ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

ROSE-MARIE HERVÉ

Quelques propriétés des sursolutions et sursolutions locales d'une équation uniformément elliptique de la forme $Lu = -\sum_i \frac{\partial}{\partial x_i}(\sum_j a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_j}) = 0$

Annales de l'institut Fourier, tome 16, nº 2 (1966), p. 241-267

<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1966__16_2_241_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
16, 2 (1966), 241-267.

QUELQUES PROPRIÉTÉS DES SURSOLUTIONS ET SURSOLUTIONS LOCALES D'UNE ÉQUATION UNIFORMÉMENT ELLIPTIQUE DE LA FORME

$$Lu = -\sum_i \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\sum_j a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_j}\right) = 0$$

par Rose-Marie HERVÉ

Dans deux articles antérieurs [5] et [6], j'ai vérifié que les solutions locales de $Lu = 0$ constituent un système de fonctions harmoniques, et indiqué quelques propriétés des fonctions surharmoniques qui lui sont associées. J'étudie ici plus spécialement les fonctions surharmoniques $\in W^{1,2}$ ou $W^{1,2}_{loc}$.

Je commence par montrer que les sursolutions (resp. les sursolutions locales) u coïncident avec les fonctions surharmoniques $\in W^{1,2}$ (resp. $W^{1,2}_{loc}$), et que, si μ désigne la distribution positive Lu, μ est aussi la « mesure de F. Riesz » associée à la fonction surharmonique u. Pour cela, je reprends, avec quelques compléments, l'étude faite par Littman, Stampacchia et Weinberger [7] dans une boule, et en particulier la notion de « solution faible de $Lu = \mu$ dans Ω, s'annulant sur $\partial\Omega$ », notion que j'étends au cas où Ω est un ouvert connexe borné.

La fonction de Green de pôle y dans Ω est la solution faible de $Lu = \varepsilon_y$ dans Ω, s'annulant sur $\partial\Omega$; ses propriétés sont étudiées directement, sans utiliser celles de la fonction de Green relative à un opérateur à coefficients réguliers. La représentation intégrale d'une fonction surharmonique à l'aide de la mesure de F. Riesz associée et de la fonction de Green permet d'améliorer un résultat de [6] et de montrer que toute fonction surharmonique est limite ponctuelle de ses régularisées, résultat bien connu dans le cas classique.

Dans la seconde partie, j'étudie la stabilité de la classe des fonctions surharmoniques $\geqslant 0$, $\in W_0^{1,2}$ ou $W_{\mathrm{loc}}^{1,2}$. Le résultat essentiel est le suivant : toute fonction surharmonique $\geqslant 0$, majorée par une fonction $\in W_0^{1,2}$ (resp. $W_{\mathrm{loc}}^{1,2}$), appartient à $W_0^{1,2}$ (resp. $W_{\mathrm{loc}}^{1,2}$) ; et cette propriété est fausse si l'on remplace $W_0^{1,2}$ par $W^{1,2}$. En particulier :

— la balayée, sur un ensemble quelconque, d'une fonction surharmonique $\geqslant 0$ et $\in W_0^{1,2}$ (resp. $W_{\mathrm{loc}}^{1,2}$), appartient à $W_0^{1,2}$ (resp. $W_{\mathrm{loc}}^{1,2}$) ;

— les fonctions surharmoniques localement bornées appartiennent à $W_{\mathrm{loc}}^{1,2}$.

Dans le dernier paragraphe, je caractérise les potentiels $\in W_0^{1,2}$: ce sont les potentiels d'énergie finie ; si u est un tel potentiel et μ sa mesure de F. Riesz :

$$\int_\Omega \sum_{i,j} a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_j} dx = \int u \, d\mu,$$

formule due à G. Evans dans le cas classique [2].

Ce travail doit beaucoup à M. G. Stampacchia, dont j'utilise les résultats et même souvent les méthodes, et qui m'a suggéré plusieurs améliorations.

Notations. — Ω est un ouvert connexe et borné de $\mathbf{R}^n$.

Les coefficients $a_{ij}(x)$ de l'opérateur

$$\mathrm{L}u = - \sum_i \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\sum_j a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j} \right)$$

sont mesurables dans Ω, symétriques par rapport aux indices i et j, et

$$\frac{1}{\lambda} \sum_i \xi_i^2 \leqslant \sum_{i,j} a_{ij}(x) \xi_i \xi_j \leqslant \lambda \sum_i \xi_i^2, \qquad \forall x \in \Omega.$$

$W^{1,p}(\Omega)$ est l'espace des fonctions $f \in L^p(\Omega)$, $p \geqslant 1$, telles que

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} \in L^p(\Omega), \quad i = 1, \quad \ldots, \quad n,$$

et

$$\|f\|_{W^{1,p}(\Omega)} = \|f\|_{L^p(\Omega)} + \|\mathrm{grad}\, f\|_{L^p(\Omega)}.$$

$W_0^{1,p}(\Omega)$ est l'adhérence de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans $W^{1,p}(\Omega)$. Pour les fonctions $f \in W_0^{1,p}(\Omega)$, la norme de $W^{1,p}(\Omega)$ est équivalente à $\|\mathrm{grad}\, f\|_{L^p(\Omega)}$, notée $\|f\|_{W_0^{1,p}(\Omega)}$.

$W^{-1,p'}(\Omega)$ est le dual de $W_0^{1,p}(\Omega)$, $p > 1$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$; il est formé des distributions sur Ω de la forme $T = \sum_i \frac{\partial f_i}{\partial x_i}$, avec $f_i \in L^{p'}(\Omega)$ [8]. $W_0^{1,p}(\Omega)$ est réflexif.

$C^0(\overline{\Omega})$ est l'espace des fonctions continues sur $\overline{\Omega}$.

$S^+(\Omega)$ est l'espace des fonctions surharmoniques $\geqslant 0$ dans Ω.

On pose $a(u, v) = \int_\Omega \sum_{i,j} a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_j} dx$, pour u et $v \in W^{1,2}(\Omega)$, et plus généralement pour $u \in W^{1,p}(\Omega)$ et $v \in W^{1,p'}(\Omega)$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$; $a(u, u)$, encore noté $|||u|||^2$, définit une norme sur $W_0^{1,2}(\Omega)$, équivalente à la norme de $W_0^{1,2}(\Omega)$.

Une solution (resp. une solution locale) de $Lu = 0$ dans Ω est une fonction $u \in W^{1,2}(\Omega)$ (resp. $W_{\text{loc}}^{1,2}(\Omega)$) telle que

$$a(u, \varphi) = 0, \qquad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Une sursolution (resp. une sursolution locale) dans Ω est une fonction $u \in W^{1,2}(\Omega)$ (resp. $W_{\text{loc}}^{1,2}(\Omega)$) telle que

$$a(u, \varphi) \geqslant 0, \qquad \forall \varphi \geqslant 0 \quad \text{et} \quad \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Une solution de $Lu = -\sum_i \frac{\partial f_i}{\partial x_i}$ dans Ω, où $f_i \in L^2(\Omega)$, est une fonction $u \in W^{1,2}(\Omega)$ telle que

$$a(u, \varphi) = \int_\Omega \sum_i f_i \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

I. COMPARAISON DES SURSOLUTIONS ET DES FONCTIONS SURHARMONIQUES $\in W^{1,2}$

1. La notion de solution faible dans un ouvert connexe borné Ω.

THÉORÈME 1. — *Étant donné une mesure μ de masse totale finie sur Ω, il existe dans $L^1(\Omega)$, une classe unique de fonctions u, appelée « solution faible de $Lu = \mu$ dans Ω, s'annulant sur $\partial\Omega$ », telle que*

(1) $\int u\psi \, dx = \int \varphi \, d\mu$ *pour toute* $\psi \in C^0(\overline{\Omega})$,

où φ est la solution continue $\in W_0^{1,2}(\Omega)$ de $L\varphi = \psi$.

En outre $u \in W_0^{1,p'}(\Omega)$, $p' < \frac{n}{n-1}$, *et*

$$\|u\|_{W_0^{1,p'}(\Omega)} \leqslant c\lambda \,(\text{mes}\ \Omega)^{\frac{1}{n}-\frac{1}{p}} \int d|\mu|,$$

avec $c(n, p)$ *et* $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$.

Si $\psi \in C^0(\overline{\Omega})$, elle peut s'écrire $\psi = \sum_i \frac{\partial f_i}{\partial x_i}$ avec $f_i \in L^p(\Omega)$, $p > n$; alors $L\varphi = \psi$ admet une solution unique $\in W_0^{1,2}(\Omega)$, représentée par une fonction continue [1], notée φ, et

$$|\varphi| \leqslant c\lambda \,(\text{mes}\ \Omega)^{\frac{1}{n}-\frac{1}{p}} \sum_i \|f_i\|_{L^p(\Omega)} \tag{2}$$

dans Ω, avec $c(n, p)$ [7, th. 2.6. ou 11, th. 4.1]. La condition (1) a donc un sens.

Pour montrer l'existence de u, on considère la forme linéaire $\psi \to \int \varphi \, d\mu$, définie sur $C^0(\overline{\Omega})$, et continue si l'on munit $C^0(\overline{\Omega})$ de la topologie de $W^{-1,p}(\Omega)$, d'après (2). Comme $C^0(\overline{\Omega})$ est dense dans $W^{-1,p}(\Omega)$, elle se prolonge en un élément $u \in W_0^{1,p'}(\Omega)$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$, et

$$\|u\|_{W_0^{1,p'}(\Omega)} \leqslant c\lambda \,(\text{mes}\ \Omega)^{\frac{1}{n}-\frac{1}{p}} \int d|\mu|.$$

En outre, pour $\psi \in C^0(\overline{\Omega})$: $\langle u, \psi \rangle = \int \varphi \, d\mu$, soit

$$\int u \, \psi \, dx = \int \varphi \, d\mu.$$

Enfin, u est unique car, $\int u\psi \, dx = 0$ pour toute $\psi \in C^0(\overline{\Omega})$ entraîne $u = 0$ p.p. dans Ω.

2. Les solutions faibles $\in W_0^{1,2}(\Omega)$.

LEMME 1. — *Étant donné* $\varphi \in W_0^{1,2}(\Omega)$, $|\varphi| \leqslant k$, *et continue dans* Ω, *il existe une suite* $\varphi_n \in \mathcal{D}(\Omega)$, $|\varphi_n| \leqslant k + 1$, *tendant vers* φ *dans* $W^{1,2}(\Omega)$ *et uniformément sur tout compact* $\subset \Omega$.

Si φ est à support compact, $\varphi_n = \varphi * \rho_n$, où ρ_n est une suite régularisante $\in \mathcal{D}(\Omega)$. Dans le cas général, tout revient donc

[1] Cf. [11, th. 7.5].

à construire $\psi_n \in W_0^{1,2}(\Omega)$, à support compact, $|\psi_n| \leqslant k+1$, et continue dans Ω, tendant vers φ dans $W^{1,2}(\Omega)$ et approchant φ à ε près sur un compact $K \subset \Omega$.

On suppose $0 \leqslant \varphi \leqslant k$ et $0 < \varepsilon \leqslant 1$. φ est limite dans $W^{1,2}(\Omega)$ d'une suite $\delta_n \in \mathcal{D}(\Omega)$, donc aussi de $\inf\left(\delta_n, \varphi + \frac{\varepsilon}{2}\right)$. On considère d'autre part $\varphi - \frac{\varepsilon}{2}$ restreinte à K et prolongée hors de K en une fonction à support compact dans Ω, comprise entre $-\frac{1}{2}$ et k et continue dans Ω, puis δ une de ses régularisées l'approchant à moins de $\frac{\varepsilon}{2}$; on a donc $\varphi - \varepsilon \leqslant \delta \leqslant \varphi$ sur K et $-\frac{1}{2} \leqslant \delta \leqslant k$ partout. On en déduit que

$$\psi_n = \sup \left\{ \inf\left(\delta_n, \varphi + \frac{\varepsilon}{2}\right), \quad \inf(\delta, \varphi) \right\}$$

répond à la question.

Corollaire. — *Étant donné $\varphi \in W_0^{1,2}(\Omega)$, continue et bornée dans Ω, il existe une suite $\varphi_n \in \mathcal{D}(\Omega)$, telle que $a(u, \varphi_n) \to a(u, \varphi)$ et $\int \varphi_n \, d\mu \to \int \varphi \, d\mu$, quels que soient $u \in W^{1,2}(\Omega)$ et la mesure μ sur Ω de masse totale finie.*

Lemme 2. — *Soit μ_n et μ des mesures de masses totales finies sur Ω, u_n et u des fonctions qui représentent les solutions faibles dans Ω, s'annulant sur $\partial\Omega$, de $Lu_n = \mu_n$ et $Lu = \mu$. Si $\int \varphi \, d\mu_n \to \int \varphi \, d\mu$ pour toute φ continue et bornée dans Ω, et $\int d|\mu_n| \leqslant M \ \forall n$, alors:*

1) *$u_n \to u$ faiblement dans $W_0^{1,p'}(\Omega)$, $\forall p' < \frac{n}{n-1}$;*

2) *il existe une suite partielle $u_{n'} \to u$ p.p. dans Ω.*

1) L'hypothèse entraîne : $\langle u - u_n, \psi \rangle \to 0$, $\forall \psi \in C^0(\overline{\Omega})$.

Soit maintenant $T \in W^{-1,p}(\Omega)$: T est limite dans $W^{-1,p}(\Omega)$ d'une suite $\psi_q \in C^0(\overline{\Omega})$ et, si $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$:

$$\begin{aligned} |\langle u - u_n, \ T - \psi_q \rangle| &\leqslant \|u - u_n\|_{W_0^{1,p'}(\Omega)} \|T - \psi_q\|_{W^{-1,p}(\Omega)} \\ &\leqslant c\,\lambda\, (\text{mes } \Omega)^{\frac{1}{n} - \frac{1}{p}} \int d|\mu - \mu_n| \|T - \psi_q\|_{W^{-1,p}(\Omega)} \quad \text{(th. 1)}, \\ &\leqslant c^{\text{ste}} \|T - \psi_q\|_{W^{-1,p}(\Omega)} \end{aligned}$$

d'après l'hypothèse; donc

$$\langle u - u_n, \mathrm{T}\rangle \to 0, \quad \forall \mathrm{T} \in \mathrm{W}^{-1,p}(\Omega).$$

2) Si ω est un ouvert $\subset \Omega$ possédant la propriété du cône, il résulte du théorème de Sobolev [3] que $u_n \to u$ fortement dans $\mathrm{L}^q(\omega)$, avec $\dfrac{1}{q} > \dfrac{1}{p'} - \dfrac{1}{n}\cdot$ En utilisant une suite croissante d'ouverts ω_i possédant la propriété du cône et de réunion Ω, et le procédé diagonal, on en déduit l'existence d'une suite partielle $u_{n'} \to u$ p.p. dans Ω.

Théorème 2. — *Soit μ une mesure de masse totale finie sur Ω et u la solution faible de $\mathrm{L}u = \mu$ dans Ω, s'annulant sur $\partial\Omega$:*

1) *pour que $u \in \mathrm{W}_0^{1,2}(\Omega)$, il faut et il suffit que la distribution $\mu \in \mathrm{W}^{-1,2}(\Omega)$; alors :*

$$a(u, \varphi) = \int \varphi \, d\mu \qquad \textit{pour toute} \qquad \varphi \in \mathrm{W}_0^{1,2}(\Omega),$$

continue et bornée dans Ω.

2) *quel que soit μ, $a(u, \varphi) = \int \varphi \, d\mu$ pour toute $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$.*

1) Supposons que la solution faible de $\mathrm{L}u = \mu$ appartienne à $\mathrm{W}_0^{1,2}(\Omega)$:

$$\int u \, \mathrm{L}\varphi \, dx = a(u, \varphi) = \int \varphi \, d\mu,$$

$\forall \varphi \in \mathrm{W}_0^{1,2}(\Omega)$, continue et bornée dans Ω et telle que

$$\mathrm{L}\varphi \in \mathrm{C}^0(\overline{\Omega}).$$

Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$;

$$\mathrm{L}\varphi = - \sum_i \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\sum_j a_{ij} \frac{\partial \varphi}{\partial x_j}\right) \in \mathrm{W}^{-1,p}(\Omega), \quad \forall p > 1,$$

donc il existe une suite $\psi_n \in \mathrm{C}^0(\overline{\Omega})$, tendant vers $\mathrm{L}\varphi$ dans $\mathrm{W}^{-1,p}(\Omega)$, $\forall p > 1$. Si φ_n est la solution continue $\in \mathrm{W}_0^{1,2}(\Omega)$ de $\mathrm{L}\varphi_n = \Psi_n$, on a d'une part $\varphi_n \to \varphi$ dans $\mathrm{W}_0^{1,2}(\Omega)$ car l'application $\mathrm{T} \to \varphi$ de $\mathrm{W}^{-1,2}(\Omega)$ dans $\mathrm{W}_0^{1,2}(\Omega)$ est continue, et d'autre part $\varphi_n \to \varphi$ uniformément dans Ω d'après l'inégalité (2) du th. 1 pour $p > n$. De $a(u, \varphi_n) = \int \varphi_n \, d\mu$, on déduit

$$a(u, \varphi) = \int \varphi \, d\mu \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega),$$

donc $\mu \in W^{-1,2}(\Omega)$; en outre, grâce au corollaire du lemme 1, l'égalité s'étend à $\varphi \in W_0^{1,2}(\Omega)$, continue et bornée dans Ω.

Réciproquement, soit $\mu = \sum_i \frac{\partial f_i}{\partial x_i}$, avec $f_i \in L^2(\Omega)$, et u la solution $\in W_0^{1,2}(\Omega)$ de $Lu = \sum_i \frac{\partial f_i}{\partial x_i}$; on a

$$a(u, \varphi) = \int \varphi \, d\mu, \qquad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega),$$

donc aussi $\forall \varphi \in W_0^{1,2}(\Omega)$, continue et bornée dans Ω, et u est la solution faible de $Lu = \mu$ dans Ω, s'annulant sur $\partial\Omega$.

2) On a $a(u, \varphi) = \int \varphi \, d\mu \ \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ si $\mu \in W^{-1,2}(\Omega)$, en particulier si $d\mu(x) = \frac{\chi_\beta \, dx}{\int \chi_\beta \, dx}$, où χ_β est la fonction caractéristique d'une boule ouverte $\beta \subset \Omega$; comme $u \to a(u, \varphi)$ est une forme linéaire continue sur $W_0^{1,p'}(\Omega)$, le lemme 2 permet d'étendre la formule de proche en proche : d'abord aux mesures discrètes, puis aux mesures à support compact, enfin aux mesures quelconques de masse totale finie.

3. La fonction de Green dans un ouvert connexe borné Ω.

THÉORÈME 3. — *La solution faible dans Ω, s'annulant sur $\partial\Omega$, de $Lu = \varepsilon_y$, est représentée par un potentiel de support y, noté g_y^Ω ou brièvement g_y, et appelé fonction de Green de Ω, de pôle y.*

En outre, si Ω et Ω' sont deux ouverts $\ni y$, $g_y^\Omega - g_y^{\Omega'}$ est harmonique dans $\Omega \cap \Omega'$.

On considère les mesures μ_n définies par $d\mu_n(x) = \frac{\chi_{\beta_n} \, dx}{\int \chi_{\beta_n} \, dx}$, où $\beta_n = \beta\left(y, \frac{1}{n}\right)$ est la boule ouverte de centre y et de rayon $\frac{1}{n}\cdot$ La distribution $\mu_n \in W^{-1,p}(\Omega)$, $\forall p > 1$; donc la solution faible u_n de $Lu = \mu_n$ est dans $W_0^{1,2}(\Omega)$, et on peut la choisir continue dans Ω. Comme $\mu_n \geqslant 0$, u_n est une sursolution dans Ω; elle est donc $\geqslant 0$ dans Ω [5, th. 1]. En outre, u_n est harmonique dans $\Omega \cap \complement \overline{\beta}_n$, et elle est surharmonique dans Ω car, si β

est une boule telle que $\bar\beta \subset \Omega$ et si $L^\beta_{u_n} = H^\beta_{u_n}$ [5, th. 3] est la solution continue de $Lu = 0$ dans β, telle que

$$u_n - L^\beta_{u_n} \in W_0^{1,2}(\beta),$$

on a $u_n \geqslant L^\beta_{u_n}$ dans β. Comme $u_n \in W_0^{1,2}(\Omega)$, c'est un potentiel dans Ω [5, corollaire du th. 1].

Soit u un représentant de la solution faible de $Lu = \varepsilon_y$. Sur chaque compact K de mesure > 0 et $\subset \Omega - \{y\}$:

$$\sup_K u_n \leqslant c \inf_K u_n \qquad \text{pour} \qquad n \text{ assez grand;}$$

donc, si $u_{n'}$ est une suite partielle convergeant vers u p.p. dans Ω (lemme 2), $u_{n'}$ est uniformément bornée sur K; l'axiome 3′ entraîne alors l'existence d'une nouvelle suite partielle, uniformément convergente sur tout compact

$$\subset \Omega - \{y\}$$

vers une fonction harmonique $\geqslant 0$ dans $\Omega - \{y\}$, donc prolongeable en une fonction surharmonique $\geqslant 0$ dans Ω, notée g_y^Ω. $g_y^\Omega = u$ p.p. dans Ω, donc g_y^Ω ne dépend pas de la suite partielle considérée et toute la suite u_n a pour limite uniforme g_y^Ω sur tout compact $\subset \Omega - \{y\}$. Enfin g_y^Ω est > 0 dans Ω d'après le théorème 2,2), où l'on prend $\mu = \varepsilon_y$.

g_y^Ω est un potentiel dans Ω car c'est la limite d'une suite de potentiels dont les supports sont contenus dans un même compact K et qui convergent uniformément sur tout compact $\subset \Omega - K$ [4, lemme 3.2].

Soit Ω' un autre ouvert $\ni y$ et u'_n la solution continue $\in W_0^{1,2}(\Omega')$ de $Lu = \mu_n$: $g_y^\Omega - g_y^{\Omega'}$ est limite uniforme sur tout compact $\subset \Omega \cap \Omega' - \{y\}$ de la suite des fonctions $u_n - u'_n$, harmoniques dans $\Omega \cap \Omega'$. Donc, si β est une boule de centre y, $\bar\beta \subset \Omega \cap \Omega'$, la suite $u_n - u'_n$ est uniformément convergente sur $\partial\beta$ et le principe du maximum entraîne la convergence uniforme de cette suite dans β. Sa limite est donc harmonique dans β et $g_y^\Omega - g_y^{\Omega'}$ est prolongeable harmoniquement dans $\Omega \cap \Omega'$.

4. Propriétés de la fonction de Green.

1) Proposition 1. — *$g_y^\Omega(x)$ est fonction* s.c.i. *de (x, y) dans $\Omega \times \Omega$, continue hors de la diagonale où elle vaut $+\infty$.*

Pour montrer que $g_y(y) = +\infty$, on remarque d'abord que g_y n'est pas borné supérieurement au voisinage de y. On en déduit que $\sup_{\partial\beta(y,r)} g_y \to +\infty$ quand $r \to 0$, car sinon il existerait une suite $r_n \to 0$ et un nombre A tels que $\sup_{\partial\beta(y,r_n)} g_y \leqslant A$ et, d'après le principe du maximum, on aurait $g_y \leqslant A$ sur un voisinage de y, privé de y. Alors l'inégalité $\sup_{\partial\beta(y,r)} g_y \leqslant c \inf_{\partial\beta(y,r)} g_y$, où $c(\lambda, n)$ [6, lemme du n° 1], entraîne $\lim_{x \to y} g_y(x) = +\infty$, d'où $g_y(y) = +\infty$.

La continuité de l'application $y \to g_y(x)$ sur $\Omega - \{x\}$ se démontre en utilisant le lemme 2, où $\mu_n = \varepsilon_{y_n}$ et $\mu = \varepsilon_y$, avec $y_n \to y \neq x$: il existe une suite partielle $g_{y_{n'}}$ tendant vers g_y p.p. dans Ω. L'axiome 3′ entraîne l'existence d'une nouvelle suite partielle, uniformément convergente sur tout compact $\subset \Omega - \{y\}$ vers g_y; donc toute la suite g_{y_n} tend vers g_y sur $\Omega - \{y\}$.

Un résultat général démontré dans [4] (proposition 18.1) prouve alors la continuité de l'application $(x, y) \to g_y(x)$ hors de la diagonale et la s.c.i. de cette application dans $\Omega \times \Omega$.

Conséquences :

Rappelons [6, th. 1] que les potentiels dans Ω de support ponctuel donné sont proportionnels. Par suite :

a) Tout potentiel P dans Ω admet une représentation intégrale unique de la forme $P(x) = \int g_y(x)\, d\lambda(y)$, où λ est une mesure $\geqslant 0$ sur Ω [4, th. 18.2].

Réciproquement, si λ est une mesure $\geqslant 0$ sur Ω, $\int g_y(x)\, d\lambda(y)$ est hyperharmonique dans Ω, et, si elle appartient à $S^+(\Omega)$, c'est un potentiel dans Ω [4, th. 18.3].

b) Pour que les potentiels P et P′ diffèrent d'une fonction harmonique sur l'ouvert $\omega \subset \Omega$, il faut et il suffit que les mesures λ et λ' aient même restriction à ω [4, th. 18.3].

c) Si P est localement borné dans Ω, λ ne charge pas les ensembles polaires [4, th. 18.2 et corollaire de la proposition 15.3].

2) Représentation intégrale de la solution faible de $Lu = \mu$, à l'aide de la fonction de Green et de la mesure μ.

PROPOSITION 2. — *Soit μ une mesure sur Ω, de masse totale finie.* $\hat{u}(x) = \int g_y^\Omega(x)\, d\mu\,(y)$ *existe pour presque tout* $x \in \Omega$; *c'est un représentant de la solution faible dans* Ω, *s'annulant sur* $\partial\Omega$, *de* $\mathrm{L}u = \mu$; *si* μ *est* $\geqslant 0$, $\hat{u}$ *est un potentiel dans* Ω.

Il suffit de supposer $\mu \geqslant 0$. Soit $\psi \in \mathrm{C}^0(\overline{\Omega})$ et φ la solution continue $\in \mathrm{W}_0^{1,2}(\Omega)$ de $\mathrm{L}\varphi = \psi$. g_y étant la solution faible de $\mathrm{L}u = \varepsilon_y$:

$$\int g_y\, \psi\, dx = \int \varphi\, d\varepsilon_y = \varphi(y);$$

d'où

$$\iint g_y(x)\, \psi(x)\, dx\, d\mu(y) = \int \varphi\, d\mu.$$

Par suite $\hat{u}(x) = \int g_y(x)\, d\mu(y)$ existe pour presque tout x, $\hat{u} \in \mathrm{L}^1(\Omega)$ et $\int \hat{u}\psi\, dx = \int \varphi\, d\mu$.

3) PROPOSITION 3. — $g_y(x)$ *est fonction symétrique de* (x, y).

$g_y(x)$ est une fonction intégrable de (x, y) d'après la démonstration précédente où l'on prend $\psi = 1$, $d\mu(y) = dy$.

Soit $\psi \in \mathrm{C}^0(\overline{\Omega})$, et φ la solution continue $\in \mathrm{W}_0^{1,2}(\Omega)$ de $\mathrm{L}\varphi = \psi$. On a

$$\varphi(y) = \int g_y(x)\, \psi(x)\, dx, \qquad \forall y \in \Omega,$$

et, d'après la proposition 2 :

$$\varphi(y) = \int g_x(y)\, \psi(x)\, dx \quad \text{pour presque tout } y \in \Omega.$$

Donc $\iint g_y(x)\, h(x)\, k(y)\, dx\, dy = \iint g_x(y)\, h(x)\, k(y)\, dx\, dy$ $\forall h$ et $k \in \mathrm{C}^0(\overline{\Omega})$; on en déduit $g_y(x) = g_x(y)$ $\forall x$ et y.

5. Les fonctions surharmoniques $\in \mathrm{W}^{1,2}(\Omega)$ et $\mathrm{W}^{1,2}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$.

PROPOSITION 4. — 1) *Étant donné une fonction u surharmonique dans* Ω, *il existe une mesure* λ *unique,* $\geqslant 0$ *sur* Ω, *appelée « mesure de F. Riesz associée à u », telle que sur tout ouvert* $\omega \subset \overline{\omega} \subset \Omega$:

$$u = \int g_y^\Omega \chi_\omega(y)\, d\lambda(y) + \textit{une fonction harmonique dans } \omega;$$

le support fermé de λ *est le plus petit fermé de* Ω *hors duquel u est harmonique.*

En outre, si u admet une minorante harmonique dans Ω :

$$u = \int g_y^\Omega \, d\lambda(y) + \textit{la plus grande minorante harmonique (p.g.m.h.) de } u \textit{ dans } \Omega.$$

2) *La mesure de F. Riesz est intrinsèque : si u est surharmonique dans $\Omega \cup \Omega'$, les mesures de F. Riesz dans Ω et Ω' ont même restriction à $\Omega \cap \Omega'$.*

3) *Si u est localement borné dans Ω, λ ne charge pas les ensembles polaires.*

1) Dans tout ouvert $\omega \subset \varpi \subset \Omega$, on a la décomposition : $u =$ un potentiel dans Ω + une fonction harmonique dans ω [4, th. 13.1], et d'après la représentation intégrale des potentiels dans Ω :

$$u = \int g_y^\Omega \, d\lambda_\omega(y) + \text{une fonction harmonique dans } \omega,$$

où λ_ω est une mesure $\geqslant 0$ sur Ω, dépendant de ω, et qu'on peut restreindre à ω ; par suite λ_ω et $\lambda_{\omega'}$ ont même restriction à $\omega \cap \omega'$ et les mesures λ_ω sont les restrictions aux ω d'une mesure unique λ sur Ω.

Si de plus u admet une minorante harmonique dans Ω, u admet une plus grande minorante harmonique dans Ω, soit h, et $u = h +$ un potentiel dans Ω, qui est de la forme

$$\int g_y^\Omega \, d\lambda(y).$$

2) résulte de : $g_y^\Omega - g_y^{\Omega'}$ est harmonique dans $\Omega \cap \Omega'$, $\forall y \in \Omega \cap \Omega'$.

3) Soit $\varpi \subset \omega' \subset \varpi' \subset \Omega$: si u est localement borné dans Ω, $\int g_y^\Omega \, d\lambda_{\omega'}(y)$ est localement borné dans ω', donc

$$\int g_y^\Omega \, d\lambda_\omega(y), \qquad \leqslant \int g_y^\Omega \, d\lambda_{\omega'}(y),$$

est localement borné dans Ω, et λ_ω ne charge pas les ensembles polaires.

Corollaire. — *Toute fonction surharmonique appartient à $W^{1,p'}_{\mathrm{loc}}$, $p' < \dfrac{n}{n-1}$; tout ensemble polaire est de mesure nulle.*

En effet, $\int g_y^\Omega \chi_\omega(y)\, d\lambda(y)$, solution faible dans Ω, est dans $W^{1,p'}(\Omega)$.

THÉORÈME 4. — 1) *Si u est une sursolution locale dans Ω et si μ est la mesure $\geqslant 0$ Lu, un représentant de u est une fonction surharmonique dans Ω dont la mesure de F. Riesz est μ.*
Par suite, si u est une sursolution dans Ω :

$$u = \int g_y^\Omega \, d\mu(y) + L_u^\Omega \quad \text{p.p. } dans\ \Omega,$$

où L_u^Ω est la solution de $Lu = 0$ dans Ω, telle que

$$u - L_u^\Omega \in W_0^{1,2}(\Omega).$$

2) *Réciproquement, si u est surharmonique dans Ω, $\in W^{1,2}(\Omega)$ (resp. $\in W_{\mathrm{loc}}^{1,2}(\Omega)$), et si μ est sa mesure de F. Riesz, alors u est une sursolution (resp. une sursolution locale) dans Ω et* $Lu = \mu$.

1) Soit un ouvert $\omega \subset \overline{\omega} \subset \Omega$. La restriction de μ à ω; soit $\mu\chi_\omega$, est une mesure $\geqslant 0$ de masse finie sur ω et elle $\in W^{-1,2}(\omega)$; donc (th. 2), la solution faible u_ω de $Lu = \mu\chi_\omega$ dans ω, s'annulant sur $\partial\omega$, est dans $W_0^{1,2}(\omega)$, et $u - u_\omega$ est la solution L_u^ω de $Lu = 0$ dans ω. D'après la proposition 2, un représentant de $u|\omega$ est donc surharmonique, de la forme :

$$\int g_y^\omega \chi_\omega(y)\, d\mu(y) + L_u^\omega,$$

donc aussi de la forme :

$\int g_y^\Omega \chi_\omega(y)\, d\mu(y)$ + une fonction harmonique dans ω; dans $\omega \cap \omega'$, les représentants ainsi formés, d'une part sont égaux p.p., d'autre part diffèrent d'une fonction harmonique, donc ils coïncident. Les représentants ci-dessus sont donc les restrictions aux ω d'une même fonction $\hat{u}$, surharmonique dans Ω, dont μ est la mesure de F. Riesz.

Si u est $\geqslant 0$ p.p. dans Ω : L_u^ω est $\geqslant 0$ dans ω [5, proposition 2], donc les représentants ci-dessus sont $\geqslant 0$, c'est-à-dire $\hat{u} \geqslant 0$ dans Ω; $\hat{u}$ a donc une p.g.m.h. dans Ω, qui est 0 si en outre $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$ [5, th. 1].

Enfin, si u est une sursolution dans Ω, on applique ce qui précède à $u - L_u^\Omega$.

2) Dans chaque ouvert $\omega \subset \varpi \subset \Omega$:

$u = \int g_y^\Omega \chi_\omega(y)\, d\mu(y) +$ une fonction harmonique dans ω; comme $u_\omega = \int g_y^\Omega \chi_\omega(y)\, d\mu(y)$ est la solution faible de $Lu = \mu\chi_\omega$ dans Ω, s'annulant sur $\partial\Omega$, on a (th. 2).

$$a(u, \varphi) = a(u_\omega, \varphi) = \int \varphi\chi_\omega\, d\mu, \qquad \forall\varphi \in \mathcal{D}(\omega),$$

d'où $a(u, \varphi) = \int \varphi\, d\mu$, $\forall\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ [2].

Conséquence. — On retrouve un résultat démontré directement par G. Stampacchia, sans utiliser la théorie du potentiel [10] :

si u_1 et u_2 sont deux sursolutions (resp. sursolutions locales), il en est de même de $\inf(u_1, u_2)$.

6. Capacité d'un compact [3].

Lemme 3. — *Étant donné* $v \in W^{1,2}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ *et* K *compact* $\subset \Omega$:

1) *les fonctions* $\in W_0^{1,2}(\Omega)$, *à support compact dans* Ω *et* $\geqslant v$ p.p. *sur un voisinage de* K, *forment une famille* $\mathcal{F} = \mathcal{F}_v^K$ *non vide*; *soit* $\overline{\mathcal{F}}$ *son adhérence dans* $W_0^{1,2}(\Omega)$;

2) *il existe* P *unique* $\in \overline{\mathcal{F}}$ *rendant minimum* $|||\varphi|||^2 = a(\varphi, \varphi)$ *quand* φ *parcourt* $\overline{\mathcal{F}}$; *on peut choisir pour* P *un potentiel dans* Ω, *harmonique dans* $\Omega - K$, *soit* P_v^K.

1) Soit $\delta \in \mathcal{D}(\Omega)$, $0 \leqslant \delta \leqslant 1$, $\delta = 1$ sur un voisinage de K : alors $v_0 = \delta v$ répond à la question.

2) Comme $\overline{\mathcal{F}}$ est formé et convexe, il existe P unique $\in \overline{\mathcal{F}}$ rendant minimum $|||\varphi|||^2$.

Soit $\mathcal{G}$ la famille des fonctions $\in W_0^{1,2}(\Omega)$, à support compact dans Ω et $\geqslant 0$ p.p. sur un voisinage de K : si $\psi \in \overline{\mathcal{G}}$, pour tout $\varepsilon > 0$ on a $P + \varepsilon\psi \in \overline{\mathcal{F}}$, donc $|||P|||^2 \leqslant |||P + \varepsilon\psi|||^2$, d'où $a(P, \psi) \geqslant 0$.

[2] Cette propriété est même vraie pour toute fonction u surharmonique dans Ω, ce qui a un sens d'après le corollaire de la proposition 4.

[3] Tout ce qui suit : lemmes 3, 4, 5 et proposition 5, reprend, pour la commodité du lecteur, le travail de Littman, Stampacchia et Weinberger [7] sans autre changement que la boule Σ remplacée par l'ouvert Ω.

On en déduit que P est une sursolution dans Ω, et une solution dans $\Omega - K$; comme $P \in W_0^{1,2}(\Omega)$, un représentant de P est un potentiel dans Ω, harmonique dans $\Omega - K$ (th. 4).

Lemme 4. — *Le potentiel* P_1^K *vaut* 1 p.p. *sur* K *et partout sur* $\mathring{K}$, *et il est limite dans* $W_0^{1,2}(\Omega)$ *de fonctions* $\varphi_n \in \mathcal{D}(\Omega)$, *égales à* 1 *sur un voisinage de* K.

Soit $P_1^K = P$. $\inf(P, 1) \in \mathcal{F}_1^K$ et

$$a\{\inf(P, 1), \inf(P, 1)\} \leqslant a(P, P)$$

entraînent $P = \inf(P, 1)$ p.p. dans Ω, d'où $P = 1$ p.p. sur K. Par suite, la mesure LP ne charge pas $\mathring{K}$, P est harmonique sur $\mathring{K}$ et vaut 1 en tout point $\in \mathring{K}$.

Soit $\psi_n \in \mathcal{F}_1^K$ et tendant vers P dans $W_0^{1,2}(\Omega)$; $\inf(\psi_n, 1) \in \mathcal{F}_1^K$, vaut 1 p.p. sur un voisinage de K et tend aussi vers P dans $W_0^{1,2}(\Omega)$; on obtient donc φ_n en régularisant $\inf(\psi_n, 1)$.

Définition. — *La capacité d'un compact* $K \subset \Omega$ *est* $\operatorname{cap} K = |||P_1^K|||^2$.

Conséquence. — Si L et $\overline{L}$ sont deux opérateurs de même constante λ d'uniforme ellipticité, cap K et $\overline{\operatorname{cap}}$ K les capacités de K relatives à ces deux opérateurs :

$$\frac{1}{\lambda^2}\,\overline{\operatorname{cap}}\,K \leqslant \operatorname{cap} K \leqslant \lambda^2\,\overline{\operatorname{cap}}\,K.$$

En effet, la famille $\mathcal{F}_1^K$ ne dépend pas de l'opérateur.

Cette notion de capacité conduit à de nouvelles propriétés de la fonction de Green.

Lemme 5. — *Si l'ensemble* $K = \{x \in \Omega : g_y^\Omega(x) \geqslant M\}$ *est compact* (*donc pour* M *assez grand*), *il a pour capacité* $\dfrac{1}{M}$.

Soit μ la mesure de F. Riesz associée à P_1^K; c'est aussi la mesure LP_1^K (th. 4), donc, si φ_n est la suite du lemme 4 :

$$a(P_1^K, \varphi_n) = \int \varphi_n\, d\mu = \int d\mu, \qquad \text{et} \qquad \operatorname{cap} K = \int d\mu.$$

D'autre part (th. 4) : $P_1^K = \int g_z^\Omega\, d\mu(z)$; comme $y \in \mathring{K}$ et μ

est portée par ∂K :

$$1 = P_1^K(y) = \int g_z^\Omega(y)\, d\mu\,(z) = \int g_y^\Omega(z)\, d\mu\,(z) = M \int d\mu.$$

Proposition 5. — *Pour tout compact* $K \subset \Omega$, *il existe deux constantes* k_1 *et* $k_2 > 0$ *telles que :*

$$\text{si} \quad n > 2, \; \frac{k_1}{|x-y|^{n-2}} \leqslant g_y^\Omega(x) \leqslant \frac{k_2}{|x-y|^{n-2}}, \quad \forall x \text{ et } y \in K;$$

$$\text{si} \quad n = 2, \; k_1 \log \frac{c}{|x-y|} \leqslant g_y^\Omega(x) \leqslant k_2 \log \frac{c}{|x-y|}, \; \forall x \text{ et } y \in K,$$
$$c > \operatorname{diam} K.$$

On reprend la démonstration de Littman, Stampacchia et Weinberger [7], mais sans utiliser les propriétés de la fonction de Green relative à un opérateur à coefficients réguliers. Elle consiste à montrer que, si g_y et $\bar{g}_y$ sont les fonctions de Green relatives à deux opérateurs L et $\bar{L}$ de même constante d'uniforme ellipticité, $\dfrac{g_y(x)}{\bar{g}_y(x)}$ est compris entre deux constantes > 0 pour x et y voisins, d'où l'on déduit la double inégalité annoncée en prenant $\bar{L} = \Delta$.

Pour cela, on utilise le lemme démontré dans [6, n° 1] : si Ω contient la boule ouverte $\beta\,(y, R)$, pour $r \leqslant \dfrac{R}{2}$ on a

$$M(r) = \sup_{\partial\beta(y,r)} g_y \leqslant c \inf_{\partial\beta(y,r)} g_y = cm(r),$$

où c ne dépend que de n et λ; donc, pour $x \in \partial\beta\,(y, r)$

$$\frac{M(r)}{c} \leqslant g_y(x) \leqslant cm(r), \qquad \frac{\bar{M}(r)}{c} \leqslant \bar{g}_y(x) \leqslant c\bar{m}(r),$$

et

$$\frac{1}{c^2}\,\frac{M(r)}{\bar{m}(r)} \leqslant \frac{g_y(y)}{\bar{g}_y(x)} \leqslant c^2\,\frac{m(r)}{\bar{M}(r)}.$$

D'après le lemme 5, pour $r \leqslant$ un nombre fixe quand y décrit K :

$$\frac{M(r)}{\bar{m}(r)} = \frac{\overline{\operatorname{cap}}\{\bar{g}_y \geqslant \bar{m}(r)\}}{\operatorname{cap}\{g_y \geqslant M(r)\}} \geqslant \frac{\overline{\operatorname{cap}}\,\bar{\beta}\,(y, r)}{\operatorname{cap}\,\bar{\beta}\,(y, r)} \geqslant \frac{1}{\lambda^2},$$

et

$$\frac{m(r)}{\overline{\mathrm{M}}(r)} = \frac{\overline{\mathrm{cap}}\{\bar{g}_y \geqslant \overline{\mathrm{M}}(r)\}}{\mathrm{cap}\{g_y \geqslant m(r)\}} \leqslant \frac{\overline{\mathrm{cap}}\,\bar{\beta}\,(y, r)}{\mathrm{cap}\,\bar{\beta}\,(y, r)} \leqslant \lambda^2,$$

d'où

$$\frac{1}{c^2\lambda^2} \leqslant \frac{g_y(x)}{\bar{g}_y(x)} \leqslant c^2\lambda^2,$$

$\forall y \in \mathrm{K}$ et $x \in \beta\,(y, r)$ pour r assez petit.

Corollaire 1. — *Les ensembles polaires ne dépendent pas de l'opérateur* L.

Corollaire 2. — *L'axiome* D *est vérifié* (cf. la remarque finale de [6]).

7. Deux propriétés des fonctions surharmoniques.

Théorème 5 ([4]). — *Soit $\rho_n(x)$ une suite régularisante formée de fonctions $\geqslant 0$, indéfiniment différentiables, dépendant seulement de $|x|$, nulles pour $|x| \geqslant \frac{1}{n}$ et telles que $\int \rho_n(x)\, dx = 1$.*

1) *Pour toute fonction u, surharmonique dans Ω : $u * \rho_n \to u$ en tout point $\in \Omega$.*

2) *Si u est une fonction surharmonique > 0 dans Ω, dont la mesure de F. Riesz est portée par un compact $\subset \Omega$: pour tout compact $\mathrm{K} \subset \Omega$, il existe une constante k telle que $u * \rho_n \leqslant ku$ sur* K, *pour n assez grand.*

Il suffit de montrer 1) en un point x tel que $u(x) < +\infty$, et l'on peut supposer $u(z) = \int g_y^\Omega(z)\, d\lambda\,(y)$, $\lambda \geqslant 0$ à support compact dans Ω. On a :

$$u * \rho_n(x) = \int (g_y^\Omega * \rho_n)(x)\, d\lambda\,(y),$$

où $(g_y^\Omega * \rho_n)(x) \to g_y^\Omega(x)$ $\forall y \in \Omega$; d'autre part, y et z restant dans un compact $\subset \Omega$, on a (proposition 5), en notant n_y le noyau newtonien (dans $\mathbf{R}^n$ si $n > 2$, dans une boule $\supset \Omega$ si $n = 2$) :

$$(g_y^\Omega * \rho_n)(x) = \int g_y^\Omega(z)\, \rho_n(x - z)\, dz \leqslant k_2(n_y * \rho_n)(x)$$
$$\leqslant k_2 n_y(x) \leqslant \frac{k_2}{k_1}\, g_y^\Omega(x).$$

([4]) Améliorant le th. 3 de [6].

THÉORÈME 6. — *Toute fonction surharmonique dans Ω est* s.c.i. *essentielle (c'est-à-dire égale à sa lim inf essentielle en tout point* $\in \Omega$).

Soit u une fonction surharmonique dans Ω; en chaque point x_0 :

$$u(x_0) = \liminf_{x \to x_0} u(x) \leqslant \liminf_{x \to x_0} \text{ess}\, u(x).$$

Supposons $u(x_0) < \lambda < \liminf_{x \to x_0} \text{ess}\, u(x)$; on en déduit :

$$\lambda \leqslant u \text{ p.p. sur un voisinage de } x_0,$$

d'où $\lambda \leqslant u * \rho_n(x_0)$ pour n assez grand, où ρ_n est une suite régularisante définie au th. 5. Comme $u * \rho_n(x_0) \to u(x_0)$, on a la contradiction cherchée.

COROLLAIRE 1. — *Si u et v sont surharmoniques dans Ω :* $u \geqslant v$ p.p. *dans Ω entraîne $u \geqslant v$. De même avec u surharmonique et v continue.*

COROLLAIRE 2. — *Le représentant surharmonique dans Ω de la solution faible de* $\mathrm{Lu} = \mu \geqslant 0$ *(proposition 2) ou d'une sursolution locale dans Ω* (th. 4, 1) *est sa régularisée* s. c. i. ess.

II. STABILITÉ DE LA CLASSE DES SURSOLUTIONS LOCALES PAR PASSAGE A LA LIMITE

LEMME 6. — *Soit u une sursolution locale dans Ω, localement essentiellement bornée supérieurement dans Ω. Pour tout compact* $\mathrm{K} \subset \Omega$, *soit σ un nombre > 0 et $<$ distance de* K *à* $\partial\Omega$, K' *l'ensemble des points* $\in \Omega$ *dont la distance à* K *est $\leqslant \sigma$ et $u \leqslant$* M p.p. *sur* K'. *Alors*

$$\sum_i \int_{\mathrm{K}} \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2 dx \leqslant \frac{4\lambda^4}{\sigma^2} \int_{\mathrm{K'}} (u - \mathrm{M})^2\, dx.$$

Pour toute sous-solution locale $u \geqslant 0$ p.p. dans Ω, donc aussi pour toute sursolution locale $\leqslant 0$ p.p. dans Ω, l'inégalité

$$\sum_i \int_{\mathrm{K}} \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2 dx \leqslant \frac{4\lambda^4}{\sigma^2} \int_{\mathrm{K'}} u^2\, dx$$

est démontrée par Moser [9, lemme 1], dans le cas où K est une boule; sa démonstration s'étend sans difficulté au cas où K est une réunion finie de boules, d'où le cas général.

Soit maintenant u satisfaisant aux hypothèses de l'énoncé. On considère l'ouvert Ω', lieu des points $\in \Omega$ dont la distance à K est $< \sigma$, et le compact K'', lieu des points $\in \Omega$ dont la distance à K est $\leqslant \sigma - \varepsilon$, $\varepsilon > 0$; alors $u - M$ est une sursolution $\leqslant 0$ p.p. dans Ω' et

$$\sum_i \int_K \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2 dx \leqslant \frac{4\lambda^4}{(\sigma - \varepsilon)^2} \int_{K''} (u - M)^2\, dx$$
$$\leqslant \frac{4\lambda^4}{(\sigma - \varepsilon)} \int_{K'} (u - M)^2\, dx.$$

Lemme 7. — *Soit u_n une suite de sursolutions locales dans Ω, localement essentiellement bornées dans leur ensemble, et tendant vers u p.p. dans Ω. Alors $u \in W^{1,2}_{loc}(\Omega)$ et est limite faible de la suite u_n dans $W^{1,2}_{loc}(\Omega)$ (c'est-à-dire dans $W^{1,2}(\Omega')$ pour tout ouvert $\Omega' \subset \overline{\Omega}' \subset \Omega$).*

D'après le lemme précédent, $\|u_n\|_{W^{1,2}(\Omega')}$ est borné indépendamment de n; donc on peut extraire de la suite u_n une suite partielle faiblement convergente dans $W^{1,2}(\Omega')$. Comme u_n est borné indépendamment de n sur Ω' et tend vers u p.p., u et la limite faible ont même intégrale sur tout ensemble mesurable $E \subset \Omega'$, donc u est limite faible de la suite u_n.

Proposition 6 ([5]). — 1) *Soit u_n une suite croissante de fonctions surharmoniques dans Ω, $\in W^{1,2}_{loc}(\Omega)$ et localement bornées supérieurement dans leur ensemble. Alors, la fonction surharmonique* $\sup u_n$ *est dans* $W^{1,2}_{loc}(\Omega)$.

2) *Soit $\mathcal{F}$ une famille de fonctions surharmoniques dans Ω, $\in W^{1,2}_{loc}(\Omega)$ et localement bornées dans leur ensemble. Alors* $\inf_{u \in \mathcal{F}} u$ *est dans* $W^{1,2}_{loc}(\Omega)$, *ainsi que la fonction surharmonique* $\widehat{\inf_{u \in \mathcal{F}} u}$ (*régularisée* s.c.i. *de* $\inf_{u \in \mathcal{F}} u$).

3) *Soit v_n une suite* T-*convergente* [4] *de fonctions*

$$\in S^+(\Omega) \cap W^{1,2}_{loc}(\Omega)$$

([5]) Ces résultats seront améliorés successivement par la proposition 7 et par le th. 9.

et localement bornées supérieurement dans leur ensemble. Alors sa T*-limite* v *dans* $S^+(\Omega)$ *appartient à* $W^{1,2}_{\text{loc}}(\Omega)$.

1) Conséquence du lemme 7.

2) Par le raisonnement classique [1], on se ramène au cas d'une suite décroissante : en effet, grâce à un lemme de MM. Brelot et Choquet, on peut extraire de $\mathcal{F}$ une suite u_n telle que $\widehat{\inf_{u\in\mathcal{F}} u} = \widehat{\inf u_n}$; alors (axiome D) $\inf_{u\in\mathcal{F}} u = \inf u_n$ ou $\widehat{\inf u_n}$ q.p., donc p.p. dans Ω; puis on se ramène à une suite décroissante en posant $u'_n = \inf(u_1, \ldots, u_n)$.

Pour une suite décroissante, on applique le lemme 7.

3) $v = \widehat{\liminf v_n}$ [4, corollaire 1 de la proposition 21.2]. De plus, $u_n = \inf_{p\geqslant n} v_p$ forme une suite croissante de $\mathcal{S}$-fonctions dont la limite est $\liminf v_n$; alors [4; n° 5, A, propriété 3] : $\widehat{\liminf v_n} = \lim \hat{u}_n$.

D'après le 2), la fonction surharmonique $\hat{u}_n \in W^{1,2}_{\text{loc}}(\Omega)$; comme la suite $\hat{u}_n$ est croissante et localement bornée supérieurement, sa limite est dans $W^{1,2}_{\text{loc}}(\Omega)$.

Conséquence. — Propriété des fonctions surharmoniques localement bornées.

Lemme 8. — *Soit* μ *une mesure* $\geqslant 0$ *sur* Ω, *à support compact dans* Ω, $\mu_n = \mu * \rho_n$ *où* ρ_n *est une suite régularisante définie au th.* 5. *Alors* $v = \int g_y^\Omega \, d\mu(y)$ *est* T*-limite de la suite* $v_n = \int g_y^\Omega \, d\mu_n(y)$, *et il existe une constante* k *telle que* $v_n \leqslant kv$ *pour* n *assez grand.*

Les mesures μ_n étant portées par un même compact K pour n assez grand, $v_n \xrightarrow{T} v$ si et seulement si μ_n tend vaguement vers μ [4, proposition 19.3], et cette dernière convergence est classique.

Il suffit de démontrer l'inégalité $v_n \leqslant kv$ sur un compact, voisinage de K et, pour cela, de montrer une inégalité analogue pour les potentiels newtoniens $\bar{v}_n = \int n_y \, d\mu_n(y)$ et $\bar{v} = \int n_y \, d\mu(y)$ (proposition 5). Or :

$$\bar{v}_n(x) = \int (n_x * \rho_n)(y) \, d\mu(y) \leqslant \int n_x(y) \, d\mu(y) = \bar{v}(x).$$

Proposition 7. — *Toute fonction surharmonique, localement bornée dans* Ω, *appartient à* $W^{1,2}_{loc}(\Omega)$.

Il suffit de traiter le cas où v est un potentiel localement borné dans Ω; soit $v = \int g^{\Omega}_y \, d\mu(y)$.

On suppose d'abord μ à support compact: alors v est T-limite des fonctions $v_n = \int g^{\Omega}_y \, d\mu_n(y)$, localement bornées dans leur ensemble (lemme 8); μ_n est définie par la densité $z \rightarrow \int \rho_n(z - x) \, d\mu(x)$ relativement à la mesure de Lebesgue, donc la distribution $\mu_n \in W^{-1,2}(\Omega)$ et $v_n \in W^{1,2}_0(\Omega)$ (proposition 2 et th. 2); par suite $v \in W^{1,2}_{loc}(\Omega)$ (proposition 6).

Pour traiter le cas général, on considère une suite croissante de compacts K_n dont la réunion est Ω, et $v_n = \int g^{\Omega}_y \chi_{K_n}(y) \, d\mu(y)$; chaque $v_n \in W^{1,2}_{loc}(\Omega)$ et la suite v_n est croissante et majorée par v localement bornée; donc sa limite v appartient à $W^{1,2}_{loc}(\Omega)$ (proposition 6).

III. LES FONCTIONS $\in S^+$ MAJORÉES PAR UNE FONCTION $\in W^{1,2}_0$ OU $W^{1,2}_{loc}$

Lemme 9. — *Étant donné* v *surharmonique* $\in W^{1,2}_{loc}(\Omega)$ *et un compact* $K \subset \Omega$, *soit* $v_0 \in W^{1,2}_0(\Omega)$, *à support compact dans* Ω *et égale à* v *sur un voisinage de* K (cf. la démonstration du lemme 3,1)).

Si $\tilde{v}_0$ *désigne la fonction* v_0 *prolongée par* 0 *sur* $\partial\Omega$, *la solution* $H^{\omega}_{\tilde{v}_0}$ *du problème de Dirichlet dans* $\omega = \Omega - K$ *pour la donnée* $\tilde{v}_0$ *sur* $\partial\omega$, *coïncide avec la solution* $L^{\omega}_{v_0}$ *de* $Lu = 0$ *dans* ω, *telle que* $v_0 - L^{\omega}_{v_0} \in W^{1,2}_0(\omega)$.

Soit ρ_n une suite régularisante définie au th. 5: pour n assez grand, $v_0 * \rho_n \in \mathcal{D}(\Omega)$ donc $H^{\omega}_{\widetilde{v_0 * \rho_n}} = L^{\omega}_{v_0 * \rho_n}$ [5, th. 3]. $v_0 * \rho_n \rightarrow v_0$ dans $W^{1,2}(\Omega)$, donc [5, proposition 4] $L^{\omega}_{v_0 * \rho_n} \rightarrow L^{\omega}_{v_0}$ dans dans $W^{1,2}(\omega)$, et, pour une suite partielle, la limite a lieu p.p. dans ω; il reste donc à montrer que $H^{\omega}_{\widetilde{v_0 * \rho_n}} \rightarrow H^{\omega}_{\tilde{v}_0}$.

Pour cela, supposons $v_0 = v$ sur l'ouvert Ω', $K \subset \Omega' \subset \Omega$: dans un ouvert ω tel que $K \subset \omega \subset \overline{\omega} \subset \Omega'$, on peut écrire (proposition 4, 1)) $v = v' + h$, où v' est un potentiel dans Ω', dont la mesure de F. Riesz est portée par $\overline{\omega}$, et h est harmonique dans ω; alors, sur ∂K, pour n assez grand :

$$v_0 * \rho_n = v * \rho_n = v' * \rho_n + h * \rho_n,$$

où $h * \rho_n \to h$ uniformément, $v' * \rho_n \to v'$ et $v' * \rho_n \leqslant kv'$ (th. 5).

Lemme 10. — *Soit Ω_n une suite croissante d'ouverts, tels que $\overline{\Omega}_n \subset \Omega$ et $\Omega = \bigcup_n \Omega_n$. Pour toute $v \in S^+(\Omega)$ et tout ensemble $E \subset \Omega$:*

$$\hat{R}_v^E = \lim \, (\hat{R}_v^{E \cap \Omega_n})_{\Omega_n}.$$

La formule est vérifiée par un potentiel dans Ω car, dans Ω_n :

$$\hat{R}_v^E \leqslant (\hat{R}_v^{E \cap \Omega_n})_{\Omega_n} + \hat{R}_v^{\complement \Omega_n} \quad [1, \text{lemme } 1, \text{chapitre } 7],$$

et $\hat{R}_v^{\complement \Omega_n} \to 0$ quand $n \to +\infty$.

Comme toute fonction $\in S^+(\Omega)$ est limite d'une suite croissante de potentiels dans Ω et que $(\hat{R}_v^{E \cap \Omega_n})_{\Omega_n}$ est fonction croissante de n et de v, on déduit la formule dans le cas général par double passage à la limite [4, proposition 28.1].

1. Balayage d'une fonction $\in S^+ \cap W^{1,2}_{\mathrm{loc}}$ sur un compact.

Théorème 7. — *Étant donné $v \in S^+(\Omega) \cap W^{1,2}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ et K compact $\subset \Omega$, $\hat{R}_v^K$ appartient à $W_0^{1,2}(\Omega)$ et c'est la fonction $\in \overline{\mathcal{F}}_v^K$ (définie au lemme 3) rendant minimum $|||\varphi|||^2 = a(\varphi, \varphi)$.*

Il suffit de montrer que $\hat{R}_v^K = P_v^K$ définie au lemme 3.

1) Supposons d'abord $v \in W^{1,2}(\Omega)$. Alors $\inf(P_v^K, v) \in \overline{\mathcal{F}}_v^K$; pour montrer que c'est P_v^K, on pose $P_v^K = \inf(P_v^K, v) + \varphi$ et on remarque, que $\inf(P_v^K, v)$ étant une sursolution,

$$a\{\inf(P_v^K, v), \varphi\} \geqslant 0,$$

d'où $|||P_v^K|||^2 \geqslant |||\inf(P_v^K, v)|||^2$ et $\varphi = 0$ p.p.

On en déduit d'abord $P_v^K = v$ p.p. sur K; puis, v_0 étant choisie comme dans le lemme 9 : $P_v^K = L_{v_0}^{\omega}$ dans $\omega = \Omega - K$ car $P_v^K - v_0$ est limite dans $W^{1,2}(\omega)$ de fonctions $\in W^{1,2}(\omega)$ à support compact dans ω.

Comme $\hat{R}_v^K = v$ p.p. sur K (corollaire de la proposition 4) et $\hat{R}_v^K = H_v^\omega = H_{v_0}^\omega$ dans ω, on a, grâce au lemme 9, $P_v^K = \hat{R}_v^K$ p.p. dans Ω, donc partout (corollaire 1 du th. 6).

2) Si $v \in W_{loc}^{1,2}(\Omega)$, on montre d'abord que $\hat{R}_v^K \in W_0^{1,2}(\Omega)$: d'après le lemme 10, $\hat{R}_v^K$ est limite de la suite croissante $w_n = (\hat{R}_v^K)_{\Omega_n} \in W_0^{1,2}(\Omega_n)$, donc aussi de la suite croissante

$$\tilde{w}_n = \begin{cases} w_n \text{ dans } \Omega_n \\ 0 \text{ dans } \Omega - \Omega_n \end{cases} \in W_0^{1,2}(\Omega);$$

d'autre part, pour n assez grand, la fonction v_0 du lemme 9 appartient à la famille $\mathcal{F}_v^K$ relative à chaque Ω_n, donc $|||\tilde{w}_n||| \leqslant |||v_0|||$. On peut alors extraire de la suite $\tilde{w}_n$ une suite partielle faiblement convergente dans $W_0^{1,2}(\Omega)$; $\hat{R}_v^K$ et la limite faible ont même intégrale sur tout ensemble mesurable $E \subset \Omega$, donc coïncident p.p. dans Ω. Ainsi $\hat{R}_v^K \in W_0^{1,2}(\Omega)$ pour tout compact $K \subset \Omega$.

On peut alors choisir un compact K', $\subset \Omega$ et voisinage de K : on ne change ni $\hat{R}_v^K$ ni la famille $\mathcal{F}_v^K$ en remplaçant v par $\hat{R}_v^{K'}$, qui $\in W_0^{1,2}(\Omega)$.

Corollaire. — *Tout potentiel localement borné dans Ω et dont la mesure de F. Riesz est à support compact dans Ω, appartient à* $W_0^{1,2}(\Omega)$.

Soit P un potentiel localement borné dans Ω et K le support de sa mesure de F. Riesz. $P \in W_{loc}^{1,2}(\Omega)$ (proposition 7) et pour tout compact K' voisinage de K : $\hat{R}_P^{K'} = P$.

2. Les fonctions $\in S^+$, majorées par une fonction $\in W_0^{1,2}$.

Lemme 11. — *Toute fonction $v \in S^+(\Omega) \cap W_{loc}^{1,2}(\Omega)$, majorée* p.p. *dans Ω par $\varphi \in W_0^{1,2}(\Omega)$, est dans $W_0^{1,2}(\Omega)$. En outre*

$$|||v||| \leqslant |||\varphi|||.$$

Quel que soit le compact $K \subset \Omega$, $\varphi \in \mathcal{F}_v^K$ car, si $\delta \in \mathcal{D}(\Omega)$, $0 \leqslant \delta \leqslant 1$, et $\delta = 1$ sur un voisinage de K et si $\varphi_n \in \mathcal{D}(\Omega)$ tend vers φ dans $W^{1,2}(\Omega)$, $\sup(\varphi_n, \delta\varphi) \in \mathcal{F}_v^K$ et tend vers φ dans $W^{1,2}(\Omega)$.

Soit K_n une suite croissante de compacts, de réunion Ω.

$\hat{R}_v^{K_n}$ tend en croissant vers v; d'autre part $|||\hat{R}_v^{K_n}||| \leqslant |||\varphi|||$; donc la suite $\hat{R}_v^{K_n}$ converge faiblement dans $W_0^{1,2}(\Omega)$ vers v (même raisonnement que pour le th. 7,2)) et

$$|||v||| \leqslant \liminf |||\hat{R}_v^{K_n}||| \leqslant |||\varphi|||.$$

THÉORÈME 8. — *Toute fonction* $v \in S^+(\Omega)$, *majorée* p.p. *dans* Ω *par* $\varphi \in W_0^{1,2}(\Omega)$, *appartient à* $W_0^{1,2}(\Omega)$, *donc est un potentiel* (th. 4), *et* $|||v||| \leqslant |||\varphi|||$.

En effet, $v_n = \inf(v, n) \in S^+(\Omega) \cap W_{\mathrm{loc}}^{1,2}(\Omega)$ (proposition 7), et $v_n \leqslant \varphi$ p.p. dans Ω; donc $v_n \in W_0^{1,2}(\Omega)$ et $|||v_n||| \leqslant |||\varphi|||$. Comme v_n tend en croissant vers v, v est limite faible de v_n dans $W_0^{1,2}(\Omega)$ et $|||v||| \leqslant \liminf |||v_n||| \leqslant |||\varphi|||$.

COROLLAIRE. — *La balayée d'une fonction* $\in S^+(\Omega) \cap W_0^{1,2}(\Omega)$ *sur un ensemble quelconque appartient à* $W_0^{1,2}(\Omega)$.

3. Les fonctions $\in S^+$, majorées par une fonction $\in W_{loc}^{1,2}$.

THÉORÈME 9. — *Toute fonction* $v \in S^+(\Omega)$, *majorée* p.p. *dans* Ω *par une fonction* $\in W_{\mathrm{loc}}^{1,2}(\Omega)$, *appartient à* $W_{\mathrm{loc}}^{1,2}(\Omega)$.

Soit Ω' un ouvert d'adhérence $\subset \Omega$. Étant donné $f \in W_{\mathrm{loc}}^{1,2}(\Omega)$ et le compact $\overline{\Omega}'$, il existe un potentiel P dans Ω, $\in W_0^{1,2}(\Omega)$ et $\geqslant f$ p.p. sur $\overline{\Omega}'$ (lemme 3). Donc, si $v \leqslant f$ p.p. dans Ω, on a $P \geqslant v$ p.p. sur Ω', donc partout sur Ω' (corollaire 1 du th. 6), et $P \geqslant \hat{R}_v^{\Omega'}$ dans Ω. Alors $\hat{R}_v^{\Omega'} \in W_0^{1,2}(\Omega)$ (th. 8), et comme $v = \hat{R}_v^{\Omega'}$ dans Ω', $v \in W^{1,2}(\Omega')$.

COROLLAIRE. — *La balayée d'une fonction* $\in S^+(\Omega) \cap W_{\mathrm{loc}}^{1,2}(\Omega)$ *sur un ensemble quelconque appartient à* $W_{\mathrm{loc}}^{1,2}(\Omega)$.

Exemple prouvant que la classe $S^+ \cap W^{1,2}$ n'est pas stable par balayage.

On prend $L = \Delta$ dans $\mathbf{R}^2$, $\Omega =$ le disque ouvert $x^2 + y^2 < 1$. On balaie $v = 1 \in S^+(\Omega) \cap W^{1,2}(\Omega)$ sur le demi-disque E situé dans le demi-plan $y \geqslant 0$. Sur l'ouvert $\omega = \Omega - E$, $\hat{R}_v^E$ est la solution du problème de Dirichlet pour la donnée égale à 1 sur le diamètre et 0 sur la demi-circonférence; c'est donc une fonction affine de $Q(x, y) = \operatorname{Im} \log \left(\frac{1+z}{1-z}\right)$, $z = x + iy$.

Posons $f(z) = \log\left(\frac{1+z}{1-z}\right) = \sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$, $|z| < 1$, avec

$$a_{2p} = 0, \qquad a_{2p+1} = \frac{2}{2p+1} \cdot Q_x'^2 + Q_y'^2 = |f'|^2$$

donc :

$$\iint_\omega (Q_x'^2 + Q_y'^2)\, dx\, dy = \iint_\omega |f'|^2\, dx\, dy = \frac{1}{2} \iint_\Omega |f'|^2\, dx\, dy,$$

car f' a un développement en série entière à coefficients réels.

$$\int_0^R \int_0^{2\pi} |f'(re^{i\theta})|^2 r\, dr\, d\theta = \pi \sum_{n\geqslant 1} n a_n^2 R^{2n},$$

et le 1^er^ membre a une limite finie quand $R \to 1$ si et seulement si la série de terme général na_n^2 converge. Ici, cette série diverge; par suite $\hat{R}_v^E \notin W^{1,2}(\Omega)$.

IV. CARACTÉRISATION DES POTENTIELS $\in W_0^{1,2}$.

Définition. — *L'énergie d'un potentiel dans* Ω :

$$U^\mu = \int g_y^\Omega\, d\mu\,(y),$$

où μ *est une mesure* $\geqslant 0$ *sur* Ω, *est le nombre* $\int U^\mu\, d\mu$, *fini ou* $= +\infty$.

Si le potentiel U^μ est d'énergie finie, tout potentiel $U^\nu \leqslant U^\mu$ est aussi d'énergie finie et $\int U^\nu\, d\nu \leqslant \int U^\mu\, d\mu$:

en effet $\int U^\nu\, d\mu \leqslant \int U^\mu\, d\mu$ est fini, $\int U^\nu\, d\mu = \int U^\mu\, d\nu$ et $\int U^\nu\, d\nu \leqslant \int U^\mu\, d\nu$ est fini et $\leqslant \int U^\mu\, d\mu$.

Théorème 10. — *Les potentiels dans* Ω, *appartenant à* $W_0^{1,2}(\Omega)$, *sont les potentiels d'énergie finie et si* $U^\mu = \int g_y^\Omega\, d\mu(y)$ *est un tel potentiel :*

$$(1) \qquad a(U^\mu, U^\mu) = \int U^\mu\, d\mu.$$

1) Soit $U^\mu = \int g_y^\Omega\, d\mu(y)$ un potentiel dans Ω, $\in W_0^{1,2}(\Omega)$:

$$(2) \qquad a(U^\mu, \varphi) = \int \varphi\, d\mu, \qquad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega) \quad \text{(th. 4)}.$$

— Supposons d'abord que le support de μ est compact. Alors μ est de masse finie et (2) est satisfait pour toute $\varphi \in W_0^{1,2}(\Omega)$, continue et bornée dans Ω (th. 2).

Soit $\varphi \in W^{1,2}(\Omega)$, continue et bornée dans Ω, et L_φ^Ω la solution continue de $Lu = 0$ telle que $\varphi - L_\varphi^\Omega \in W_0^{1,2}(\Omega)$; les bornes de φ sont aussi des bornes de L_φ^Ω dans Ω [5, th. 1] et par suite

$$(3) \qquad a(U^\mu, \varphi) = \int (\varphi - L_\varphi^\Omega)\, d\mu.$$

Soit u un potentiel dans Ω, $\in W_0^{1,2}(\Omega)$ et borné dans Ω: $0 \leqslant u \leqslant M$. Si ρ_n est une suite régularisante du th. 5, $u * \rho_n$ (6) $\to u$ dans Ω, ainsi que dans $W^{1,2}(\Omega)$, et par suite $L_{u*\rho_n}^\Omega \to L_u^\Omega = 0$ dans $W^{1,2}(\Omega)$ donc aussi p.p. dans Ω pour une suite partielle; comme $L_{u*\rho_n}^\Omega$ est harmonique $\geqslant 0$, l'axiome 3′ entraîne la convergence, uniforme sur tout compact $\subset \Omega$, d'une nouvelle suite partielle; d'où $L_{u*\rho_n}^\Omega \to 0$ dans Ω, uniformément sur le support de μ; enfin $0 \leqslant u * \rho_n \leqslant M$. L'égalité (3), valable pour $\varphi = u * \rho_n$, donne à la limite $a(U^\mu, u) = \int u\, d\mu$.

On considère enfin $u_n = \inf(U^\mu, n)$; u_n est un potentiel $\in W_0^{1,2}(\Omega)$ et borné dans Ω, u_n tend en croissant vers U^μ et u_n tend vers U^μ dans $W^{1,2}(\Omega)$ [6; cf. la démonstration du th. 5], d'où la relation (1).

— Si μ est une mesure > 0 quelconque sur Ω, soit K_n une suite croissante de compacts, de réunion Ω et $\mu_n = \chi_{K_n}\mu$. U^{μ_n}, majoré par U^μ est dans $W_0^{1,2}(\Omega)$ (th. 8), d'où

$$a(U^{\mu_n}, U^{\mu_n}) = \int U^{\mu_n}\, d\mu_n.$$

$\chi_{K_n} U^{\mu_n}$ tend vers U^μ en croissant, donc $\int U^{\mu_n}\, d\mu_n \to \int U^\mu\, d\mu$, fini ou $= +\infty$. D'autre part (th. 8) $|||U^{\mu_n}||| \leqslant |||U^\mu|||$; on en déduit que la suite U^{μ_n} est faiblement convergente vers U^μ dans $W_0^{1,2}(\Omega)$, d'où lim inf $|||U^{\mu_n}||| \geqslant |||U^\mu|||$. On a donc $|||U^{\mu_n}||| \to |||U^\mu|||$ et l'égalité (1).

2) Réciproquement, soit U^μ un potentiel d'énergie finie.

— Supposons d'abord la mesure μ à support compact. Soit $u_n = \inf(U^\mu, n)$ et μ_n la mesure de F. Riesz de u_n: pour n assez grand, μ_n est aussi à support compact, donc $u_n \in W_0^{1,2}(\Omega)$

(6) $u * \rho_n$ désigne ici la restriction à Ω de la régularisée de $\tilde{u} = \begin{cases} u \text{ dans } \Omega \\ 0 \text{ dans } \mathbf{R}^n - \Omega. \end{cases}$

(corollaire du th. 7) et $a(u_n, u_n) = \int u_n \, d\mu_n$. Comme

$$\int u_n \, d\mu_n \leqslant \int \mathrm{U}^{\mu} \, d\mu,$$

$|||u_n|||$ est borné et la suite u_n converge faiblement dans $\mathrm{W}_0^{1,2}(\Omega)$ vers U^{μ}; d'où $\mathrm{U}^{\mu} \in \mathrm{W}_0^{1,2}(\Omega)$.

— Si μ est une mesure > 0 quelconque, on considère encore une suite croissante de compacts K_n, de réunion Ω, et $\mu_n = \chi_{\mathrm{K}_n}\mu$. On a : $a(\mathrm{U}^{\mu_n}, \mathrm{U}^{\mu_n}) = \int \mathrm{U}^{\mu_n} \, d\mu_n$ et

$$\int \mathrm{U}^{\mu_n} \, d\mu_n \leqslant \int \mathrm{U}^{\mu} \, d\mu;$$

d'après le raisonnement ci-dessus $\mathrm{U}^{\mu} \in \mathrm{W}_0^{1,2}(\Omega)$.

Corollaire 1. — *Si les potentiels* U^{μ} *et* U^{ν} *sont d'énergie finie :*

$$\left(\int \mathrm{U}^{\mu} \, d\nu\right)^2 \leqslant \int \mathrm{U}^{\mu} \, d\mu \int \mathrm{U}^{\nu} \, d\nu;$$

par suite $\int \mathrm{U}^{\mu-\nu} \, d(\mu - \nu) \geqslant 0$.

Corollaire 2. — *La topologie forte de Cartan, sur l'espace* $\mathcal{E}^+$ *des potentiels dans* Ω *d'énergie finie ou sur l'espace* $\mathcal{E}$ *des différences de tels potentiels, équivaut à celle de* $\mathrm{W}_0^{1,2}(\Omega)$, *restreinte aux sursolutions ou aux différences de sursolutions.*

Les sursolutions $\in \mathrm{W}_0^{1,2}(\Omega)$ formant une partie fermée de $\mathrm{W}_0^{1,2}(\Omega)$, on retrouve ainsi le fait que $\mathcal{E}^+$ est complet pour sa topologie forte; le fait que $\mathcal{E}$ ne l'est pas signifie que les différences de sursolutions ne forment pas une partie fermée de $\mathrm{W}_0^{1,2}(\Omega)$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] M. Brelot, Lectures on Potential theory, Tata Institute of Fundamental Research, 1960.

[2] J. Deny, Les potentiels d'énergie finie (thèse) *Acta Math.*, 82, 1950, 107-183.

[3] E. Gagliardo, Proprietà di alcune classi di funzioni in più variabili. *Ricerche di matematica*, 7, 1958, 102-137.

[4] R. M. Hervé, Recherches axiomatiques sur la théorie des fonctions surharmoniques et du potentiel (thèse) *Ann. Inst. Fourier*, 12, 1962, 415-571.

[5] R. M. HERVÉ, Un principe du maximum pour les sous-solutions locales d'une équation uniformément elliptique de la forme

$$Lu = -\sum_i \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\sum_j a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_j}\right) = 0.$$

Ann. Inst. Fourier, 14, fasc. 2, 1964, 493-508.

[6] R. M. HERVÉ, Quelques propriétés des fonctions surharmoniques associées à une équation uniformément elliptique de la forme

$$Lu = -\sum_i \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\sum_j a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_j}\right) = 0.$$

Ann. Inst. Fourier, 15, fasc. 2, 1965, 214-224.

[7] W. LITTMAN, G. STAMPACCHIA and H. F. WEINBERGER, Regular points for elliptic equations with discontinuous coefficients. *Ann. Sc. Norm. Sup.* Pisa, 1963.

[8] E. MAGENES e G. STAMPACCHIA, I problemi al contorno per le equazioni differenziali di tipo ellittico. *Ann.* Pisa, 12, 1958, 247-357.

[9] J. MOSER, A new proof of De Giorgi's theorem concerning the regularity problem for elliptic differential equations. *Comm. Pure appl. Math.*, 13, 1960, 457-468.

[10] G. STAMPACCHIA, Formes bilinéaires coercitives sur les ensembles convexes. *Comptes-Rendus*, 258, 1964, 4413-4416.

[11] G. STAMPACCHIA, Séminaire sur les équations aux dérivées partielles, Collège de France, Novembre 1963-Mai 1964.

Manuscrit reçu le 19 janvier 1966.

Mme R.-M. HERVÉ,
Institut de Mathématiques,
Faculté des Sciences,
54-Nancy.