Paul-André Meyer

Caractérisation des noyaux potentiels des semi-groupes discrets

Annales de l'institut Fourier, tome 16, nº 2 (1966), p. 225-240

<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1966__16_2_225_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
16, 2 (1966), 225-240.

CARACTÉRISATION DES NOYAUX POTENTIELS DES SEMI-GROUPES DISCRETS

par Paul-André MEYER

Soit E un espace localement compact, et soit G un noyau sur E, *qui applique l'espace $\mathcal{K}$ des fonctions continues à support compact dans l'espace $\mathcal{C}_0$ des fonctions continues nulles à l'infini*, et dont l'image $G(\mathcal{K})$ est dense dans $\mathcal{C}_0$. Un théorème célèbre de Hunt [2] affirme alors que G satisfait au principe complet du maximum si et seulement si G est le noyau potentiel $\int_0^\infty P_t\,dt$ d'un semi-groupe sous-markovien (P_t). Il est naturel de chercher à caractériser de manière analogue les noyaux potentiels de semi-groupes discrets — c'est-à-dire les noyaux de la forme $I + N + N^2 + \cdots$, où N est un noyau sous-markovien sur E. Si l'on ne considère que des noyaux G qui satisfont aux hypothèses soulignées ci-dessus, la réponse est facile : G est potentiel d'un semi-groupe discret si et seulement si G satisfait à un principe analogue au principe complet du maximum, mais un peu plus fort ([1]). Malheureusement, les hypothèses en italiques ne sont pas naturelles dans l'étude des semi-groupes discrets. Nous essayons ci-dessous de parvenir à une caractérisation des potentiels de semi-groupes discrets sans aucune condition de continuité, sur un espace mesurable quelconque : nous aboutissons ainsi à une condition nécessaire et suffisante horrible.

1. Rappels sur les semi-groupes discrets.

Dans toute la suite, $(E, \mathcal{E})$ désigne un espace mesurable; le mot « fonction » signifie « fonction mesurable à valeurs réelles

([1]) Voir [3].

définie dans E »; de même le mot « ensemble » (lorsqu'il désigne une partie de E) signifie toujours « ensemble mesurable ». Nous dirons qu'un noyau G sur E est *propre* s'il existe une suite croissante (A_n) de sous-ensembles de E, telle que $\bigcup_n A_n = E$, et que $G(I_{A_n})$ soit borné pour tout $n \in \mathbf{N}$.

Soit N un noyau sous-markovien sur E; si le noyau

$$G = I + N + N^2 \ldots$$

est propre, nous dirons que G est le noyau potentiel associé à N.

Une fonction positive f est dite *excessive* (par rapport à N) si on a $Nf \leqslant f$, *invariante* si on a $Nf = f$, et si f est finie. Le potentiel Gh d'une fonction $h \geqslant 0$ est une fonction excessive; si Gh est fini, la seule fonction invariante majorée par Gh est la fonction zéro. Toute fonction excessive finie f s'écrit de manière unique comme la somme d'une fonction invariante $\left(\text{égale à } \lim\limits_{n\to\infty} N^n f\right)$ et d'un potentiel (celui de f-Nf).

Soit A un ensemble : on désigne par A′ le complémentaire de A, par J_A (resp. $J_{A'}$) le noyau de multiplication par la fonction indicatrice I_A (resp. $I_{A'}$), par N_A (resp. $N_{A'}$) le noyau NJ_A (resp. $NJ_{A'}$), par G_A (resp. $G_{A'}$) le noyau potentiel associé à N_A (resp. $N_{A'}$). On pose enfin

$$H_A = J_A + J_{A'}G_{A'}N_A \quad \text{(noyau de « réduction » sur A).}$$

On établit les faits suivants (voir Deny [1]) :

— H_A est un noyau sous-markovien; les mesures $\varepsilon_x H_A$ sont portées par A; on a $\varepsilon_x H_A = \varepsilon_x$ pour $x \in A$; on a $\varepsilon_x NH_A = \varepsilon_x H_A$ pour $x \notin A$.

— Pour toute fonction excessive f, $H_A f$ est la plus petite fonction excessive qui majore f sur A; en particulier, $H_A f \leqslant f$.

— Si h est une fonction positive nulle hors de A, on a $H_A Gh = Gh$.

On en déduit le résultat suivant, fondamental pour la suite :

THÉORÈME 1. — *Soit h une fonction excessive; la relation*

$$(1) \qquad h(x) \geqslant Gg(x) \quad \textit{pour tout} \quad x \in \{g < 0\},$$

où g désigne une fonction positive, entraîne la relation $h \geqslant Gg$.

Appliquons en effet aux deux membres de (1) le noyau H_A, en posant $A = \{g > 0\}$; les mesures $\varepsilon_x H_A$ étant portées par A, on a $H_A h \geqslant H_A G g$. Mais on a $h \geqslant H_A h$, $H_A G g = g$.

Corollaire 1. — *Soit h une fonction excessive; la relation*

$$h(x) \geqslant Gg(x) \quad \textit{pour tout} \quad x \in \{g > 0\}$$

où g désigne une fonction (non nécessairement positive) telle que $G|g|$ soit fini, entraîne la relation $h \geqslant Gg$.

En effet, la fonction excessive $h + G(g^-)$ majore $G(g^+)$ sur $\{g^+ > 0\}$, donc partout.

Corollaire 2 (principe complet du maximum). — *La relation*

$$a + Gf(x) \geqslant Gg(x) \qquad \textit{pour tout} \quad x \in \{g > 0\},$$

où a désigne une constante > 0, et où f et g sont des fonctions positives, entraîne la relation $a + Gf \geqslant Gg$.

En effet, $a + Gf$ est excessive.

Corollaire 3. — *La relation*

$$a + Gf(x) - f(x) \geqslant Gg(x) \qquad \textit{pour tout} \quad x \in \{g > 0\},$$

où a, f, g désignent respectivement une constante > 0, une fonction positive finie, une fonction positive, entraîne la relation $a + Gf - f \geqslant Gg$.

En effet, $a + Gf - f = a + GNf$ est excessive.

Nous aurons besoin dans la suite de savoir caractériser les potentiels au moyen des opérateurs H_A.

Théorème 2. — *Soit f une fonction excessive finie; pour que f soit un potentiel, il faut et il suffit que la condition suivante soit satisfaite:*

pour toute suite décroissante (A_n) d'ensembles, telles que $\bigcap_n A_n = \varnothing$, on a $\lim_{n\to\infty} H_{A_n} f = 0$.

En effet, supposons que g soit un potentiel fini, et soit $g_n = H_{A_n} g$; les g_n décroissent vers une fonction $g' \leqslant g$, et sont majorés par g. Comme $Ng \leqslant g$ est finie, on peut appliquer le théorème de Lebesgue et il vient

$$Ng' = \lim_{n\to\infty} Ng_n = \lim_{n\to\infty} NH_{A_n}g.$$

Mais $NH_{A_n}g = H_{A_n}g$ sur $E - A_n$, donc $\left(\text{comme} \bigcap\limits_n A_n = \emptyset\right)$ on a $Ng' = g'$; g' est une fonction invariante majorée par un potentiel, et cela entraîne que $g' = 0$.

Inversement, supposons que g ne soit pas un potentiel : il existe alors une fonction invariante $h \neq 0$ majorée par g, et il nous suffit de construire une suite croissante (B_n) d'ensembles, telle qu'on ait $E = \bigcup\limits_n B_n$, et $H_{A_n}h = h$, où A_n désigne $E - B_n$.

Soit B un ensemble tel que $G_B h$ soit fini, et soit $A = E - B$. On a $N_B h + N_A h = Nh = h$, donc

$$H_A h = J_A h + J_B G_B N_A h = J_A h + J_B G_B(h - N_B h)$$

mais $G_B(h - N_B h) = h$, donc $H_A h = J_A h + J_B h = h$.

Soit alors (C_n) une suite croissante d'ensembles, dont la réunion est E, telle que $G(I_{C_n})$ soit borné pour tout n; soit $B_n = C_n \cap \{h \leqslant n\}$. On a $G_{B_n}h \leqslant G(hI_{B_n}) \leqslant nG(I_{C_n})$; $G_{B_n}h$ est donc fini, et le théorème est établi.

2. Rappels sur les résolvantes sous-markoviennes [2].

On appelle *résolvante sous-markovienne* sur $(E, \mathcal{E})$ une famille $(V_p)_{p>0}$ de noyaux sur E, possédant les propriétés suivantes :

1) pV_p est sous-markovien pour tout $p > 0$;

2) $V_pV_q = V_qV_p$ pour tout couple (p, q) de nombres > 0;

3) si $p < q$, on a $V_p = V_q + (q - p)V_qV_p$.

Les noyaux V_p croissent lorsque p décroît : nous pouvons donc considérer le noyau :

$$V_0 = \sup_p V_p = \lim_{p\to 0} V_0;$$

Si V_0 est *propre*, nous dirons que V_0 est le *noyau potentiel*

[2] Les « rappels » ci-dessous font double emploi avec le chapitre IX d'un livre à paraître. A défaut de pouvoir y référer, j'ai donné les démonstrations des résultats les moins classsiques.

associé à la résolvante (V_p), et nous le désignerons par V. Les fonctions de la forme Vf, où f est positive, seront appelées *potentiels*. On a évidemment $VV_p = V_pV$, $V = V_p + pVV_p$ pour tout $p > 0$.

On dit qu'une fonction $f \geqslant 0$ est *surmédiane* (par rapport à la résolvante (V_p)) si l'on a $pV_pf \leqslant f$ pour tout $p > 0$; si on a de plus $f = \lim\limits_{p \to \infty} pV_pf$, on dit que f est *excessive*. On peut montrer que si f est surmédiane, pV_pf tend en croissant, lorsque $p \to \infty$, vers une fonction excessive $\hat{f} \leqslant f$, et que l'ensemble $A = \{f > \hat{f}\}$ est un *ensemble de potentiel nul* $(V(I_A) = 0)$.

Tout potentiel Vf $(f \geqslant 0)$ est une fonction excessive. Inversement, toute fonction excessive est enveloppe supérieure d'une suite croissante de potentiels. En particulier, si f est une fonction excessive *telle que* Vf *soit finie*, on a

$$pV_pf = pV(f - pV_pf),$$

et f est la limite de la suite croissante des potentiels $pV_pf(p \in \mathbf{N})$.

On établit la formule $I + pV = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (pV_p)^n$, et on en déduit le théorème suivant (voir Deny [1]).

Théorème 3. — *Soit h une fonction surmédiane pour la résolvante* (V_p). *La relation suivante, où g désigne une fonction positive :*

$$h(x) \geqslant Vg(x) \qquad \textit{pour tout} \quad x \in \{g > 0\},$$

entraîne la relation $h \geqslant Vg$.

Corollaire 1. — *Le noyau* V *satisfait au principe complet du maximum* (voir le corol. 2 du th. 1).

Corollaire 2. — *Soit h une fonction surmédiane; la relation*

$$(2) \qquad h(x) \geqslant Vg(x) \qquad \textit{pour tout} \qquad x \in \{g > 0\},$$

où g désigne une fonction (non nécessairement positive) telle que $V(|g|)$ *soit fini, entraîne la relation* $h \geqslant Vg$.

La démonstration est la même que celle du corollaire 1 du théorème 1. On notera qu'il n'y a pas ici de résultat analogue au corollaire 3 du théorème 1.

Nous aurons besoin dans la suite de la réciproque suivante du corollaire 2 :

THÉORÈME 4. — *Soit* h *une fonction positive, telle que la relation*

$$h(x) \geqslant Vg(x) \qquad \textit{pour tout} \quad x \in \{g > 0\},$$

où g *désigne une fonction (non nécessairement positive) telle que* $V(|g|)$ *soit borné, entraîne la relation* $h \geqslant Vg$. *La fonction* h *est alors surmédiane par rapport à la résolvante* (V_p).

Tout revient à montrer qu'on a $h \geqslant pV_p h$; il suffit pour cela de prouver qu'on a $h \geqslant pV_p f$ pour toute fonction positive $f \leqslant h$, dont le potentiel Vf est borné. Posons $g = p(f - pV_p f)$; comme f et $pV_p f$ ont un potentiel borné, car

$$V(pV_p f) = V_p(pVf) \leqslant pVf,$$

il en est de même de $|g|$. On a $Vg = pV_p f$; mais on a

$$h \geqslant pV_p f = Vg \qquad \text{sur l'ensemble} \quad \{h > pV_p f\}$$

et à plus forte raison sur l'ensemble $\{f > pV_p f\} = \{g > 0\}$. On a donc partout $h \geqslant pV_p f$, et le théorème est établi.

Nous aurons besoin aussi du résultat suivant, qui exprime qu'il existe des « pseudo-réduites » pour toutes les résolvantes sous-markoviennes (on prendra soin de ne pas confondre ces « pseudo-réduites » H_A avec les véritables réduites, qui s'obtiennent en remplaçant les fonctions surmédianes par les fonctions excessives : la véritable réduite d'une fonction excessive sur un ensemble A ne coïncide pas forcément avec cette fonction sur A).

THÉORÈME 5. — *Soit* A *un sous-ensemble de* E. *On peut associer à toute fonction surmédiane* f *une fonction surmédiane* $H_A f$, *de telle sorte que les propriétés suivantes soient vérifiées :*

1) $H_A f$ *est la plus petite fonction surmédiane qui majore* f *sur* A; *on a* $H_A f \leqslant f$, $H_A f(x) = f(x)$ *pour tout* $x \in A$. *La relation* $f(x) \leqslant g(x)$ *pour tout* $x \in A$ *entraîne* $H_A f \leqslant H_A g$.

2) *Si* (f_n) *est une suite croissante de fonctions surmédianes, et si* $f = \lim_{n \to \infty} f_n$, *on a* $H_A f = \lim_{n \to \infty} H_A f_n$.

3) *Si h est une fonction positive nulle hors de* A, *on a*

$$H_A Vh = Vh.$$

4) *Si f et g sont des fonctions surmédianes, on a*

$$H_A(f + g) = H_A f + H_A g.$$

Désignons par N_p le noyau sous-markovien pV_p, par G_p le noyau potentiel associé à N_p (qui est le noyau propre $I + pV$), par H_A^p l'opérateur de « réduction » sur A associé à ce noyau. Soit v une fonction excessive pour N_p; nous allons montrer que v est excessive pour N_q, quel que soit $q < p$. Comme G_p est propre, il suffit de montrer ceci lorsque v est un G_p-potentiel borné $v = G_p h = (I + pV)h$ $(h \geqslant 0)$; on a alors

$$\begin{aligned} qV_q v = qV_q (I + pV)h = qV_q h + p(Vh - V_q h) \\ = (q - p)V_q h + pVh \leqslant pVh \leqslant v. \end{aligned}$$

Considérons maintenant une fonction f, surmédiane par rapport à la résolvante (V_p); f est alors N_p-excessive pour tout $p > 0$. Si l'on a $q < p$, il y a plus de fonctions N_q-excessives que de fonctions N_p-excessives, d'après ce qui précède : la réduite $H_A^q f$ est donc plus petite que $H_A^p f$. Lorsque $p \to +\infty$, $H_A^p f$ tend donc en croissant vers une limite, que nous noterons $H_A f$. On a évidemment $H_A f \leqslant f$, $H_A f = f$ sur A; $H_A^p f$ étant N_q-excessive pour tout $p > q$, $H_A f$ est N_q-excessive; q étant arbitraire, cela signifie que $H_A f$ est surmédiane par rapport à la résolvante (V_p). Si f et g sont deux fonctions surmédianes, la relation $f(x) \leqslant g(x)$ pour tout $x \in A$ entraîne $H_A^p f \leqslant H_A^p g$, donc $H_A f \leqslant H_A g$; elle entraîne donc que $H_A f \leqslant g$, ce qui prouve que $H_A f$ est la plus petite fonction surmédiane qui majore f sur A. Si (f_n) est une suite croissante de fonctions surmédianes, et si $f = \sup_n f_n$, on a $H_A^p f = \sup_n H_A^p f_n$ pour tout p, donc

$$H_A f = \sup_n H_A f_n.$$

Soit h une fonction nulle hors de A; supposons d'abord que h soit finie. Nous avons $H_A^p G_p h = h$, ou :

$$H_A^p (I + pV)h = (I + pV)h$$

divisons par p, faisons tendre p vers $+\infty$, il vient $H_A Vh = Vh$.

Le cas où h peut prendre la valeur $+\infty$ se traite au moyen d'un passage à la limite monotone [le lecteur remarquera que nous venons de démontrer le théorème 3 !]. Enfin, si f et g sont deux fonctions surmédianes, on a

$$H_A^p(f+g) = H_A^p f + H_A^p g$$

pour tout p, donc $H_A(f+g) = H_A f + H_A g$.

On ignore si H_A peut se prolonger à l'ensemble de toutes les fonctions positives, comme un noyau sous-markovien. Mais il est clair, d'après les propriétés 2) et 4), que l'application $H_A V$ qui associe à toute fonction $f \geqslant 0$ la fonction $H_A V f$ est un noyau propre sur E.

Nous aurons enfin besoin du théorème suivant, dû à Hunt (voir [2], p. 352); nous n'en rappellerons pas la démonstration.

THÉORÈME 6. — *Soit* V *un noyau sur* E, *tel que* V1 *soit une fonction bornée, qui satisfait au principe complet du maximum pour les fonctions bornées; il existe alors une résolvante sous-markovienne* (V_p) *telle que* $V_0 = V$.

On montre que cette résolvante est unique.

3. Caractérisation des potentiels discrets.

Dans toute la suite, nous désignerons par G un noyau *propre* sur E, par $\mathcal{G}$ l'espace de toutes les fonctions ($\mathcal{E}$-mesurables) bornées sur E, par $\mathcal{B}$ le sous-espace de $\mathcal{G}$ constitué par les $h \in \mathcal{G}$ telles que $G|h|$ soit borné. Les fonctions de la forme $Gh (h \geqslant 0)$ seront appelées *potentiels*, sans que cela préjuge de l'existence d'un noyau N tel que

$$G = I + N + N^2 + \cdots$$

Nous supposerons aussi, dans toute la suite, que G satisfait à la condition suivante « principe du maximum renforcé ».

(MR) *Si* a, f, g, *désignent respectivement une constante positive, et deux éléments de* $\mathcal{B}_+$, *la relation*

$$a + Gf(x) - f(x) \geqslant Gg(x) \qquad \textit{pour tout} \quad x \in \{g > 0\}$$

entraîne la relation $a + Gf - f \geqslant Gg$.

Lorsque E est un espace localement compact, et lorsque G transforme les fonctions continues à support compact en fonctions *continues*, il suffit de vérifier que la propriété (MR) a lieu pour des fonctions f et g, positives, continues à support compact : on montre en effet que G transforme alors les fonctions continues à support compact en fonctions continues bornées, et que (MR) est vraie lorsque f et g sont des fonctions universellement mesurables finies quelconques. Nous ne donnerons pas ici la démonstration (qui repose sur le lemme de Dini).

Si G est de la forme $I + N + N^2 \ldots$, où N est sous-markovien, nous avons vu que G satisfait à (MR) (corol. 3 du th. 1). Nous allons étudier maintenant la réciproque. Nous établirons pour cela toute une série de lemmes.

Lemme 1. — *La restriction de* G *à* $\mathcal{B}$ *est injective.*

Soit h un élément de $\mathcal{B}$ tel que $Gh = 0$; alors $Gh^+ = Gh^-$. On a donc $Gh^+ - h^+ \geqslant Gh^-$ sur l'ensemble $\{h^- > 0\}$ (car $h^+ = 0$ sur cet ensemble), donc partout. Cela entraîne que $h^+ = 0$, et de même $h^- = 0$.

Lemme 2. — *G satisfait au principe complet du maximum pour les éléments de* $\mathcal{B}^+$.

Soient a une constante positive, f et g deux éléments de $\mathcal{B}_+$ tels qu'on ait $a + Gf(x) \geqslant Gg(x)$ pour tout $x \in \{g > 0\}$; posons $f \wedge g = c$, $f - c = f'$, $g - c = g'$. En retranchant Gc aux deux membres de cette relation, on obtient :

$$a + Gf'(x) \geqslant Gg'(x) \qquad \text{pour tout} \quad x \in \{g > 0\},$$

et à plus forte raison pour tout $x \in \{g' > 0\}$. Mais sur $\{g' > 0\}$ on a $f'(x) = 0$, et par conséquent $a + Gf'(x) - f'(x) \geqslant Gg'(x)$. Cette inégalité a donc lieu partout; à plus forte raison on en déduit $a + Gf' \geqslant Gg'$, puis $a + Gf \geqslant Gg$ en ajoutant Gc aux deux membres.

Nous dirons qu'une fonction $h \geqslant 0$ est *quasi-excessive* si la relation

$$h(x) \geqslant Gg(x) \qquad \text{pour tout} \quad x \in \{g > 0\}$$

où g désigne un élément de $\mathcal{B}$ (non nécessairement positif), entraîne la relation $h \geqslant Gg$. Le lemme 2 exprime que toute fonction $a + Gf$ $(a \geqslant 0,\ f \in \mathcal{B}_+)$ est quasi-excessive.

LEMME 3. — *Soient f un élément de $\mathcal{B}_+$, a une constante $\geqslant 0$; la fonction $a + Gf - f$ est quasi-excessive.*

Supposons en effet que g soit un élément de $\mathcal{B}$, et qu'on ait $a + Gf(x) - f(x) \geqslant Gg(x)$ pour tout $x \in \{g > 0\}$; cette relation s'écrit $a + Gf(x) - f(x) + Gg^-(x) \geqslant Gg^+(x)$ pour tout $x \in \{g^+ > 0\}$; mais g^- est nulle sur cet ensemble, de sorte que $a + G(f + g^-) - (f + g^-)$ majore Gg^+ sur $\{g^+ > 0\}$, donc partout. Cela entraîne immédiatement que $a + Gf$ majore Gg partout. On vérifie que $a + Gf - f$ est $\geqslant 0$ en prenant $g = 0$.

LEMME 4. — *Il existe une résolvante sous-markovienne (V_p) sur E, dont l'opérateur potentiel V est tel que V1 soit borné, et qui possède les propriétés suivantes :*

1) *L'ensemble des fonctions Gh (où h parcourt l'ensemble $\mathcal{H}$ des fonctions $\geqslant 0$) coïncide avec l'ensemble des fonctions*

$$Vh \ (h \in \mathcal{H}).$$

2) *Pour qu'une fonction h soit quasi-excessive, il faut et il suffit que h possède l'une des propriétés équivalentes :*

a) *h est surmédiane pour la résolvante (V_p)*

b) *h est excessive pour la résolvante (V_p).*

Le noyau G étant propre, il existe une fonction u, strictement positive en tout point de E, telle que Gu soit borné. Nous poserons pour toute fonction $f \geqslant 0$

$$Vf = G(uf).$$

Il est clair que V est un noyau, que V1 est borné, que l'ensemble des G-potentiels de fonctions positives coïncide avec l'ensemble des V-potentiels de fonctions positives. D'autre part, si f est une fonction bornée, uf appartient à $\mathcal{B}$. Il résulte aussitôt du lemme 2 que V satisfait au principe complet du maximum pour les fonctions positives bornées, et donc (th. 6) qu'il existe une résolvante sous-markovienne (V_p) dont le noyau potentiel V_0 est égal à V.

Il n'existe pas d'ensemble non vide, de potentiel nul pour V : en effet, la relation $V(I_A) = 0$ entraîne $G(uI_A) = 0$, donc $uI_A \leqslant G(uI_A) = 0$ d'après le lemme 3, et finalement (comme

u n'est jamais nulle) $A = \emptyset$. Il n'y a donc pas lieu de distinguer les fonctions surmédianes et excessives par rapport à la résolvante (V_p).

Soit h une fonction quasi-excessive; h est alors surmédiane pour la résolvante (V_p) d'après le théorème 4. Inversement, si h est surmédiane pour (V_p), h est quasi-excessive d'après le corollaire 2 du théorème 3.

Lemme 5. — *Soit* A *un sous-ensemble de* E. *On peut associer à toute fonction quasi-excessive f une fonction quasi-excessive* $H_A f$, *de telle sorte que les propriétés suivantes soient vérifiées:*

1) $H_A f$ *est la plus petite fonction quasi-excessive qui majore f sur* A; *on a* $H_A f \leqslant f$, $H_A f(x) = f(x)$ *pour tout* $x \in A$. *Si f et g sont deux fonctions quasi-excessives telles que* $f \leqslant g$ *sur* A, *on a* $H_A f \leqslant H_A g$.

2) *Si* (f_n) *est une suite croissante de fonctions quasi-excessives, et si* $f = \lim\limits_{n \to \infty} f_n$, *on a* $H_A f = \lim\limits_n H_A f_n$ (f est évidemment quasi-excessive d'après le lemme 4).

3) *Si h est une fonction positive nulle hors de* A, *on a* $H_A G h = G h$.

4) *Si f et g sont deux fonctions quasi-excessives, on a*

$$H_A(f + g) = H_A f + H_A g$$

($f + g$ est quasi-excessive d'après le lemme 4).

Ce lemme ne fait que recopier le théorème 5.

Lemme 6. — *Soit h une fonction quasi-excessive bornée; posons*

$$D_n h = un(h - nV_n h) \quad (n \in \mathbf{N});$$

$G(D_n h)$ *tend alors en croissant vers h lorsque* $n \to +\infty$.

On a en effet $G(D_n h) = V(D_n h/u) = V(n(h - nV_n h)) = nV_n h$.

Lemme 7. — *Soit h un élément de* $\mathcal{B}$ *tel que* $Gh \geqslant 0$; *on a alors* $Gh \geqslant h$.

On a en effet $Gh^+ \geqslant Gh^-$, donc $Gh^+ - h^+ \geqslant Gh^-$ sur $\{h^- > 0\}$, donc $Gh \geqslant h^+ \geqslant h$.

Lemme 8. — *Soit h une fonction quasi-excessive bornée, et soit* (u_n) *une suite de fonctions positives telle que* Gu_n *tende en* *croissant vers h. Les fonctions u_n convergent alors (en restant bornées) vers une fonction u, et on a* $Gu \leqslant h$. *Si h est un potentiel* Gg ($g \geqslant 0$), *on a* $u = g$, $Gu = h$.

On a $h \geqslant Gu_n \geqslant u_n$; les u_n sont donc uniformément bornés. Soient m et n deux entiers tels que $m < n$; la relation $Gu_m \leqslant Gu_n$ entraîne $Gu_m - u_m \leqslant Gu_n - u_n$ (lemme 7), ou encore :

$$u_n \leqslant u_m + (Gu_n - Gu_m).$$

Considérons un point $x \in E$, et choisissons deux suites m_k, n_k d'entiers, telles qu'on ait $m_k \leqslant n_k$, $\lim_k u_{m_k}(x) = \limsup_n u_n(x)$, $\lim_k u_{n_k}(x) = \liminf_n u_n(x)$; la relation ci-dessus nous donne alors $\limsup_n u_n(x) \leqslant \liminf_n u_n(x)$, ce qui établit l'existence de u. L'inégalité $Gu \leqslant h$ résulte du lemme de Fatou. Enfin, supposons que $h = Gg$; l'inégalité $Gu_n \leqslant Gg$ nous donne $Gu_n - u_n \leqslant Gg - g$, donc $g \leqslant u_n + (Gg - Gu_n)$, et finalement $g \leqslant u$, d'où $Gg \leqslant Gu$. Finalement on parvient à l'égalité $Gg = Gu$, qui entraîne $g = u$ (lemme 1).

Remarque. — On peut montrer que $h - Gu$ est quasi-excessive.

Nous pouvons maintenant aborder la construction du noyau N tel que $G = I + N + N^2 \ldots$. Si ce noyau existe, et si f est un élément de $\mathcal{B}_+$, $Gf - f$ est le potentiel de la fonction Nf; donc (en vertu des lemmes 6 et 8) $D_n(Gf - f)$ converge vers Nf. Il est donc naturel de *définir* ici N comme la limite de $D_n(Gf - f)$, et il nous restera à prouver que N est un noyau sous-markovien, et qu'on a $G = I + N + N^2 \ldots$.

Malheureusement, cette vérification exige une hypothèse supplémentaire. Voici un exemple de noyau qui satisfait au « principe du maximum renforcé », et qui n'est pas de la forme $I + N + \cdots$. Soit E' un espace discret dénombrable, sur lequel est donné un noyau *markovien* N', dont le noyau potentiel G' est propre. Soit E l'espace discret obtenu en adjoignant à E' un point ω. Si f est une fonction définie sur E, notons f' sa restriction à E'. Si g est une fonction définie sur E', notons g^0 son prolongement par 0 à E. Posons, pour toute fonction positive f sur E :

$$Gf = f(\omega) + (G'f')^0.$$

Il n'est pas difficile de vérifier que G satisfait au principe (MR); d'autre part, si $f = I_{\{\omega\}}$, $Gf - f$ est bornée, vaut 1 sur E' et 0 en ω. S'il existait un noyau N tel que

$$G = I + N + N^2 + \cdots$$

on aurait $Gf - f = Gg$, avec $g = N(I_{\{\omega\}})$, donc :

$$(1)^0 = Gg = (G'g')^0 + g(\omega),$$

d'où $g(\omega) = 0$, $G'g' = 1$. Mais ceci est impossible, car la fonction 1 (sur E') est invariante pour N'.

Soit (B_n) une suite croissante d'ensembles, telle que $G(I_{B_n})$ soit borné par une constante λ_n, et que la réunion de B_n soit égale à E. Nous poserons $A_n = E - B_n$. Soit (a_n) une suite de nombres strictement positifs telle qu'on ait $\sum_n a_n\lambda_n < +\infty$; nous désignerons par w la fonction $\sum_n a_n I_{B_n}$: w appartient à $\mathcal{B}^+$, et w est bornée inférieurement sur chacun des B_n. Nous poserons la définition suivante :

Nous dirons qu'une fonction quasi-excessive h est nulle au bord *si l'on a*

$$\lim_{n\to\infty} H_{A_n}h = 0.$$

Nous désignerons par $\mathcal{B}^0$ le sous-espace vectoriel de $\mathcal{B}$ constitué par les fonctions $f \in \mathcal{B}$ telles que $G|f|$ *soit nulle au bord.*

D'après le théorème 2, s'il existe un noyau N tel que

$$G = I + N + N^2 \ldots,$$

on a nécessairement $\mathcal{B} = \mathcal{B}^0$. Inversement, nous allons montrer que l'on peut construire un tel noyau *si $\mathcal{B}^0$ est suffisamment riche.*

Il est clair que toute fonction f, telle que $|f|$ soit majorée par un élément de $\mathcal{B}^0_+$, ou seulement telle que $G|f|$ soit majoré par un potentiel $Gk (k \in \mathcal{B}^0_+)$, appartient à $\mathcal{B}^0$. En particulier, l'espace $\mathcal{B}^0$ est stable pour les opérations latticielles.

Passons à la définition de N : *pour toute fonction* $f \in \mathcal{B}^0_+$, *nous poserons* $Nf = \lim_{n\to\infty} D_n(Gf - f)$— cette limite existe d'après le lemme 8. Nous prolongerons N à $\mathcal{B}^0$ par linéarité.

LEMME 9. — *Soit (u_p) une suite de fonctions positives qui converge vers une fonction u, telle que les potentiels Gu_p soient* *majorés par une fonction quasi-excessive h nulle au bord. On a alors* $Gu = \lim_{p\to\infty} Gu_p$.

Étant donné que la fonction w construite plus haut a un potentiel fini, il nous suffit de montrer qu'on a la propriété d'« intégrabilité uniforme » suivante :

pour tout $x \in E$, $\int_{\{u_p > nw\}} G(x, dy)u_p(y)$ tend vers 0 *uniformément en* p lorsque $n \to \infty$.

Majorons cette intégrale par $\int_{C_n} G(x, dy)u_p(y)$, où

$$C_n = \{h > nw\}$$

contient l'ensemble $\{Gu_p > nw\}$, et donc aussi $\{u_p > nw\}$. Remarquons ensuite que $G(u_p . I_{C_n})$ est majoré par $H_{C_n}Gu_p$ (car $G(u_p . I_{C_n})$ est majoré par $H_{C_n}Gu_p$ sur C_n, donc partout), donc par $H_{C_n}h$. Nous sommes donc ramenés à prouver que $H_{C_n}h$ tend vers 0 lorsque $n \to \infty$. Comme h est nulle au bord, il suffit d'établir que C_n finit par être contenu dans tout A_m pour n assez grand, ou encore que $C_n \cap B_m = \emptyset$ pour n assez grand, mais cela est clair, car $C_n = \{h > nw\}$, h est bornée, et w est bornée inférieurement sur B_m.

Lemme 10. — 1) *Toute fonction quasi-excessive h, bornée et nulle au bord, est un potentiel.*

2) *Soit f un élément de* $\mathcal{B}^0_+$; *on a* $Gf - f = GNf$, Nf *appartient à* $\mathcal{B}^0_+$ (de sorte que toutes les puissances $N^n f$ sont définies) *et on a :*

$$Gf = f + Nf + N^2 f + \cdots$$

3) *La relation* $f \in \mathcal{B}^0_+$, $f \leqslant 1$ *entraîne* $Nf \leqslant 1$.

4) *Soit* (f_n) *une suite décroissante d'éléments de* $\mathcal{B}^0_+$, *dont la limite est nulle. On a alors* $\lim_{n\to\infty} Nf_n = 0$.

Nous savons que h est l'enveloppe supérieure des potentiels Gu_n, où $u_n = D_n h$ (lemme 6), que les u_n convergent vers une fonction u (lemme 8) : il résulte alors du lemme 9 que h est égale à Gu. En particulier, si $f \in \mathcal{B}^0_+$, appliquons ce résultat à $h = Gf - f$: nous voyons que $Gf - f = GNf$. La fonction Nf est positive, majorée par $GNf \leqslant Gf$; Gf étant bornée, nulle au bord, Nf est bornée et GNf est nulle au bord, autrement dit, on a $Nf \in \mathcal{B}^0_+$. Écrivons les relations $GNf = Gf - f$,

$GN^2f = GNf - Nf \ldots$; il vient aussitôt que

$$Gf = f + Nf + \cdots + N^kf + GN^{k+1}f.$$

Cela entraîne que $N^kf \to 0$ lorsque $k \to +\infty$; d'autre part, les potentiels GN^kf sont majorés par Gf, qui est nul au bord. Le lemme 9 entraîne donc que $GN^kf \to 0$ lorsque $k \to \infty$. Autrement dit, on a $Gf = f + Nf + \cdots$

Soit (f_n) une suite décroissante d'éléments de $\mathcal{B}^0_+$, qui converge vers 0; Gf_n converge alors vers 0 d'après le théorème de Lebesgue; il en va donc de même pour $Gf_n - f_n = GNf_n \geqslant Nf_n$ Cela établit l'assertion 4.

Supposons enfin qu'on ait $f \in \mathcal{B}^0_+$, $f \leqslant 1$. Nous avons

$$f = G(f - Nf),$$

et donc $1 \geqslant G(f - Nf)$; compte tenu du lemme ci-dessous, cela nous donne $1 \geqslant G(f - Nf) - (f - Nf) = Nf$.

Lemme 11. — *Soient a une constante* $\geqslant 0$, g *un élément de* $\mathcal{B}$ *tel que* $Gg \leqslant a$; *on a alors* $Gg - g \leqslant Gg + g^- \leqslant a$.

On a en effet $a + Gg^- \geqslant Gg^+$, donc $a + Gg^- - g^- \geqslant Gg^+$ sur $\{g^+ > 0\}$, et cela entraîne le même résultat partout.

Nous arrivons enfin à notre principal résultat. On remarquera qu'il est peu satisfaisant : il est difficile de reconnaître si un potentiel est nul au bord, car cela exige la connaissance des « réduites » H_A.

Théorème 7. — *Supposons que* G *soit un noyau propre qui satisfait à la condition* (MR). *Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

1) *Tout potentiel borné est nul au bord.*

2) *Il existe une suite croissante* (f_n) *de fonctions positives, dont les potentiels sont bornés et nuls au bord, telle que* $\lim_{n\to\infty} f_n = +\infty$.

3) *Il existe un noyau sous-markovien* N *tel que* G *soit le noyau potentiel associé à* N.

Nous avons vu que 3) $\Longrightarrow$ 1) dans la première partie (th. 2). Le noyau G étant propre, il est clair que 1) $\Longrightarrow$ 2), et il reste à montrer que 2) $\Longrightarrow$ 3). Reprenons les notations du lemme 10.

L'espace $\mathcal{B}^0$ est stable pour l'application $h \to |h|$; la propriété 2, et les assertions 3) et 4) du lemme 10 entraînent que N se prolonge en un noyau sous-markovien (encore noté N) sur la tribu engendrée par $\mathcal{B}^0$; cela résulte aisément du théorème de prolongement de Daniell. Mais si g est une fonction mesurable positive quelconque, $g_n = f_n \wedge g$ appartient à $\mathcal{B}^0$: cette tribu est donc égale à $\mathcal{E}$. Enfin, la relation (lemme 10, 2)

$$\mathrm{G}g_n = g_n + \mathrm{N}g_n + \mathrm{N}^2 g_n + \cdots$$

passe à la limite, et montre que le noyau potentiel associé à N est G.

Exemple. — Supposons que E soit un espace localement compact dénombrable à l'infini, et que le potentiel de tout compact soit une *fonction bornée, qui tend vers* 0 *à l'infini:* on vérifie aussitôt que ce potentiel est alors nul au bord, et que la propriété 2) est satisfaite. Il existe donc un noyau N tel que $\mathrm{G} = \mathrm{I} + \mathrm{N} + \mathrm{N}^2 \ldots$; on retrouve le résultat de [3], sans supposer que G est continu, ni que l'image de G possède une propriété de densité.

BIBLIOGRAPHIE

[1] J. Deny, Les noyaux élémentaires. *Séminaire de théorie du potentiel*, 4e année, (1959). (Institut Henri-Poincaré, Paris).

[2] G. A. Hunt, Markoff processes and potentials II. *Ill. J. of Math.*, t. 1, (1957), 316-369.

[3] P. A. Meyer, Caractérisation des noyaux potentiels des semi-groupes discrets. *C.R. Acad. Sci.*, t. 262 (1966), série A, 121-122.

Manuscrit reçu le 13 janvier 1966.

P. A. Meyer,
Institut de Mathématiques,
(Laboratoire associé au CNRS)
Faculté des Sciences,
67, Strasbourg.