



ANNALES

DE

L'INSTITUT FOURIER

Michaël BULOIS

Composantes irréductibles de la variété commutante nilpotente d'une algèbre de Lie symétrique semi-simple

Tome 59, n° 1 (2009), p. 37-80.

http://aif.cedram.org/item?id=AIF_2009__59_1_37_0

© Association des Annales de l'institut Fourier, 2009, tous droits réservés.

L'accès aux articles de la revue « Annales de l'institut Fourier » (<http://aif.cedram.org/>), implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://aif.cedram.org/legal/>). Toute reproduction en tout ou partie cet article sous quelque forme que ce soit pour tout usage autre que l'utilisation à fin strictement personnelle du copiste est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

cedram

*Article mis en ligne dans le cadre du
Centre de diffusion des revues académiques de mathématiques
<http://www.cedram.org/>*

COMPOSANTES IRRÉDUCTIBLES DE LA VARIÉTÉ COMMUTANTE NILPOTENTE D'UNE ALGÈBRE DE LIE SYMÉTRIQUE SEMI-SIMPLE

par Michaël BULOIS

RÉSUMÉ. — Soit θ une involution de l'algèbre de Lie semi-simple de dimension finie \mathfrak{g} et $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$ la décomposition de Cartan associée. La variété commutante nilpotente de l'algèbre de Lie symétrique (\mathfrak{g}, θ) est formée des paires d'éléments nilpotents (x, y) de \mathfrak{p} tels que $[x, y] = 0$. Il est conjecturé que cette variété est équidimensionnelle et que ses composantes irréductibles sont indexées par les orbites d'éléments \mathfrak{p} -distingués. Cette conjecture a été démontrée par A. Premet dans le cas $(\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}, \theta)$ avec $\theta(x, y) = (y, x)$. Dans ce travail, nous la prouvons dans un grand nombre d'autres cas.

ABSTRACT. — Let θ be an involution of the finite dimensional semisimple Lie algebra \mathfrak{g} and $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$ be the associated Cartan decomposition. The nilpotent commuting variety of (\mathfrak{g}, θ) consists in pairs of nilpotent elements (x, y) of \mathfrak{p} such that $[x, y] = 0$. It is conjectured that this variety is equidimensional and that its irreducible components are indexed by the orbits of \mathfrak{p} distinguished elements. This conjecture was established by A. Premet in the case $(\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}, \theta)$ where $\theta(x, y) = (y, x)$. In this work we prove the conjecture in a significant number of other cases.

Introduction

Soit \mathfrak{g} une algèbre de Lie réductive, de dimension finie, définie sur un corps \mathbb{k} algébriquement clos de caractéristique zéro. Soit G son groupe adjoint de sorte que $\mathfrak{g} = \mathfrak{Lie}(G)$. Soit θ un automorphisme involutif de \mathfrak{g} et $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$ la décomposition associée en θ -espaces propres de valeurs propres respectives $+1$ et -1 . Ceci nous donne une algèbre de Lie symétrique (\mathfrak{g}, θ) . Notons K le groupe adjoint de \mathfrak{k} . Le travail de R.W. Richardson [27] a montré que $\mathfrak{C}(\mathfrak{g}) = \{(x, y) \in \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \mid [x, y] = 0\}$, la variété commutante de \mathfrak{g} ,

Mots-clés: algèbre de Lie semi-simple, paire symétrique, variété commutante, orbite nilpotente.

Classification math.: 17B20, 14L30, 17B20.

est irréductible. Suivant une conjecture [1] de V. Baranovsky, A. Premet a montré [26] que $\mathfrak{C}^{\text{nil}}(\mathfrak{g})$, la variété commutante nilpotente de \mathfrak{g} est équidimensionnelle et a indexé ses composantes irréductibles par les orbites distinguées. Par ailleurs, l'irréductibilité de la variété commutante de \mathfrak{p} , $\mathfrak{C}(\mathfrak{p})$, a été étudiée dans [24, 20, 21, 22, 28, 29]. Nous nous intéressons à $\mathfrak{C}^{\text{nil}}(\mathfrak{p})$, la variété commutante nilpotente de \mathfrak{p} . Soit \mathcal{N} le cône des éléments nilpotents de \mathfrak{p} , on note

$$\mathfrak{C}^{\text{nil}}(\mathfrak{p}) = \{(x, y) \in \mathcal{N} \times \mathcal{N} : [x, y] = 0\} = \mathfrak{C}^{\text{nil}}(\mathfrak{g}) \cap (\mathfrak{p} \times \mathfrak{p})$$

la variété commutante nilpotente de \mathfrak{p} . Le but de ce travail est d'établir, dans beaucoup de cas, la conjecture suivante. (Rappelons qu'un élément de \mathfrak{p} est dit \mathfrak{p} -distingué si son centralisateur dans \mathfrak{p} ne contient que des éléments nilpotents.)

CONJECTURE A. — *La variété $\mathfrak{C}^{\text{nil}}(\mathfrak{p})$ est équidimensionnelle de dimension $\dim \mathfrak{p}$. Ses composantes irréductibles sont indexées par les orbites d'éléments \mathfrak{p} -distingués.*

Il est facile de voir qu'il suffit de prouver le résultat lorsque la paire symétrique $(\mathfrak{g}, \mathfrak{k})$ est irréductible. En adoptant les notations de [12, p. 518], nous établissons la conjecture dans les cas AIII, CII, DIII, E{II–IX}, FI, FII et GI. Dans les autres cas nous obtenons des résultats qui renforcent sa validité.

La nature des composantes irréductibles potentielles de \mathfrak{p} peut être comprise à l'aide de considérations générales contenues dans la première section. Certaines des méthodes utilisées généralisent celles de [26] ; on est en particulier amené à introduire la notion d'élément presque \mathfrak{p} -distingué (cf. 1.7). Un tel élément e , s'il n'est pas \mathfrak{p} -distingué, définit une variété $\mathfrak{C}(e)$ susceptible d'être une composante, dite étrange, de dimension $< \dim \mathfrak{p}$ dans $\mathfrak{C}^{\text{nil}}(\mathfrak{p})$. L'essentiel du travail consiste donc à montrer que les variétés de la forme $\mathfrak{C}(e)$ pour de tels e ne fournissent pas de composantes irréductibles.

Les sections 2 et 3 donnent une classification des éléments presque \mathfrak{p} -distingués en termes d' (ab) -diagrammes de Young (cf. [18, 19]) dans le cas où \mathfrak{g} est classique. Cette classification permet de prouver la conjecture dans les cas AIII, CII et DIII.

Dans les sections 4 et 5 on montre qu'un certain nombre de composantes étranges ne peuvent apparaître dans les cas AI, AII, CI et BDI. Ces résultats assurent, par exemple, que la conjecture est vraie dans les cas AI en rang ≤ 4 , AII en rang ≤ 3 , CI en rang ≤ 7 et BDI en rang ≤ 2 .

La section 6 traite du cas où \mathfrak{g} est exceptionnelle. À l'aide de tables établies par D. Z. Djokovic on y démontre la conjecture dans tous les cas, sauf celui de EI où deux composantes étranges restent à éliminer.

L'appendice 7 est un complément permettant de décrire une classe d'éléments appelés \mathfrak{p} -self-large. Ces éléments sont intimement liés à la méthode issue de la section 1.4 visant à éliminer un certain nombre de composantes étranges. Il fait suite à l'article de D. Panyushev [23] qui traite du cas des algèbres de Lie.

Remerciements. — D. Panyushev nous a indiqué qu'il a obtenu des résultats semblables aux nôtres. Nous le remercions de nous en avoir informé. Je tiens également à remercier le rapporteur pour ses très pertinentes remarques et suggestions.

1. Généralités

Rappelons quelques résultats tirés de [17]. Tout élément $t \in \mathfrak{p}$ s'écrit de façon unique $t = s + n$ où s et n sont des éléments de \mathfrak{p} respectivement semi-simple et nilpotent (via l'action adjointe $\text{ad}_{\mathfrak{g}}$ sur \mathfrak{g}). On appelle tore de dimension r toute algèbre de Lie commutative constituée d'éléments semi-simples; on notera souvent T_r un tel tore. On appelle rang de \mathfrak{p} et on note $\text{rk}(\mathfrak{p})$ la dimension commune des tores maximaux de \mathfrak{p} . L'ensemble \mathcal{N} est un cône; qui est une variété équidimensionnelle de dimension $\dim \mathfrak{p} - \text{rk}(\mathfrak{p})$. Le cône \mathcal{N} est stable sous l'action de K et se décompose en un nombre fini d'orbites. On notera $\mathcal{O}(e)$ la K -orbite d'un élément nilpotent e . Si $X \subset \mathfrak{g}$ est une partie quelconque de \mathfrak{g} , on note $\mathcal{N}(X)$ l'ensemble des éléments nilpotents de \mathfrak{g} contenus dans X . Pour $x \in \mathfrak{g}$ on pose $X^x = \{y \in X \mid [x, y] = 0\}$. Rappelons aussi que pour tout élément $e \in \mathfrak{p}$, on a [17, Proposition 5]

$$\dim \mathcal{O}(e) = \dim \mathfrak{k} - \dim \mathfrak{k}^e = \dim \mathfrak{p} - \dim \mathfrak{p}^e.$$

Enfin lorsqu'il n'y aura pas d'ambiguïté, pr_1 désignera une application de projection sur la première variable.

1.1. Réduction au cas simple

On pose $\mathfrak{g}' = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$; $\mathfrak{k}' = \mathfrak{g}' \cap \mathfrak{k}$ et $\mathfrak{p}' = \mathfrak{g}' \cap \mathfrak{p}$. On a alors $\mathfrak{g}' = \mathfrak{k}' \oplus \mathfrak{p}'$, ce qui nous donne une paire symétrique semi-simple $(\mathfrak{g}', \mathfrak{k}')$. Notons que d'après la définition de $\mathfrak{C}^{\text{nil}}(\mathfrak{p})$, on a $\mathfrak{C}^{\text{nil}}(\mathfrak{p}) = \mathfrak{C}^{\text{nil}}(\mathfrak{p}')$. Pour l'étude de $\mathfrak{C}^{\text{nil}}(\mathfrak{p})$, on

peut donc supposer sans perte de généralité que \mathfrak{g} est semi-simple. Ce sera le cas dans tout le reste de l'article.

De plus, si $\mathfrak{g} = \bigoplus_i \mathfrak{g}_i$ est une décomposition de \mathfrak{g} en algèbres de Lie simples (cf. [32, 20.1.7]), l'action de θ envoie chaque \mathfrak{g}_i sur un $\mathfrak{g}_{\theta(i)}$. On a alors deux cas possibles :

- a) $i = \theta(i)$, dans ce cas \mathfrak{g}_i est θ -stable et $\mathfrak{g}_i = \mathfrak{k}_i \oplus \mathfrak{p}_i$
- b) $i \neq \theta(i)$; dans ce cas $\theta(\theta(i)) = i$ et on peut supposer que $\mathfrak{g}_i \times \mathfrak{g}_{\theta(i)} \cong \mathfrak{g}_i \times \mathfrak{g}_i$ avec $\theta(x, y) = (y, x)$. On pose $\mathfrak{k}_i = \{(x, x) \mid x \in \mathfrak{g}_i\}$ et $\mathfrak{p}_i = \{(x, -x) \mid x \in \mathfrak{g}_i\}$.

On a alors $\mathcal{N}(\mathfrak{p}) = \bigoplus_i \mathcal{N}(\mathfrak{p}_i)$ et $\mathfrak{C}^{\text{nil}}(\mathfrak{p}) = \bigoplus_i \mathfrak{C}^{\text{nil}}(\mathfrak{p}_i)$.

Par ailleurs, dans le cas b), on a $\mathfrak{p}_i \cong \mathfrak{g}_i$ par $(x, -x) \mapsto x$. Cet isomorphisme envoie $\mathcal{N}(\mathfrak{p}_i)$ sur $\mathcal{N}(\mathfrak{g}_i)$ et $\mathfrak{C}^{\text{nil}}(\mathfrak{p}_i)$ sur $\mathfrak{C}^{\text{nil}}(\mathfrak{g}_i)$, dont Premet a décrit les composantes irréductibles [26].

La classification des composantes irréductibles de $\mathfrak{C}^{\text{nil}}(\mathfrak{p}_i)$ pour \mathfrak{g}_i simple, suffit donc pour obtenir la classification des composantes irréductibles de $\mathfrak{C}^{\text{nil}}(\mathfrak{p})$.

1.2. Paramétrisation par les orbites

Rappelons que \mathcal{N} désigne le cône des éléments nilpotents de \mathfrak{p} . Soit $e \in \mathcal{N}$. Pour $e = 0$ on pose $\mathfrak{g}(e, 0) = \mathfrak{g}$ et $\mathfrak{g}(e, i) = \{0\}$ si $i \in \mathbb{Z}^*$. Si $e \neq 0$, il existe un \mathcal{S} -triplet normal (e, h, f) contenant e (cf. [17, Proposition 4]). On pose $\mathfrak{g}(i, h) = \{x \in \mathfrak{g} \mid [h, x] = ix\}$ et on a $\mathfrak{g} = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} \mathfrak{g}(i, h)$ (cf. [32, 19.2.7]). Comme $h \in \mathfrak{k}$, cette décomposition est θ -stable et on pose $\mathfrak{k}(i, h) = \mathfrak{g}(i, h) \cap \mathfrak{k}$ et $\mathfrak{p}(i, h) = \mathfrak{g}(i, h) \cap \mathfrak{p}$. On pose, par ailleurs, $\mathfrak{g}(e, i) = \mathfrak{g}(i, h) \cap \mathfrak{g}^e$. Comme $e \in \mathfrak{p}$, $\mathfrak{g}(e, i)$ est θ -stable et on note $\mathfrak{p}(e, i) = \mathfrak{g}(e, i) \cap \mathfrak{p}$. On a alors

$$\mathfrak{p}^e = \bigoplus_{i \in \mathbb{N}} \mathfrak{p}(e, i).$$

On sait que $\mathfrak{g}(e, 0)$ est le stabilisateur de (e, h, f) dans \mathfrak{g} , c'est donc une sous-algèbre réductive dans \mathfrak{g} (cf. [32, 20.5.13]). L'ensemble de ses éléments nilpotents est donc $\mathcal{N}(\mathfrak{g}) \cap \mathfrak{g}(e, 0)$ et on a

$$\mathcal{N}(\mathfrak{g}) \cap \mathfrak{g}^e = \mathcal{N}(\mathfrak{g}(e, 0)) \times \bigoplus_{i>0} \mathfrak{g}(e, i).$$

Par la discussion ci-dessus sur la θ -stabilité, on a de plus que :

$$\mathcal{N} \cap \mathfrak{p}^e = \mathcal{N}(\mathfrak{p}(e, 0)) \times \bigoplus_{i>0} \mathfrak{p}(e, i).$$

C'est une variété qui contient le même nombre de composantes irréductibles que $\mathcal{N}(\mathfrak{p}(e, 0))$ que l'on indexe par un ensemble I_e . On a alors :

$$\mathcal{N} \cap \mathfrak{p}^e = \bigcup_{j \in I_e} \mathcal{N}_e^{(j)} \quad \text{où} \quad \mathcal{N}_e^{(j)} = (\mathcal{N}(\mathfrak{p}(e, 0)))_j \times \bigoplus_{i>0} \mathfrak{p}(e, i).$$

DÉFINITION 1.1. — On pose

$$\begin{aligned} \mathfrak{C}(e)^{(j)} &:= \overline{\text{Ad}K.(e, \mathcal{N}_e^{(j)})} \subset \mathfrak{C}^{\text{nil}}(\mathfrak{p}) \\ \text{et } \mathfrak{C}(e) &= \overline{\text{Ad}K.(e, \mathcal{N} \cap \mathfrak{p}^e)} = \bigcup_{j \in I_e} \mathfrak{C}(e)^{(j)}. \end{aligned}$$

On dit que e engendre $\mathfrak{C}(e)^{(j)}$.

Les sous-variétés du type $\mathfrak{C}(e)^{(j)}$ sont irréductibles. Or par [17, Théorème 2], il existe un nombre fini de K -orbites nilpotentes dans \mathfrak{p} , dont on notera e_1, \dots, e_k des représentants, de sorte que :

$$\mathfrak{C}^{\text{nil}}(\mathfrak{p}) = \bigcup_{\substack{i=1, \dots, k \\ j \in I_{e_i}}} \mathfrak{C}(e_i)^{(j)}.$$

Cette union étant finie, on peut en déduire que les composantes irréductibles de $\mathfrak{C}^{\text{nil}}(\mathfrak{p})$ sont de la forme $\mathfrak{C}(e_i)^{(j)}$ pour $i \in \llbracket 1; k \rrbracket$ et $j \in I_{e_i}$.

1.3. Éléments \mathfrak{p} -distingués et conjecture

La notion d'élément nilpotent \mathfrak{p} -distingué va s'avérer très importante pour la suite.

DÉFINITION 1.2. — Soit $e \in \mathcal{N}$. L'élément e est dit \mathfrak{p} -distingué si $\mathfrak{p}^e \subset \mathcal{N}$.

LEMME 1.3. — L'élément e est \mathfrak{p} -distingué si et seulement si $\mathfrak{p}(e, 0) = \{0\}$, ce qui revient à dire que $\mathfrak{p}^e = \bigoplus_{i>0} \mathfrak{p}(e, i)$.

Démonstration. — Si $\mathfrak{p}(e, 0) = \{0\}$ alors $\mathfrak{p}^e = \bigoplus_{i>0} \mathfrak{p}(e, i) \subset \mathcal{N}$. Réciproquement, si $\mathfrak{p}(e, 0) \neq \{0\}$ alors $\mathfrak{p}(e, 0)$ est le -1 -espace propre de $\mathfrak{g}(e, 0)$ qui est réductif dans \mathfrak{g} . Il contient donc des éléments semi-simples non-triviaux et e n'est pas distingué. \square

Soit $e \in \mathcal{N}$. On veut calculer la dimension des $\mathfrak{C}(e)^{(j)}$. On s'intéresse pour cela à l'application dominante entre variétés irréductibles

$$\xi : \begin{cases} K \times \mathcal{N}_e^{(j)} & \rightarrow \mathfrak{C}(e)^{(j)} \\ (g, x) & \mapsto (g.e, g.x). \end{cases}$$

Pour tout $x \in \mathcal{N}_e^{(j)}$, la fibre $\xi^{-1}(\xi(1, x))$ est l'ensemble des $(g, g^{-1}.x)$ avec $g \in K^e$. On en déduit que $\dim \xi^{-1}(\xi(1, x)) = \dim K^e = \dim \mathfrak{k}^e$. Ceci reste vrai pour toute fibre non-vide, et en notant $p = \dim \mathfrak{p}$ on a (cf. [32, Théorème 15.5.3])

$$\begin{aligned} \dim \mathfrak{C}(e)^{(j)} &= \dim K + \dim \mathcal{N}_e^{(j)} - \dim \mathfrak{k}^e \\ &= p - (\dim \mathfrak{p}^e - \dim \mathcal{N}_e^{(j)}) \\ &= p - \operatorname{codim}_{\mathfrak{p}(e,0)} \mathcal{N}_e^{(j)} \\ &= p - \operatorname{rk}(\mathfrak{p}(e, 0)) \end{aligned}$$

où la dernière égalité découle de [17, Théorème 3]. On remarque que les sous-variétés $\mathfrak{C}(e)$ sont équidimensionnelles.

DÉFINITION 1.4. — *Pour un élément nilpotent $e \in \mathfrak{p}$, on définit le défaut de e comme étant le rang de $\mathfrak{p}(e, 0)$. On le note $\delta(e)$. Le défaut est invariant sous l'action de K .*

PROPOSITION 1.5. — *La variété $\mathfrak{C}^{\text{nil}}(\mathfrak{p})$ est de dimension p et ses composantes irréductibles de dimension maximale sont les $\mathfrak{C}(e)$ avec e représentant d'orbite \mathfrak{p} -distinguée.*

Démonstration. — Par le calcul précédent, on voit que $\dim \mathfrak{C}(e)^{(j)} = p$ si et seulement si e est de défaut nul, ce qui est équivalent à dire que e est \mathfrak{p} -distingué. Dans le cas contraire, on a $\dim \mathfrak{C}(e)^{(j)} < p$. Par ailleurs, comme les éléments nilpotents \mathfrak{p} -réguliers sont \mathfrak{p} -distingués, il existe des éléments \mathfrak{p} -distingués ce qui suffit à montrer que $\dim \mathfrak{C}^{\text{nil}}(\mathfrak{p}) = p$. Maintenant, si e est \mathfrak{p} -distingué, $\mathcal{N} \cap \mathfrak{p}^e = \mathfrak{p}^e$ donc $\mathfrak{C}(e)$ est irréductible. On a de plus $\operatorname{pr}_1(\mathfrak{C}(e)) = \overline{K.e}$. On en déduit que les $\mathfrak{C}(e_i)$ sont distincts pour des éléments e_i appartenant à des K -orbites différentes. \square

On appellera *composante étrange* une composante irréductible de $\mathfrak{C}^{\text{nil}}(\mathfrak{p})$ de dimension strictement inférieure à p .

Remarque 1.6. — En rang 0, i.e. si $\mathfrak{p} = \{0\}$ ou encore si θ est triviale, on a $\mathfrak{C}^{\text{nil}}(\mathfrak{p}) = \{0\} \times \{0\} = \mathfrak{C}(0)$.

En rang 1, le commutant d'un élément $x \in \mathfrak{p}$ est $\mathbb{k}x$. Tous les éléments nilpotents sont donc \mathfrak{p} -distingués et les composantes irréductibles de $\mathfrak{C}^{\text{nil}}(\mathfrak{p})$ sont les $\mathfrak{C}(e)$ où e est nilpotent.

1.4. Éléments presque \mathfrak{p} -distingués

Nous allons maintenant identifier les composantes étranges en introduisant la notion d'élément presque \mathfrak{p} -distingué, qui généralise celle d'élément

presque distingué (cf. [26]). Les résultats qui suivent, et particulièrement la proposition 1.10, sont largement inspirés de [26, Proposition 2.1].

DÉFINITION 1.7. — *On dit que $e \in \mathcal{N}$ est presque \mathfrak{p} -distingué si $\mathfrak{p}(e, 0)$ ne contient pas d'élément nilpotent non nul, c'est à dire si $\mathfrak{p}(e, 0)$ est un tore $T_{\delta(e)}$. C'est équivalent au fait que $\delta(e) = \dim \mathfrak{p}(e, 0)$.*

LEMME 1.8. — *Si $e \in \mathcal{N}$ et $j \in I_e$ sont tels que $\mathfrak{C}(e)^{(j)}$ est une composante irréductible de $\mathfrak{C}^{nil}(\mathfrak{p})$, alors $\mathcal{N}_e^{(j)} \subseteq \overline{\mathcal{O}(e)}$.*

Démonstration. — Remarquons tout d'abord que le groupe $GL(2)$ agit sur $\mathfrak{p} \times \mathfrak{p}$ via :

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \cdot (x, y) = (\alpha x + \beta y, \gamma x + \delta y).$$

Comme toute combinaison linéaire d'éléments commutant dans \mathcal{N} est encore dans \mathcal{N} , la variété $\mathfrak{C}^{nil}(\mathfrak{p})$ est $GL(2)$ -invariante. Puisque $GL(2)$ est connexe, il fixe la composante irréductible $\mathfrak{C}(e)^{(j)}$. En particulier $\mathfrak{C}(e)^{(j)}$ est stable sous l'application $\sigma : (x, y) \rightarrow (y, x)$ de $\mathfrak{p} \times \mathfrak{p}$. Comme $\text{pr}_1(K.(e, \mathcal{N}_e^{(j)})) = \mathcal{O}(e)$, on a $\text{pr}_1(\mathfrak{C}(e)^{(j)}) \subseteq \overline{\mathcal{O}(e)}$. Ceci implique en particulier que

$$\mathcal{N}_e^{(j)} = (\text{pr}_1 \circ \sigma)(e, \mathcal{N}_e^{(j)}) \subseteq \overline{\mathcal{O}(e)}.$$

□

Notons ici une remarque liée à la preuve précédente : si $\mathcal{N}_e^{(j)} \subseteq \overline{\mathcal{O}(e)}$ alors $GL(2).\mathfrak{C}(e)^{(j)} = \mathfrak{C}(e)^{(j)}$. On ne peut donc pas obtenir plus de résultats en considérant l'action de $GL(2)$ à la place de celle de σ .

LEMME 1.9. — *On a $\bigoplus_{i \geq 2} \mathfrak{p}(e, i) \subset \overline{\mathcal{O}(e)}$.*

Démonstration. — On peut supposer $e \neq 0$. On considère la sous-algèbre parabolique $\mathfrak{q} = \bigoplus_{i \geq 0} \mathfrak{k}(i, h)$ de l'algèbre de Lie \mathfrak{k} . D'après ([32, 29.4.3]), il existe un sous-groupe Q de K ayant \mathfrak{q} pour algèbre de Lie. On a alors $[\mathfrak{q}, e] = \bigoplus_{i \geq 2} \mathfrak{p}(i, h)$, donc $Q.e$ est une sous-variété de $\bigoplus_{i \geq 2} \mathfrak{p}(i, h)$ de même dimension. On en déduit que $\overline{Q.e} = [\mathfrak{q}, e] = \bigoplus_{i \geq 2} \mathfrak{p}(i, h)$. L'affirmation du lemme est alors immédiate. □

Pour éliminer des possibilités de composantes étranges, nous allons utiliser le lemme 1.8. D'après le lemme 1.9, cela ne peut éventuellement s'appliquer que dans le cas où $\mathfrak{p}(e, 0)$ ou $\mathfrak{p}(e, 1)$ contient des éléments nilpotents non nuls.

PROPOSITION 1.10. — *Les composantes irréductibles de $\mathfrak{C}^{nil}(\mathfrak{p})$ sont de la forme $\mathfrak{C}(e)$ avec e presque \mathfrak{p} -distingué.*

Démonstration. — Choisissons e et $j \in I_e$ tels que $\mathfrak{C}(e)^{(j)}$ soit une composante irréductible de $\mathfrak{C}^{\text{nil}}(\mathfrak{g})$ et supposons que e ne soit pas presque \mathfrak{p} -distingué. Alors $\mathcal{N} \cap \mathfrak{p}(e, 0)$ est non-trivial et $\mathcal{N}(\mathfrak{p}(e, 0))_j$ contient un élément non-nul e_0 . Par définition de $\mathcal{N}_e^{(j)}$, on a $e + e_0 \in \mathcal{N}_e^{(j)}$, donc $e + e_0 \in \overline{\mathcal{O}(e)}$ par le lemme 1.8. Si $e = 0$ on a une contradiction, on suppose donc $e \neq 0$.

Comme $\mathfrak{g}(e, 0)$ est réductive dans \mathfrak{g} , on peut inclure e_0 dans un \mathcal{S} -triplet normal (e_0, h_0, f_0) de $\mathfrak{g}(e, 0)$. Soit \mathfrak{s}_0 l'algèbre de Lie de dimension trois engendrée par (e_0, h_0, f_0) . Comme $\mathfrak{s}_0 \subseteq \mathfrak{g}(e, 0)$, $(e + e_0, h + h_0, f + f_0)$ est un \mathcal{S} -triplet normal. Maintenant, $e \in \mathfrak{g}(h_0, 0)$, $e_0 \in \mathfrak{g}(h_0, 2)$ donc l'application $\tau_\lambda \in \mathbb{k}$ ($\lambda \in \mathbb{k}^*$) définie dans [32, 38.6.2] envoie $e + e_0$ sur $e + \lambda^2 e_0$. On en déduit que $e + \mathbb{k}^* e_0 \subset \mathcal{O}(e + e_0)$ et donc $e \in \overline{\mathcal{O}(e + e_0)}$. Rappelons que d'après le paragraphe précédent, on a $e + e_0 \in \overline{\mathcal{O}(e)}$. On en déduit que $e + e_0$ et e sont K -conjugués. Ceci implique que h et $h + h_0$ sont également K -conjugués. On va maintenant chercher une contradiction.

On a $L(h, h_0) = L(h, [e_0, f_0]) = L([e_0, h], f_0) = 0$ où L désigne la forme de Killing de \mathfrak{g} . Ceci implique que $L(h + h_0, h + h_0) = L(h, h) + L(h_0, h_0)$. Mais h et $h + h_0$ sont conjugués et L est invariante sous l'action de G , d'où $L(h_0, h_0) = 0$. Or, puisque h_0 est l'élément semi-simple d'un \mathcal{S} -triplet, l'action adjointe de h_0 est à valeurs propres entières, et donc $L(h_0, h_0) = 0$ si et seulement si $h_0 = 0$. Ceci est impossible par le choix de e_0 . On a donc montré par l'absurde que e est presque \mathfrak{p} -distingué.

Maintenant, comme $\mathfrak{p}(e, 0)$ ne contient pas d'éléments nilpotents et que $\mathcal{N} \cap \mathfrak{p}^e = \bigoplus_{i>0} \mathfrak{p}(e, i)$ est irréductible, on en déduit que $\mathfrak{C}(e) = \mathfrak{C}(e)^{(j)}$ est la composante irréductible de $\mathfrak{C}^{\text{nil}}(\mathfrak{p})$ engendrée par e . \square

Remarque 1.11. — Notons que d'après la preuve de la proposition précédente $\mathfrak{C}(e)$ est irréductible pour e presque \mathfrak{p} -distingué. On a donc $\mathfrak{C}(e) = \overline{K.(e, \mathcal{N} \cap \mathfrak{p}^e)}$ lorsque e est presque \mathfrak{p} -distingué et la présence des indices $j \in I_e$ n'est plus nécessaire.

COROLLAIRE 1.12. — *Les composantes étranges sont engendrées par des éléments presque \mathfrak{p} -distingués non \mathfrak{p} -distingués.*

D'après la proposition 1.5 et le corollaire 1.12 la conjecture A est équivalente au fait que $\mathfrak{C}^{\text{nil}}(\mathfrak{p})$ ne comporte pas de composantes étranges, ou encore :

CONJECTURE 1.13. — *Si e_1 est presque \mathfrak{p} -distingué, il existe un élément e_2 \mathfrak{p} -distingué tel que $\mathfrak{C}(e_1) \subseteq \mathfrak{C}(e_2)$.*

D'après les résultats de la section 1.1, cette conjecture est vraie si et seulement si elle est vraie pour toute algèbre de Lie symétrique simple.

2. Centralisateurs

Le but de cette section est de caractériser les centralisateurs de \mathcal{S} -triplets dans le cas classique pour obtenir une classification des éléments presque \mathfrak{p} -distingués. En particulier nous allons retrouver que les éléments de défaut nul (i.e. \mathfrak{p} -distingués) correspondent bien aux éléments compacts décrits dans [25]. Le travail de [25] donne une description des éléments \mathfrak{p} -distingués et utilise le fait que les orbites d'éléments compacts dans le cas réel correspondent, via la correspondance de Kostant-Sekiguchi, aux orbites d'éléments \mathfrak{p} -distingués. Notre démarche pour décrire les centralisateurs lui sera en fait assez similaire. Dans toute la section, V désignera un espace vectoriel de dimension n . On supposera que $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{sl}(V)$ est une algèbre de Lie simple et que, contrairement à l'introduction, $G \subset \mathrm{SL}(V)$ est le plus petit groupe algébrique dont l'algèbre de Lie contient \mathfrak{g} (cf. [32, Chapitre 24]). Cette modification n'a pas d'incidence sur les orbites de \mathfrak{g} . On se restreint aux cas classiques, c'est à dire que l'on est dans l'une des situations suivantes :

- Type A : $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(V)$ auquel cas $G = \mathrm{SL}(V)$.
- Type BD : $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}_\Phi(V) = \mathfrak{aut}(V, \Phi)$ est l'algèbre de Lie orthogonale stabilisant une forme bilinéaire symétrique non dégénérée Φ . Dans ce cas $G = \mathrm{SO}_\Phi(V)$.
- Type C : $\mathfrak{g} = \mathfrak{sp}_\Phi(V) = \mathfrak{aut}(V, \Phi)$ est l'algèbre de Lie symplectique stabilisant une forme bilinéaire alternée non dégénérée Φ . Dans ce cas $G = \mathrm{SP}_\Phi(V)$.

DÉFINITION 2.1. — [11, Théorème 3.4] *Énumérons l'ensemble des involutions de Cartan θ définies sur \mathfrak{g} dans chacun de ces types.*

– Type A :

(AI) $\theta(x) = -T^t x^t T$ pour $x \in \mathfrak{g}$ et où $T = T^{-1} = {}^t T$. Ceci est équivalent au fait que $\mathfrak{k} = \mathfrak{aut}(V, \Phi)$ où $\Phi(x, y) = {}^t x T y$ est la forme bilinéaire symétrique associée à T . La propriété $T = T^{-1} = {}^t T$ définit de façon unique θ (à conjugaison près dans G).

(AII) $\theta(x) = -T^t x^t T$ pour $x \in \mathfrak{g}$ et où $T = T^{-1} = -{}^t T$. Ceci est équivalent au fait que $\mathfrak{k} = \mathfrak{aut}(V, \Phi)$ où $\Phi = {}^t x T y$ est la forme bilinéaire antisymétrique associée à T . La propriété $T = T^{-1} = -{}^t T$ définit de façon unique θ (à conjugaison près dans G).

(AIII) $\theta(x) = JxJ^{-1}$ pour $x \in \mathfrak{g}$ et où $J^2 = \mathrm{Id}_V$. On définit

$$V_\pm = \{v \in V \mid Jv = \pm v\}.$$

Alors $V = V_+ \oplus V_-$ et le nombre $\dim(V_+)$ définit θ de façon unique (à conjugaison près dans G).

– Types BD et C :

(BDI),(CII) $\theta(x) = JxJ^{-1}$ pour $x \in \mathfrak{g}$ où J préserve la forme Φ et vérifie $J^2 = \text{Id}_V$. On définit

$$V_{\pm} = \{v \in V \mid Jv = \pm v\}.$$

Alors $V = V_+ \oplus V_-$, la restriction de Φ à V_{\pm} est non-dégénérée et le nombre $\dim(V_+)$ définit θ de façon unique (à conjugaison près dans G).

(DIII),(CI) $\theta(x) = JxJ^{-1}$ pour $x \in \mathfrak{g}$ où J préserve la forme Φ et vérifie $J^2 = -\text{Id}_V$. On définit

$$V_{\pm i} = \{v \in V \mid Jv = \pm iv\}.$$

Alors $V = V_+ \oplus V_-$, la restriction de Φ à $V_{\pm i}$ est nulle et V_{+i} dual à V_{-i} par rapport à ω . De plus l'involution θ est uniquement déterminée (à conjugaison près dans G).

Étant donnée une telle algèbre de Lie symétrique $(\mathfrak{g}, \mathfrak{k})$ ou (\mathfrak{g}, θ) et $e \in \mathfrak{p}$ nilpotent non nul, on fixe un \mathcal{S} -triplet (e, h, f) normal qui engendre une sous-algèbre de Lie de dimension 3 que l'on note \mathfrak{s} . Les centralisateurs $\mathfrak{g}^{\mathfrak{s}}$ sont connus, cf. [31] ou [14]. Afin d'obtenir des informations précises sur les paires symétriques $(\mathfrak{g}^{\mathfrak{s}}, \theta|_{\mathfrak{g}^{\mathfrak{s}}})$, nous allons rappeler la description des sous-algèbres $\mathfrak{g}^{\mathfrak{s}}$.

Pour $\lambda \in \mathbb{Z}$ notons :

$$V(\lambda) = \{v \in V \mid h.v = \lambda v\}$$

de sorte que $V = \bigoplus_{\lambda \in \mathbb{Z}} V(\lambda)$. Il existe (à isomorphisme près) un unique \mathfrak{sl}_2 -module irréductible de dimension d . Notons-le ρ_d . Alors $V = \bigoplus_{d \in \mathbb{N}^*} V_d$ où V_d est isomorphe à $(\rho_1)^{m_d} \otimes_{\mathfrak{s}} \rho_d$ avec $\otimes_{\mathfrak{s}}$ désignant le produit tensoriel de \mathfrak{s} -modules. Ceci nous donne une décomposition

$$(2.1) \quad V_d = \bigoplus_{j \in \llbracket 0, d-1 \rrbracket} V(d-1-2j) \cap V_d.$$

On définit alors $V_{j,d} := V(d-1-2j) \cap V_d$ et $m_d := \dim V_{j,d}$, ce dernier étant un entier indépendant de j . On en déduit une partition de n donnée par $(d^{m_d})_{d \in \mathbb{N}^*}$. Cette partition correspond au diagramme de Young usuellement associé à la classe de conjugaison d'un élément nilpotent de $\mathfrak{sl}(V)$ (cf. [18], par exemple). Notons H_d (resp. H'_d) le sous-espace vectoriel engendré par les vecteurs de plus haut (resp. bas) poids de V_d . Autrement dit $H_d = V_{0,d}$ et $H'_d = V_{d-1,d}$. Soit g un élément de $\mathfrak{gl}(V)^{\mathfrak{s}}$. Par définition il stabilise les sous espaces propres de h et de e , et en particulier g stabilise les sous-espaces

$H_d = V(d - 1) \cap \ker e$. On peut donc définir des applications restrictions indexées par $d \in \mathbb{N}^*$

$$\varphi_d : \begin{cases} \mathfrak{gl}(V)^{\mathfrak{s}} & \longrightarrow \mathfrak{gl}(H_d) \\ g & \longmapsto g|_{H_d}. \end{cases}$$

Et on définit

$$(2.2) \quad \varphi = \bigoplus_{d \in \mathbb{N}^*} \varphi_d$$

On peut alors énoncer un premier résultat sur les centralisateurs :

LEMME 2.2. — *Le centralisateur du \mathcal{S} -triplet (e, h, f) dans $\mathfrak{gl}(V)$ vérifie :*

$$\mathfrak{gl}(V)^{\mathfrak{s}} \cong^{\varphi} \bigoplus_{d \in \mathbb{N}^*} \mathfrak{gl}(H_d).$$

Démonstration. — On a vu que l'application φ est bien définie. Nous allons démontrer qu'elle possède une réciproque. Soit $(g_d)_{d \in \mathbb{N}^*}$ une famille d'éléments de $\bigoplus_{d \in \mathbb{N}^*} \mathfrak{gl}(H_d)$, nous allons montrer qu'il existe un unique élément $g \in \mathfrak{gl}(V)$ tel que g centralise \mathfrak{s} et $g|_{H_d} = g_d$. La formule (2.1) associée au fait que f^j induit une bijection entre H_d et $V_{j,d}$ nous montre qu'un tel élément g est nécessairement défini uniquement sur chaque composante de V_d par

$$(2.3) \quad g|_{V_{j,d}} = f^j \cdot g_d \cdot f^{-j}.$$

Comme V est somme directe des $V_{j,d}$, l'élément g est défini uniquement sur V tout entier. Réciproquement, il est facile de vérifier qu'un élément g , défini par (2.3) à partir d'une famille $(g_d)_{d \in \mathbb{N}^*}$ quelconque, commute avec \mathfrak{s} . □

À partir de maintenant, on se donne une forme bilinéaire non-dégénérée Φ sur V et deux éléments $\varepsilon, \eta \in \{\pm 1\}$ de sorte que

- Φ est symétrique ou antisymétrique ce qui se traduit par $\Phi(u, v) = \varepsilon \Phi(v, u)$ pour tout $u, v \in V$.
- h préserve Φ et e, f préservent ou anti-préservent Φ : c'est à dire

$$\Phi(h.u, v) = -\Phi(u, h.v) ; \Phi(e.u, v) = -\eta \Phi(u, e.v) ; \Phi(f.u, v) = -\eta \Phi(u, f.v).$$

Le cas $\eta = 1$ permettra de décrire $\mathfrak{g}^{\mathfrak{s}}$ quand $\mathfrak{g} = \mathfrak{aut}(V, \Phi)$, tandis que le cas $\eta = -1$ permettra de décrire $\mathfrak{k}^{\mathfrak{s}}$ quand $\mathfrak{k} = \mathfrak{g} \cap \mathfrak{aut}(V, \Phi)$.

LEMME 2.3. —

(a) Si $\lambda \neq -\mu$ alors $\Phi(V(\lambda), V(\mu)) = 0$. Les sous-espaces $V(\lambda)$ et $V(-\lambda)$ sont en dualité par Φ .

(b) H_d est dual à $H'_d = f^{d-1}(H_d)$.

Démonstration. — Soient $u \in V(\lambda), v \in V(\mu)$.

$$\begin{aligned} \lambda \Phi(u, v) &= \Phi(h.u, v) \\ &= -\Phi(u, h.v) = -\mu \Phi(u, v), \end{aligned}$$

ce qui démontre la partie (a).

Soit maintenant $u \in H_d$. Par (a), il existe $w \in V(-d+1)$ tel que $\Phi(u, w) \neq 0$. Il existe w_1, w_2 tels que $w = e.w_1 + w_2$ et $w_2 \in H'_d$. On a alors :

$$0 \neq \Phi(u, w) = \Phi(u, e.w_1 + w_2) = -\eta \Phi(e.u, w_1) + \Phi(u, w_2) = \Phi(u, w_2).$$

Ceci prouve que la restriction de Φ à $H_d \times H'_d$ est non dégénérée. \square

DÉFINITION 2.4. — On définit $\tilde{\Phi}_d$ sur H_d par

$$\tilde{\Phi}_d(u, v) = \Phi(u, f^{d-1}.v).$$

LEMME 2.5. — La forme $\tilde{\Phi}_d$ est bilinéaire non dégénérée sur H_d et elle vérifie $\tilde{\Phi}_d(u, v) = (-\eta)^{d-1} \varepsilon \tilde{\Phi}_d(v, u)$.

Démonstration. — L'application f^{d-1} est une bijection de H'_d sur H_d , donc par le lemme 2.3 (b), $\tilde{\Phi}_d$ est non-dégénérée sur H_d . La relation de symétrie est une vérification facile. \square

Nous pouvons maintenant énoncer un second résultat sur les centralisateurs.

PROPOSITION 2.6. — Si l'algèbre de Lie $\mathfrak{w} \subseteq \mathfrak{sl}(V)$ est l'algèbre préservant la forme Φ sur V alors le centralisateur de (e, h, f) dans \mathfrak{w} vérifie

$$\mathfrak{w}^s \cong^\varphi \bigoplus_{d \in \mathbb{N}^*} \mathbf{aut}(H_d, \tilde{\Phi}_d).$$

Démonstration. — Par le lemme 2.2, on sait que tout élément de \mathfrak{w}^s peut être vu comme un élément de $\bigoplus_{d \in \mathbb{N}^*} \mathfrak{gl}(H_d)$. Maintenant, le fait que $g \in \mathfrak{w}$ implique que pour tout $d \in \mathbb{N}^*$, $(u, w) \in H_d \times H'_d$, on a $\Phi(g.u, w) = -\Phi(u, g.w)$. C'est à dire que pour tout $(u, v) \in H_d$, on a $0 = \Phi(g.u, f^{d-1}.v) + \Phi(u, g f^{d-1}.v) = \tilde{\Phi}_d(g.u, v) + \tilde{\Phi}_d(u, g.v)$, ce qu'on peut reformuler en : $g|_{H_d}$ préserve $\tilde{\Phi}_d$.

Réciproquement, si g est défini à partir d'éléments $g_d \in \mathbf{aut}(H_d, \tilde{\Phi}_d)$ et de la formule (2.3), alors g stabilise les sous-espaces $V_{j,d}$ de (2.1). Il suffit donc de regarder g sur tous les éléments $(u, v) \in V_{j,d} \times V_{d-1-j,d}$ pour montrer

que g preserve Φ :

$$\begin{aligned} \Phi(g.u, v) &= \Phi(f^j g_d f^{-j}.u, v) = (-\eta)^j \Phi(g_d f^{-j}.u, f^j.v) \\ &= (-\eta)^j \tilde{\Phi}(g_d f^{-j}.u, f^{j-(d-1)}.v) \\ &= -(-\eta)^j \tilde{\Phi}(f^{-j}.u, g_d f^{j-(d-1)}.v) \\ &= -(-\eta)^j \Phi(f^{-j}.u, f^{d-1} g_d f^{j-(d-1)}.v) \\ &= -\Phi(u, f^{d-1-j} g_d f^{j-(d-1)}.v) = -\Phi(u, g.v). \end{aligned}$$

□

Dorénavant J désigne un élément de $GL(V)$ tel qu'il existe $\xi \in \{\pm 1\}$ avec $J^2 = \xi \text{Id}$. Pour $g \in \mathfrak{gl}(V)$, on note $\theta(g) = JgJ^{-1}$. On suppose de plus que h commute avec J , et e, f anti-commutent avec J . C'est à dire :

$$\theta(h) = h ; \theta(e) = -e ; \theta(f) = -f$$

On note $\sqrt{-1}$ une racine carrée de -1 dans \mathbb{k} .

LEMME 2.7. —

(a) Le sous-espace H_d est J -stable.

(b) Si J préserve Φ , alors la restriction de $(\sqrt{-1})^{d-1}J$ à H_d préserve la forme $\tilde{\Phi}$.

Démonstration. — Les endomorphismes J et h commutent, donc le h -sous-espace propre $V(d-1)$ est stable par J . De la même façon, J et e anti-commutent donc le noyau de e est stable par J . On en déduit la partie (a) en remarquant que $H_d = V(d-1) \cap \ker e$.

Si J préserve Φ , alors pour tout $u, v \in H_d$,

$$\begin{aligned} \tilde{\Phi}((\sqrt{-1})^{d-1}J.u, (\sqrt{-1})^{d-1}J.v) &= (-1)^{d-1} \Phi(J.u, f^{d-1}J.v) \\ &= (-1)^{2(d-1)} \Phi(J.u, Jf^{d-1}.v) \\ &= \Phi(u, f^{d-1}v) = \tilde{\Phi}(u, v). \end{aligned}$$

□

Remarque 2.8. — Pour tout $d \in \mathbb{N}^*$, l'involution θ est inchangée par la modification de J en $(\sqrt{-1})^{d-1}J$. En effet, pour tout $g \in \mathfrak{gl}(V)$, $(\sqrt{-1})^{d-1}Jg((\sqrt{-1})^{d-1}J)^{-1} = JgJ^{-1}$. Par contre, ce qui change ce sont les formes préservées par J et $(\sqrt{-1})^{d-1}J$.

COROLLAIRE 2.9. — Si $\mathfrak{gl}^\theta(V) \subseteq \mathfrak{gl}(V)$ est l'algèbre de Lie réductive correspondant au 1-espace propre de l'automorphisme θ alors

$$(\mathfrak{gl}^\theta)^s \cong^\varphi \bigoplus_{d \in \mathbb{N}^*} (\mathfrak{gl}^{\theta_d})(H_d)$$

où $\theta_d(h)$ pour $h \in H_d$ est donné par $J|_{H_d} h J|_{H_d}^{-1}$.

Démonstration. — Le seul point restant non-trivial consiste à vérifier qu'un élément g déterminé à partir d'éléments g_d comme dans la formule (2.3) est bien invariant par θ . En effet, si $u \in V_{j,d}$:

$$\theta(g).u = \theta(f^j g_d f^{-j}).u = (-1)^{j-j} f^j \theta(g_d) f^{-j}.u = g.u$$

□

Enfin, cette dernière proposition nous permettra de traiter les derniers centralisateurs classiques envisageables.

PROPOSITION 2.10. — Si J preserve Φ et que $\mathfrak{k} = \mathfrak{aut}(V, \Phi)^J \subseteq \mathfrak{gl}(V)$ est l'algèbre de Lie réductive donnée par intersection de $\mathfrak{gl}^\theta(V)$ et de $\mathfrak{aut}(V, \Phi)$, alors

$$\mathfrak{k}^s \cong^\Phi \bigoplus_{d \in \mathbb{N}^*} (\mathfrak{aut}(H_d, \tilde{\Phi}))^{(\sqrt{-1})^{d-1} J}.$$

Démonstration. — Il suffit de combiner le corollaire 2.9 et la proposition 2.6. □

3. Classification des éléments presque \mathfrak{p} -distingués dans le cas classique

Reprenons les notations de la section 2 où $\mathfrak{g} \subseteq \mathfrak{sl}(V) = \mathfrak{sl}_n$ désignera une algèbre de Lie classique simple (cf. 2.1), θ une involution non-triviale sur \mathfrak{g} et $\mathfrak{k}, \mathfrak{p}$ les sous-espaces propres de θ associés respectivement aux valeurs propres $+1$ et -1 . On supposera toujours que si $e \in \mathfrak{p}$ est un élément nilpotent non nul, on l'inclut dans un \mathcal{S} -triplet normal (e, h, f) . On laisse au lecteur le soin de traduire les assertions quand $e = 0$. Rappelons, cf. section précédente, qu'à e est associée canoniquement la partition $(d^{m_d})_{d \in \mathbb{N}^*}$ de n . On notera ces partitions sous la forme d'un diagramme de Young, qu'on appellera diagramme de Young associé à e . Dans le cas où une matrice J intervient dans la définition de l'involution sur l'algèbre de Lie (cf. 2.1), on introduit la notion d' ab -diagramme de Young associé à e (cf. par exemple

[18]) de la façon suivante. On décompose V en J -sous-espaces propres $V_a \oplus V_b$ et on fixe une base diagonalisant J

$$\{\alpha_{d,i}^j \mid d \in \mathbb{N}^*, i \in \llbracket 0, d-1 \rrbracket, j \in \llbracket 1, m_d \rrbracket\}$$

adaptée au \mathcal{S} -triplet, c'est à dire telle que $(\alpha_{d,0}^j)_j$ forme une base de H'_d et $e(\alpha_{d,i}^j) = \alpha_{d,i+1}^j$. On remplit alors les cases du diagramme de Young associé à e par a ou b suivant que $\alpha_{d,i}^j \in V_a$ ou V_b . Comme $\theta(e) = -e$, sur une ligne du diagramme de Young, on a alternance de a et de b . On définit aussi $H'_{d,a} = V_a \cap H'_d$ (resp. $H'_{d,b} = V_b \cap H'_d$) et $a_d = \dim H'_{d,a}$ (resp. $b_d = \dim H'_{d,b}$) de sorte que $a_d + b_d = m_d$ et que a_d (resp b_d) désigne le nombre de lignes de longueur d commençant par un a (resp. b). Les éléments $(a_d)_{d \in \mathbb{N}^*}$ et $(b_d)_{d \in \mathbb{N}^*}$ sont des invariants de la K -classe de conjugaison de e . Lorsque J n'intervient pas n'intervient pas dans la définition de l'involution (type AI et AII), le diagramme de Young ou la donnée de $(m_d)_{d \in \mathbb{N}^*}$ sera un invariant suffisant.

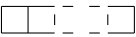
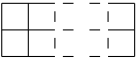
DÉFINITION 3.1. — On appelle *(ab)-diagramme de Young*, soit un diagramme de Young (types AI et AII), soit un *ab-diagramme de Young* (autres types classiques) associé à une orbite $\mathcal{O}(e)$ comme ci-dessus.

Rappelons qu'en vertu de la section précédente, on a des décompositions θ -stables, indexées par d grâce à l'application φ , des algèbres de Lie $\mathfrak{gl}(V)$, $\mathfrak{so}(V)$ et $\mathfrak{sp}(V)$. La définition suivante utilise ces décompositions.

DÉFINITION 3.2. — On appelle *défaut de la longueur d* et on note $\delta^e(d)$ le rang de la paire symétrique $(\mathfrak{g}'_d, \mathfrak{k}_d) := (\varphi_d(\mathfrak{g}'), \varphi_d(\mathfrak{k}))$ où $\mathfrak{g}' = \mathfrak{g}$ dans les cas DIII, BDI, CI et CII et $\mathfrak{g}' = \mathfrak{gl}(V)$ dans les cas AI, AII et AIII.

Remarque 3.3. — Sous les notations précédentes, on a $\delta(e) = \sum_d \delta^e(d)$ dans les cas DIII, BDI, CI et CII et $\delta(e) = \sum_d \delta^e(d) - 1$ dans les cas AI, AII et AIII.

Les sous-sections 3.1, 3.2 et 3.3 donnent les *(ab)-diagrammes* de Young des éléments \mathfrak{p} -distingués et presque \mathfrak{p} -distingués pour chacun des cas présentés dans la définition 2.1. On rappelle que dans chaque cas simple classique, les *(ab)-diagrammes* possibles sont les concaténations des *(ab)-diagrammes* primitifs que nous récapitulons dans le tableau suivant tiré des travaux de T. Otha. Rappelons aussi que les *(ab)-diagrammes* sont classiquement ordonnés de façon décroissante de la plus grande ligne en haut vers la plus petite en bas et qu'on les regarde à permutation près de lignes de même longueur.

Type	(<i>ab</i> -)diagrammes primitifs
AI	
AII	
AIII	<i>ab...ba</i> , <i>ba...ab</i> , <i>ab...ab</i> , <i>ba...ba</i> ,
BDI	<i>ab...ba</i> , <i>ba...ab</i> , $\begin{matrix} ab...ab \\ ba...ba \end{matrix}$,
CI	<i>ab...ab</i> , <i>ba...ba</i> , $\begin{matrix} ab...ba \\ ba...ab \end{matrix}$,
DIII	$\begin{matrix} ab...ab & ba...ba & ab...ba \\ ab...ab & ba...ba & ba...ab \end{matrix}$,
CII	$\begin{matrix} ab...ba & ba...ab & ab...ab \\ ab...ba & ba...ab & ba...ba \end{matrix}$,

3.1. Cas AI et AII

La paire $(\mathfrak{g}, \mathfrak{k})$ considérée est de la forme suivante : $(\mathfrak{sl}(V), \mathbf{aut}(V, \Phi))$ où Φ est une forme bilinéaire symétrique (AI) ou anti-symétrique (AII). On pose $\mathfrak{g}' = \mathfrak{gl}(V)$ équipée de l'involution définie en 2.1 (cas AI et AII). On a alors $\mathfrak{g}' = \mathfrak{g} + \mathbb{k}\text{Id}_n$ où $\mathbb{k}\text{Id}_n \subset \mathfrak{p}'$. D'après le lemme 2.2, on a $\mathfrak{g}'^s \cong \bigoplus_d \mathfrak{gl}_{m_d}$. Et à l'intérieur de ce centralisateur, par la proposition 2.6 avec $\mathfrak{w} = \mathfrak{k}$ et $\eta = -1$, on obtient $\mathfrak{k}^s \cong \bigoplus_d \mathfrak{so}_{m_d}$ (AI) ou $\mathfrak{k}^s \cong \bigoplus_d \mathfrak{sp}_{m_d}$ (AII). Pour $d \in \mathbb{N}$ fixé, la paire réductive symétrique associée est donc une paire réductive du même type que celle de l'algèbre de Lie symétrique de départ. On en déduit que $\delta^e(d) = m_d$ (AI) ou $\delta^e(d) = \frac{m_d}{2}$ (AII). Regardons maintenant dans quels cas $(\mathfrak{g}'^s = \mathfrak{k}^s \oplus T_r)$ où T_r est un tore de dimension $r \geq 1$, auquel cas e est presque distingué de défaut $r - 1$. Il suffit de regarder les sous-algèbres $(\mathfrak{g}'_d, \mathfrak{k}_d)$.

- AI : – Si $m_d = 1$, la paire réductive associée est $(T_1, \{0\})$ avec $\delta^e(d) = 1$,
- Si $m_d \geq 2$, il existe un élément nilpotent non nul pour la paire $(\mathfrak{gl}_{m_d}, \mathfrak{so}_{m_d})$. Cet élément correspond alors par la théorie des représentations à un élément nilpotent non nul pour la paire $(\mathfrak{gl}_n, \mathfrak{so}_n)$ qui est également nilpotent dans $(\mathfrak{sl}_n, \mathfrak{so}_n)$.

AII : Les éléments m_d sont pairs.

- Si $m_d = 2$, la paire reductive associée est $(\mathfrak{gl}_2, \mathfrak{sl}_2)$ où $\mathfrak{gl}_2 \cong \mathfrak{sl}_2 \oplus T_1$.

- Si $m_d \geq 4$, il existe des éléments nilpotents non nuls pour $(\mathfrak{g}'_d, \mathfrak{k}_d)$.
Ces éléments correspondent à des éléments nilpotents non nuls de $(\mathfrak{g}, \mathfrak{k})$.

On en déduit la proposition suivante :

PROPOSITION 3.4. — *Les éléments \mathfrak{p} -distingués dans le cas AI et AII sont les éléments \mathfrak{p} -réguliers. Les éléments presque \mathfrak{p} -distingués du cas AI (resp. AII) sont ceux qui correspondent à un diagramme de Young ayant des lignes de longueurs distinctes (resp. des paires de lignes de longueurs distinctes). Le défaut d'un élément nilpotent est égal respectivement, au nombre de lignes ou de paires de lignes, moins une.*

Démonstration. — L'assertion sur le défaut provient de la formule

$$\delta(e) = \sum_d \delta^e(d) - 1$$

de la remarque 3.3. Celle sur les éléments \mathfrak{p} -distingués provient de la discussion de cas ci-dessus. Enfin, il est connu que les éléments \mathfrak{p} -réguliers dans le cas AI (resp. AII) correspondent aux diagrammes de Young constitués d'une seule ligne (resp. paire de lignes). □

Exemple 3.5. — Dans le cas AI, les éléments correspondant aux diagrammes suivants sont presque \mathfrak{p} -distingués de défaut 1. En particulier, ils ne sont pas \mathfrak{p} -distingués :

$$\Gamma_1 = \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \\ \hline \end{array} \quad , \quad \Gamma'_1 = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \square & \square & \square & \square \\ \hline \square & & & \\ \hline \end{array} \quad , \quad \Gamma_2 = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \square & \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & & \\ \hline \end{array} \quad , \quad \Gamma_3 = \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline \square & \square & \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & & & \\ \hline \end{array} \quad .$$

Dans le cas AII, ce sont les mêmes en doublant les lignes, par exemple :

$$\Gamma_4 = \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \square & \\ \hline \square & \\ \hline \end{array}$$

3.2. Cas AIII

La paire $(\mathfrak{g}, \mathfrak{k})$ considérée est de la forme suivante : $(\mathfrak{sl}_n, \mathfrak{sl}_p \oplus \mathfrak{sl}_q \oplus T_1)$ où $p + q = n$. D'après le lemme 2.2, on a $\mathfrak{g}^s \cong (\bigoplus_d \mathfrak{gl}_{m_d}) \cap \mathfrak{sl}_n$. Et à l'intérieur de ce centralisateur, par la proposition 2.9, on obtient $\mathfrak{k}^s \cong \bigoplus_d (\mathfrak{gl}_{a_d} \oplus \mathfrak{gl}_{b_d}) \cap \mathfrak{sl}_{m_d}$. Pour $d \in \mathbb{N}$ fixé, la paire réductive symétrique associée est donc une paire du même type que celle de l'algèbre de Lie symétrique de départ. Regardons maintenant dans quels cas $(\mathfrak{g}^s = \mathfrak{k}^s \oplus T_r)$ où T_r est un tore de dimension $r \geq 0$.

- Si $a_d b_d = 0$, la paire associée est $(\mathfrak{sl}_n, \mathfrak{sl}_n)$.
- Si $a_d \neq 0$ et $b_d \neq 0$, il existe un élément nilpotent non nul pour la paire $(\mathfrak{gl}_{m_d}, (\mathfrak{gl}_{a_d} \oplus \mathfrak{gl}_{b_d}))$. C'est un élément nilpotent pour la paire $(\mathfrak{sl}_n, \mathfrak{sl}_p \oplus \mathfrak{sl}_q \oplus T_1)$.

On en déduit la proposition suivante :

PROPOSITION 3.6. — *Les éléments \mathfrak{p} -distingués dans le cas AIII coïncident avec les éléments presque \mathfrak{p} -distingués. Ce sont ceux qui correspondent aux ab -diagrammes de Young dont les lignes de longueur fixée commencent par la même lettre.*

3.3. Cas BDI, CI, DIII et CII

La paire $(\mathfrak{g}, \mathfrak{k})$ considérée est de la forme suivante : $(\mathbf{aut}(\Phi), \mathbf{aut}(\Phi, J))$ où Φ est une forme bilinéaire non-dégénérée symétrique ($\varepsilon = 1$) (BD) ou antisymétrique ($\varepsilon = -1$) (C); J preserve Φ et vérifie $J^2 = \xi \text{Id}$ avec $\xi = 1$ (BDI, CII) ou $\xi = -1$ (DIII, CI).

D'après la proposition 2.6, on a $\mathfrak{g}^s \cong \bigoplus_d \mathbf{aut}(H_d, \tilde{\Phi}_d)$. À l'intérieur de ce centralisateur, par la proposition 2.10, on obtient

$$\mathfrak{k}^s \cong \bigoplus_{d \in \mathbb{N}^*} (\mathbf{aut}(H_d, \tilde{\Phi}_d))^{(\sqrt{-1})^{d-1} J}.$$

On pose $\varepsilon_d = 1$ si $\tilde{\Phi}_d$ est symétrique et $\varepsilon_d = -1$ si $\tilde{\Phi}_d$ est anti-symétrique. De même, on définit ξ_d par $((\sqrt{-1})^{d-1} J_{H_d})^2 = \xi_d \text{Id}$. Par les lemmes 2.5 et 2.7 (b) où l'on pose $\eta = 1$, on a $(\varepsilon_d, \xi_d) = ((-1)^{d-1} \varepsilon, (-1)^{d-1} \xi)$. Notons que les sous-espaces propres de $(\sqrt{-1})^{d-1} J$ sont de dimensions a_d et b_d ; si $\xi_d = -1$ alors nécessairement $a_d = b_d = \frac{m_d}{2}$. Pour $d \in \mathbb{N}$ fixé, la paire réductive symétrique associée est donc donnée par le tableau suivant :

$(\mathfrak{g}, \mathfrak{k})$	(ε, ξ)	d pair		d impair	
		(ε_d, ξ_d)	$(\mathfrak{g}_d, \mathfrak{k}_d)$	(ε_d, ξ_d)	$(\mathfrak{g}_d, \mathfrak{k}_d)$
$(\mathfrak{so}_n, \mathfrak{so}_p \times \mathfrak{so}_q)$ (BDI)	(1,1)	(-1,-1)	$(\mathfrak{sp}_{m_d}, \mathfrak{gl}_{\frac{m_d}{2}})$	(1,1)	$(\mathfrak{so}_{m_d}, \mathfrak{so}_{a_d} \times \mathfrak{so}_{b_d})$
$(\mathfrak{sp}_n, \mathfrak{gl}_{\frac{n}{2}})$ (CI)	(-1,-1)	(1,1)	$(\mathfrak{so}_{m_d}, \mathfrak{so}_{a_d} \times \mathfrak{so}_{b_d})$	(-1,-1)	$(\mathfrak{sp}_{m_d}, \mathfrak{gl}_{\frac{m_d}{2}})$
$(\mathfrak{so}_n, \mathfrak{gl}_{\frac{n}{2}})$ (DIII)	(1,-1)	(-1,1)	$(\mathfrak{sp}_{m_d}, \mathfrak{sp}_{a_d} \times \mathfrak{sp}_{b_d})$	(1,-1)	$(\mathfrak{so}_{m_d}, \mathfrak{gl}_{\frac{m_d}{2}})$
$(\mathfrak{sp}_n, \mathfrak{sp}_p \times \mathfrak{sp}_q)$ (CII)	(-1,1)	(1,-1)	$(\mathfrak{so}_{m_d}, \mathfrak{gl}_{\frac{m_d}{2}})$	(-1,1)	$(\mathfrak{sp}_{m_d}, \mathfrak{sp}_{a_d} \times \mathfrak{sp}_{b_d})$

Regardons maintenant dans quels cas $(\mathfrak{g}^s = \mathfrak{k}^s \oplus T_r)$ où T_r est un tore de dimension $r \geq 0$.

- (a) (BDI) Si $a_d b_d = 0$, alors $(\mathfrak{g}_d, \mathfrak{k}_d) = (\mathfrak{so}_{m_d}, \mathfrak{so}_{m_d})$.
- (b) (BDI) Si $a_d b_d = 1$, on a $(\mathfrak{g}_d, \mathfrak{k}_d) = (T_1, \{0\})$.

- (c) (BDI) Si $a_d b_d \geq 2$, \mathfrak{p}_d contient des éléments nilpotents non nuls.
- (d) (CI) Si $m_d \geq 2$ (i.e. $\neq 0$), \mathfrak{p}_d contient des éléments nilpotents non nuls.
- (e) (CII) Si $a_d b_d = 0$ alors $(\mathfrak{g}_d, \mathfrak{k}_d) = (\mathfrak{sp}_{m_d}, \mathfrak{sp}_{m_d})$.
- (f) (CII) Si $a_d, b_d \geq 1$, \mathfrak{p}_d contient des éléments nilpotents non nuls.
- (g) (DIII) Si $m_d = 2$, on a $(\mathfrak{g}_d, \mathfrak{k}_d) = (T_1, T_1)$.
- (h) (DIII) Si $m_d \geq 4$, \mathfrak{p}_d contient des éléments nilpotents non nuls.

On en déduit les deux propositions suivantes :

PROPOSITION 3.7. — *Les éléments \mathfrak{p} -distingués du cas BDI (resp. CI) sont ceux qui ont un ab -diagramme n'ayant pas de lignes de longueur paire (resp. impaire) et tels que les lignes de longueur impaire (resp. paire) débutent toutes par la même lettre. Pour obtenir les éléments presque \mathfrak{p} -distingués, on autorise de plus, par longueur de ligne impaire (resp. paire) une paire de ligne, débutant l'une par a et l'autre par b . Le nombre de tels couples est égal au défaut de notre élément.*

Démonstration. — Dans le cas (a), on a $\delta^e(d) = 0$. Dans le cas (b), on a $\delta^e(d) = \dim \mathfrak{p}_d^5 = 1$. Dans les cas (c) et (d), on a des éléments nilpotents non nuls pour la paire $(\mathfrak{g}^5, \mathfrak{k}^5)$, ce qui empêche l'élément d'être presque \mathfrak{p} -distingué. On en déduit la proposition grâce au tableau précédent. \square

PROPOSITION 3.8. — *Les éléments \mathfrak{p} -distingués du cas CII (resp. DIII) sont ceux qui ont un ab -diagramme tels qu'il existe, par longueur de ligne paire (resp. impaire), une ou zéro paire de ligne (débutant nécessairement par a et par b) et tels que les lignes de longueur impaire (resp. paire) débutent toutes par la même lettre. Par ailleurs, les éléments presque \mathfrak{p} -distingués sont \mathfrak{p} -distingués.*

Démonstration. — Dans les cas (e) et (g), on a $\delta^e(d) = 0$. Dans les cas (f) et (h), on a des éléments nilpotents non nuls pour la paire $(\mathfrak{g}^5, \mathfrak{k}^5)$, ce qui empêche l'élément d'être presque \mathfrak{p} -distingué. On en déduit la proposition grâce au tableau précédent. \square

Exemple 3.9. — Dans le cas BDI, les éléments correspondant aux diagrammes suivants sont presque \mathfrak{p} -distingués de défaut 1. En particulier, ils ne sont pas distingués :

$$\Gamma_5 = \begin{array}{c} aba \\ a \\ b \end{array}, \quad \Gamma_6 = \begin{array}{c} ababa \\ aba \\ bab \\ b \end{array}, \quad \Gamma_7 = \begin{array}{c} ababa \\ aba \\ bab \\ a \end{array}.$$

Le cas CI est très similaire, des exemples de tels éléments sont les suivants :

$$\Gamma_8 = \begin{matrix} baba \\ ba \\ ab \end{matrix}, \quad \Gamma_9 = \begin{matrix} bababa \\ baba \\ abab \\ ab \end{matrix}, \quad \Gamma_{10} = \begin{matrix} bababa \\ baba \\ abab \\ ba \end{matrix}.$$

3.4. Bilan Provisoire

À partir des examens de $(\mathfrak{g}'_d, \mathfrak{k}_d)$ dans certains cas classiques simples effectués lors de cette section, on peut résumer le défaut de longueur d associé à e dans le tableau ci-dessous.

Type	$\delta^e(d)$ pour $d \in \mathbb{N}^*$	
AI	m_d	
AII	$\frac{m_d}{2}$	
	d pair	d impair
(BDI)	$\frac{m_d}{2}$	$\min\{a_d, b_d\}$
(CI)	$\min\{a_d, b_d\}$	$\frac{m_d}{2}$

Par ailleurs, en combinant les résultats 3.6 et 3.8 avec la proposition 1.10, on obtient :

COROLLAIRE 3.10. — *La conjecture 1.13 est vraie dans les cas AIII, DIII et CII.*

4. Réduction d'orbites presque \mathfrak{p} -distinguées

Nous disposons d'un autre résultat pour écarter le fait que certains éléments presque \mathfrak{p} -distingués puissent engendrer une composante irréductible étrange.

PROPOSITION 4.1. — (a) *Soit $e_1, e_2 \in \mathfrak{p}$ deux éléments nilpotents avec $\mathcal{O}(e_1) \subset \overline{\mathcal{O}(e_2)}$ alors $\delta(e_1) - \delta(e_2) \leq \dim \mathcal{O}(e_2) - \dim \mathcal{O}(e_1) = \dim \mathfrak{p}^{e_1} - \dim \mathfrak{p}^{e_2}$.*

(b) *Si il y a égalité et e_1 est presque \mathfrak{p} -distingué, alors $\mathfrak{C}(e_1) \subset \mathfrak{C}(e_2)$.*

Démonstration. — (a) Rappelons que l'on a une application $\text{pr}_1 : \mathfrak{C}(e_2) \rightarrow \overline{\mathcal{O}(e_2)}$. Comme $(g.e_2, g.e_2) \in \mathfrak{C}(e_2)$ pour tout $g \in K$ et comme $e_1 \in \mathcal{O}(e_2)$, on a $(e_1, e_1) \in \mathfrak{C}(e_2)$ et e_1 appartient à l'image de pr_1 . Maintenant, pour tout $x \in \mathcal{O}(e_2)$, on a $\text{pr}_1^{-1}(x) = (x, \mathfrak{p}^x \cap \mathcal{N})$. On en déduit donc que

$\text{pr}_1^{-1}(e_1) \subseteq (e_1, \mathfrak{p}^{e_1} \cap \mathcal{N})$ est un sous ensemble de dimension au moins égale à $\dim \mathfrak{p}^{e_2} \cap \mathcal{N}$. On en déduit que $\dim \mathfrak{p}^{e_2} - \delta(e_2) = \dim \mathfrak{p}^{e_2} \cap \mathcal{N} \leq \dim \mathfrak{p}^{e_1} \cap \mathcal{N} = \dim \mathfrak{p}^{e_1} - \delta(e_1)$. L'inégalité de (a) s'en suit facilement.

(b) Si les hypothèses de (b) sont vérifiées, alors $\mathfrak{p}^{e_1} \cap \mathcal{N} = \bigoplus_{i \geq 1} \mathfrak{p}(e_1, i)$ est un ensemble irréductible contenant une fibre de pr_1 de même dimension, d'où $(e_1, \mathfrak{p}^{e_1} \cap \mathcal{N}) \subset \mathfrak{C}(e_2)$ et $\mathfrak{C}(e_1) \subset \mathfrak{C}(e_2)$. \square

DÉFINITION 4.2. — Si e_1 est presque \mathfrak{p} -distingué et e_2 nilpotent quelconque vérifiant l'égalité $\delta(e_1) - \delta(e_2) = \dim \mathfrak{p}^{e_1} - \dim \mathfrak{p}^{e_2}$, on dit que $\mathcal{O}(e_1)$ se réduit en $\mathcal{O}(e_2)$ ou encore que $\mathcal{O}(e_2)$ est une réduction d'ordre $\delta(e_1) - \delta(e_2)$ de $\mathcal{O}(e_1)$.

Une telle réduction est dite minimale si il n'existe pas d'orbite \mathcal{O} telle que $\overline{\mathcal{O}(e_1)} \subsetneq \overline{\mathcal{O}} \subsetneq \overline{\mathcal{O}(e_2)}$.

LEMME 4.3. — Si une orbite $\overline{\mathcal{O}(e_1)}$ se réduit en une orbite $\mathcal{O}(e_2)$ alors toute orbite $\mathcal{O}(e_3)$ telle que $\overline{\mathcal{O}(e_1)} \subsetneq \overline{\mathcal{O}(e_3)} \subsetneq \overline{\mathcal{O}(e_2)}$, est une réduction de $\mathcal{O}(e_1)$.

Démonstration. — Par la proposition 4.1 (a), on a

$$\begin{aligned} \delta(e_1) - \delta(e_3) &= (\delta(e_1) - \delta(e_2)) - (\delta(e_3) - \delta(e_2)) \\ &\geq (\dim \mathfrak{p}^{e_1} - \dim \mathfrak{p}^{e_2}) - (\dim \mathfrak{p}^{e_3} - \dim \mathfrak{p}^{e_2}) \\ &\geq \dim \mathfrak{p}^{e_1} - \dim \mathfrak{p}^{e_3}. \end{aligned}$$

L'inégalité inverse découle de 4.1 (a). \square

En vertu de la proposition et du lemme précédents, pour montrer à l'aide d'une réduction qu'un élément e_1 presque \mathfrak{p} -distingué n'engendre pas de composante irréductible étrange, il suffit de savoir qu'il existe une réduction minimale de e_1 .

Dans chaque cas classique simple non encore résolu, on introduit un ordre sur les (ab-)diagrammes pour transférer la relation d'inclusion des orbites sur les diagrammes (cf. [19, 1.9], [18, 1.4]). C'est notamment l'objet des définitions suivantes.

DÉFINITION 4.4. — Soit Γ un (ab-)diagramme de Young. On appelle motif de Γ un sous-diagramme obtenu à partir de Γ en conservant uniquement les lignes de longueur $d \in I$ où I est un intervalle de \mathbb{N} .

On note Γ' le diagramme obtenu en enlevant la première colonne de Γ . On définit par récurrence $\Gamma^{(k)} = (\Gamma^{(k-1)})'$ pour $k \in \mathbb{N}^*$ où $\Gamma^{(0)} = \Gamma$.

Soit (Γ_1, Γ_2) un couple de (ab-)diagrammes de Young. On définit une relation d'ordre partiel comme suit. On dit que $\Gamma_1 \leq \Gamma_2$ ou que Γ_2 est une dégénérescence de Γ_1 si :

- pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, le nombre de cases de $\Gamma_1^{(k)}$ est inférieur à celui de $\Gamma_2^{(k)}$, lorsque Γ_1, Γ_2 sont des diagrammes de Young ;
- pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, le nombre de a et le nombre de b de $\Gamma_1^{(k)}$ sont inférieurs respectivement à ceux de $\Gamma_2^{(k)}$, lorsque Γ_1, Γ_2 sont des ab -diagrammes de Young.

La dégénérescence $\Gamma_1 < \Gamma_2$ est dite minimale s'il n'existe pas d' (ab) -diagramme Γ tel que $\Gamma_1 < \Gamma < \Gamma_2$.

On appelle ligne commune à Γ_1 et Γ_2

- une ligne de même longueur si Γ_1 et Γ_2 sont des diagrammes de Young ;
- une ligne de même longueur débutant par la même lettre si Γ_1, Γ_2 sont des ab -diagrammes de Young.

On définit $\overline{\Gamma}_1$ et $\overline{\Gamma}_2$, en enlevant toutes les lignes communes à Γ_1 et Γ_2 .

Rappelons que si $\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2$ sont deux orbites ayant pour (ab) -diagrammes respectifs Γ_1, Γ_2 , alors $\mathcal{O}_1 \subseteq \overline{\mathcal{O}_2}$ implique $\Gamma_1 \leq \Gamma_2$. Réciproquement, si deux (ab) -diagrammes vérifient $\Gamma_1 \leq \Gamma_2$, et si \mathcal{O}_1 a pour diagramme Γ_1 , alors il existe \mathcal{O}_2 correspondant à Γ_2 telle que $\mathcal{O}_1 \subseteq \overline{\mathcal{O}_2}$ (cf. [19, Théorème 3], [18, Théorème 1]).

Notons que le fait qu'une orbite se réduise en une autre ne fait intervenir que des invariants propres aux (ab) -diagrammes de Young : défaut, dimension de centralisateur, inclusion. On transfère alors également les notions de défaut et de dimension de centralisateur aux (ab) -diagrammes que l'on note respectivement $\delta(\Gamma)$ et $\dim \mathfrak{p}^\Gamma$.

DÉFINITION 4.5. — Soient Γ_1, Γ_2 deux (ab) -diagrammes de Young, on pose $\Delta = \Delta(\Gamma_1, \Gamma_2) = \delta(\Gamma_1) - \delta(\Gamma_2)$ et $s = s(\Gamma_1, \Gamma_2) = \dim \mathfrak{p}^{\Gamma_1} - \dim \mathfrak{p}^{\Gamma_2}$. On dit que Γ_1 se réduit en Γ_2 , ou que Γ_2 est une réduction de Γ_1 , si $\Gamma_1 < \Gamma_2$ et $s = \Delta$.

Remarque 4.6. — Les notions de défaut, de dimension de centralisateur et de réduction pour les (ab) -diagrammes dépendent du cas simple considéré (AI, AII, BDI ou CI).

Soit \mathcal{O}_1 une orbite et Γ_1 son (ab) -diagramme. L'existence d'une réduction pour \mathcal{O}_1 équivaut à celle d'une réduction pour Γ_1 .

La notion de dégénérescence minimale équivaut à celle d'« adjacent degeneration » introduite dans [18, (1.4)] et [19, (2.4)].

4.1. Les cas AI et AII

Regardons le cas le plus simple : le cas AI. On fixe un élément e_1 presque \mathfrak{p} -distingué, et on note son diagramme de Young Γ_1 . Par la proposition 3.4,

Introduisons quelques notions pour calculer les entiers $s(\Gamma_1, \Gamma_2)$. On fixe un élément e nilpotent quelconque (non nul) dans une algèbre symétrique de type BDI, et Γ désigne son ab -diagramme de Young.

DÉFINITION 4.7. — Si Γ ne comporte que des lignes de longueur impaire on définit k_j^Γ comme étant la longueur de la $(2j + 1)$ -ème colonne de Γ .

On rappelle que le défaut de la longueur d est donné par $\delta^\Gamma(d) = \min(a_d, b_d)$ et que $\delta(\Gamma) = \sum_d \delta^\Gamma(d)$ (cf. section 3.4 et remarque 3.3).

LEMME 4.8. — Si h est un élément à valeurs propres entières de $\mathfrak{so}(V)$ et $V(i)$ le h -module de poids $i \in \mathbb{Z}$, alors $\mathfrak{g}^h \cong \mathfrak{so}(V(0)) \oplus \bigoplus_{i>0} \mathfrak{gl}(V(i))$.

Démonstration. — On note Φ la forme bilinéaire symétrique canonique définissant $\mathfrak{so}(V)$. Soit $v \in V(i)$ et $w \in V(j)$. On a $\Phi(h.v, w) + \Phi(v, h.w) = 0$, d'où $\Phi(v, w) = 0$ ou $i + j = 0$. On a donc une décomposition orthogonale h -invariante $V = V(0) \oplus \bigoplus_{i \in \mathbb{N}^*} (V(i) \oplus V(-i))$. On voit que $(\mathfrak{g}^h)|_{V(i) \oplus V(-i)} \cong \mathfrak{gl}(V(i))$. D'où le résultat. \square

LEMME 4.9. — Si Γ ne comporte que des lignes de longueur impaire, on a

$$\dim \mathfrak{p}^\Gamma = C + \frac{k_0^\Gamma(k_0^\Gamma - 1)}{4} + \frac{1}{2} \sum_{j>0} (k_j^\Gamma)^2$$

où C est une constante qui ne dépend que de l'algèbre symétrique considérée.

Démonstration. — On inclut e dans un \mathcal{S} -triplet normal (e, h, f) . L'élément e est pair donc $\dim \mathfrak{p}^e = (\dim \mathfrak{p} - \frac{1}{2} \dim \mathfrak{g}) + \frac{1}{2} \dim \mathfrak{g}^h$. Comme Γ ne contient que des lignes de longueur impaire, on peut décomposer V en $\bigoplus_{j \in \mathbb{Z}} V(2j)$. On voit alors par la théorie des représentations de \mathfrak{sl}_2 que $k_j^\Gamma = \dim V(2j)$ pour $j \in \mathbb{N}$. On obtient ensuite par le lemme 4.8 que $\frac{1}{2} \dim \mathfrak{g}^h = \frac{k_0^\Gamma(k_0^\Gamma - 1)}{4} + \frac{1}{2} \sum_{j>0} (k_j^\Gamma)^2$. \square

On fixe maintenant un élément presque \mathfrak{p} -distingué e_1 et on note Γ_1 son ab -diagramme de Young. On énumère les dégénérescences minimales possibles (cf. [19, Table V cas BDI]). La première colonne désigne le numéro de la dégénérescence minimale $\Gamma_1 < \Gamma_2$ telle qu'elle est indiquée dans [19]. Les deux colonnes suivantes donnent $\overline{\Gamma}_1$ et $\overline{\Gamma}_2$. La quatrième donne l'entier $s = \dim \mathfrak{p}^{\Gamma_1} - \dim \mathfrak{p}^{\Gamma_2}$ et la dernière indique les restrictions sur les entiers p et q .

Notons que le cas (1) de [19] n'apparaît pas car Γ_1 ne peut alors pas correspondre à une orbite presque \mathfrak{p} -distingué. Les cas (6) et (7) n'apparaissent pas car, pour ces dégénérescences, on a $\Delta \leq 0$. L'entier s a été

calculé à partir du lemme 4.9, sauf dans certains cas dont on verra plus tard qu'ils ne peuvent donner lieu à de nouvelles réductions.

numéro de [19]	$\overline{\Gamma}_1$	$\overline{\Gamma}_2$	s	précisions
(2)	$\overbrace{ab\dots ba}^{2p+1}$ $\overbrace{ab\dots ba}^{2q+1}$	$\overbrace{ab\dots ba}^{2p+3}$ $\overbrace{ab\dots ba}^{2q-1}$	$k_q^{\Gamma_1} - k_{p+1}^{\Gamma_1} - 1$	$p \geq q \geq 1$
(3)	$\overbrace{ab\dots ba}^{2p+1}$ $\overbrace{ba\dots ab}^{2q+1}$	$\overbrace{ab\dots ba}^{2p+3}$ $\overbrace{ba\dots ab}^{2q-1}$	$k_q^{\Gamma_1} - k_{p+1}^{\Gamma_1} - 1$	$p \geq q \geq 1$
(4)	$\overbrace{ab\dots ba}^{2p+1}$ $\overbrace{ba\dots ab}^{2p+1}$ $\overbrace{ab\dots ba}^{2q+1}$	$\overbrace{ab\dots ab}^{2p+2}$ $\overbrace{ba\dots ba}^{2q-1}$ $\overbrace{ab\dots ba}^{2q-1}$	----	$p \geq q \geq 1$
(5)	$\overbrace{ab\dots ba}^{2p+1}$ $\overbrace{ab\dots ba}^{2q+1}$ $\overbrace{ba\dots ab}^{2q+1}$	$\overbrace{ab\dots ba}^{2p+3}$ $\overbrace{ab\dots ab}^{2q}$ $\overbrace{ba\dots ba}^{2q}$	$k_0^{\Gamma_1} - k_{p+1}^{\Gamma_1} - 2$ ----	$p \geq q = 0$ $p \geq q \geq 1$
(8)	$\overbrace{ba\dots ab}^{2p+1}$ $\overbrace{ab\dots ba}^{2q+1}$	$\overbrace{ab\dots ba}^{2p+3}$ $\overbrace{ba\dots ab}^{2q-1}$	$k_q^{\Gamma_1} - k_{p+1}^{\Gamma_1} - 1$	$p \geq q \geq 1$
(9)	$\overbrace{ba\dots ab}^{2p+1}$ $\overbrace{ab\dots ba}^{2p+1}$ $\overbrace{ab\dots ba}^{2q+1}$	$\overbrace{ba\dots ab}^{2p+3}$ $\overbrace{ba\dots ba}^{2q}$ $\overbrace{ab\dots ab}^{2q}$	$k_0^{\Gamma_1} - k_{p+1}^{\Gamma_1} - 2$ ----	$p \geq q = 0$ $p \geq q \geq 1$
(10)	$\overbrace{ba\dots ab}^{2p+1}$ $\overbrace{ba\dots ab}^{2p+1}$ $\overbrace{ab\dots ba}^{2q+1}$	$\overbrace{ba\dots ba}^{2p+2}$ $\overbrace{ab\dots ab}^{2q-1}$ $\overbrace{ab\dots ba}^{2q-1}$	----	$p \geq q \geq 1$

Pour une dégénérescence minimale donnée, on note $\Delta(d) = \delta^{\Gamma_1}(d) - \delta^{\Gamma_2}(d)$. Notons que $\Delta(d) \in \{0, 1, -1\}$ par le tableau de la section 3.4.

Considérons la dégénérescence minimale (3). D'après le lemme 4.9, on a

$$(4.2) \quad s = k_q - k_{p+1} - 1.$$

On voit que les réductions éventuelles de défaut ne peuvent se produire que pour les longueurs $2q + 1$ et $2p + 1$. Les augmentations éventuelles de défaut, pour les longueurs $2p + 3$ et $2q - 1$.

On va tout d'abord se placer dans le cas $p = q$. On a alors $a_{2p+1}b_{2p+1} \neq 0$, or e_1 est presque distingué donc $a_{2p+1}b_{2p+1} = 1$. On en déduit $k_q = k_p = k_{p+1} + 2$ et $s = 1$ d'après (4.2). Or $\Delta(2p + 1) = 1$. Pour obtenir une réduction, on doit nécessairement avoir $\Delta(2p + 3) = \Delta(2p - 1) = 0$. Voyons ce que cela donne dans les différents cas :

- Si $a_{2p+3}b_{2p+3} = 1$ ou $b_{2p+3} = 0$ (resp. $a_{2p-1}b_{2p-1} = 1$ ou $a_{2p-1} = 0$), alors $\Delta(2p + 3) = 0$ (resp. $\Delta(2p - 1) = 0$).
- Le seul cas pour lequel (3) ne donne pas de réduction est celui où $b_{2p+3} = m_{2p+3} \neq 0$ ou $a_{2p-1} = m_{2p-1} \neq 0$.
- On obtient un résultat analogue si l'on considère la réduction (3') où les rôles de a et b sont inversés. On voit alors que le seul cas qui ne peut pas être réduit par (3) ou (3') est (à permutation de a et b près) le cas où $a_{2p+3} = m_{2p+3} \neq 0$ et $a_{2p-1} = m_{2p-1} \neq 0$. Le plus petit exemple est le suivant :

$$\begin{array}{c} ababa \\ aba \\ bab \\ a \end{array} .$$

Notons que l'on a ainsi montré que si des longueurs de lignes consécutives impaires avaient un défaut, on pouvait réduire l'orbite $\mathcal{O}(e_1)$. Nous supposons maintenant dans la suite que Γ_1 ne possède pas de motif

$$\begin{array}{c} \overbrace{ab \dots ba}^{2p+3} \\ ba \dots ab \\ ab \dots ba \\ \underbrace{ba \dots ab}_{2p+1} \end{array} .$$

Nous allons aussi montrer que (3) pour $p \neq q$ ne peut pas apporter de réduction. En effet, soit Γ_2 le diagramme obtenu grâce à une dégénérescence (3) où l'on suppose $p \neq q$. Avec les notations précédentes, il est facile de voir que si $\Delta(2p + 1) = 1$ (resp. $\Delta(2q + 1) = 1$) alors $k_{p+1} = k_p - 2$ (resp. $k_q = k_p + 2$). On en déduit alors que

$$k_q \geq k_p + 1 + \Delta(2q + 1), \quad k_{p+1} \leq k_p - 1 - \Delta(2p + 1),$$

$$s = k_q - k_{p+1} - 1 \geq (1 + \Delta(2q + 1)) + (1 + \Delta(2p + 1)) - 1 \geq \Delta + 1.$$

On ne peut donc pas espérer de réduction. Le cas de l'opération (2) se traite de la même manière.

Regardons maintenant ce qui se passe dans le cas de la dégénérescence minimale (5) pour $q = 0$ et p quelconque. On remarque que $a_1b_1 = 1$ car e_1 est presque \mathfrak{p} -distingué. D'après le lemme 4.9, on a $s = k_0 - k_{p+1} - 2$. Observons que $k_0 = k_p + 2$ et $\Delta(1) = 1$. Notons que le cas où $\delta^{\Gamma_1}(2p+1) = 1$ a déjà été montré comme réductible (suivant que $p = 1$ auquel cas on a deux défauts consécutifs, ou $p > 1$ auquel cas $m_{2p-1} = 0$). On supposera donc que $\delta^{\Gamma_1}(2p+1) = 0$ et on obtient une réduction par (5) si et seulement si $k_{p+1} = k_p - 1$ c'est à dire $m_{2p+1} = 1$. Le seul cas que l'on arrive pas à traiter est le cas où $m_{2p+1} > 1$ dont le plus petit exemple est :

$$\begin{matrix} aba \\ aba \\ a \\ b \end{matrix}$$

On peut montrer que les autres dégénérescences minimales ne mènent pas à des réductions des exemples que l'on a cité. Donnons ici des exemples de réduction. On considère les diagrammes Γ_5 et Γ_6 de l'exemple 3.9 et on indique de l'autre coté de la flèche un diagramme qui les réduit.

$$\begin{matrix} aba \\ a \\ b \end{matrix} \rightarrow ababa; \quad \begin{matrix} ababa \\ aba \\ bab \\ b \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} ababa \\ b \\ b \end{matrix}$$

En conclusion pour le cas BDI : on peut réduire e_1 si et seulement si les lignes de son ab -diagramme comportant un défaut ne sont pas toutes dans des motifs du type (à permutation de a et b près) :

$$\begin{matrix} \overbrace{\hspace{2cm}}^{2p+5} \\ \vdots \\ ab \dots \dots \dots ba \\ ab \dots \dots \dots ba \\ ba \dots \dots \dots ab \\ ab \dots \dots \dots ba \\ \vdots \\ \underbrace{\hspace{1cm}}_{2p+1} \\ \underbrace{\hspace{1.5cm}}_{2p+3} \end{matrix} \quad \text{ou} \quad \begin{matrix} \overbrace{\hspace{1.5cm}}^{2p+3} \\ \vdots \\ ab \dots \dots \dots ba \\ ab \dots \dots \dots ba \\ a \\ b \end{matrix} \quad \text{pour } p \geq 0.$$

Dans le cas CI, les dégénérescences minimales possibles sont indexées dans [19] de (1) à (10) de façon similaire au cas BDI. La dégénérescence (5) ne donne plus de réduction, seule, la (3) en donne une. Il existe un unique motif non réductible (à permutation de a et b près) :

$$\begin{array}{c}
 \underbrace{\hspace{10em}}_{2p+6} \\
 \vdots \\
 ab \dots \dots ab \\
 ab \dots \dots ab \\
 ba \dots \dots ba \qquad \text{pour } p \geq 0. \\
 ab \dots ab \\
 \vdots \\
 \underbrace{\hspace{10em}}_{2p+2} \\
 \underbrace{\hspace{10em}}_{2p+4}
 \end{array}$$

Indiquons, comme ci-dessus, comment les diagrammes Γ_8 et Γ_9 de l'exemple 3.9 se réduisent :

$$\begin{array}{ccc}
 \begin{array}{l} baba \\ ba \\ ab \end{array} & \rightarrow & \begin{array}{l} bababa \\ ab \end{array} ; \\
 \begin{array}{l} bababa \\ baba \\ abab \\ ab \end{array} & \rightarrow & \begin{array}{l} bababa \\ ab \\ ab \\ ab \end{array} .
 \end{array}$$

CONSÉQUENCE. — *La conjecture 1.13 est vraie pour $(\mathfrak{so}_n, \mathfrak{so}_{n_a} \times \mathfrak{so}_{n_b})$ (BDI) avec $n_a \leq 2$ ou $n_b \leq 2$ ou $\max(n_a, n_b) \leq 4$. Dans le cas (CI), elle est vraie jusqu'au rang 7 ; i.e. pour $(\mathfrak{sp}_{2n}, \mathfrak{gl}_n)$ avec $n \leq 7$.*

5. Une utilisation complète du lemme 1.8

5.1. Étude de $\mathfrak{g}(e, 1)$

Nous avons jusqu'à présent écarté le cas où $\mathfrak{p}(e, 0)$ contient des éléments nilpotents grâce à la proposition 1.10. L'objet de cette section est d'utiliser le lemme 1.8, lorsque $\mathfrak{p}(e, 1)$ est non nul dans les cas classiques qui nous restent. Notons que dans les cas BDI et CII, les presque \mathfrak{p} -distingués sont pairs. En particulier dans ces deux cas, pour un élément presque \mathfrak{p} -distingué e , on a $\mathfrak{p}(e, 1) = \{0\}$. D'après le lemme 1.9, le lemme 1.8 est impuissant pour éliminer la possibilité qu'un tel e engendre une composante étrange. C'est pourquoi nous allons nous limiter aux cas AI et AII. Dans cette section on fixe donc $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(V)$ et un élément nilpotent non nul e que l'on inclut dans

un \mathcal{S} -triplet (e, h, f) . Comme dans [18], on note $(\lambda_i)_{i \in \mathbb{N}}$, la partition de n correspondant au diagramme de Young de e . Alors, on sait qu'il existe une base $\{e^a.v_i \mid a \leq \lambda_i - 1; a, i \in \mathbb{N}, v_i \in V\}$ de V (cf. [32] 19.2) pour laquelle h est diagonal. Plus précisément,

$$V_i := \langle e^a.v_i \mid a \leq \lambda_i - 1 \rangle$$

est un \mathfrak{sl}_2 -module irréductible et en notant $V(k)$ le h -espace propre de V associé à k , on a

$$(5.1) \quad V(k) = \langle \{e^a.v_i \mid 2a - \lambda_i + 1 = k\} \rangle.$$

Le lemme suivant nous indique des cas où il existe un élément $e_1 \in \mathfrak{g}^e$ tel que $e_1 \notin \overline{\mathcal{O}(e)}$.

LEMME 5.1. — *Supposons qu'il existe $i_1, i_2 \in \mathbb{N}$ tels que $0 < \lambda_{i_1} = \lambda_{i_2} - 1$. Alors, il existe un élément $e_1 \in \bigoplus_{i \geq 1} \mathfrak{g}(e, i)$ tel que $e_1 \notin \overline{\mathcal{O}(e)}$.*

Démonstration. — On note $e = \sum_{i \in \mathbb{N}} e_i$ où e_i est défini par $\begin{cases} e \text{ sur } V_i \\ 0 \text{ sur } \bigoplus_{j \neq i} V_j \end{cases}$. Les éléments e_i commutent deux à deux. Définissons maintenant l'élément

$$(5.2) \quad e_{i_1, i_2} : \begin{cases} e^a.v_{i_1} \rightarrow e^{a+1}.v_{i_2} \text{ pour } 0 \leq a \leq \lambda_{i_1} - 1 \\ e^a.v_{i_2} \rightarrow e^a.v_{i_1} \text{ pour } 0 \leq a \leq \lambda_{i_1} - 1. \\ e^a.v_j \rightarrow 0 \text{ sinon.} \end{cases}$$

On vérifie facilement que $e_{i_1} + e_{i_2} = e_{i_1, i_2}^2$, et donc que e commute avec $e_1 := e_{i_1, i_2} + \sum_{i \neq i_1, i_2} e_i$. Par ailleurs le diagramme de e_1 est strictement supérieur à celui de e , donc $e_1 \notin \overline{\mathcal{O}(e)}$. Enfin, l'égalité (5.1) nous donne $e_{i_1, i_2}.(V(k)) \subseteq V(k+1)$ donc $e_1 \in \mathfrak{g}(e, 1) \oplus \mathfrak{g}(e, 2)$. \square

D'après le lemme 1.9, on a $\bigoplus_{i \geq 2} \mathfrak{g}(e, i) \subset \overline{\mathcal{O}(e)}$. Le lemme suivant peut alors être considéré comme une réciproque du lemme 5.1.

PROPOSITION 5.2. — *Supposons que pour tous $i, j \in \mathbb{N}$ tels que $\lambda_i, \lambda_j \neq 0$, on ait $\lambda_i - \lambda_j \neq 1$. Alors $\mathfrak{g}(e, 1) = \{0\}$.*

Démonstration. — Nous allons montrer la contraposée en supposant l'existence de $x \in \mathfrak{g}(e, 1) \setminus \{0\}$. Commençons par noter que d'après (5.1), on a pour tous $j \in \mathbb{N}^*, k \in \mathbb{N}$:

$$(5.3) \quad v_j \in V(-\lambda_j + 1) \text{ et } \ker(e^k) \cap V(-k + 1) = \langle v_i \mid \lambda_i = k \rangle.$$

Comme x commute avec e , il existe un indice i tel que $y = x.v_i \neq 0$ et puisque $x \in \mathfrak{g}(1, h)$, on a $y \in V(-\lambda_i + 2) = e.V(-\lambda_i) \oplus \ker(e^{\lambda_i - 1})$. Soit $y_1 + y_2$ la décomposition de y dans cette somme directe. Soit $z \in V(-\lambda_i)$ tel que $y_1 = e.z$. On a $e^{\lambda_i + 1}.z = x.(e^{\lambda_i}.v_i) = 0$ donc $z \in \langle v_j \mid \lambda_j = \lambda_i + 1 \rangle$. Si

$z \neq 0$, il existe nécessairement j tel que $\lambda_j = \lambda_i + 1$. Dans le cas contraire, $y_1 = e.z = 0$ et $0 \neq y = y_2 \in \ker(e^{\lambda_i - 1}) \cap V(-\lambda_i + 2) = \langle v_j \mid \lambda_j = \lambda_i - 1 \rangle$. D'où l'existence de j tel que $\lambda_j = \lambda_i - 1$. \square

Grâce au lemme 1.9, on voit que si e est presque \mathfrak{p} -distingué et vérifie les hypothèses de la proposition précédente alors $\mathcal{N} \cap \mathfrak{p}^e \subset \overline{\mathcal{O}(e)}$. Le lemme 1.8 ne peut donc rien nous apporter. Dans le cas contraire nous allons pouvoir utiliser ce lemme ; c'est l'objet de la suite de cette section.

5.2. Le cas AI

On utilise les notations de la sous-section précédente. Soit e presque \mathfrak{p} -distingué ; les λ_i sont donc deux à deux distincts. De plus, prenant en considération la proposition 5.2, nous ferons l'hypothèse qu'il existe deux indices i_1 et i_2 tels que $0 < \lambda_{i_1} = \lambda_{i_2} - 1$. On sait qu'on peut alors supposer que la forme bilinéaire symétrique sur V définissant la paire symétrique $(\mathfrak{g}, \mathfrak{k})$ est donnée par (cf. [18, Lemme 1])

$$(e^a.v_i, e^b.v_j) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \text{ et } a + b + 1 = \lambda_i \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Il est facile de vérifier que pour tous a, b, i, j , on a $(e_1.e^a.v_i, e^b.v_j) = (e^a.v_i, e_1.e^b.v_j)$ où $e_1 = e_{i_1, i_2} + \sum_{j \neq i_1, i_2} e_j$ est l'élément de la démonstration du lemme 5.1. Ceci implique que $e_1 \in \mathfrak{p}$ et on a obtenu un élément de \mathfrak{p}^e qui n'appartient pas à $\overline{\mathcal{O}(e)}$. D'après le lemme 1.8, la sous-variété $\mathfrak{C}(e)$ n'est donc pas une composante irréductible de $\mathfrak{C}^{\text{nil}}(\mathfrak{p})$.

Concrètement, cela veut par exemple dire que l'élément correspondant au diagramme de Young Γ_2 de l'exemple 3.5 ne peut pas engendrer de composante irréductible étrange.

CONSÉQUENCE. — *La conjecture 1.13 est démontrée dans le cas AI de rang 4.*

5.3. Le cas AII

Nous allons cette fois nous placer dans le cas AII. Soit e presque \mathfrak{p} -distingué ; donc si $\lambda_i \neq 0$, il existe un unique indice $\beta(i)$ tel que $\lambda_{\beta(i)} = \lambda_i$. De plus, cf. proposition 5.2, nous allons supposer qu'il existe i_1 et i_2 tels que $0 < \lambda_{i_1} = \lambda_{i_2} - 1$. On peut alors supposer que la forme bilinéaire antisymétrique sur V définissant $(\mathfrak{g}, \mathfrak{k})$ est donnée par (cf. [18, Lemme 1])

$$(e^a.v_i, e^b.v_j) = \begin{cases} \alpha(i) & \text{si } i = \beta(j) \text{ et } a + b + 1 = \lambda_i \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

où $\alpha(i) \in \{\pm 1\}$ et $\alpha(\beta(i)) = -\alpha(i)$. Quitte à permuter i_1 et $\beta(i_1)$, on peut supposer $\alpha(i_1) = \alpha(i_2)$. Avec des notations de la démonstration du lemme 5.1 et en particulier (5.2), on pose $e'_1 = e_{i_1, i_2} + e_{\beta(i_1), \beta(i_2)} + \sum_{i \notin \{i_1, i_2, \beta(i_1), \beta(i_2)\}} e_i$. Comme dans le cas AI, on vérifie que c'est un élément de \mathfrak{p}^e qui n'appartient pas à $\overline{\mathcal{O}(e)}$. D'après le lemme 1.8, la sous-variété $\mathcal{C}(e)$ n'est donc pas une composante irréductible de $\mathfrak{C}^{\text{nil}}(\mathfrak{p})$.

Ce qui précède implique par exemple que l'élément correspondant au diagramme de Young Γ_4 de l'exemple 3.5 ne peut pas engendrer de composante irréductible étrange.

CONSÉQUENCE. — *La conjecture 1.13 est démontrée dans le cas AII de rang 3.*

6. Les cas exceptionnels

Dans les cas exceptionnels, nous disposons d'une classification des orbites d'éléments nilpotents, des centralisateurs des \mathcal{S} -triplets associés, et de leurs relations d'inclusion, cf. [3], [4], [8], [7]. Nous allons donc pouvoir appliquer au cas exceptionnel les mêmes méthodes que précédemment visant à éliminer des possibilités, pour des orbites nilpotentes, d'engendrer des composantes étranges. Finalement, nous démontrerons la conjecture dans tout les cas exceptionnels hormis EI.

6.1. Utilisation de la proposition 1.10

Fixons une algèbre de Lie simple symétrique exceptionnelle $(\mathfrak{g}, \mathfrak{k})$ ainsi qu'une forme réelle du même type $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$. Les tables de [3] et [4] nous donnent les orbites nilpotentes réelles dans $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$. En fait, la classification de D.Z. Djokovic s'appuie sur une description des orbites complexes de $(\mathfrak{g}, \mathfrak{k})$ qu'il relie à la classification des orbites réelles par la correspondance de Kostant-Sekiguchi. Chaque ligne désigne donc une orbite complexe non nulle, que l'on repérera par son numéro donné dans la première colonne. Fixons un élément e de cette orbite, et incluons-le dans un \mathcal{S} -triplet (e, h, f) engendrant une algèbre de Lie \mathfrak{s} . Le centralisateur réductif réel donné dans la dernière colonne de ces tables est en réalité déduit du centralisateur complexe $\mathfrak{g}^{\mathfrak{s}}$ (cf. [3, §15]). Tous les calculs de D.Z. Djokovic effectués dans le cas complexe restent vrais dans le cas d'un corps algébriquement clos de caractéristique zéro. Pour retrouver la paire réductrice $(\mathfrak{g}^{\mathfrak{s}}, \mathfrak{k}^{\mathfrak{s}})$ complexe, il

suffit d'appliquer la correspondance dans l'autre sens, sachant que V_r désigne un tore de dimension r dans \mathfrak{p} et que T_r désigne un tore de dimension r dans \mathfrak{k} . On voit donc facilement si $\mathfrak{g}^{\mathfrak{s}} = \mathfrak{k} \oplus V_r$ ou non. Les tableaux suivants résultent de ces calculs dans les différents cas simples exceptionnels et donnent les orbites presque \mathfrak{p} -distingués. La première colonne donne le numéro de l'orbite tel qu'il apparaît dans [3] et [4]. La seconde colonne donne le type d'isomorphisme de la paire $(\mathfrak{g}^{\mathfrak{s}}, \mathfrak{k}^{\mathfrak{s}})$. La troisième donne le défaut d'un élément de cette orbite.

$E_{6(-26)}$ (cas EIV)			$F_{4(-20)}$ (cas FII)			$G_{2(2)}$ (cas GI)		
1	$(\mathfrak{so}_7 \oplus T_1, \mathfrak{so}_7)$	1	1	$(\mathfrak{sl}_4, \mathfrak{sl}_4)$	0	3	$(0, 0)$	0
2	(G_2, G_2)	0	2	(G_2, G_2)	0	4	$(0, 0)$	0
						5	$(0, 0)$	0

$E_{6(-14)}$ (cas EIII)			$E_{6(6)}$ (cas EI)			$F_{4(4)}$ (cas FI)		
3	$(\mathfrak{so}_7 \oplus T_1, \mathfrak{so}_7 \oplus T_1)$	0	12	(T_2, T_1)	1	6	$(\mathfrak{sl}_3, \mathfrak{sl}_3)$	0
4	$(\mathfrak{so}_7 \oplus T_1, \mathfrak{so}_7 \oplus T_1)$	0	16	$(T_1, 0)$	1	16	$(0, 0)$	0
7	$(\mathfrak{sl}_3 \oplus T_1, \mathfrak{sl}_3 \oplus T_1)$	0	17	$(T_1, 0)$	1	17	$(0, 0)$	0
8	$(\mathfrak{sl}_3 \oplus T_1, \mathfrak{sl}_3 \oplus T_1)$	0	18	$(0, 0)$	0	18	$(0, 0)$	0
9	(G_2, G_2)	0	19	$(0, 0)$	0	19	$(\mathfrak{sl}_2, \mathfrak{sl}_2)$	0
10	$(\mathfrak{so}_5 \oplus T_1, \mathfrak{so}_5 \oplus T_1)$	0	20	$(0, 0)$	0	22	$(0, 0)$	0
11	$(\mathfrak{so}_5 \oplus T_1, \mathfrak{so}_5 \oplus T_1)$	0	21	$(T_1, 0)$	1	23	$(0, 0)$	0
12	$(\mathfrak{sl}_2 \oplus T_1, \mathfrak{sl}_5 \oplus T_1)$	0	22	$(0, 0)$	0	24	$(0, 0)$	0
			23	$(T_2, 0)$	2	25	$(0, 0)$	0
						26	$(0, 0)$	0

$E_{7(-25)}$ (cas EVII)			$E_{8(-24)}$ (cas EIX)		
6	(F_4, F_4)	0	6	(E_6, E_6)	0
7	(F_4, F_4)	0	18	$(\mathfrak{so}_8, \mathfrak{so}_8)$	0
11	$(\mathfrak{sl}_4 \oplus T_1, \mathfrak{sl}_4 \oplus T_1)$	0	19	$(\mathfrak{so}_8, \mathfrak{so}_8)$	0
12	$(\mathfrak{sl}_4 \oplus T_1, \mathfrak{sl}_4 \oplus T_1)$	0	21	(F_4, F_4)	0
16	$(\mathfrak{so}_7, \mathfrak{so}_7)$	0	23	$(\mathfrak{so}_5 \oplus T_1, \mathfrak{so}_5 \oplus T_1)$	0
17	$(\mathfrak{so}_7, \mathfrak{so}_7)$	0	24	$(\mathfrak{sl}_5, \mathfrak{sl}_5)$	0
18	$(\mathfrak{so}_7, \mathfrak{so}_7)$	0	26	$(\mathfrak{sl}_3 \oplus T_1, \mathfrak{sl}_3 \oplus T_1)$	0
19	$(\mathfrak{so}_7, \mathfrak{so}_7)$	0	27	$(\mathfrak{sl}_4, \mathfrak{sl}_4)$	0
20	$(\mathfrak{sl}_3 \oplus T_1, \mathfrak{sl}_3 \oplus T_1)$	0	28	$(2\mathfrak{sl}_2, 2\mathfrak{sl}_2)$	0
21	(G_2, G_2)	0	30	(G_2, G_2)	0
22	(G_2, G_2)	0	31	(G_2, G_2)	0
			32	$(\mathfrak{so}_7, \mathfrak{so}_7)$	0
			33	$(\mathfrak{so}_7, \mathfrak{so}_7)$	0
			34	$(2\mathfrak{sl}_2, 2\mathfrak{sl}_2)$	0
			35	$(\mathfrak{sl}_3, \mathfrak{sl}_3)$	0
			36	(G_2, G_2)	0

$E_{7(7)}$ (cas EV)			$E_{8(8)}$ (cas EVIII)		
16	(G_2, G_2)	0	14	(G_2, G_2)	0
17	(G_2, G_2)	0	15	(G_2, G_2)	0
39	$(\mathfrak{sl}_2, \mathfrak{sl}_2)$	0	34	$(\mathfrak{sl}_3, \mathfrak{sl}_3)$	0
40	$(\mathfrak{sl}_2, \mathfrak{sl}_2)$	0	42	$(\mathfrak{sl}_2 \oplus T_1, \mathfrak{sl}_2 \oplus T_1)$	0
48	(T_2, T_2)	0	45	$(2\mathfrak{sl}_2, 2\mathfrak{sl}_2)$	0
49	(T_2, T_2)	0	51	$(\mathfrak{sl}_3, \mathfrak{sl}_3)$	0
50	$(T_2, 0)$	2	67	$(0, 0)$	0
55	$(\mathfrak{sl}_2, \mathfrak{sl}_2)$	0	68	$(0, 0)$	0
56	$(\mathfrak{sl}_2, \mathfrak{sl}_2)$	0	69	$(0, 0)$	0
67	$(0, 0)$	0	70	$(2\mathfrak{sl}_2, 2\mathfrak{sl}_2)$	0
68	$(0, 0)$	0	79	(T_1, T_1)	0
69	$(0, 0)$	0	80	(T_1, T_1)	0
70	$(0, 0)$	0	81	$(T_1, 0)$	1
76	$(0, 0)$	0	84	(T_1, T_1)	0
77	$(0, 0)$	0	85	$(T_1, 0)$	1
78	$(0, 0)$	0	87	(T_1, T_1)	0
79	$(0, 0)$	0	88	$(T_1, 0)$	1
80	(T_1, T_1)	0	91	$(0, 0)$	0
81	$(T_1, 0)$	1	92	$(0, 0)$	0
85	$(0, 0)$	0	93	(T_1, T_1)	0
86	$(0, 0)$	0	94	(T_1, T_1)	0
87	$(0, 0)$	0	95	$(T_1, 0)$	1
88	$(0, 0)$	0	98	$(0, 0)$	0
89	$(0, 0)$	0	99	$(0, 0)$	0
90	$(0, 0)$	0	101	$(0, 0)$	0
91	$(0, 0)$	0	102	$(0, 0)$	0
92	$(0, 0)$	0	104	$(0, 0)$	0
93	$(0, 0)$	0	105	$(0, 0)$	0
94	$(0, 0)$	0	106	$(0, 0)$	0
			107	$(0, 0)$	0
			109	$(0, 0)$	0
			110	$(0, 0)$	0
			111	$(0, 0)$	0
			112	$(0, 0)$	0
			113	$(0, 0)$	0
			114	$(0, 0)$	0
			115	$(0, 0)$	0

$E_{6(2)}$ (cas EII)			$E_{7(-5)}$ (cas EVI)		
6	$(2\mathfrak{sl}_2, 2\mathfrak{sl}_2)$	0	6	$(\mathfrak{sl}_6, \mathfrak{sl}_6)$	0
12	$(\mathfrak{sl}_2 \oplus T_1, \mathfrak{sl}_2 \oplus T_1)$	0	14	$(G_2 + \mathfrak{sl}_2, G_2 + \mathfrak{sl}_2)$	0
13	$(\mathfrak{sl}_2 \oplus T_1, \mathfrak{sl}_2 \oplus T_1)$	0	19	$(3\mathfrak{sl}_2, 3\mathfrak{sl}_2)$	0
20	(T_2, T_2)	0	20	$(3\mathfrak{sl}_2, 3\mathfrak{sl}_2)$	0
21	(T_2, T_2)	0	22	$(\mathfrak{sp}_6, \mathfrak{sp}_6)$	0
22	(T_2, T_1)	1	24	$(\mathfrak{sl}_2 \oplus T_1, \mathfrak{sl}_2 \oplus T_1)$	0
23	$(\mathfrak{sl}_3, \mathfrak{sl}_3)$	0	25	$(\mathfrak{sl}_3 \oplus T_1, \mathfrak{sl}_3 \oplus T_1)$	0
25	$(\mathfrak{sl}_2 \oplus T_1, \mathfrak{sl}_2 \oplus T_1)$	0	27	(T_2, T_2)	0
27	(T_1, T_1)	0	28	$(\mathfrak{sl}_2 \oplus T_1, \mathfrak{sl}_2 \oplus T_1)$	0
28	(T_1, T_1)	0	29	$(\mathfrak{sl}_2, \mathfrak{sl}_2)$	0
29	(T_1, T_1)	0	31	$(\mathfrak{sl}_2, \mathfrak{sl}_2)$	0
30	(T_1, T_1)	0	32	$(\mathfrak{sl}_2, \mathfrak{sl}_2)$	0
32	$(0, 0)$	0	33	$(2\mathfrak{sl}_2, 2\mathfrak{sl}_2)$	0
33	$(0, 0)$	0	34	$(2\mathfrak{sl}_2, 2\mathfrak{sl}_2)$	0
34	(T_1, T_1)	0	35	$(\mathfrak{sl}_2, \mathfrak{sl}_2)$	0
35	(T_1, T_1)	0	36	(T_1, T_1)	0
36	$(0, 0)$	0	37	$(\mathfrak{sl}_2, \mathfrak{sl}_2)$	0
37	$(0, 0)$	0			

Notons que l'orbite 15 de EVIII n'apparaît pas dans [25], elle est néanmoins bien \mathfrak{p} -distinguée. Notons aussi que l'orbite 1 de EIV n'est pas \mathfrak{p} -distinguée suite à une erreur dans la table VII de [4] mentionnée par King dans [16].

CONSÉQUENCE. — *Les algèbres de Lie simples symétriques GI, FI, FII, EIII, EVI, EVII et EIX ne possèdent pas d'élément presque \mathfrak{p} -distingué non \mathfrak{p} -distingué donc en vertu de la proposition 1.10, la conjecture 1.13 est démontrée dans ces cas-là.*

6.2. Quelques réductions

Dans une algèbre de Lie simple symétrique donnée, on note \mathcal{O}_i l'orbite de numéro i des tables de D.Z. Djokovic. Énumérons quelques réductions d'éléments presque \mathfrak{p} -distingués.

Reference	Type de \mathfrak{g}	n°	$\dim \mathcal{O}$	$\delta(e)$
[8]	EII	22	29	1
		24	30	0
[7]	EV	50	52	2
		54	53	1
		81	59	1
		85	60	0
[9] Table 2 et Fig.2	EVIII	81	107	1
		84	108	0
		88	109	1
		91	110	0
		95	111	1
[8] Fig.2	EI	21	34	1
		18	35	0
		17	32	1
		22	33	0

Il ne reste que 5 orbites sur lesquelles nous ne pouvons pas nous prononcer pour l'instant ; elles ne possèdent pas de réduction. Ce sont les suivantes.

Type	n° de \mathcal{O}	K -diagramme de Dynkin d'une caractéristique de \mathcal{O}	G -diagramme de Dynkin d'une caractéristique de \mathcal{O}
EIV	1	0001	100001
EI	16	1111	111011
EVIII	85	11111111	10010101
EI	12	2002	000200
EI	23	0020	000200

6.3. Utilisation du lemme 1.8

Nous allons montrer que les trois premières orbites du tableau précédent n'engendrent pas de composante étrange, grâce au lemme 1.8. Comme dans la section 5, on étudie le h -espace propre associé à la valeur propre 1.

Soit $\mathfrak{g} = E_{6(-26)}$ (cas EIV). On s'intéresse à l'orbite \mathcal{O}_1 (cf. [4]). On considère un \mathcal{S} -triplet normal standard (e, h, f) avec $e \in \mathcal{O}_1$. On peut

calculer facilement les dimensions de $\mathfrak{k}(i, h)$ et $\mathfrak{p}(i, h)$ pour les différents entiers i et on obtient (cf. [13]) :

i	$\dim \mathfrak{k}(i, h)$	$\dim \mathfrak{p}(i, h)$
> 2	0	0
2	7	1
1	8	8
0	22	8

On en déduit que tout élément non nul e de $\mathfrak{p}(2, h)$ est régulier sous l'action de $K(0, h)$ dans $\mathfrak{p}(2, h)$ et appartient donc à \mathcal{O}_1 (cf. [15, Lemme 2.2.9]). De la même façon, comme $h' = 2h$ est une caractéristique pour l'orbite régulière \mathcal{O}_2 , tout élément régulier sous l'action de $K(0, h') = K(0, h)$ dans $\mathfrak{p}(2, h') = \mathfrak{p}(1, h)$ appartient à \mathcal{O}_2 . Mais comme $\mathfrak{k}(3, h) = \{0\}$, on a $\mathfrak{p}(1, h) = \mathfrak{p}(e, 1)$. Soit donc e' régulier dans $\mathfrak{p}(e, 1)$; on a $e' \in \mathcal{O}_2$ et $[e', e] = 0$, d'où $\mathcal{N} \cap \mathfrak{p}^e \not\subset \overline{\mathcal{O}_1}$, et par le lemme 1.8, e ne peut pas engendrer de composante étrange.

PROPOSITION 6.1. — *Si $(\mathfrak{g}, \mathfrak{k})$ est de type EI, il existe $e \in \mathcal{O}_{16}$ et $e_1 \in \mathcal{O}_{18}$ tels que $[e, e_1] = 0$.*

Si $(\mathfrak{g}, \mathfrak{k})$ est de type EVIII, il existe $e \in \mathcal{O}_{85}$ et $e_1 \in \mathcal{O}_{109}$ tels que $[e, e_1] = 0$.

Démonstration. — Soit \mathfrak{g} de type E_6 (resp. E_8). Nous allons fixer une sous algèbre de Cartan \mathfrak{h} de \mathfrak{g} , une base de Chevalley $(X_{\alpha_i})_{\alpha_i \in R(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})}$ compatible avec le système de racine $R(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$, et une involution explicite de type EI (resp. EVIII) telle que $\mathfrak{h} \cap \mathfrak{k}$ soit une sous-algèbre de Cartan de \mathfrak{k} . Pour simplifier les notations, on notera parfois X_i à la place de X_{α_i} . Soit une caractéristique $h \in \mathfrak{h} \cap \mathfrak{k}$ de l'orbite \mathcal{O}_{16} (resp. \mathcal{O}_{85}). Il se trouve que $h' = 2h$ est alors une caractéristique de l'orbite \mathcal{O}_{18} (resp. \mathcal{O}_{109}). Avec les notations de la section 1.2, on rappelle que l'on a $\mathfrak{k}(0, h) = \mathfrak{k}(0, h')$ et $\mathfrak{p}(2, h') = \mathfrak{p}(1, h)$. De plus, d'après [15, Lemme 2.2.9], $\mathcal{O}_{16} \cap \mathfrak{p}(2, h)$ (resp. $\mathcal{O}_{85} \cap \mathfrak{p}(2, h)$) est exactement la $K(0, h)$ -orbite régulière dense de $\mathfrak{p}(2, h)$, tandis que $\mathcal{O}_{18} \cap \mathfrak{p}(1, h)$ (resp. $\mathcal{O}_{109} \cap \mathfrak{p}(1, h)$) est la $K(0, h)$ -orbite régulière dense de $\mathfrak{p}(1, h)$. Grâce aux tables de [13], on voit que pour tout $e \in \mathcal{O}_{16} \cap \mathfrak{p}(2, h)$, on a $\dim \mathfrak{p}(e, 1) = 1$. Nous choisirons donc un élément régulier $e \in \mathfrak{p}(e, 2)$ et montrer qu'il commute avec un élément e_1 , régulier dans $\mathfrak{p}(1, h)$.

Commençons par le premier cas. On fixe une base $(\alpha_i)_{1 \leq i \leq 6}$ telle que le diagramme de Dynkin de \mathfrak{g} s'écrive

$$\begin{array}{cccccc} \alpha_1 & \alpha_3 & \alpha_4 & \alpha_5 & \alpha_6 & \\ & & & \alpha_2 & & \end{array} .$$

On choisit la numérotation des racines donnée par [5, Table 3] ainsi que la base de Chevalley de [5, §4] caractérisée par [5, Table 13]. Ainsi, on a par exemple $\alpha_8 = \alpha_2 + \alpha_4$ et $[X_2, X_4] = -X_8$. On fixe l'involution τ , définie dans [4] (dans [4] les racines $\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ sont notées respectivement $\alpha_4, \alpha_2, \alpha_3$), permutant les racines α_1 et α_6 , α_3 et α_5 et laissant invariants α_2 et α_4 . Pour trouver une involution θ de type EI, on peut poser (cf. [4])

$$\theta(X_{\sum_{i=1}^6 k_i \alpha_i}) = (-1)^{k_2} X_{\sum_{i=1}^6 k_i \tau(\alpha_i)}.$$

Toujours selon [4] on définit

$$\begin{aligned} \beta_1 &= (\alpha_1)_{|\mathfrak{h} \cap \mathfrak{k}} = (\alpha_6)_{|\mathfrak{h} \cap \mathfrak{k}}, & \beta_2 &= (\alpha_3)_{|\mathfrak{h} \cap \mathfrak{k}} = (\alpha_5)_{|\mathfrak{h} \cap \mathfrak{k}}, & \beta_3 &= (\alpha_4)_{|\mathfrak{h} \cap \mathfrak{k}}, \\ \beta_4 &= (\alpha_2)_{|\mathfrak{h} \cap \mathfrak{k}}, & \beta_0 &= -2\beta_1 - 3\beta_2 - 2\beta_3 - \beta_4. \end{aligned}$$

De [4, Table VIII], on déduit que l'élément h vérifiant $\beta_1(h) = \beta_2(h) = \beta_3(h) = \beta_0(h) = 1$ est une caractéristique de \mathcal{O}_{16} . Si on écrit le G -diagramme de Dynkin de h , on trouve

$$\begin{array}{cccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \\ & & & & & -8 \end{array}.$$

Ceci nous permet d'obtenir les bases suivantes pour $\mathfrak{k}(0, h)$, $\mathfrak{p}(1, h)$, $\mathfrak{p}(2, h)$ et $\mathfrak{k}(3, h)$:

$\mathfrak{k}(0, h)$	$H_1 + H_6; H_3 + H_5; H_2; H_4$
$\mathfrak{p}(1, h)$	$A_1 := X_1 - X_6; A_2 := X_3 - X_5; A_3 := X_{-32} + X_{-33}; A_4 := X_{35}$
$\mathfrak{p}(2, h)$	$B_1 := X_7 - X_{11}; B_2 := X_9 - X_{10}; B_3 := X_{-29} + X_{-31}; B_4 := X_{-30}$
$\mathfrak{k}(3, h)$	$C_1 := X_{12} + X_{16}; C_2 := X_{-26} - X_{-28}; C_3 := X_{15}$

Comme $\mathfrak{k}(0, h) \subset \mathfrak{h}$, un élément $x \in \mathfrak{h}$ agit par multiplication par un scalaire sur chaque A_i et chaque B_j . En particulier, un élément $e = \sum b_i B_i$ (resp. $e_1 = \sum a_i A_i$) est régulier dans $\mathfrak{p}(2, h)$ (resp. $\mathfrak{p}(1, h)$) si et seulement si $[\mathfrak{k}(0, h), e] = \mathfrak{p}(2, h)$ (resp. $[\mathfrak{k}(0, h), e_1] = \mathfrak{p}(1, h)$) ce qui équivaut au fait que les coefficients b_i (resp. a_i) sont tous non nuls. On choisit $e = B_1 + B_2 + B_3 + B_4$. Écrivons la table de multiplication dans la matrice ci-dessous, où l'élément d'indice (i, j) correspond à $[A_i, B_j]$:

$$([A_i, B_j])_{i,j} = \begin{pmatrix} 0 & C_1 & 0 & C_2 \\ 0 & -2C_3 & -C_2 & 0 \\ C_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C_1 & C_3 \end{pmatrix}$$

D'après ce qui précède, l'élément $e_1 = -2A_1 + A_2 + 3A_3 + 2A_4$ est régulier dans $\mathfrak{p}(1, h)$, appartient à \mathcal{O}_{18} et commute avec e .

Le second cas où $(\mathfrak{g}, \mathfrak{k})$ est de type EVIII se traite de façon similaire. On fixe la base de $R(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$:

$$\begin{array}{cccccccc} \alpha_1 & \alpha_3 & \alpha_4 & \alpha_5 & \alpha_6 & \alpha_7 & \alpha_8 & . \\ & & & \alpha_2 & & & & \end{array}$$

La numérotation des racines et la base de Chevalley sont données par [6, Table 1, Table 6]. Conformément à [3], on pose

$$\theta(X_{\sum_{i=1}^s k_i \alpha_i}) = (-1)^{k_1} X_{\sum_{i=1}^s k_i \alpha_i}.$$

On peut choisir la caractéristique h de \mathcal{O}_{85} de sorte que son G -diagramme de Dynkin soit

$$\begin{array}{cccccccc} -14 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & . \\ & & & 1 & & & & \end{array}$$

On obtient facilement des bases pour les espaces de poids suivant :

$\mathfrak{k}(0, h)$	$H_1; H_2; H_3; H_4; H_5; H_6; H_7; H_8$
$\mathfrak{p}(1, h)$	$A_1 := X_{93}; A_2 := X_{94}; A_3 := X_{95}; A_4 := X_{96}$ $A_5 := X_{-85}; A_6 := X_{-86}; A_7 := X_{-87}; A_8 := X_{-88}$
$\mathfrak{p}(2, h)$	$B_1 := X_{98}; B_2 := X_{99}; B_3 := X_{100}; B_4 := X_{-80}$ $B_5 := X_{-81}; B_6 := X_{-82}; B_7 := X_{-83}; B_8 := X_{-84}$
$\mathfrak{k}(3, h)$	$C_1 := X_{17}; C_2 := X_{18}; C_3 := X_{19}; C_4 := X_{20}$ $C_5 := X_{21}; C_6 := X_{22}; C_7 := X_{-118}$

Ici encore $\mathfrak{k}(0, h) \subseteq \mathfrak{h}$, donc les orbites régulières de $\mathfrak{p}(1, h)$ et $\mathfrak{p}(2, h)$ se décrivent de la même façon que dans le cas EI. La table de multiplication : $\mathfrak{p}(1, h) \times \mathfrak{p}(2, h) \rightarrow \mathfrak{k}(3, h)$ est la suivante :

$$([A_i, B_j])_{i,j} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -C_3 & 0 & -C_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_4 & 0 & C_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_5 & 0 & 0 & C_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_6 & C_5 & C_4 \\ 0 & 0 & -C_6 & 0 & 0 & 0 & -C_7 & 0 \\ C_3 & 0 & -C_5 & 0 & 0 & -C_7 & 0 & 0 \\ C_1 & 0 & 0 & -C_7 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -C_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Finalement, on peut poser

$$e = \sum_{i=1}^8 B_i \text{ et } e_1 = A_1 + 2A_2 + 3A_3 - 2A_4 - 2A_5 + A_6 + A_7 + 5A_8.$$

Ces deux éléments commutent et appartiennent respectivement à \mathcal{O}_{85} et \mathcal{O}_{109} . \square

COROLLAIRE 6.2. — Si $(\mathfrak{g}, \mathfrak{k})$ est de type EI, $\mathfrak{C}(\mathcal{O}_{18})$ n'engendre pas de composante étrange. Même conclusion pour \mathcal{O}_{85} si $(\mathfrak{g}, \mathfrak{k})$ est de type EVIII.

Démonstration. — Il suffit d'appliquer la proposition précédente et le lemme 1.8. □

Terminons cette section en donnant le nombre de composantes irréductibles de $\mathfrak{C}^{\text{nil}}(\mathfrak{p})$ dans les différents cas exceptionnels.

GI	FI	FII	EI	EII	EIII	EIV	EV	EVI	EVII	EVIII	EIX
3	10	2	4 à 6	17	8	1	27	17	11	33	16

Conclusion

La conjecture A est démontrée dans les cas suivants : AIII, CII, DIII, EII, EIII, EIV, EV, EVI, EVII, EVIII, EIX, FI, FII, GI et dans les cas

AI $(\mathfrak{sl}_n, \mathfrak{so}_n)$ avec $n \leq 5$ (i.e. en rang ≤ 4)

AII $(\mathfrak{sl}_{2n}, \mathfrak{sp}_{2n})$ avec $n \leq 3$ (i.e. en rang ≤ 3).

BDI $(\mathfrak{so}_n, \mathfrak{so}_p \times \mathfrak{so}_q)$ avec $p \leq 2$ ou $q \leq 2$ ou $\max(p, q) \leq 4$. (En particulier, elle est vraie en rang ≤ 2)

CI $(\mathfrak{sp}_{2n}, \mathfrak{gl}_n)$ avec $n \leq 7$. (i.e. en rang ≤ 7)

De plus, les méthodes de réduction et d'étude de $\mathfrak{p}(e, 1)$ introduites dans les sections 4 et 5 montrent qu'un certain nombre d'éléments presque \mathfrak{p} -distingués ne fournissent pas de composante étrange.

Nous avons exploité au maximum les deux outils dont nous nous sommes dotés : d'une part le lemme 1.8 et d'autre part la réduction dont le principe est contenu dans le lemme 4.1. En effet, les seules orbites pour lesquelles nous ne savons rien dire sont des orbites \mathcal{O} contenant des éléments e presque \mathfrak{p} -distingués, non \mathfrak{p} -distingués, vérifiant $\mathfrak{p}^e \cap \mathcal{N} \subseteq \overline{\mathcal{O}}$, et n'ayant pas de réduction.

7. Appendice : Orbites \mathfrak{p} -self-large

Le lemme 1.8 nous a invité à déterminer les éléments nilpotents e vérifiant $\mathcal{N}(\mathfrak{p}^e) \subset \overline{K.e}$. Dans le cas des algèbres de Lie, D. Panyushev a dernièrement nommé ces éléments *self-large* dans [23]. Ils sont caractérisés de la façon suivante : ce sont les éléments presque distingués e vérifiant $\mathfrak{g}(e, 1) = 0$. N'ayant découvert ces travaux que récemment, nous allons présenter dans cet appendice quelques résultats inspirés de [23] qui permettent de déterminer des éléments similaires dans les algèbres de Lie symétriques.

DÉFINITION 7.1. — *Un élément nilpotent $e \in \mathfrak{p}$ vérifiant $\mathcal{N}(\mathfrak{p}^e) \subset \overline{K.e}$ est dit \mathfrak{p} -self-large. L'orbite $K.e$ est alors également appelée \mathfrak{p} -self-large*

On a montré dans la section 1.4, que seuls des éléments \mathfrak{p} -self-large pouvaient engendrer une composante irréductible de $\mathfrak{C}^{\text{nil}}(\mathfrak{p})$. On a en particulier établi les implications suivantes :

$$\mathfrak{p}\text{-distingué} \Rightarrow \mathfrak{p}\text{-self-large} \Rightarrow \text{presque } \mathfrak{p}\text{-distingué}.$$

Comme précédemment, on fixe un \mathcal{S} -triplet (e, h, f) , ce qui nous donne les graduations suivantes de $\mathfrak{w} = \mathfrak{g}, \mathfrak{k}$ ou \mathfrak{p} :

$$\mathfrak{w} = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} \mathfrak{w}(i, h); \quad \mathfrak{w}^e = \bigoplus_{i \geq 0} \mathfrak{w}(e, i); \quad \mathfrak{w}^f = \bigoplus_{i \leq 0} \mathfrak{w}(f, i).$$

On sait que $\mathfrak{p}(e, 0)$ agit (via l'action adjointe de \mathfrak{g}) sur $\mathfrak{g}(f, -1)$. Si e est presque \mathfrak{p} -distingué, $\mathfrak{p}(e, 0)$ est un tore, on peut alors considérer $\mathfrak{X}(\mathfrak{p}(e, 0))$ l'ensemble des poids non-nuls du $\mathfrak{p}(e, 0)$ -module $\mathfrak{g}(f, -1)$. On notera la décomposition en espaces de poids comme ceci :

$$\mathfrak{g}(f, -1) = \bigoplus_{\gamma \in \mathfrak{X}(\mathfrak{p}(e, 0))} V_{\gamma}.$$

Le but de la proposition 7.4 est de donner un analogue faible de [23, Théorème 2.1] pour les algèbres de Lie symétriques. Il se trouve que, combinée aux résultats des sections précédentes, cette proposition va s'avérer suffisante pour décrire toutes les orbites \mathfrak{p} -self-large des algèbres de Lie symétriques. Nous avons tout d'abord besoin de deux lemmes. On rappelle que L désigne la forme de Killing sur \mathfrak{g} .

LEMME 7.2 (D. Panyushev [23]). — *L'application*

$$\Phi : \begin{cases} \mathfrak{g}(f, -1) \times \mathfrak{g}(f, -1) & \rightarrow \mathbb{k} \\ (\xi, \eta) & \mapsto L(e, [\xi, \eta]) \end{cases}$$

est une forme bilinéaire antisymétrique non dégénérée $\mathfrak{g}(e, 0)$ -invariante.

LEMME 7.3. — *L'automorphisme θ induit une bijection entre V_{γ} et $V_{-\gamma}$. L'application $\tilde{\Phi} : (\xi, \eta) \mapsto \Phi(\xi, \theta(\eta))$ est une forme bilinéaire symétrique non dégénérée. Elle reste non dégénérée sur chaque sous-espace V_{γ} .*

Démonstration. — Comme $h \in \mathfrak{k}$ et $f \in \mathfrak{p}$, l'automorphisme θ induit une bijection de $\mathfrak{g}(f, -1)$. Soit ξ un élément de V_{γ} . Pour tout $t \in \mathfrak{p}(e, 0)$, on a

$$[t, \theta(\xi)] = \theta([\theta(t), \xi]) = \theta(-\gamma(t)\xi) = -\gamma(t)\theta(\xi).$$

Ceci prouve la première affirmation.

Comme θ induit une bijection de $\mathfrak{g}(f, -1)$, le fait que $\tilde{\Phi}$ soit non-dégénérée est une conséquence du lemme 7.2. Vérifions que $\tilde{\Phi}$ est symétrique :

$$\begin{aligned} L(e, [\xi, \theta(\eta)]) &= L(\theta(e), \theta([\xi, \theta(\eta)])) \\ &= L(-e, [\theta(\xi), \eta]) \\ &= L(e, [\eta, \theta(\xi)]). \end{aligned}$$

Prouvons enfin la dernière affirmation du lemme. Soit $\xi \in V_\gamma$ et $\eta \in V_\mu$, alors $\theta(\eta) \in V_{-\mu}$ et pour tout $t \in \mathfrak{p}(e, 0)$, on a

$$(\gamma(t) - \mu(t))\tilde{\Phi}(\xi, \eta) = \Phi([t, \xi], \theta(\eta)) + \Phi(\xi, [t, \theta(\eta)]) = 0.$$

donc $\tilde{\Phi}(\xi, \eta) = 0$ si $\gamma \neq \mu$. Ceci montre que $\tilde{\Phi}$ est non-dégénérée sur V_γ . \square

PROPOSITION 7.4. — *Si e est presque \mathfrak{p} -distingué tel que $\mathfrak{g}(f, -1)^{\mathfrak{p}(e,0)} = \{0\}$ et $\mathfrak{p}(e, 1) \neq \{0\}$, alors e n'est pas \mathfrak{p} -self-large.*

Démonstration. — Notons tout d'abord que, d'après les hypothèses, $0 \notin \mathfrak{X}(\mathfrak{p}(e, 0))$. Fixons $\mu \in \mathfrak{X}(\mathfrak{p}(e, 0))$ et soit $\xi \in V_\mu$ tel que $\tilde{\Phi}(\xi, \xi) \neq 0$. Puisque $\mu \neq 0$, il existe $t \in \mathfrak{p}(e, 0)$ tel que $[t, \xi] = \xi$ et $[t, \theta(\xi)] = -\theta(\xi)$. Un calcul facile donne

$$L([e, (\xi + \theta(\xi))], (\xi + \theta(\xi)), t) = 2L(e, [\xi, \theta(\xi)]) \neq 0,$$

ce qui montre en particulier que $[[e, \xi + \theta(\xi)], \xi + \theta(\xi)] \neq 0$. Donc $z = \xi + \theta(\xi)$ est un élément de $\mathfrak{k}(f, -1)$ satisfaisant $[[e, z], z] \neq 0$. Finalement, par [23, Lemme 2.3], $G.(e + [z, e])$ est une orbite strictement plus grande que $G.e$, ce qui implique notamment que $K.(e + [z, e]) \not\subseteq \overline{K.e}$. Pour conclure, il est facile de vérifier que $e + [z, e] \in \mathfrak{p}^e$. \square

Remarque 7.5. — On ne peut pas supprimer l'hypothèse $\mathfrak{g}(f, -1)^{\mathfrak{p}(e,0)} = \{0\}$. En effet, l'orbite \mathcal{O}_1 de FII vérifie $\mathfrak{p}(e, 0) = \{0\}$ et $\mathfrak{p}(e, 1) \neq \{0\}$. Elle est cependant \mathfrak{p} -distinguée, donc \mathfrak{p} -self-large.

COROLLAIRE 7.6. — *Les orbites \mathcal{O}_{50} de EV ; \mathcal{O}_{85} , \mathcal{O}_{88} de EVIII et \mathcal{O}_{16} , \mathcal{O}_{17} de EI ne sont pas \mathfrak{p} -self-large.*

Démonstration. — On a vu dans la section 6 que ces orbites nilpotentes sont presque \mathfrak{p} -distinguées et qu'elles ne sont pas paires. Grâce à [3, 4], on peut calculer $\mathfrak{p}(e, 0)$ et on trouve que $\mathfrak{p}(e, 0) = \mathfrak{g}(e, 0)$ dans ces cas précis. On peut maintenant appliquer l'argument suivant de [23]. Soit $\mathfrak{l} = \mathfrak{g}^{\mathfrak{a}(e,0)}$ et $\mathfrak{s} = [\mathfrak{l}, \mathfrak{l}]$, de sorte que $\mathfrak{l} = \mathfrak{s} \oplus \mathfrak{g}(e, 0)$. Alors e est distingué dans \mathfrak{s} et la graduation induite par $h \in \mathfrak{s}$ vérifie $\{0\} = \mathfrak{s}(-1, h) = \mathfrak{l}(-1, h) = \mathfrak{g}(-1, h)^{\mathfrak{a}(e,0)} = \mathfrak{g}(-1, h)^{\mathfrak{p}(e,0)} \supseteq \mathfrak{g}(f, -1)^{\mathfrak{p}(e,0)}$. En combinant ceci avec les tables de [13], on montre que les hypothèses de la proposition 7.4 sont satisfaites. Les orbites mentionnées ne sont donc pas \mathfrak{p} -self-large. \square

En suivant la même idée, il est possible de donner une preuve alternative de la description de la section 5.2 des orbites presque \mathfrak{p} -distinguées de AI qui ne sont pas \mathfrak{p} -self-large. Malheureusement, la proposition 7.4 ne permet pas l'étude des orbites presque \mathfrak{p} -distinguées non \mathfrak{p} -self-large de AII ni de l'orbite \mathcal{O}_1 de EIV. Pour ces orbites, on se réfère aux sections 5.3 et 6.3. Finalement, les dernières orbites à traiter étant paires, on peut lister l'ensemble des orbites \mathfrak{p} -self-large dans les différents cas simples à l'aide du lemme 1.9. Le cas général s'en déduit facilement étant donné que les algèbres de Lie symétriques sont produit direct d'algèbres de Lie symétriques simples.

Cas	Orbites \mathfrak{p} -self-large.
AI	L'orbite (\mathfrak{p} -distinguée) régulière et les orbites dont le diagramme associé est constituée de lignes de longueurs différenciant d'au moins 2.
AII	L'orbite (\mathfrak{p} -distinguée) régulière et les orbites dont le diagramme associé est constituée de paires de lignes de longueurs différenciant d'au moins 2.
AIII	Les orbites \mathfrak{p} -distinguées (<i>i.e.</i> qui ont un ab -diagramme dont les lignes de même longueur débutent par la même lettre), ce sont les seules orbites presque \mathfrak{p} -distinguées.
BDI, CI	Les orbites presque \mathfrak{p} -distinguées (cf. section 3.3).
CII, DIII	Les orbites \mathfrak{p} -distinguées (qui sont les seules orbites presque \mathfrak{p} -distinguées, cf. section 3.3).
EIII, EVI, EVII, EIX, FI, FII, GI	Les orbites \mathfrak{p} -distinguées (qui sont les seules orbites presque \mathfrak{p} -distinguées, cf. section 6.1).
EII	Les orbites presque \mathfrak{p} -distinguées. En particulier l'orbite \mathcal{O}_{22} non \mathfrak{p} -distinguée.
EIV	L'orbite régulière (\mathfrak{p} -distinguée).
EI	Les orbites \mathfrak{p} -distinguées et les orbites $\mathcal{O}_{12}, \mathcal{O}_{21}, \mathcal{O}_{23}$ (cf. section 6 et lemme 1.9).
EV	Les orbites \mathfrak{p} -distinguées et l'orbite \mathcal{O}_{81} (cf. section 6 et lemme 1.9).
EVIII	Les orbites \mathfrak{p} -distinguées et les orbites $\mathcal{O}_{81}, \mathcal{O}_{95}$ (cf. section 6 et lemme 1.9).
Algèbres de Lie	Les orbites dont les éléments e vérifient $\mathfrak{p}(e, 0)$ est un tore et $\mathfrak{p}(e, 1) = \{0\}$ (cf. [23, Théoreme 2.1]).

Les calculs permettent de montrer le fait suivant. Les éléments \mathfrak{p} -self-large d'une algèbres de Lie symétrique simple sont exactement les éléments e vérifiant l'une des conditions suivantes

- $\mathfrak{p}(e, 0) = \{0\}$ i.e. e est \mathfrak{p} -distingué ;
- $\mathfrak{p}(e, 0)$ est un tore et $\mathfrak{p}(e, 1) = \{0\}$.

Cependant, ceci est uniquement valable dans le cas simple. En effet, la remarque 7.5 implique que, dans $FII \times EI$, l'orbite $\mathcal{O}_1 \times \mathcal{O}_{21}$ est \mathfrak{p} -self-large mais vérifie $\mathfrak{p}(e, 0) = T_1 \neq \{0\}$ et $\mathfrak{p}(e, 1) \neq \{0\}$.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] V. BARANOVSKI, « The variety of pairs of commuting nilpotent matrices is irreducible », *Transform. Groups* **6** (2001), p. 3-8.
- [2] N. BOURBAKI, *Groupes et algèbres de Lie. Chapitres 4, 5 et 6*, Hermann, Paris, 1968.
- [3] D. Z. DJOKOVIC, « Classification of nilpotent elements in simple exceptional real algebras of inner type and description of their centralizers », *J. Algebra* **112** (1988), p. 503-524.
- [4] ———, « Classification of nilpotent elements in simple real lie algebras $E_{6(6)}$ and $E_{6(-26)}$ and description of their centralizers », *J. Algebra* **116** (1988), p. 196-207.
- [5] ———, « Explicit Cayley triples in real forms of F_2 , G_4 and E_6 », *Pacific J. Math.* **184** (1998), p. 231-255.
- [6] ———, « Explicit Cayley triples in real forms of E_8 », *Pacific J. of Math.* **194** (2000), p. 57-82.
- [7] ———, « The closure diagram for nilpotent orbits of the split real form of E_7 », *Represent. Theory* **5** (2001), p. 284-316.
- [8] ———, « The closure diagrams for nilpotent orbits of real forms of E_6 », *J. Lie Theory* **11** (2001), p. 381-413.
- [9] ———, « The closure diagram for nilpotent orbits of the split real form of E_8 », *Centr. Europ. J. Math.* **4** (2003), p. 573-643.
- [10] E. B. ELASHVILI, « The centralisers of nilpotent elements in semisimple Lie algebras », *Trudy Tbiliss. Inst. Mat. Nats. Nauk Gruzin.* **46** (1975), p. 109-132, In Russian.
- [11] R. GOODMAN & N. R. WALLACH, « An algebraic group approach to compact symmetric spaces », 1997, <http://www.math.rutgers.edu/pub/goodman/symspace.pdf>.
- [12] S. HELGASON, *Differential geometry, Lie groups, and symmetric spaces*, Pure and applied mathematics, Academic press, 1978.
- [13] S. G. JACKSON & A. G. NOEL, « Prehomogeneous spaces associated with nilpotent orbits », 2005, <http://www.math.umb.edu/~anoel/publications/tables>.
- [14] J. C. JANTZEN, « Nilpotent orbits in representation theory », in *Lie Theory*, Progr. Math., vol. 228, Birkhäuser, 2004, p. 1-211.
- [15] N. KAWANAKA, « Orbits and stabilizers of nilpotent elements of a graded semisimple Lie algebra », *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo* **34** (1987), p. 573-597.
- [16] D. R. KING, « The component groups of nilpotents in exceptional simple real Lie algebras », *Comm. Algebra* **20** (1992), p. 219-284.

- [17] B. KOSTANT & S. RALLIS, « Orbits and representations associated with symmetric spaces », *Amer. J. Math.* **93** (1971), p. 753-809.
- [18] T. OTHA, « The singularities of the closure of nilpotent orbits in certain symmetric pairs », *Tôhoku Math. J.* **38** (1986), p. 441-468.
- [19] ———, « The closure of nilpotent orbits in the classical symmetric pairs and their singularities », *Tôhoku Math. J.* **43** (1991), p. 161-211.
- [20] D. I. PANYUSHEV, « The Jacobian modules of a representation of a Lie algebra and geometry of commuting varieties », *Compositio Math.* **94** (1994), p. 181-199.
- [21] ———, « On the conormal bundle of a G -stable subvariety », *Manuscripta Math.* **99** (1999), p. 185-202.
- [22] ———, « On the irreducibility of commuting varieties associated with involutions of simple Lie algebras », *Func. Anal. Appl.* **38** (2004), p. 38-44.
- [23] ———, « Two results on centralisers of nilpotent elements », *J. Pure Appl. Algebra* **212** (2008), p. 774-779.
- [24] D. I. PANYUSHEV & O. YAKIMOVA, « Symmetric pairs and associated commuting varieties », in *Math. Proc.*, vol. 143, Cambridge Philos. Soc., 2007, p. 307-321.
- [25] V. L. POPOV & E. A. TEVELEV, « Self-dual projective algebraic varieties associated with symmetric spaces », in *Algebraic transformation groups and algebraic varieties*, Enc. Math. Sci., vol. 132, Springer Verlag, 2004, p. 131-167.
- [26] A. PREMÉT, « Nilpotent commuting varieties of reductive Lie algebras », *Invent. Math.* **154** (2003), p. 653-683.
- [27] R. W. RICHARDSON, « Commuting varieties of semisimple Lie algebras and algebraic groups », *Compositio Math.* **38** (1979), p. 311-327.
- [28] H. SABOURIN & R. W. T. YU, « Sur l'irréductibilité de la variété commutante d'une paire symétrique réductrice de rang 1 », *Bull. Sci. Math.* **126** (2002), p. 143-150.
- [29] ———, « On the irreducibility of the commuting variety of the symmetric pair $(\mathfrak{so}_{p+2}, \mathfrak{so}_p \times \mathfrak{so}_2)$ », *J. Lie Theory* **16** (2006), p. 57-65.
- [30] J. SEKIGUCHI, « The nilpotent subvariety of the vector space associated to a symmetric pair », *Publ. RIMS Kyoto Univ.* **20** (1984), p. 155-212.
- [31] T. A. SPRINGER & R. STEINBERG, « Conjugacy classes », in *Seminar on algebraic groups and related finite groups*, Lecture Notes in Math., vol. 131, Springer, 1970, p. 167-266.
- [32] P. TAUVEL & R. W. T. YU, *Lie algebras and algebraic groups*, Springer Monographs in Mathematics, Springer, 2005.
- [33] E. B. VINBERG, « Classification of homogeneous nilpotent elements of a semisimple graded Lie algebra », *Selecta Math. Sovietica* **6** (1987), p. 15-35.

Manuscrit reçu le 21 janvier 2008,
 accepté le 4 avril 2008.

Michaël BULOIS
 Université de Brest
 Département de mathématiques
 29238 Brest cedex 3 (France)
 Michael.Bulois@univ-brest.fr