fr

Raphaël ROUQUIER  
University of Oxford  
Mathematical Institute  
24-29 St Giles', Oxford, OX1 3LB, (UK)  
rouquier@maths.ox.ac.uk