



ANNALES

DE

L'INSTITUT FOURIER

Jean-François BURNOL

Entrelacement de co-Poisson

Tome 57, n° 2 (2007), p. 525-602.

http://aif.cedram.org/item?id=AIF_2007__57_2_525_0

© Association des Annales de l'institut Fourier, 2007, tous droits réservés.

L'accès aux articles de la revue « Annales de l'institut Fourier » (<http://aif.cedram.org/>), implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://aif.cedram.org/legal/>). Toute reproduction en tout ou partie cet article sous quelque forme que ce soit pour tout usage autre que l'utilisation à fin strictement personnelle du copiste est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

cedram

*Article mis en ligne dans le cadre du
Centre de diffusion des revues académiques de mathématiques
<http://www.cedram.org/>*

ENTRELACEMENT DE CO-POISSON

par Jean-François BURNOL

RÉSUMÉ. — On connaît le lien intime qui existe entre les équations fonctionnelles des fonctions L et les formules sommatoires dont le prototype est donné par celle de Poisson. Ce lien fait intervenir la transformation intégrale de Fourier et ses généralisations. Ici, nous réexaminons la signification harmonique (ainsi qu'hilbertienne et distributionnelle) des équations fonctionnelles ayant la forme la plus simple, à savoir, celle s'appliquant pour la fonction dzêta de Riemann et les séries L de Dirichlet (un grand nombre de nos considérations ont une portée plus générale). Certaines formules, cousines mais distinctes des formules à la Poisson et que nous appellerons *formules de co-Poisson*, jouent alors le rôle central.

ABSTRACT. — The intimate link relating the functional equations of L -functions to the summatory formulas whose prototype is the Poisson formula is a familiar fact. This link involves the Fourier integral transform and its generalizations. Here, we shall reexamine the harmonic (as well as hilbertian and distributional) meaning of the functional equations with the simplest shape, the one applying to the Riemann zeta function and to the Dirichlet L -series (many of our considerations have a more general range.) Certain formulas, related to but distinct from the Poisson-type formulas, play the central role. We call them *co-Poisson formulas*.

1. Introduction

1.1. Sommes

Nous débuterons avec l'identité suivante :

$$(1.1) \quad \mathcal{F} \left(\sum_{n \in \mathbb{Z}} \delta_n \right) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} \delta_m.$$

Mots-clés : transformation de Fourier, formule de Poisson, fonction zeta de Riemann, fonctions entières .

Classification math. : 30D15, 42A38, 46F99.

La notation $\delta_n(x) = \delta(x - n)$ désigne la distribution de Dirac positionnée en n . Et en ce qui concerne la transformation de Fourier \mathcal{F} (sur \mathbb{R}), nous employons les notations suivantes :

$$\mathcal{F}(f)(y) = \tilde{f}(y) = \int_{\mathbb{R}} e^{2\pi ixy} f(x) dx \quad \mathcal{F}^{-1}(g)(x) = g^\vee(x) = \int_{\mathbb{R}} e^{-2\pi ixy} g(y) dy.$$

On a donc $(\tilde{f})^\vee = f = \tilde{f}^\vee$, et $\tilde{\tilde{f}}(x) = f(-x)$. Nous réserverons la notation \hat{f} aux transformées de Fourier multiplicatives (transformées de Mellin) ; l'emploi d'un symbole spécial \mathcal{F} pour la transformation de Fourier additive rappelle qu'elle constitue en elle-même (par moment) un objet d'étude (par contraste avec Mellin qui n'est employé que comme outil).

L'identité (1.1) est une identité de distributions tempérées. Suivant une idée de Jean-Pierre Kahane⁽¹⁾, nous allons la régulariser par convolution. Notons $D(x)$ la « distribution de Poisson » (aussi appelée peigne de Dirac) :

$$D(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \delta_n(x).$$

On a l'implication :

$$\mathcal{F}(D(\cdot))(y) = D(y) \quad \Rightarrow \quad \mathcal{F}(D(\cdot - t))(y) = e^{2\pi iyt} D(y).$$

En moyennant avec une fonction $f(t)$, il vient :

$$\mathcal{F}\left(\int f(t)D(\cdot - t)dt\right)(y) = \int f(t)e^{2\pi iyt} dt D(y) = \tilde{f}(y)D(y).$$

Soit encore :

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} f(x - n) \xrightarrow{\mathcal{F}} \tilde{f}(y)D(y) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} \tilde{f}(m)\delta_m(y).$$

Nous régularisons maintenant le terme de droite avec une autre fonction $g(u)$:

$$e^{-2\pi iux} \sum_{n \in \mathbb{Z}} f(x - n) \xrightarrow{\mathcal{F}} \sum_{m \in \mathbb{Z}} \tilde{f}(m)\delta_m(y - u)$$

$$g^\vee(x) \sum_{n \in \mathbb{Z}} f(x - n) \xrightarrow{\mathcal{F}} \sum_{m \in \mathbb{Z}} \tilde{f}(m) \int \delta_m(y - u)g(u) du = \sum_{m \in \mathbb{Z}} \tilde{f}(m)g(y - m).$$

⁽¹⁾ Dans une lettre à l'auteur du 22 mars 2002, J.-P. Kahane construisait « explicitement » des fonctions dans la classe de Schwartz avec un comportement particulier auquel la suite de cette introduction est consacrée. L'idée de base était de régulariser par convolution additive la distribution de Poisson, ou d'autres déduites d'icelle. Dans les quelques lignes qui suivent, je présente le procédé délibérément de manière formelle afin de le contraster avec celui de la convolution multiplicative qui sera évoqué plus loin.

Au final nous obtenons :

$$(1.2) \quad \phi(x) = g^\vee(x) \sum_{n \in \mathbb{Z}} f(x+n) \xrightarrow{\mathcal{F}} \psi(y) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} \tilde{f}(m)g(y-m).$$

La méthode peut être justifiée par des théorèmes classiques sur la convolution des distributions [20, 14], sous certaines hypothèses sur les fonctions f et g . Ici, les conditions $f \in L^1(\mathbb{R}, dx)$ et $g \in L^1(\mathbb{R}, dx)$ suffisent. Et d’une manière générale, pour toute identité $\mathcal{F}(D_1) = D_2$ de distributions tempérées l’hypothèse « $\forall N \in \mathbb{N} (1+x^2)^N f \in L^1$ et $(1+x^2)^N g \in L^1$ » est suffisante pour obtenir $\mathcal{F}(\phi) = \psi$ avec $\phi = g^\vee \cdot (f * D_1)$ et $\psi = g * (\tilde{f} \cdot D_2)$. Si f et g sont toutes deux dans la classe de Schwartz \mathcal{S} alors ϕ et ψ le sont aussi. Il est important de préciser que nous considérons dans (1.2) ϕ et ψ comme des distributions tempérées, et que l’identité vaut en ce sens. Mais, si par exemple on sait que ϕ et ψ correspondent à des fonctions intégrables et continues alors bien sûr (1.2) donne des identités ponctuelles au sens classique. Imaginons que f et g soient telles que cela soit le cas et exprimons alors la formule d’inversion $\phi = \psi^\vee$, en supposant de plus la permutation licite : $\psi^\vee(x) = \int_{\mathbb{R}} e^{-2\pi ixy} \left(\sum_{m \in \mathbb{Z}} \tilde{f}(m)g(y-m) \right) dy = \sum_{m \in \mathbb{Z}} \tilde{f}(m)e^{-2\pi ixm}g^\vee(x)$, d’où en comparant avec (1.2) :

$$(1.3) \quad \sum_{n \in \mathbb{Z}} f(x+n) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} \tilde{f}(m)e^{-2\pi ixm},$$

et la *formule sommatoire de Poisson* :

$$(1.4) \quad \sum_{n \in \mathbb{Z}} f(n) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} \tilde{f}(m).$$

La méthode suivie (que l’on peut certainement justifier lorsque f est une fonction de la classe de Schwartz \mathcal{S}) est follement indirecte, puisqu’en un certain sens, l’équation (1.1), c’est justement la validité de (1.4) pour les fonctions de \mathcal{S} ! Plus précisément (1.1) se lit : $\forall g \in \mathcal{S} \sum_n \tilde{g}(n) = \sum_m g(m)$, si l’on suppose qu’une distribution (tempérée) est une fonctionnelle linéaire sur \mathcal{S} ; elle l’est mais elle n’est pas que ça : comme nous le verrons sous peu, il n’y a pas intérêt à totalement identifier (1.1) et (1.4).

Un cas connu de validité ponctuelle de (1.4) avec des sommes absolument convergentes est obtenu en supposant que f et \tilde{f} sont continues et toutes deux bornées par une fonction intégrable décroissante à l’infini (il suffit de suivre la méthode standard et d’exprimer la fonction périodique $\sum_{n \in \mathbb{Z}} f(x+n)$ via sa série de Fourier, cf. la preuve de 2.9, page 540). Par ailleurs, même pour des fonctions f et \tilde{f} non nécessairement intégrables et non nécessairement continues, il existe pour la validité de (1.4) des conditions suffisantes comme celles du Théorème 45 du livre de Titchmarsh sur

l'intégrale de Fourier [21]. Elles peuvent conduire dans (1.4) à des sommes seulement semi-convergentes, même après avoir apparié n et $-n$, m et $-m$.

Cependant un théorème de Katznelson [15] nous avertit que la formule de Poisson (1.4) n'a pas une validité absolue. Il donne un exemple d'une fonction continue et intégrable f de transformée de Fourier \tilde{f} elle aussi (continue et) intégrable, telles que les deux séries de (1.4) sont absolument convergentes mais donnent deux sommes distinctes : $f(0) = 1$, $f(n) = 0$ pour $n \in \mathbb{Z}$, $n \neq 0$, tandis que $\tilde{f}(m) = 0$ pour tout $m \in \mathbb{Z}$.

Néanmoins, sous la seule hypothèse de l'intégrabilité de f et de \tilde{f} (vérifiée par le contre-exemple de Katznelson [15]), nous prouverons l'énoncé suivant :

THÉORÈME 1.1. — *Soit f et \tilde{f} une paire de Fourier de fonctions intégrables. La formule :*

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{f(n/x)}{|x|} = \sum_{m \in \mathbb{Z}} \tilde{f}(mx),$$

concerne des séries qui sont absolument convergentes pour presque tout x et elle est une identité pour presque tout x .

1.2. Propriété de support

Revenons à un aspect intéressant de l'équation (1.2), qui a disparu en la réduisant à la formule sommatoire de Poisson (1.4). Supposons que la fonction f (que nous prendrons infiniment dérivable) soit supportée dans l'intervalle $[-b, b]$ avec $0 < b < \frac{1}{2}$. Et supposons que la fonction g , elle aussi infiniment dérivable, soit également supportée dans l'intervalle $[-b, b]$. Alors les deux fonctions ϕ et ψ , de \mathcal{S} , paire de Fourier, sont supportées dans $[-b, b] + \mathbb{Z}$. Considérons maintenant la fonction $\phi_1(x) = \exp(\pi ix)\phi(x - \frac{1}{2})$. On a $\tilde{\phi}_1(y) = i \exp(\pi iy)\psi(y + \frac{1}{2})$. Nous constatons que ces deux fonctions de Schwartz ϕ_1 et $\psi_1 = \tilde{\phi}_1$ sont simultanément nulles dans l'intervalle $] -a, +a[$ avec $a = \frac{1}{2} - b$. Si f et g sont toutes deux non identiquement nulles alors ce sera aussi le cas de ϕ_1 et ψ_1 .

Cette méthode de construction se heurte à la contrainte $a < \frac{1}{2}$. Suivant la lettre de Jean-Pierre Kahane, pour obtenir des paires de Fourier avec la condition d'être simultanément nulles dans $] -a, a[$, pour $a > 0$ arbitraire, on commence par modifier la distribution de Poisson $D(x)$ pour annuler un certain nombre de ses Dirac. Soit tout d'abord $E(x) = i \exp(-\pi ix)D(x + \frac{1}{2})$,

de sorte que $\tilde{E}(y) = -\exp(-\pi iy)\tilde{D}(y - \frac{1}{2}) = iE(y)$. Remplaçons E par

$$E_1(x) = \prod_{0 \leq j < N} (x^2 - (\frac{1}{2} + j)^2)E(x).$$

La transformée de Fourier de E_1 a son support en dehors de $] -\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}[$, tandis que E_1 elle-même a son support en dehors de $] -N -\frac{1}{2}, +N +\frac{1}{2}[$. Si nous régularisons comme ci-dessus (ce qui mènera à une formule plus compliquée que (1.2) et que nous n'expliciterons pas), nous obtenons des fonctions dans \mathcal{S} (non nulles généralement) avec des conditions de support à peine moins bonnes. En remplaçant $\phi(x)$ par $\phi(\sqrt{N}x)$ on obtiendra l'objectif voulu, avec un $a > 0$ arbitraire. Si ϕ n'est pas nulle, alors soit sa partie paire, soit sa partie impaire ne l'est pas. Si l'on dérive une fonction paire on obtient une fonction impaire, et cela est compatible avec la condition de support. Donc il existe pour tout $a > 0$ des fonctions dans \mathcal{S} non-nulles, paires ou impaires, nulles et de Fourier nulles dans $] -a, a[$ (on pourra de plus les prendre vecteurs propres de Fourier, pour l'une de ses valeurs propres $1, i, -1, -i$, si l'on veut).

Nous ne savons pas si ce théorème a déjà été mentionné dans la littérature. Un article de de Branges de 1964 [7] a comme corollaire l'existence de fonctions, paires ou impaires, dans $L^2(\mathbb{R})$, avec la propriété de support, pour $a > 0$ quelconque. Pour une démonstration très courte d'existence dans ce cadre L^2 il suffit de dire que l'espace $L^2(-a, a; dx) + \mathcal{F}(L^2(-a, a; dx))$ est fermé dans $L^2(\mathbb{R})$, et l'on trouvera une preuve simple de cette dernière affirmation par exemple dans [12]. Une fois connue une paire L^2 , on peut alors faire comme plus haut avec le peigne de Dirac et régulariser par convolution additive, ce qui donnera des paires de Fourier dans \mathcal{S} possédant une propriété de support à peine moins bonne que la paire d'origine dans L^2 . Cependant cela ne donnera pas d'exemples véritablement explicites, si le point de départ lui-même n'était pas explicite. Pour l'amusement du lecteur (de l'auteur surtout), nous donnerons à la fin de l'article quelques exemples anecdotiques explicites (obtenus par une autre méthode) de fonctions dans $L^2(\mathbb{R})$ avec la condition de support. Nous évoquerons également certaines distributions « remarquables » ayant la propriété de support par rapport à l'intervalle $] -a, +a[$ donné.

Dans [7] un lien est fait par de Branges, via la transformation de Mellin, entre la condition de support pour des paires de Fourier de carrés intégrables, plus généralement pour des paires de transformées de Hankel, et l'étude de certains espaces de Hilbert de fonctions entières; ces « espaces de Sonine » vérifient tous les axiomes de la théorie générale présentée dans

[8], qui a comme point central un théorème d'existence d'un certain développement isométrique abstrait. Il fut étudié de manière concrète pour ces espaces par de Branges [7] et par J. et V. Rovnyak [18, 19], principalement pour ceux associés aux fonctions de Bessel J_ν d'ordre entier ; les espaces liés aux noyaux en cosinus ou en sinus étant obtenus pour $\nu = \pm \frac{1}{2}$, donc ν demi-entier, sont moins bien compris. Avec l'espace de Hardy d'un demi-plan et les espaces de Paley-Wiener, les espaces de Sonine de de Branges-Rovnyak occupent une place remarquable à l'intersection de l'analyse complexe et de l'analyse de Fourier. Ils ne seront pas étudiés directement dans le présent article.

1.3. Co-sommes

Reprenons maintenant cette idée de régularisation d'une paire de Fourier de distributions tempérées telle que (1.1). Mais moyennons de manière multiplicative, avec $t \neq 0$ dans les calculs qui suivent :

$$D\left(\frac{x}{t}\right) \xrightarrow{\mathcal{F}} |t|D(ty)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)D\left(\frac{x}{t}\right)\frac{dt}{|t|} \xrightarrow{\mathcal{F}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)D(ty) dt.$$

Nous séparerons les Dirac en 0 des autres. En effet, puisque $\delta(\lambda x) = \frac{1}{|\lambda|}\delta(x)$, pour $\lambda \neq 0$, on a les identités de distributions en x (resp. y) :

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta\left(\frac{x}{t} - n\right)\frac{dt}{|t|} = \begin{cases} \frac{f(x/n)}{|n|} & (n \neq 0) \\ \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(t) dt\right) \delta(x) & (n = 0), \end{cases}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(ty - m) dt = \begin{cases} \frac{f(m/y)}{|y|} & (m \neq 0) \\ \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\frac{dt}{|t|}\right) \delta(y) & (m = 0), \end{cases}$$

qui donnent :

$$\left(\int_{-\infty}^{\infty} f(t) dt\right) \delta(x) + \sum_{n \neq 0} \frac{f(x/n)}{|n|} \xrightarrow{\mathcal{F}} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\frac{dt}{|t|}\right) \delta(y) + \sum_{m \neq 0} \frac{f(m/y)}{|y|},$$

puis finalement :

$$(1.5) \quad \sum_{n \in \mathbb{Z}, n \neq 0} \frac{f(x/n)}{|n|} - \int_{\mathbb{R}} \frac{f(1/t)}{|t|} dt \xrightarrow{\mathcal{F}} \sum_{m \in \mathbb{Z}, m \neq 0} \frac{f(m/y)}{|y|} - \int_{\mathbb{R}} f(t) dt.$$

Le formalisme général permettant de justifier cette dérivation informelle de (1.5) sera présenté dans la section « Convolution multiplicative » du quatrième chapitre. On y supposera f intégrable, à support éloigné de 0 et de l'infini (c'est-à-dire f nulle en dehors de $[-A, -a] \cup [a, A]$ avec $0 < a < A < \infty$). Les (co)-sommés sont absolument convergents pour presque tout x , définissent des fonctions localement intégrables et tempérées, et la formule (1.5) est une identité de distributions tempérées, que nous appellerons **entrelacement de co-Poisson**. Plus généralement :

THÉORÈME 1.2. — *Soit D une distribution tempérée sur \mathbb{R} et soit f une fonction intégrable à support éloigné de 0 et de $\pm\infty$. La convolution multiplicative $f * D$ est une distribution tempérée sur \mathbb{R} et on a la formule d'entrelacement :*

$$\mathcal{F}(f * D) = I(f) * \mathcal{F}(D)$$

avec $I(f)(x) = \frac{f(1/x)}{|x|}$. On notera bien que le symbole $*$ désigne ici une convolution multiplicative.

Dans le cas du peigne de Dirac qui nous occupe principalement ici, il n'est pas nécessaire pour la validité de (1.5) d'imposer à f d'avoir son support éloigné de 0 et de $\pm\infty$.

THÉORÈME 1.3. — *Sous la seule condition :*

$$(C) \quad \int_{\mathbb{R}} |f(t)| dt + \int_{\mathbb{R}} \frac{|f(1/t)|}{|t|} dt < \infty.$$

Les (co)-sommés $\sum_{n \in \mathbb{Z}, n \neq 0} \frac{f(x/n)}{|n|}$ et $\sum_{m \in \mathbb{Z}, m \neq 0} \frac{f(m/y)}{|y|}$ sont presque partout absolument convergents, définissent des fonctions localement intégrables et tempérées, et la formule

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}, n \neq 0} \frac{f(x/n)}{|n|} - \int_{\mathbb{R}} \frac{f(1/t)}{|t|} dt \xrightarrow{\mathcal{F}} \sum_{m \in \mathbb{Z}, m \neq 0} \frac{f(m/y)}{|y|} - \int_{\mathbb{R}} f(t) dt$$

vaut comme identité de distributions tempérées.

La formule ne concerne en réalité que les fonctions paires, et nous pouvons la réécrire sous la forme suivante, où il est entendu que f est une fonction paire (ou que f est sur $]0, \infty[$ et que \mathcal{F} est la transformation en cosinus $\mathcal{F}(F)(y) = \int_0^\infty 2 \cos(2\pi yx) F(x) dx$) :

$$\sum_{n \geq 1} \frac{f(x/n)}{n} - \int_0^{+\infty} \frac{f(1/t)}{t} dt \xrightarrow{\mathcal{F}} \sum_{m \geq 1} \frac{f(m/y)}{|y|} - \int_0^{+\infty} f(t) dt.$$

Le théorème (sous une hypothèse additionnelle sur f) est dû à Duffin et Weinberger [11] (1997). Sous la seule hypothèse (C) il fut retrouvé par

l'auteur dans [4, Thm 4.2]. Aussi sous la seule hypothèse (C), Duffin et Weinberger avaient déjà donné dans [10] (1991) un énoncé (voir ici plus loin 2.2.(2), page 536) qui exprime que les deux termes de (1.5) forment une paire de Fourier en un certain sens généralisé, plus « classique » que celui des distributions tempérées de Schwartz. Dans leurs articles [10] et [11] ils établissent aussi la validité ponctuelle de (1.5) au sens classique, sous certaines hypothèses additionnelles sur f . Nous obtiendrons plusieurs résultats de ce type, sous des hypothèses plus faibles, dont celui-ci :

THÉORÈME 1.4. — *Soit f une fonction mesurable (paire) vérifiant la condition*

$$(C) \quad \int_{\mathbb{R}} |f(t)| \left(1 + \frac{1}{|t|}\right) dt < \infty.$$

Soit $\xi \geq 0$ et soit $X > \xi$. On a, pour $\Lambda \rightarrow \infty$:

$$\begin{aligned} & \int_0^\Lambda 2 \cos(2\pi\xi x) \left(\sum_{n \geq 1} \frac{f(n/x)}{x} - \int_0^\infty f(u) du \right) dx \\ &= \int_0^X \frac{\sin(2\pi\Lambda(t-\xi))}{\pi(t-\xi)} \sum_{n \geq 1} \frac{f(t/n)}{n} dt - \int_0^\infty \frac{f(u)}{u} du + o_{\Lambda \rightarrow \infty}(1). \end{aligned}$$

Donc, la formule ponctuelle de co-Poisson :

$$\begin{aligned} & \int_0^{-\infty} 2 \cos(2\pi\xi x) \left(\sum_{n \geq 1} \frac{f(n/x)}{x} - \int_0^\infty f(u) du \right) dx \\ &= \sum_{n \geq 1} \frac{f(\xi/n)}{n} - \int_0^\infty \frac{f(u)}{u} du, \end{aligned}$$

vaut en $\xi > 0$ si et seulement si $\sum_{n \geq 1} \frac{f(\xi/n)}{n}$ converge et si ξ est un point de Dirichlet de la fonction localement intégrable définie presque partout $t \mapsto \sum_{n \geq 1} \frac{f(t/n)}{n}$. Ceci est toujours le cas de $\xi = 0$, la valeur de Dirichlet de $\sum_{n \geq 1} \frac{f(t/n)}{n}$ en $t = 0$ étant 0.

Dès 1945, la formule suivante, cousine de (1.5), était publiée par Duffin (la forme exacte dépend de la normalisation de \mathcal{F}) :

(1.6)

$$\begin{aligned} & \frac{f(2x)}{1/2} - \frac{f(2x/3)}{3/2} + \frac{f(2x/5)}{5/2} - \dots \\ & \xrightarrow{\mathcal{F}}_i \left(\frac{f(1/(2y))}{|y|} - \frac{f(3/(2y))}{|y|} + \frac{f(5/(2y))}{|y|} - \dots \right). \end{aligned}$$

Elle vaut pour f impaire, et l'on pourrait la déduire de l'identité de distributions impaires

$$\tilde{E} = iE \quad E = \sum_{n \in \mathbb{Z}} (-1)^{n-1} \delta_{n-\frac{1}{2}},$$

de la même façon que nous avons déduit ici (1.5) de $\tilde{D} = D$. Des généralisations de la formule de Duffin (1.6) furent établies par Weinberger dans sa thèse de 1950 [23]. La formule principale (1.5) n'apparaît semble-t-il que plus tard en 1991 ([10]).

Lorsque f est choisie de classe C^∞ à support compact (éloigné de l'origine), les équations (1.5) et (1.6) concernent des fonctions qui sont dans la classe de Schwartz \mathcal{S} (comme on le voit aisément grâce à ... la formule de Poisson!). De cette façon on obtient des paires de Fourier dans \mathcal{S} qui sont constantes (nulle, si l'on veut) dans un intervalle $] -a, a[$ avec $0 < a < 1$ arbitraire (avec (1.6) on ne peut faire mieux que $a < \frac{1}{2}$). Et si l'on modifie préalablement la distribution de Poisson D ou la variante E (ou une autre variante $\sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n \delta_n$ avec $(c_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ périodique en n), en annulant certains de ses Dirac comme dans la lettre de J.-P. Kahane, on obtient alors des exemples pour tout $a > 0$. Tacitement nous avons utilisé la remarque simple suivante :

Remarque simple : si f est nulle pour $0 < t < a$, alors la co-somme $\sum_{n \geq 1} f(t/n)/n$, et plus généralement les co-sommes $\sum_{n \geq 1} c_n f(t/n)/n$, sont également nulles pour $0 < t < a$.

Il est intéressant de remarquer que des sommes de ce type apparaissent dès l'article de Riemann (plus précisément, des sommes $\sum_{n \geq 1} \frac{c_n}{n} F(x^{\frac{1}{n}})$). Que les (co)-sommes $\sum_{n \geq 1} c_n \frac{f(t/n)}{n}$ aient un lien particulier avec la transformée de Fourier a été avancé, pour la première fois semble-t-il, par Duffin [9] et par Weinberger [23]. Ils appellent la formule (1.5) la *formule de Poisson dualisée* [10, 11]; comme il y a de multiples liens entre la formule de Poisson (1.4) et la formule (1.5), nous optons plutôt pour la terminologie *formule de co-Poisson*.

La « remarque simple » ci-dessus établit un lien entre les formules de Duffin-Weinberger et les espaces de de Branges-Rovnyak. Ce lien, et certaines constructions qui lui sont rattachées, furent mis en avant dans la conférence d'habilitation de l'auteur de décembre 2001 [4] (et, plus implicitement, dans son article antérieur [1]). Voir [4, 5, 3, 6] pour des développements liés à cette remarque.

Nous évoquons plus brièvement les résultats des troisième et quatrième chapitres de cet article :

1.4. Mellin et dzêta

Une formule de Müntz ([16]; [22, II.11]) rattache les sommes de Poisson à la fonction dzêta de Riemann via la transformation de Mellin; nous en donnerons une étude détaillée, en étendant fortement ses conditions de validité, en examinant certains aspects qui lui sont associés dans le contexte des distributions, et en donnant une modification permettant de l'exprimer dans un contexte de fonctions de carrés intégrables. Nous mettrons en évidence que l'équation fonctionnelle de la fonction dzêta s'exprime via la formule de co-Poisson de manière tout aussi naturelle que via la formule de Poisson; l'idée est de distinguer entre les deux formes de transformées de Mellin $\int_0^\infty f(t)t^{s-1} dt$ et $\int_0^\infty f(t)t^{-s} dt$, et donc d'espérer au moins deux interprétations de l'équation fonctionnelle: et effectivement si l'une est Poisson, alors l'autre sera co-Poisson. Il est intéressant de remarquer que les deux transformées de Mellin sont présentes dans l'article de Riemann.

1.5. Fonctions entières et méromorphes

Une dernière partie est consacrée aux distributions tempérées vérifiant la condition de support qui a été considérée par de Branges pour les fonctions de carrés intégrables. Nous établirons en particulier:

THÉORÈME 1.5. — Soit $a > 0$. Soit D une distribution tempérée paire non nulle qui s'annule sur $] - a, a[$. On peut donner un sens à $\widehat{D}(s) = \int_0^\infty D(t)t^{-s} dt$ comme fonction analytique de s pour $\text{Re}(s) \gg 1$. Si $\mathcal{F}(D)$ est à nouveau nulle dans $] - a, a[$ alors $\widehat{D}(s)$ est une fonction entière de s , qui a des zéros triviaux en $-2n$, $n \in \mathbb{N}$ et vérifie l'équation fonctionnelle

$$\pi^{-\frac{s}{2}} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \widehat{D}(s) = \pi^{-\frac{1-s}{2}} \Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right) \widehat{\mathcal{F}(D)}(1-s).$$

Elle a dans le secteur $|\arg(s - \frac{1}{2}) - \frac{\pi}{2}| < \epsilon$ ($0 < \epsilon < \frac{\pi}{2}$) un nombre de zéros de modules au plus T asymptotiquement équivalent à $\frac{T}{2\pi} \log(T)$, et dans $|\arg(s)| < \frac{\pi}{2} - \epsilon$ les zéros de modules au plus T sont en nombre $o(T)$.

Nous caractérisons les fonctions entières $F(s) = \widehat{D}(s)$ correspondantes:

THÉORÈME 1.6. — Les fonctions entières $F(s)$ de la forme $\widehat{D}(s)$ où D est une distribution tempérée nulle et de Fourier nulle dans un voisinage de l'origine sont les fonctions $F(s)$ qui sont $O(A^{\text{Re}(s)}(1 + |s|)^N)$ dans tout demi-plan $\text{Re}(s) \geq \sigma$, (pour $A > 0$ et $N \in \mathbb{N}$ a priori dépendant de σ), et telles que $\chi(s)F(1-s)$ soit aussi entière et avec la même propriété dans ces demi-plans (avec $\chi(s) = \pi^{s-\frac{1}{2}} \frac{\Gamma(\frac{1-s}{2})}{\Gamma(\frac{s}{2})}$).

Une condition de support plus générale est explicitée qui correspond à la possibilité pour $\widehat{D}(s)$ d'avoir un nombre fini de pôles, et nous décrivons alors la partie polaire de $\pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma(\frac{s}{2})\widehat{D}(s)$ en fonction de la distribution D .

Ces outils permettraient de suivre dans le détail tous les calculs qui dans [2] ont abouti à la définition de certaines distributions paires (et leurs analogues impaires) A_a (invariante par \mathcal{F}) et B_a (anti-invariante par \mathcal{F}) qui ont la propriété de support pour l'intervalle $] - a, a[$. Nous les évoquerons brièvement, mais une discussion plus approfondie nécessiterait un travail spécialement dédié à cet effet, trop indirectement lié à la formule de co-Poisson pour avoir trouvé sa place ici (voir aussi [3]). Nous concluons donc plutôt avec quelques exemples explicites amusants de fonctions de carrés intégrables avec la propriété de support.

2. Docteur Poisson et Mister Co

2.1. Des théorèmes de co-Poisson

Soit $f(x)$ une fonction paire mesurable. Posons :

$$(2.1a) \quad F(x) = \sum_{n \geq 1} \frac{f(n/x)}{|x|} - \int_0^\infty f(u) du$$

$$(2.1b) \quad K(x) = \sum_{n \geq 1} \frac{f(x/n)}{n} - \int_0^\infty \frac{f(1/u)}{u} du.$$

On pose aussi :

$$F(0) = - \int_0^\infty f(u) du \quad K(0) = - \int_0^\infty \frac{f(1/u)}{u} du.$$

Nous verrons que la somme dans F (resp. K) est presque partout absolument convergente dès que $\int_0^\infty |f(u)| du < \infty$ (resp. $\int_0^\infty \frac{|f(1/u)|}{u} du < \infty$). Remplacer f par $f(1/x)/|x|$ revient à interchanger F et K . La formation de K commute aux changements d'échelle, contrairement à la formation de F qui renverse les changements d'échelle. La fonction F représente l'écart entre une somme de Riemann et l'intégrale de f , et tend donc vers zéro pour $x \rightarrow \infty$ par exemple lorsque f est R-intégrable et à support compact. Citons dans ce contexte un résultat élémentaire (\mathcal{S} désigne la classe de Schwartz) :

LEMME 2.1. — Si $f \in \mathcal{S}$ et $f(0) = 0$ alors $F \in \mathcal{S}$.

En effet, on voit d'abord directement sur (2.1a) que F est C^∞ y-compris en $x = 0$. De plus la formule de Poisson (1.4) permet d'écrire $F(x) = \sum_{m \geq 1} \tilde{f}(mx)$ et donc d'obtenir la décroissance rapide de F pour $x \rightarrow \infty$. Si l'on veut que la somme $\sum_{n \geq 1} f(n/x)/|x|$ ait une chance d'être en règle générale de carré intégrable sur $[0, +\infty[$, il faut donc la modifier en F .

On utilisera souvent la condition suivante sur la fonction paire f :

$$(C) \quad \int_0^\infty |f(x)| \left(1 + \frac{1}{x}\right) dx < \infty.$$

THÉORÈME 2.2 (Duffin-Weinberger). — *Soit f une fonction paire mesurable vérifiant (C). On a :*

- (1) [10, Th. 1] *Les sommes dans F et K sont presque partout absolument convergentes et elles sont convergentes dans $L^1(0, \Lambda; dx)$ pour tout $\Lambda < \infty$.*
- (2) [10, Th. 1, éq. 3.8] *Les fonctions F et K sont une paire de Fourier en le sens généralisé :*

$$\begin{aligned} \int_0^\Lambda F(x) dx &= \int_0^{\rightarrow\infty} \frac{\sin(2\pi\Lambda t)}{\pi t} K(t) dt \\ \int_0^T K(t) dt &= \int_0^{\rightarrow\infty} \frac{\sin(2\pi Tx)}{\pi x} F(x) dx. \end{aligned}$$

- (3) [11, Lem. 2] *Si f est de variation bornée et si $\int_0^\infty (1+x)|df|(x) < \infty$ alors F et K sont une paire de Fourier au sens des distributions.*
- (4) [11, Th. 1] *Si f est C^1 , si f' est abs. cont. et si $\int_0^\infty |f''(x)| dx < \infty$ alors F est L^1 , K est partout définie et est continue, et*

$$\forall \xi \quad \int_0^\infty 2 \cos(2\pi\xi x) F(x) dx = K(\xi).$$

Nous allons montrer :

THÉORÈME 2.3. — *Soit f une fonction paire mesurable vérifiant (C). On a :*

- (1) *F et K sont tempérées en tant que distributions et sont une paire de Fourier en ce sens.*
- (2) *On a : $\int_0^{\rightarrow\infty} F(x) dx = \frac{1}{2} K(0)$.*
- (3) *Soit $\Lambda \geq 0$ et soit $\xi \geq 0$. On a :*

$$\begin{aligned} \int_0^\Lambda 2 \cos(2\pi\xi x) F(x) dx \\ = \int_0^{\rightarrow\infty} \left(\frac{\sin(2\pi\Lambda(t-\xi))}{\pi(t-\xi)} + \frac{\sin(2\pi\Lambda(t+\xi))}{\pi(t+\xi)} \right) K(t) dt. \end{aligned}$$

(4) Soit $\xi \geq 0$ et soit $X > \xi$. On a, pour $\Lambda \rightarrow \infty$:

$$\int_0^\Lambda 2 \cos(2\pi\xi x)F(x) dx = \int_0^X \frac{\sin(2\pi\Lambda(t-\xi))}{\pi(t-\xi)} \sum_{n \geq 1} \frac{f(t/n)}{n} dt - \int_0^\infty \frac{f(u)}{u} du + o(1).$$

Le point 2.3.(1) est énoncé par Duffin-Weinberger dans [11] sous une hypothèse plus forte sur f (cf. 2.2.(3)) ; il est prouvé sous la seule hypothèse (C) dans [4] (théorème 4.2.). Le point 2.3.(2) est établi à la fin de la démonstration du théorème 4.6 dans [4], avec un argument qui n'utilise en fait que (C). Le point 2.3.(3) est une extension du théorème principal [10, Th. 1] de Duffin-Weinberger cf. 2.2.(2). Finalement 2.3.(4) résout la question de la validité ponctuelle en un sens classique de la formule de co-Poisson, puisqu'il a comme corollaire immédiat :

COROLLAIRE 2.4. — Soit f une fonction paire mesurable vérifiant (C). L'intégrale impropre $\int_0^{\rightarrow\infty} 2 \cos(2\pi\xi x)F(x) dx$ existe si et seulement si ξ est un point de Dirichlet de la fonction (loc. intégrable) définie presque partout K , et sa valeur est alors la valeur de Dirichlet de K en ξ .

En effet, si ϕ est localement intégrable on dit que x_0 est un point de Dirichlet de ϕ si $L = \lim_{\Lambda \rightarrow \infty} \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} \frac{\sin(2\pi\Lambda(x-x_0))}{\pi(x-x_0)} \phi(x) dx$ existe ($\delta > 0$ fixé petit quelconque), et la valeur de Dirichlet de ϕ en x_0 est par définition L . Remarquons que par 2.3 le point $\xi = 0$ est toujours un point de Dirichlet de K (il s'agit là en fait d'un lemme que nous établirons préalablement à la preuve de 2.3). Comme corollaire, on obtient un critère, non restreint au cadre L^1 et à des fonctions continues, qui est suffisant pour la validité ponctuelle de la formule de co-Poisson sur tout un intervalle :

THÉORÈME 2.5. — Soit f une fonction paire mesurable vérifiant (C) et telle que, pour un certain $X > 0$, l'on ait :

- (1) f est de variation bornée sur $[0, X]$,
- (2) aux discontinuités dans $]0, X[$, f a la valeur moyenne.

Alors :

$$\forall \xi \in]0, X[\int_0^{\rightarrow\infty} 2 \cos(2\pi\xi x)F(x) dx = K(\xi).$$

Prouvons ce corollaire. Comme f a une variation totale finie sur $[0, X]$, elle a une limite en 0^+ , et cette limite doit être nulle à cause de (C). On peut donc aussi bien poser $f(0) = 0$. Soit μ la mesure complexe df de sorte que $f(t) = \mu([0, t] + \frac{1}{2}\mu(\{t\})$ pour $t < X$. Soit $|\mu|$ la mesure des variations

de μ . Soit $0 < t_1 < t_2 < X$ fixés et soit V_m , pour $m \geq 1$, la variation totale de $f(t/m)/m$ sur l'intervalle $[t_1, t_2]$. On a $V_m \leq |\mu|([t_1/m, t_2/m])/m$. Nous obtenons alors :

$$\sum_{m \geq 1} V_m \leq \int_{[0, t_2]} \sum_{t_1/u \leq m \leq t_2/u} \frac{1}{m} d|\mu|(u),$$

qui est

$$\leq C + \int_{[0, t_1/2]} \log \frac{t_2/u}{t_1/u - 1} d|\mu|(u) \leq C + \log(2t_2/t_1) |\mu|([0, t_1/2]) < \infty.$$

Nous savons par 2.2.(1) (voir lemme 2.6) que la série $\sum_m f(t/m)/m$ converge presque partout donc elle converge en au moins un point t_0 de $[t_1, t_2]$. La série $\sum_m (f(t/m)/m - f(t_0/m)/m)$ est uniformément de Cauchy donc elle converge ponctuellement partout et uniformément sur $[t_1, t_2]$ (qui est arbitraire). La fonction $\sum_m f(t/m)/m$ a sa variation totale sur $[t_1, t_2]$ bornée par $\sum_{m \geq 1} V_m$ qui est fini. Comme la série converge uniformément la règle de la valeur moyenne aux discontinuités est vérifiée. Par le critère de Jordan si une fonction ϕ est de variation bornée dans un voisinage d'un point ξ , alors ξ est un point de Dirichlet de ϕ et la valeur de Dirichlet $\phi_D(\xi)$ est $\frac{1}{2}(\phi(\xi+) + \phi(\xi-))$. Le critère de Jordan s'applique donc et le corollaire est démontré.

Un autre théorème assurant une validité ponctuelle de la formule de co-Poisson est donné dans la section 2.7.

2.2. Lemmes sur les sommes et les co-sommes

Ces lemmes serviront pour la démonstration de 2.3.

LEMME 2.6. — Soit $f \in L^1(0, \infty; dx)$. La série $\sum_{n \geq 1} \frac{f(n/x)}{x}$ est presque partout absolument convergente et est absolument convergente dans $L^1(0, \Lambda; dx)$ pour tout $\Lambda > 0$. Soit $k \in L^1(0, \infty; dx)$ décroissante (donc à valeurs positives ou nulles). On a :

$$\int_0^\infty \sum_{n \geq 1} \frac{|f(n/x)|}{x} k(x) dx \leq \int_0^\infty |f(x)| dx \int_0^\infty k(x) dx.$$

La convergence ponctuelle et en norme L^1 est un lemme de Duffin et Weinberger dans [10], que l'on peut voir comme une conséquence de l'inégalité intégrale, puisque l'on pourra y prendre pour k la fonction indicatrice de

l'intervalle $]0, \Lambda[$ par exemple. On utilisera aussi plus loin $k(x) = 1/(1+x^2)$. Par le théorème de la convergence monotone on a :

$$\int_0^\infty \sum_{n \geq 1} \frac{|f(n/x)|}{x} k(x) dx = \int_0^\infty \sum_{n \geq 1} |f(x)| \frac{k(n/x)}{x} dx.$$

Or, $\forall x > 0 \sum_{n \geq 1} \frac{k(n/x)}{x} \leq \int_0^\infty k(x) dx$. Le lemme est prouvé.

LEMME 2.7. — Soit $g \in L^1(0, \infty; dx)$. La série $\sum_{m \geq 1} g(mx)$ est absolument convergente dans $L^1(0, \infty; \frac{dx}{1+(\log x)^2})$, donc aussi presque partout et dans $L^1(a, A; dx)$ pour tout $0 < a < A < \infty$.

On a en effet :

$$\int_0^\infty \sum_{m \geq 1} |g(mx)| \frac{dx}{1+(\log x)^2} = \int_0^\infty \sum_{m \geq 1} \frac{|g(m/x)|}{x} \frac{dx}{x(1+(\log x)^2)},$$

et l'on applique le lemme précédent (la fonction $x^{-1}(1+(\log x)^2)^{-1}$ n'est pas décroissante sur tout $]0, \infty[$ mais on peut certainement la majorer par une fonction décroissante et intégrable).

LEMME 2.8. — Soit $X > 0$ et soit $f \in L^1(0, X; \frac{dt}{t})$. On a :

$$\lim_{\Lambda \rightarrow \infty} \int_0^X \frac{\sin(2\pi\Lambda t)}{\pi t} \sum_{m \geq 1} \frac{f(t/m)}{m} dt = 0.$$

On peut poser $f \equiv 0$ pour $t > X$. On a $f(t/m)/m = f_1(m/t)/t$ avec $f_1(t) = f(1/t)/t$, donc $f_1 \in L^1(0, \infty; dt)$. Par 2.6 $\sum_{m \geq 1} \frac{f(t/m)}{m}$ converge absolument presque partout et dans $L^1(0, X; dt)$. Le lemme est certainement vrai si f est identiquement nulle sur $]0, \epsilon[$, $\epsilon > 0$, par le lemme de Riemann-Lebesgue ; de plus il existe une constante absolue telle que :

$$\left| \int_0^X \frac{\sin(2\pi\Lambda t)}{\pi t} \sum_{m \geq 1} \frac{f(t/m)}{m} dt \right| \leq C \int_0^X \frac{|f(u)|}{u} du.$$

En effet,

$$\begin{aligned} \int_0^X \frac{\sin(2\pi\Lambda t)}{\pi t} \sum_{m \geq 1} \frac{f(t/m)}{m} dt &= \sum_{m \geq 1} \int_0^X \frac{\sin(2\pi\Lambda t)}{\pi t} \frac{f(t/m)}{m} dt \\ &= \sum_{m \geq 1} \int_0^{X/m} \frac{\sin(2\pi\Lambda mu)}{\pi m} f(u) \frac{du}{u} \\ &= \int_0^X \sum_{m \geq 1} \mathbf{1}_{[0, X]}(mu) \frac{\sin(2\pi\Lambda mu)}{\pi m} f(u) \frac{du}{u}. \end{aligned}$$

On a utilisé le théorème de la convergence dominée et le fait bien connu que les sommes partielles $\sum_{1 \leq m \leq M} \sin(2\pi mv)/\pi m$ sont bornées uniformément en $M \in \mathbb{N}$, $v \in \mathbb{R}$. Cette borne absolue C est celle qui apparaît alors dans l'inégalité plus haut qui est ainsi prouvée. En combinant ces deux observations on obtient :

$$\forall \epsilon > 0 \quad \limsup_{\Lambda \rightarrow \infty} \left| \int_0^X \frac{\sin(2\pi \Lambda t)}{\pi t} \sum_{m \geq 1} \frac{f(t/m)}{m} dt \right| \leq C \int_0^\epsilon \frac{|f(u)|}{u} du.$$

Comme $\epsilon > 0$ est arbitraire le lemme est démontré.

2.3. Preuve du théorème 2.3

PROPOSITION 2.9. — Soient ϕ et ψ deux fonctions paires continues et intégrables sur \mathbb{R} et qui sont transformées de Fourier l'une de l'autre. On suppose de plus qu'il existe une fonction $k : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ décroissante et intégrable qui majore à la fois ϕ et ψ . Soit f une fonction paire mesurable vérifiant (C). Alors on a l'égalité intégrale de co-Poisson :

$$\int_0^\infty \phi(x)F(x) dx = \int_0^\infty \psi(y)K(y) dy,$$

où F et K sont définies selon (2.1a) et (2.1b).

Les deux intégrales sont absolument convergentes par le lemme 2.6. Le même lemme justifie :

$$\int_0^\infty \phi(x) \sum_{n \geq 1} \frac{f(n/x)}{x} dx = \int_0^\infty \sum_{n \geq 1} \frac{\phi(n/x)}{x} f(x) dx.$$

La formule de Poisson :

$$\phi(0) + 2 \sum_{n \geq 1} \phi(n) = \psi(0) + 2 \sum_{m \geq 1} \psi(m),$$

vaut. En effet $\sum_{n \geq 0} \phi(n + \alpha)$ est uniformément absolument convergente pour $0 \leq \alpha \leq 1$ puisque dominée par $\sum_{n \geq 0} k(n)$. Il en est de même de $\sum_{n < 0} \phi(n + \alpha)$. Donc $A(\alpha) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \phi(n + \alpha)$ est une fonction continue 1-périodique. Ses coefficients de Fourier sont les $\psi(-m)$, $m \in \mathbb{Z}$, qui forment une suite de l^1 . La fonction continue $B(\alpha) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} \psi(-m) \exp(2\pi i m \alpha)$ est donc partout égale à $A(\alpha)$, en particulier en $\alpha = 0$. Le même raisonnement vaut pour $\phi(\cdot/x)/x$ et $\psi(x \cdot)$, $x > 0$, et permet donc d'écrire :

$$\int_0^\infty \sum_{n \geq 1} \frac{\phi(n/x)}{x} f(x) dx = \int_0^\infty \left(\sum_{m \geq 1} \psi(mx) - \frac{\phi(0)}{2x} + \frac{1}{2} \psi(0) \right) f(x) dx,$$

puis en utilisant $\phi(0) = 2 \int_0^\infty \psi(u) du$, $\psi(0) = 2 \int_0^\infty \phi(t) dt$, et un changement de variable $x = 1/y$:

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty \phi(x) \left(\sum_{n \geq 1} \frac{f(n/x)}{x} - \int_0^\infty f(t) dt \right) dx \\ &= \int_0^\infty \left(\sum_{n \geq 1} \frac{\phi(n/x)}{x} - \int_0^\infty \phi(t) dt \right) f(x) dx \\ &= \int_0^\infty \left(\sum_{m \geq 1} \psi(mx) - \frac{\phi(0)}{2x} \right) f(x) dx \\ &= \int_0^\infty \left(\sum_{m \geq 1} \frac{\psi(m/y)}{y} - \int_0^\infty \psi(u) du \right) \frac{f(1/y)}{y} dy. \end{aligned}$$

La dernière ligne donne alors par les mêmes calculs sur ψ et $f(1/y)/y$ que précédemment pour ϕ et f :

$$= \int_0^\infty \psi(y) \left(\sum_{m \geq 1} \frac{f(y/m)}{m} - \int_0^\infty \frac{f(1/u)}{u} du \right) dy .$$

Ceci conclut la preuve de la Proposition. Les calculs sont exactement semblables à ceux de Duffin-Weinberger dans [11] (ou aux calculs menant à [4, Th. 4.2]), seules les hypothèses (et notations) diffèrent.

En particulier, cela établit le point (1) du théorème 2.3 (cf. aussi le Lemma 4.1 de [4]). Nous établissons maintenant le point (4). Soit $\xi \geq 0$ fixé et soit $\Lambda > 0$. Considérons la fonction continue

$$\phi(x) = \begin{cases} 2 \cos(2\pi\xi x) - 2 \cos(2\pi\Lambda\xi) & |x| \leq \Lambda, \\ 0 & |x| > \Lambda. \end{cases}$$

Sa transformée de Fourier $\psi(y)$ est donnée par

$$(2.2) \quad \psi(y) = \frac{\sin(2\pi\Lambda(y - \xi))}{\pi(y - \xi)} + \frac{\sin(2\pi\Lambda(y + \xi))}{\pi(y + \xi)} - 2 \cos(2\pi\Lambda\xi) \frac{\sin(2\pi\Lambda y)}{\pi y} .$$

On peut la réécrire sous la forme

$$\begin{aligned} \psi(y) &= \sin(2\pi\Lambda y) \cos(2\pi\Lambda\xi) \left\{ \frac{1}{\pi(y - \xi)} + \frac{1}{\pi(y + \xi)} - \frac{2}{\pi y} \right\} \\ &\quad + \cos(2\pi\Lambda y) \sin(2\pi\Lambda\xi) \left\{ \frac{1}{\pi(y + \xi)} - \frac{1}{\pi(y - \xi)} \right\} , \end{aligned}$$

qui montre qu'elle est elle aussi L^1 , car en fait majorée par un multiple (dépendant de ξ et de Λ) de $1/(1+y^2)$. Les hypothèses de la proposition 2.9

s'appliquent. Ainsi, avec $X > \xi$:

$$(2.3) \quad J_\xi(\Lambda) := \int_0^\Lambda 2 \cos(2\pi\xi x) F(x) dx = 2 \cos(2\pi\Lambda\xi) \int_0^\Lambda F(x) dx \\ + \int_0^X \psi(y) K(y) dy + \int_X^\infty \psi(y) K(y) dy.$$

Le dernier terme est $o(1)$ lorsque $\Lambda \rightarrow \infty$ puisque $\int_0^\infty |K(y)| \frac{dy}{1+y^2} < \infty$, et que l'on applique le lemme de Riemann-Lebesgue, compte tenu de l'expression ci-dessus pour $\psi(y)$. On a de plus :

$$\int_0^X \psi(y) K(y) dy = \int_0^X \psi(y) \sum_{m \geq 1} \frac{f(y/m)}{m} dy - \int_0^X \psi(y) dy \int_0^\infty \frac{f(1/u)}{u} du.$$

Compte tenu de (2.2), on a :

$$\int_0^X \psi(y) dy = \int_{-X}^X \frac{\sin(2\pi\Lambda(y-\xi))}{\pi(y-\xi)} dy - \cos(2\pi\Lambda\xi) \int_{-X}^X \frac{\sin(2\pi\Lambda y)}{\pi y} dy \\ = 1 - \cos(2\pi\Lambda\xi) + o(1),$$

et ainsi :

$$J_\xi(\Lambda) = 2 \cos(2\pi\Lambda\xi) \left(\int_0^\Lambda F(x) dx + \frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{f(1/u)}{u} du \right) - \int_0^\infty \frac{f(1/u)}{u} du \\ + \int_0^X \psi(y) \sum_{m \geq 1} \frac{f(y/m)}{m} dy + o(1).$$

La dernière intégrale est, par l'expression (2.2) de $\psi(y)$, le lemme de Riemann-Lebesgue et le lemme 2.8 :

$$\int_0^X \psi(y) \sum_{m \geq 1} \frac{f(y/m)}{m} dy = \int_0^X \frac{\sin(2\pi\Lambda(y-\xi))}{\pi(y-\xi)} \sum_{m \geq 1} \frac{f(y/m)}{m} dy + o(1).$$

En combinant tous ces éléments on obtient :

$$J_\xi(\Lambda) = 2 \cos(2\pi\xi\Lambda) \left(\int_0^\Lambda F(x) dx + \frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{f(1/u)}{u} du \right) - \int_0^\infty \frac{f(1/u)}{u} du \\ + \int_0^X \frac{\sin(2\pi\Lambda(y-\xi))}{\pi(y-\xi)} \sum_{m \geq 1} \frac{f(y/m)}{m} dy + o(1).$$

Il ne reste plus qu'à évoquer

$$(E) \quad \lim_{\Lambda \rightarrow \infty} \int_0^\Lambda F(x) dx = -\frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{f(1/u)}{u} du,$$

pour que la preuve de 2.3.(4) soit alors complète.

L'équation (E), c'est-à-dire 2.3.(2), est établie dans [4], à la fin de la démonstration du théorème 4.6. Pour la commodité du lecteur nous reproduisons ici la preuve qui n'utilise que la seule condition (C) sur f . Notons $g(t) = f(1/t)/t$.

Tout d'abord

$$\int_0^\Lambda \sum_{n \geq 1} \frac{g(t/n)}{n} dt = \sum_{n \geq 1} \int_0^{\Lambda/n} g(t) dt = \int_0^\infty \left[\frac{\Lambda}{t} \right] g(t) dt,$$

donc

$$\begin{aligned} \int_0^\Lambda F(t) dt &= \int_0^\Lambda \left(\sum_{n \geq 1} \frac{g(t/n)}{n} - \int_0^\infty \frac{g(u)}{u} du \right) dt \\ &= - \int_0^\infty \left\{ \frac{\Lambda}{t} \right\} g(t) dt = - \int_0^\infty \{ \Lambda v \} h(v) dv, \end{aligned}$$

avec $h(v) = g(1/v)/v^2 = f(v)/v$ appartenant à $L^1(0, +\infty; dv)$. Il est clair que

$$0 \leq A \leq B \quad \Rightarrow \quad \lim_{\Lambda \rightarrow \infty} \int_0^\infty \{ \Lambda v \} \mathbf{1}_{A \leq v \leq B}(v) dv = \frac{B - A}{2}$$

donc par l'argument usuel de densité dans la preuve standard du lemme de Riemann-Lebesgue on prouve

$$\lim_{\Lambda \rightarrow \infty} \int_0^\infty \{ \Lambda v \} h(v) dv = \frac{1}{2} \int_0^\infty h(v) dv$$

ce qui complète la preuve de 2.3.(2) et donc de 2.3.(4).

Venons-en à 2.3.(3). Nous avons par (2.3) :

$$\int_0^\Lambda 2 \cos(2\pi \xi x) F(x) dx = 2 \cos(2\pi \Lambda \xi) \int_0^\Lambda F(x) dx + \int_0^\infty \psi(y) K(y) dy.$$

Par le Théorème de Duffin et Weinberger 2.2.(2) ([10]), on a :

$$\int_0^\Lambda F(x) dx = \int_0^{\rightarrow \infty} \frac{\sin(2\pi \Lambda y)}{\pi y} K(y) dy,$$

donc :

$$\int_0^\Lambda 2 \cos(2\pi \xi x) F(x) dx = \int_0^{\rightarrow \infty} \left(\psi(y) + 2 \cos(2\pi \Lambda \xi) \frac{\sin(2\pi \Lambda y)}{\pi y} \right) K(y) dy,$$

et finalement par (2.2) :

$$\begin{aligned} \int_0^\Lambda 2 \cos(2\pi \xi x) F(x) dx &= \int_0^{\rightarrow \infty} \left(\frac{\sin(2\pi \Lambda(y - \xi))}{\pi(y - \xi)} + \frac{\sin(2\pi \Lambda(y + \xi))}{\pi(y + \xi)} \right) K(y) dy. \end{aligned}$$

Remarque 2.10. — Dans la preuve de 2.3.(4) nous nous sommes arrangé par la définition spéciale de $\phi(x)$ pour n'avoir que des intégrales absolument convergentes ce qui nous a permis de faire appel à la proposition générale 2.9. On peut procéder plus directement en définissant $\phi_1(x) = 2 \cos(2\pi\xi x)$ pour $|x| < \Lambda$, $\phi_1(\pm\Lambda) = \cos(2\pi\Lambda\xi)$, $\phi_1(x) = 0$ pour $|x| > \Lambda$. Soit alors $\psi_1(y)$ sa transformée de Fourier. La fonction $\phi_1(\cdot/x)/x$ ($x > 0$) est intégrable et de variation bornée et vérifie la règle de la valeur moyenne aux discontinuités, on peut donc lui appliquer le Théorème de Poisson 45 de Titchmarsh [21]. Pour poursuivre les calculs et justifier les interversions de sommes et d'intégrales on aura besoin d'établir que les sommes partielles $\sum_{1 \leq m \leq M} y\psi_1(my)$ sont bornées uniformément en M et en y (pour Λ et ξ fixés). On se ramène ensuite aux mêmes considérations que dans la preuve exposée ici. Les détails sont laissés au lecteur intéressé.

2.4. Un théorème de Poisson presque sûr

Une conséquence intéressante de la formule de co-Poisson est le théorème de Poisson presque sûr :

THÉORÈME 2.11. — *Soient ϕ et ψ deux fonctions paires continues et intégrables qui sont transformées de Fourier l'une de l'autre. Alors, pour presque tout $x > 0$:*

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{\phi(n/x)}{|x|} = \sum_{m \in \mathbb{Z}} \psi(mx),$$

avec des séries absolument convergentes.

Nous savons déjà par les lemmes 2.6 et 2.7 que les séries sont presque partout absolument convergentes et aussi dans $L^1(a, A; dx)$ pour tout $0 < a < A < \infty$. Soit f une fonction paire infiniment dérivable avec son support (pour $x > 0$) dans $[a, A]$, $0 < a < A < \infty$. On a :

$$\int_0^\infty |\phi(x)| \sum_{n \geq 1} \frac{|f(n/x)|}{x} dx < \infty$$

$$\int_0^\infty |\psi(x)| \sum_{m \geq 1} \frac{|f(x/m)|}{m} dx < \infty,$$

puisque les sommes impliquant f sont bornées. Ainsi le théorème de la convergence monotone implique :

$$\int_0^\infty \phi(x) \sum_{n \geq 1} \frac{f(n/x)}{x} dx = \int_0^\infty \sum_{n \geq 1} \frac{\phi(n/x)}{x} f(x) dx$$

$$\int_0^\infty \psi(x) \sum_{m \geq 1} \frac{f(x/m)}{m} dx = \int_0^\infty \sum_{m \geq 1} \psi(mx) f(x) dx.$$

Soient F et K définies selon (2.1a) et (2.1b). Ce sont des fonctions de Schwartz qui sont transformées de Fourier l'une de l'autre, par la formule de co-Poisson. On a donc :

$$\int_0^\infty \phi(x) F(x) dx = \int_0^\infty \psi(x) K(x) dx,$$

que l'on peut écrire compte tenu des équations précédentes selon :

$$\int_0^\infty \sum_{n \geq 1} \frac{\phi(n/x)}{x} f(x) dx - \int_0^\infty \phi(x) dx \int_0^\infty f(x) dx$$

$$= \int_0^\infty \sum_{m \geq 1} \psi(mx) f(x) dx - \int_0^\infty \psi(x) dx \int_0^\infty \frac{f(x)}{x} dx,$$

puis finalement, puisque $\int_0^\infty \phi(x) dx = \frac{\psi(0)}{2}$, $\int_0^\infty \psi(x) dx = \frac{\phi(0)}{2}$:

$$\int_a^A \left(\sum_{n \geq 1} \frac{\phi(n/x)}{x} + \frac{\phi(0)}{2x} - \sum_{m \geq 1} \psi(mx) - \frac{1}{2} \psi(0) \right) f(x) dx = 0.$$

Cela conclut la preuve du théorème.

2.5. Formule intégrale de co-Poisson

Nous allons maintenant utiliser ce Théorème de Poisson (dédit de la formule de co-Poisson) pour prouver... la formule de co-Poisson !

THÉORÈME 2.12. — *Soit f une fonction paire mesurable vérifiant :*

$$(C) \quad \int_0^\infty |f(x)| \left(1 + \frac{1}{x} \right) dx < \infty.$$

Soient ϕ et ψ deux fonctions intégrables paires qui sont transformées de Fourier l'une de l'autre. Si :

$$\int_0^\infty |\phi(x)| \sum_{n \geq 1} \frac{|f(n/x)|}{x} dx < \infty \text{ ou } \int_0^\infty \sum_{n \geq 1} \frac{|\phi(n/x)|}{x} |f(x)| dx < \infty$$

et si $\int_0^\infty |\psi(x)| \sum_{n \geq 1} \frac{|f(x/n)|}{n} dx < \infty$ ou $\int_0^\infty \sum_{n \geq 1} |\psi(n/x)| |f(x)| dx < \infty$,

alors la formule intégrale de co-Poisson

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty \phi(x) \left(\sum_{n \geq 1} \frac{f(n/x)}{x} - \int_0^\infty f(u) du \right) dx \\ &= \int_0^\infty \psi(x) \left(\sum_{n \geq 1} \frac{f(x/n)}{n} - \int_0^\infty \frac{f(1/u)}{u} du \right) dx, \end{aligned}$$

est valable (avec des intégrales absolument convergentes).

Remarque 2.13. — Par le théorème de la convergence monotone les conditions ci-dessus séparées par des « ou » sont équivalentes et impliquent la convergence absolue des intégrales de la formule intégrale de co-Poisson. Elles seront vérifiées si, par exemple, soit $f(x)$ et $f(1/x)/x$, soit $\phi(x)$ et $\psi(x)$ sont toutes deux majorées par une fonction k décroissante et intégrable sur $]0, \infty[$ (ce dernier cas est déjà traité par 2.9).

En ce qui concerne la démonstration du théorème, on peut supposer que ϕ et ψ sont choisies continues dans leur classe d'équivalence. Il suffira ensuite de suivre à l'identique la preuve de la proposition 2.9, et d'invoquer au moment opportun le théorème de Poisson presque sûr 2.11.

2.6. Sommes de Riemann

Le théorème de Poisson presque sûr permet aussi d'obtenir certains résultats sur le comportement de sommes de Riemann pour des fonctions intégrables.

PROPOSITION 2.14. — Soit ϕ une fonction paire intégrable continue, dont la transformée de Fourier ψ vérifie

$$\int_2^\infty \log(y) |\psi(y)| dy < \infty.$$

Soit :

$$A(x) = \sum_{n \geq 1} \frac{\phi(n/x)}{x} - \int_0^\infty \phi(t) dt,$$

qui est définie pour presque tout $x > 0$. On a alors :

$$\int^\infty \left| A(x) + \frac{1}{2} \frac{\phi(0)}{x} \right| dx < \infty.$$

En effet, posons $B(x) = \sum_{m \geq 1} \psi(mx)$. On vérifie aisément

$$\int_2^\infty \log(x) |\psi(x)| dx < \infty \quad \Rightarrow \quad \int_2^\infty |B(x)| dx < \infty,$$

or, par 2.11, on sait que pour presque tout $x > 0$ on a

$$A(x) + \frac{1}{2} \frac{\phi(0)}{x} = B(x)$$

ce qui complète la preuve.

Sous une hypothèse plus faible, nous obtenons tout de même à nouveau un résultat qui montre que $A(x)$ tend vers zéro en un sens moyen lorsque x tend vers plus l'infini :

PROPOSITION 2.15. — Soit ϕ une fonction paire continue intégrable dont la transformée de Fourier ψ est aussi intégrable. Soit :

$$A(x) = \sum_{n \geq 1} \frac{\phi(n/x)}{x} - \int_0^\infty \phi(t) dt,$$

qui est défini pour presque tout $x > 0$. On a :

$$\forall \epsilon > 0 \quad \int^\infty |A(x)| \frac{dx}{\log x (\log \log x)^{1+\epsilon}} < \infty,$$

ce qui implique, pour $\lambda \rightarrow \infty$:

$$\int_\lambda^{\lambda^2} |A(x)| dx = o(\log \lambda (\log \log \lambda)^{1+\epsilon}),$$

et aussi certainement :

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{1}{\lambda} \int_\lambda^{2\lambda} |A(x)| dx = 0.$$

Nous avons à nouveau presque partout, par la formule de Poisson presque sûr :

$$A(x) + \frac{1}{2} \frac{\phi(0)}{x} = \sum_{m \geq 1} \psi(mx)$$

et il suffira donc de s'intéresser à $C(x) = \sum_{m \geq 1} |\psi(mx)|$. Définissons

$$k(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} \frac{1}{|\log x|} \left(\frac{1}{|\log |\log x|} \right)^{1+\epsilon} & (0 < x \leq x_0) \\ 0 & (x > x_0), \end{cases}$$

où $x_0 > 0$ est choisi suffisamment petit de sorte que k est décroissante. Alors :

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \frac{C(1/x)}{x} k(x) dx &= \int_0^\infty |\psi(x)| \sum_{m \geq 1} \frac{k(m/x)}{x} dx \\ &\leq \int_0^\infty |\psi(x)| dx \int_0^\infty k(x) dx < \infty. \end{aligned}$$

Ceci donne

$$\int_0^\infty C(x) \frac{dx}{\log x (\log \log x)^{1+\epsilon}} < \infty,$$

qui établit l'affirmation principale, et les deux suivantes en sont de directs corollaires.

2.7. Un autre théorème de co-Poisson ponctuel

Le théorème suivant a le théorème 2.2.(4) de Duffin-Weinberger comme corollaire.

THÉORÈME 2.16. — Soit f une fonction mesurable vérifiant

$$(C) \quad \int_0^\infty \left(1 + \frac{1}{x}\right) |f(x)| dx < \infty.$$

On suppose aussi que sa transformée en cosinus

$$\tilde{f}(y) = \int_0^\infty 2 \cos(2\pi xy) f(x) dx$$

a la propriété

$$\int_0^\infty \log(y) |\tilde{f}(y)| dy < \infty.$$

En particulier \tilde{f} est L^1 et f est essentiellement continue, donc on la supposera continue. Sous ces hypothèses, la fonction

$$F(x) = \sum_{n \geq 1} \frac{f(n/x)}{x} - \int_0^\infty f(x) dx,$$

qui est définie pour presque tout $x > 0$, a la propriété

$$F \in L^1(0, \infty; dx),$$

la série $\sum_{m \geq 1} \frac{f(\xi/m)}{m}$ converge uniformément sur tout intervalle $[0, X]$, et l'on a la formule de co-Poisson ponctuelle :

$$\forall \xi \geq 0 \quad \int_0^\infty 2 \cos(2\pi \xi x) F(x) dx = \sum_{m \geq 1} \frac{f(\xi/m)}{m} - \int_0^\infty \frac{f(u)}{u} du.$$

On notera que par (C) la fonction continue f vérifie $f(0) = 0$ et que l'intégrabilité de F résulte alors de la proposition 2.14. Nous savons que la formule de co-Poisson vaut au sens des distributions. Donc il suffira de prouver que la série $\sum_{m \geq 1} \frac{f(\xi/m)}{m}$ converge uniformément sur $[0, X]$, car sa somme sera une fonction continue égale presque partout, donc partout, à la transformée en cosinus de F . Compte tenu de $f(0) = 0$, on peut écrire :

$$\frac{f(\xi/m)}{m} = \int_0^\infty 2 \cos(2\pi \xi y) \tilde{f}(my) dy = \int_0^\infty 2(\cos(2\pi \xi y) - 1) \tilde{f}(my) dy.$$

De l'hypothèse $\int_0^\infty \log(y) |\tilde{f}(y)| dy < \infty$, il résulte :

$$\sum_{m \geq 1} \int_1^\infty |\tilde{f}(my)| dy < \infty$$

et il suffit donc d'examiner la série

$$\sum_{m \geq 1} \int_0^1 2(1 - \cos(2\pi \xi y)) |\tilde{f}(my)| dy,$$

qui est majorée par

$$\sum_{m \geq 1} \int_0^1 4\pi \xi y |\tilde{f}(my)| dy.$$

Or, par le lemme 2.7 on a certainement

$$\tilde{f} \in L^1 \quad \Rightarrow \quad \int_0^\infty \sum_{m \geq 1} |\tilde{f}(my)| \frac{dy}{y + \frac{1}{y}} < \infty,$$

ce qui implique la convergence de la série précédente et complète la démonstration du théorème 2.16.

3. Études sur une formule de Müntz

3.1. Dzêta et Mellin

Dans son article, Riemann multiplie $\zeta(s)$ par $\Gamma(s)$ ou par $\pi^{-s/2} \Gamma(s/2)$ pour obtenir des expressions intégrales permettant d'établir le prolongement analytique et l'équation fonctionnelle. On peut adopter la perspective

suivant laquelle c'est $\zeta(s)$ qui multiplie $\Gamma(s)$ ou $\pi^{-s/2}\Gamma(s/2)$, elles-mêmes des intégrales, et que c'est cette multiplication par $\zeta(s)$ qui a un effet sur les quantités intégrées. Ce point de vue est donc un point de vue opératoire sur l'action de $\zeta(s)$. Dans les deux cas cités les intégrales sont des transformées de Mellin *gauches* $\int_0^\infty f(x)x^{s-1} dx$. On trouve alors que l'action de $\zeta(s)$ est celle d'une somme $\sum f(nx)$. Mais dans d'autres cas, les intégrales sont plus naturellement exprimées par des transformées de Mellin *droites* $\int_0^\infty f(x)x^{-s} dx$. Alors, l'action de $\zeta(s)$ est celle d'une co-somme $\sum f(x/n)/n$. Il y a donc la possibilité, au moins, de deux traductions de l'équation fonctionnelle via l'interprétation opératoire de la multiplication par $\zeta(s)$. Et effectivement, pour la transformée de Mellin gauche, on trouve que cette traduction est la formule de Poisson, tandis que pour la transformée de Mellin droite on trouve la formule de co-Poisson.

Pour correctement expliquer ce qui précède il faut préciser un point important. La formule

$$(3.1) \quad \int_0^\infty \sum_{n \geq 1} f(nx) x^{s-1} dx = \zeta(s) \int_0^\infty f(x) x^{s-1} dx,$$

pour $\text{Re}(s) = \sigma$, $\int_0^\infty |f(x)|x^{\sigma-1} dx < \infty$, ne vaut (en général) que pour $\sigma > 1$ (et est justifiée par le théorème de Fubini-Tonelli). Si l'on veut interpréter opératoirement l'équation fonctionnelle il est indispensable que l'opération $s \rightarrow 1-s$ soit licite. Il nous faut donc une version de (3.1) qui soit valable pour $0 < \sigma < 1$ (ou pour $\sigma = \frac{1}{2}$). Il semble d'après Titchmarsh [22, II.11] que c'est Müntz [16] qui le premier a donné la formule. Voici le Théorème de Müntz, tel qu'on le trouve dans le traité de Titchmarsh :

THÉORÈME 3.1 (Müntz [16] [22, II.11]). — *Soit f une fonction de classe C^1 sur $[0, \infty[$ qui est $O(x^{-\alpha})$ pour $x \rightarrow \infty$ et telle que aussi $f'(x) = O(x^{-\beta})$, avec $\alpha > 1$, $\beta > 1$. On a alors :*

$$(3.2) \quad \int_0^\infty \left(\sum_{n \geq 1} f(nx) - \frac{\int_0^\infty f(t) dt}{x} \right) x^{s-1} dx = \zeta(s) \int_0^\infty f(x) x^{s-1} dx,$$

pour $0 < \text{Re}(s) < 1$.

Nous appellerons

$$(3.3) \quad A_f(x) = \sum_{n \geq 1} f(nx) - \frac{\int_0^\infty f(t) dt}{x}$$

la sommation de Poisson (Müntz)-modifiée de f . Plusieurs démonstrations de l'équation fonctionnelle sont obtenues dans [22] à partir de la formule

de Müntz, en choisissant f de sorte que A_f ait des propriétés spéciales, comme par exemple d'être invariante sous la transformée en sinus, ou sous la transformation $A_f(x) \rightarrow A_f(1/x)/x$.

Avant toute chose, faisons la remarque suivante : le changement de variable $x \rightarrow 1/x$ transforme (3.2) en la formule équivalente :

$$\int_0^\infty \left(\sum_{n \geq 1} \frac{f(n/x)}{x} - \int_0^\infty f(t) dt \right) x^{-s} dx = \zeta(s) \int_0^\infty f(x)x^{s-1} dx,$$

puis en remplaçant $f(x)$ par $f(1/x)/x$ on obtient la formule de co-Müntz : (3.4)

$$\int_0^\infty \left(\sum_{n \geq 1} \frac{f(x/n)}{n} - \int_0^\infty \frac{f(1/t)}{t} dt \right) x^{-s} dx = \zeta(s) \int_0^\infty f(x)x^{-s} dx.$$

Ceci met en évidence que si l'on utilise la transformée de Mellin droite, la multiplication par $\zeta(s)$ est associée aux *co-sommes*.

Que ce soit pour Mellin-droit ou pour Mellin-gauche, la droite $\text{Re}(s) = \frac{1}{2}$ est spéciale du point de vue Hilbertien : les applications $f(x) \mapsto M_g(f)(s) = \int_0^\infty f(x)x^{s-1} dx$ et $f(x) \mapsto M_d(f)(s) = \int_0^\infty f(x)x^{-s} dx$ sont isométriques de $L^2(0, \infty; dx)$ sur $L^2(s = \frac{1}{2} + i\tau; \frac{d\tau}{2\pi})$. Supposons que la fonction paire f de carré intégrable soit sa propre transformée de Fourier. Comment cela se traduit-il pour $M_d(f)$ et $M_g(f)$?

Soit $\Gamma = \mathcal{F}I$, avec ici \mathcal{F} la transformation en cosinus, et $I : f(x) \mapsto f(1/x)/x$. L'opérateur Γ est unitaire sur $L^2(0, \infty; dx)$ et il commute aux changements d'échelle. Il est donc diagonalisé par M_d (ou M_g), qui n'est pas autre chose que la transformation de Fourier multiplicative (et l'on sait bien que les opérateurs sur $L^2(-\infty, +\infty; du)$ qui commutent aux translations sont diagonalisés par la transformation de Fourier additive). Donc il existe une fonction mesurable $\chi(s)$ sur la droite critique, de module 1 presque partout, et telle que :

$$\forall f \in L^2(0, \infty; dx) \quad \text{Re}(s) = \frac{1}{2} \Rightarrow M_d(\Gamma(f))(s) = \chi(s)M_d(f)(s) \text{ p.p.},$$

soit encore, en remplaçant f (considérée paire) par If :

$$\forall f \in L^2(0, \infty; dx) \quad \text{Re}(s) = \frac{1}{2} \Rightarrow M_d(\tilde{f})(s) = \chi(s)M_d(f)(1-s) \text{ p.p.}$$

On identifie χ en prenant par exemple $f(x) = \exp(-\pi x^2)$. On trouve ainsi :

$$(3.5) \quad \forall f \quad \pi^{-\frac{s}{2}} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) M_d(\tilde{f})(s) = \pi^{-\frac{1-s}{2}} \Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right) M_d(f)(1-s).$$

Donc :

On a l'égalité $f = \tilde{f}$ si et seulement si $\int_0^\infty f(x)x^{-s} dx$ vérifie l'équation fonctionnelle de $\zeta(s)$,

ou encore :

On a l'égalité $f = \tilde{f}$ si et seulement si $\int_0^\infty f(x)x^{s-1} dx$ vérifie l'équation fonctionnelle de $\zeta(1-s)$.

Ces constatations, certes élémentaires, n'en sont pas moins utiles pour dissiper une impression qui est laissée par le traitement devenu habituel de l'équation fonctionnelle de dzêta, où sont combinés le caractère autoréiproque de $x \mapsto \exp(-\pi x^2)$, la formule de Poisson, et la transformation de Mellin gauche $\int_0^\infty f(x)x^{s-1} dx$.

Supposons en effet que l'on désire construire des fonctions f auto-réiproques sous la transformation en cosinus. Il suffira que $\int_0^\infty f(x)x^{-s} dx = \zeta(s) \int_0^\infty k(x)x^{-s} dx$ avec k vérifiant $k(x) = k(1/x)/x$, qui correspond à $\int_0^\infty k(x)x^{s-1} dx = \int_0^\infty k(x)x^{-s} dx$, puisque cela garantit que $\int_0^\infty f(x)x^{-s} dx$ satisfasse à la même équation fonctionnelle que dzêta. Par l'équation de co-Müntz (3.4) cela signifie que f est la co-somme de Poisson associée à k :

$$f(x) = \sum_{n \geq 1} \frac{k(x/n)}{n} - \int_0^\infty \frac{k(1/t)}{t} dt \quad k(x) = \frac{k(1/x)}{x} \Rightarrow f = \tilde{f}.$$

Plus généralement on voit donc que l'équation fonctionnelle de la fonction dzêta est, via (3.5), essentiellement équivalente à la formule de co-Poisson.

Comme il est bien connu elle est aussi équivalente à la formule de Poisson. Pour le voir dans le même style, reformulons (3.5) ainsi :

$$(3.6) \quad \zeta(1-s) \int_0^\infty \tilde{f}(x)x^{-s} dx = \zeta(s) \int_0^\infty f(x)x^{s-1} dx.$$

Par la formule de Müntz le terme de droite est la transformée de Mellin (gauche) de A_f . Aussi le terme de gauche est la transformée de Mellin (gauche) de $I(A_{\tilde{f}})$. Il vient donc (f paire, $x > 0$; l'identité vaut peut-être presque partout seulement) :

$$\sum_{n \geq 1} \frac{\tilde{f}(n/x)}{x} - \int_0^\infty \tilde{f}(t) dt = \sum_{n \geq 1} f(nx) - \frac{\int_0^\infty f(t) dt}{x},$$

c'est-à-dire, la formule de Poisson !

Dans ce qui précède nous n'avons pas cherché à rendre précises les conditions sur f qui assurent la validité de nos manipulations, car notre but était principalement de faire passer le message que co-Poisson est aussi intimement lié à l'équation fonctionnelle que Poisson. Nous proposons maintenant une étude précise des conditions de validité de (3.2).

Remarque 3.2. — Dans tout le reste de ce chapitre, la notation $\widehat{f}(s)$ désignera la transformée de Mellin gauche :

$$\widehat{f}(s) = \int_0^\infty f(x)x^{s-1} dx.$$

3.2. Distributions tempérées et formule de Müntz

Nous allons étudier de manière précise les conditions de validité de la formule de Müntz. Rappelons nos notations : on a $f \in L^1(0, \infty; dx)$, et l'on note

$$A_f(x) = \sum_{n \geq 1} f(nx) - \frac{\int_0^\infty f(t) dt}{x},$$

la somme modifiée, qui par le lemme 2.7 est presque partout absolument convergente et est intégrable contre $(1 + \log^2 x)^{-1} dx$. On notera aussi parfois $\widehat{f}(s) = \int_0^\infty f(t)t^{s-1} dt$ lorsque cette intégrale existe.

Le théorème principal exprime la validité de la formule de Müntz au sens des distributions :

THÉORÈME 3.3. — Soit $f \in L^1(0, \infty; dx)$. Soit $0 < \sigma < 1$. On suppose de plus

$$\int_0^\infty |f(x)|x^{\sigma-1} dx < \infty.$$

La fonction $x^\sigma A_f(x)$ est alors une distribution tempérée en $\log(x) \in \mathbb{R}$. L'identité de Müntz :

$$\int_0^\infty x^\sigma A_f(x)x^{i\tau} \frac{dx}{x} = \zeta(\sigma + i\tau)\widehat{f}(\sigma + i\tau)$$

vaut comme une identité de distributions tempérées en $\tau \in \mathbb{R}$, l'intégrale étant vue comme représentant une transformation de Fourier au sens des distributions tempérées.

Remarque 3.4. — La situation sur la droite $\text{Re}(s) = 1$ est différente et plus délicate. Les énoncés relatifs à ce cas seront donnés plus loin.

Remarque 3.5. — Dans l'expression :

$$x^\sigma A_f(x) = \sum_{n \geq 1} x^\sigma f(nx) - x^{\sigma-1} \int_0^\infty f(t) dt,$$

ni la somme ni le terme avec l'intégrale ne sont des distributions tempérées en $\log x$ (sauf si l'intégrale s'annule). C'est leur différence qui est tempérée comme distribution en $\log x$.

COROLLAIRE 3.6. — Soit $f \in L^1(0, \infty; dx)$. Soit $0 < \sigma < 1$. Si

$$\int_0^\infty |f(x)|x^{\sigma-1} dx < \infty, \quad \int_0^\infty |g(x)|x^{\sigma-1} dx < \infty,$$

et $\operatorname{Re}(s) = \sigma \Rightarrow \int_0^\infty g(x)x^{s-1} dx = \zeta(s) \int_0^\infty f(x)x^{s-1} dx,$

alors

$$g(x) = \sum_{n \geq 1} f(nx) - \frac{\int_0^\infty f(t) dt}{x}$$

pour presque tout $x > 0$.

Il s'agit effectivement d'un simple corollaire du théorème 3.3, puisque les deux fonctions $x^\sigma g(x)$ et $x^\sigma A_f(x)$, en tant que distributions tempérées en $\log(x)$, ont la même transformée de Fourier.

THÉORÈME 3.7. — Soit $f \in L^1(0, \infty; dx)$. Soit $0 < \sigma < 1$. Si

$$(1) \int_0^1 \left| \sum_{n \geq 1} f(nx) - \frac{\int_0^\infty f(t) dt}{x} \right| x^{\sigma-1} dx < \infty$$

et si (2) $\int_0^1 |f(x)|x^{\sigma-1} dx < \infty,$

alors la formule de Müntz 3.2 concerne des intégrales absolument convergentes et est valable sur la droite $\operatorname{Re}(s) = \sigma$.

Remarque 3.8. — On sait déjà par le lemme 2.7 que la somme $\sum_{n \geq 1} f(nx)$ est presque partout absolument convergente et que les intégrales prises de 1 à ∞ sont absolument convergentes. De plus si les hypothèses sont vérifiées pour σ elles le sont aussi pour $1 > \sigma' > \sigma$. La formule de Müntz vaut donc alors au moins dans la bande $\sigma \leq \operatorname{Re}(s) < 1$.

Ce théorème est lui aussi un corollaire immédiat de 3.3. Cependant nous en donnerons une démonstration directe (plus longue...) qui ne fait pas appel à la transformée de Fourier-Schwartz des distributions, pour illustrer d'autres techniques plus « classiques ».

PROPOSITION 3.9. — Soit f une fonction intégrable sur $]0, \infty[$ vérifiant au choix l'une des deux conditions suivantes :

- (1) elle est de variation totale bornée sur $]0, \infty[$,
- (2) ou sa transformée en cosinus \tilde{f} est intégrable.

La formule de Müntz (3.2) est alors valable pour $0 < \operatorname{Re}(s) < 1$ et concerne des intégrales absolument convergentes.

Prouvons-le comme corollaire de 3.7. Si f est de variation totale bornée, elle est bornée, donc certainement la condition (2) de 3.7 est vérifiée. Soit df la mesure des variations de f . Quitte à modifier f en un nombre dénombrable de points, on peut supposer $f(x) = -\int_{t>x} df(t)$. Soit $x > 0$ fixé. Pour $n \geq 1$:

$$xf(nx) - \int_{(n-1)x}^{nx} f(t) dt = \int_{(n-1)x < t \leq nx} (t - (n-1)x)df(t),$$

donc :

$$\left| f(nx) - \frac{1}{x} \int_{(n-1)x}^{nx} f(t) dt \right| \leq \int_{(n-1)x, nx] \left\{ \frac{t}{x} \right\}^* |df|(t).$$

On a noté $\{t\}^* = t - [t]$ si $t \notin \mathbb{Z}$, $= 1$ pour $t \in \mathbb{Z}$. Ainsi pour tout $x > 0$:

$$\left| \sum_{n \geq 1} f(nx) - \frac{\int_0^\infty f(t)dt}{x} \right| \leq \int_{]0, \infty[} \left\{ \frac{t}{x} \right\}^* |df|(t) \leq \int_{]0, \infty[} |df|(t).$$

La sommation modifiée $A_f(x)$ est donc bornée, et la condition (1) de 3.7 est satisfaite.

Supposons maintenant $\tilde{f} \in L^1$. En particulier f (considérée comme une fonction paire) est essentiellement continue sur \mathbb{R} , et la condition (2) de 3.7 est donc vérifiée. Par le théorème presque sûr de Poisson 2.11, on a pour presque tout $x > 0$:

$$\sum_{n \geq 1} f(nx) - \frac{\int_0^\infty f(t) dt}{x} = \sum_{n \geq 1} \frac{\tilde{f}(n/x)}{x} - \int_0^\infty \tilde{f}(t) dt.$$

Pour vérifier la condition (1) il suffit de s'intéresser à $B(x) = \sum_{n \geq 1} \frac{|\tilde{f}(n/x)|}{x}$. Par le lemme 2.6, B est intégrable contre la fonction décroissante et intégrable $k(x) = x^{\sigma-1}$, $x \leq 1$, $k(x) = 0$, $x > 1$. Ainsi (1) vaut aussi.

Un autre corollaire du théorème 3.7 est donné par :

PROPOSITION 3.10. — Soit $0 < \sigma < 1$. Soit f une fonction localement de variation bornée telle que

$$\int_0^\infty |f(x)| dx + \int_{]0, 1]} x^\sigma |df|(x) + \int_{]1, \infty[} |df|(x) < \infty.$$

La formule de Müntz (3.2) est alors valable comme identité d'intégrales absolument convergentes dans la bande $\sigma < \text{Re}(s) < 1$.

Quitte à modifier f (donc A_f) en un nombre dénombrable de points, on peut supposer $f(x) = -\int_{t>x} df(t)$. Remarquons ensuite pour $x < 1$: $\int_{]x, 1]} t^\sigma |df|(t) \geq x^\sigma \int_{]x, 1]} |df|(x)$, et donc $f(x) = O(x^{-\sigma})$ pour $x \rightarrow 0$.

Ainsi $\int_0^\infty f(x)x^{s-1} dx$ converge absolument pour $\sigma < \operatorname{Re}(s) \leq 1$. L'inégalité établie pour $A_f(x)$ dans la preuve de 3.9 :

$$\left| \sum_{n \geq 1} f(nx) - \frac{\int_0^\infty f(t) dt}{x} \right| \leq \int_{]0, \infty[} \left\{ \frac{t}{x} \right\}^* |df|(t),$$

vaut aussi sous la nouvelle hypothèse (on a $\int_{]0, 1[} t |df|(t) < \infty$). Comme $\left\{ \frac{t}{x} \right\}^* \leq \left(\left\{ \frac{t}{x} \right\}^* \right)^\sigma \leq \left(\frac{t}{x} \right)^\sigma$, on en déduit :

$$|A_f(x)| \leq x^{-\sigma} \int_{]0, 1[} t^\sigma |df|(t) + \int_{]1, \infty[} |df|(t).$$

Donc A_f est aussi $O(x^{-\sigma})$ pour $x \rightarrow 0$. Ainsi $\int_0^\infty A_f(x)x^{s-1} dx$ converge absolument pour $\sigma < \operatorname{Re}(s) < 1$, la convergence sur $]1, \infty[$ par le lemme 2.7. La proposition est donc prouvée, comme corollaire du théorème 3.7.

Nous en venons maintenant aux preuves de 3.3 et de 3.7, en commençant par ce dernier. Bien qu'il puisse être vu comme un simple corollaire de 3.3, nous en donnerons une preuve directe, dans un style plus classique. Nous débutons par un lemme :

LEMME 3.11. — Soit $f \in L^1(0, \infty; dx)$ et soit $0 < \sigma < 1$. Si f est de classe C^1 sur $]0, \infty[$, si f' est intégrable sur $[1, \infty[$, et si $f'(x)$ est $O(x^{-1-\sigma})$ pour $x \rightarrow 0$ alors la formule de Müntz 3.2 vaut dans la bande $\sigma < \operatorname{Re}(s) < 1$ avec des intégrales absolument convergentes.

Tout d'abord $f(x)$ est $O(x^{-\sigma})$ pour $x \rightarrow 0$, donc $\widehat{f}(s) = \int_0^\infty f(x)x^{s-1} dx$ est absolument convergent et analytique pour $\sigma < \operatorname{Re}(s) \leq 1$. On note que $\int_0^1 t |f'(t)| dt$ est fini. Par

$$xf(nx) - \int_{(n-1)x}^{nx} f(t) dt = \int_{(n-1)x}^{nx} (t - (n-1)x) f'(t) dt,$$

on obtient la convergence absolue pour tout $x > 0$ de $\sum_{n \geq 1} f(nx)$ et pour

$$A(x) = \sum_{n \geq 1} f(nx) - \frac{\int_0^\infty f(t) dt}{x} = \int_0^\infty f'(t) \left\{ \frac{t}{x} \right\} dt,$$

l'inégalité :

$$|A(x)| \leq \int_0^\infty |f'(t)| \left\{ \frac{t}{x} \right\} dt \leq \int_0^x |f'(t)| \frac{t}{x} dt + \int_x^\infty |f'(t)| dt,$$

qui est $O(x^{-\sigma})$ pour $x \rightarrow 0$. Donc $\int_0^1 A(x)x^{s-1} dx$ est absolument convergent et analytique pour $\operatorname{Re}(s) > \sigma$. Par le lemme 2.7 on a $\int^\infty |A(x)| \frac{dx}{\log^2(x)} < \infty$ et donc certainement $\sigma < 1 \Rightarrow \int_1^\infty |A(x)| x^{\sigma-1} dx < \infty$. Ainsi $\widehat{A}(s) = \int_0^\infty A(x)x^{s-1} dx$ est absolument convergent pour $\sigma < \operatorname{Re}(s) < 1$.

Soit $\epsilon > 0$ et soit $f_\epsilon(x) = f(x)e^{-\epsilon x}$. On remarque que f_ϵ vérifie les trois mêmes hypothèses que f . On a par convergence dominée :

$$\sigma < \operatorname{Re}(s) \leq 1 \Rightarrow \widehat{f}(s) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \widehat{f}_\epsilon(s).$$

Soit $A_\epsilon(x)$ la sommation de Poisson modifiée de f_ϵ . À nouveau par convergence dominée on a $\forall x > 0 \lim_{\epsilon \rightarrow 0} A_\epsilon(x) = A(x)$. De plus les intégrales $\int_1^\infty \sum_{n \geq 1} f_\epsilon(nx)x^{s-1} dx$ sont dominées par $\int_1^\infty \sum_{n \geq 1} |f(nx)|x^{\operatorname{Re}(s)-1} dx$. Donc

$$\sigma < \operatorname{Re}(s) < 1 \Rightarrow \int_1^\infty \sum_{n \geq 1} f(nx)x^{s-1} dx = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_1^\infty \sum_{n \geq 1} f_\epsilon(nx)x^{s-1} dx.$$

En ce qui concerne l'intervalle $]0, 1]$ on a les expressions

$$A_\epsilon(x) = \int_0^\infty f'_\epsilon(t) \left\{ \frac{t}{x} \right\} dt,$$

puis les majorations ($0 < \epsilon < 1$)

$$|A_\epsilon(x)| \leq \int_0^\infty |f'(t)| \left\{ \frac{t}{x} \right\} dt + \int_0^\infty |f(t)| dt,$$

qui sont indépendantes de ϵ et intégrables contre $|x^{s-1}| dx$ sur $]0, 1]$ pour s dans la bande considérée. Nous pouvons donc affirmer :

$$\sigma < \operatorname{Re}(s) < 1 \Rightarrow \widehat{A}(s) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \widehat{A}_\epsilon(s).$$

Il suffira donc d'établir la formule de Müntz pour f_ϵ , $\epsilon > 0$ fixé. Écrivons pour $\sigma < \operatorname{Re}(s) < 1$:

$$\int_0^\infty A_\epsilon(x)x^{s-1} dx = \int_0^1 A_\epsilon(x)x^{s-1} dx + \int_1^\infty \sum_{n=1}^\infty f_\epsilon(nx)x^{s-1} dx + \frac{\int_0^\infty f_\epsilon(y)dy}{s-1}.$$

La première intégrale est analytique pour $\operatorname{Re}(s) > \sigma$, et la deuxième intégrale est une fonction entière, puisque

$$x \geq 1 \Rightarrow \left| \sum_{n=1}^\infty f_\epsilon(nx) \right| = O(1/(\exp(\epsilon x) - 1)).$$

Ainsi $\widehat{A}_\epsilon(s)$ est méromorphe dans $\operatorname{Re}(s) > \sigma$, et on peut la réécrire pour $\operatorname{Re}(s) > 1$ selon :

$$\begin{aligned} \widehat{A}_\epsilon(s) &= \int_0^1 \left(A_\epsilon(x) + \frac{\int_0^\infty f_\epsilon(y)dy}{x} \right) x^{s-1} dx + \int_1^\infty \sum_{n=1}^\infty f_\epsilon(nx)x^{s-1} dx \\ &= \int_0^\infty \sum_{n=1}^\infty f_\epsilon(nx)x^{s-1} dx = \zeta(s) \int_0^\infty f_\epsilon(x)x^{s-1} dx. \end{aligned}$$

La preuve du lemme est complète, puisque le principe du prolongement analytique donne $\widehat{A}_\epsilon(s) = \zeta(s)\widehat{f}_\epsilon(s)$ aussi dans la bande $\sigma < \operatorname{Re}(s) < 1$.

Prouvons maintenant le théorème 3.7. Rappelons-en les hypothèses : on a $f \in L^1(0, \infty; dx)$, on note $A(x)$ la somme de Poisson (Müntz)-modifiée de f qui est définie presque partout et l'on suppose que f et A sont toutes deux dans $L^1(0, \infty; x^{\sigma-1}dx)$ pour un certain $0 < \sigma < 1$. Il s'agit de prouver la formule de Müntz. Comme nous l'avons déjà indiqué dans la remarque 3.8, les fonctions f et A seront aussi dans $L^1(0, \infty; x^{\sigma'-1}dx)$ pour tout $1 > \sigma' > \sigma$, et les fonctions \widehat{f} et \widehat{A} sont continues dans la bande $\sigma \leq \operatorname{Re}(s) < 1$. Il suffit donc d'établir la validité de la formule de Müntz sur la bande $\sigma < \operatorname{Re}(s) < 1$.

Soit $g(t)$ une fonction quelconque non identiquement nulle et de classe C^1 et de support dans $[a, b]$, $0 < a < b$. Soit k quelconque localement intégrable sur $]0, \infty[$. On note alors

$$(g * k)(t) = \int_0^\infty k(u)g\left(\frac{t}{u}\right)\frac{du}{u} = \int_{t/b}^{t/a} k(u)g\left(\frac{t}{u}\right)\frac{du}{u},$$

la convolution multiplicative de g et de k . Pour tout nombre complexe s tel que $\int_0^\infty k(t)t^{s-1} dt$ soit absolument convergent, le théorème de Fubini prouve que $g * k$ a la même propriété et que

$$\int_0^\infty (g * k)(t)t^{s-1} dt = \int_0^\infty g(t)t^{s-1} dt \int_0^\infty k(t)t^{s-1} dt.$$

En particulier comme f est intégrable, il en est de même de $F = g * f$. De plus, de l'expression $F(t) = \int_0^\infty f(u)g\left(\frac{t}{u}\right)\frac{du}{u}$, il ressort que F est de classe C^1 sur $]0, \infty[$, avec $F'(t) = \frac{1}{t} \int_0^\infty f(u)\frac{t}{u}g'\left(\frac{t}{u}\right)\frac{du}{u}$. Cela montre en particulier que $tF'(t)$ est dans $L^1(0, \infty; dx)$. Et comme g est C^1 avec son support compact éloigné de l'origine, on a certainement $\forall x > 0 \quad |xg'(x)| \leq Cx^{-\sigma}$ pour une certaine constante C . Il en résulte que F' est $O(t^{-\sigma-1})$ pour $t \rightarrow 0$. Donc F vérifie toutes les hypothèses du lemme 3.11 et la formule de Müntz $\widehat{A}_F(s) = \zeta(s)\widehat{F}(s)$ vaut pour F dans la bande $\sigma < \operatorname{Re}(s) < 1$. Nous savons déjà $\widehat{F}(s) = \widehat{g}(s)\widehat{f}(s)$ et il suffit donc de montrer $\widehat{A}_F(s) = \widehat{g}(s)\widehat{A}_f(s)$, ce qui résultera de $A_F = g * A_f$. Nous avons pour tout $x > 0$ fixé :

$$\sum_{n \geq 1} \int_0^\infty |f(u)| \left| g\left(\frac{nx}{u}\right) \right| \frac{du}{u} = \int_{x/b}^{x/a} \sum_{n \geq 1} |f(nv)| \left| g\left(\frac{x}{v}\right) \right| \frac{dv}{v} < \infty,$$

où nous avons utilisé l'intégrabilité locale de $\sum_{n \geq 1} |f(nv)|$. Ainsi,

$$\sum_{n \geq 1} (g * f)(nx) = \int_{x/b}^{x/a} \sum_{n \geq 1} f(nv)g\left(\frac{x}{v}\right)\frac{dv}{v} = g * \left(\sum_{n \geq 1} f(n \cdot) \right)(x).$$

On vérifie aussi l'identité $(g * \frac{1}{t})(x) = \frac{1}{x} \int_0^\infty g(t) dt$. Il en résulte $A_F = g * A_f$ et ceci termine la preuve du théorème 3.7.

Venons-en au théorème 3.3. On y fait les hypothèses $0 < \sigma < 1$, $f \in L^1(0, \infty; dx)$, $\int_0^\infty |f(x)|x^{\sigma-1} dx < \infty$, et l'on note

$$A_f(x) = \sum_{n \geq 1} f(nx) - \frac{\int_0^\infty f(t) dt}{x}$$

qui est presque partout définie et est comme fonction de $\log(x) \in \mathbb{R}$ localement intégrable.

Soit $\epsilon > 0$ fixé, et soit $f_\epsilon(x) = f(x) \exp(-\epsilon x)$, $A_\epsilon = A_{f_\epsilon}$. Pour toute fonction $\phi(x)$ de classe C^∞ , supportée dans $0 < a < x < b$, on a par convergence dominée :

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_0^\infty A_\epsilon(t) \phi(t) dt = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_a^b A_\epsilon(t) \phi(t) dt = \int_0^\infty A_f(t) \phi(t) dt.$$

La fonction entière $\alpha(s) = \int_a^b \phi(t) t^{-s} dt$ est de décroissance rapide dans toute bande $\sigma_1 \leq \text{Re}(s) \leq \sigma_2$. Par la formule d'inversion on a :

$$\forall t > 0 \quad \forall c \in \mathbb{R} \quad \phi(t) = \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \alpha(s) t^{s-1} \frac{|ds|}{2\pi}.$$

Prenons tout d'abord $c > 1$. Comme $\int_0^\infty |f_\epsilon(t)| t^{c-1} dt < \infty$ on a

$$c > 1 \Rightarrow \int_0^\infty \left| \sum_{n \geq 1} f_\epsilon(nt) \right| t^{c-1} dt \leq \zeta(c) \int_0^\infty |f_\epsilon(t)| t^{c-1} dt < \infty.$$

Ainsi, pour $c > 1$ et $0 < \Lambda < \infty$ on a :

$$\int_0^\Lambda |A_\epsilon(t)| t^{c-1} dt \leq \zeta(c) \int_0^\infty |f_\epsilon(t)| t^{c-1} dt + \int_0^\infty |f_\epsilon(t)| dt \frac{\Lambda^{c-1}}{c-1} < \infty.$$

On peut donc écrire, avec $c = 2$ et pour tout $\Lambda > b$:

$$\begin{aligned} \int_0^\infty A_\epsilon(t) \phi(t) dt &= \int_0^\Lambda A_\epsilon(t) \phi(t) dt = \int_{2-i\infty}^{2+i\infty} \alpha(s) \left(\int_0^\Lambda A_\epsilon(t) t^{s-1} dt \right) \frac{|ds|}{2\pi} \\ &= \int_{2-i\infty}^{2+i\infty} \alpha(s) \left(\int_0^\Lambda \sum_{n \geq 1} f_\epsilon(nt) t^{s-1} dt \right) \frac{|ds|}{2\pi} \\ &\quad - \int_0^\infty f_\epsilon(t) dt \int_{2-i\infty}^{2+i\infty} \alpha(s) \frac{\Lambda^{s-1}}{s-1} \frac{|ds|}{2\pi}. \end{aligned}$$

On a de plus :

$$\int_{2-i\infty}^{2+i\infty} \alpha(s) \frac{\Lambda^{s-1}}{s-1} \frac{|ds|}{2\pi} = \int_0^\Lambda \int_{2-i\infty}^{2+i\infty} \alpha(s) t^{s-2} \frac{|ds|}{2\pi} dt = \int_0^\Lambda \frac{\phi(t)}{t} dt.$$

On fait tendre Λ vers $+\infty$, et on obtient :

$$\int_0^\infty A_\epsilon(t)\phi(t) dt = \int_{2-i\infty}^{2+i\infty} \alpha(s)\zeta(s) \int_0^\infty f_\epsilon(t)t^{s-1} dt \frac{|ds|}{2\pi} - \alpha(1) \int_0^\infty f_\epsilon(t) dt.$$

La décroissance rapide de $\alpha(s)$ pour $|\text{Im}(s)| \rightarrow \infty$ permet de décaler l'intégrale complexe de la droite $\text{Re}(s) = 2$ à la droite $\text{Re}(s) = \sigma$, ce qui donne un résidu au passage en $s = 1$ qui vaut $\alpha(1) \int_0^\infty f_\epsilon(t) dt$, et qui compense exactement le dernier terme. Ainsi :

$$\int_0^\infty A_\epsilon(t)\phi(t) dt = \int_{s=\sigma+i\tau} \alpha(s)\zeta(s) \left(\int_0^\infty f_\epsilon(t)t^{s-1} dt \right) \frac{d\tau}{2\pi}.$$

On a sur la droite $\text{Re}(s) = \sigma$ convergence pour $\epsilon \rightarrow 0$ de $\int_0^\infty f_\epsilon(t)t^{s-1} dt$ vers $\int_0^\infty f(t)t^{s-1} dt$, avec $\int_0^\infty |f(t)|t^{\sigma-1} dt$ donnant une borne supérieure fixe. On peut donc affirmer

$$\int_0^\infty A_f(t)\phi(t) dt = \int_{s=\sigma+i\tau} \left(\int_0^\infty \phi(t)t^{-s} dt \right) \zeta(s)\widehat{f}(s) \frac{d\tau}{2\pi}.$$

Posons maintenant $\phi(t) = t^{\sigma-1}\psi(t)$, et réécrivons l'équation précédente :

$$\int_0^\infty t^\sigma A_f(t)\psi(t) \frac{dt}{t} = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_0^\infty \psi(t)t^{-i\tau} \frac{dt}{t} \right) \zeta(\sigma + i\tau)\widehat{f}(\sigma + i\tau) \frac{d\tau}{2\pi}.$$

Cela exprime exactement que la distribution tempérée $\zeta(\sigma + i\tau)\widehat{f}(\sigma + i\tau) = D(\tau)$ a comme transformation de Fourier inverse au sens des distributions tempérées $\int_{\mathbb{R}} e^{-i\tau u} D(\tau) \frac{d\tau}{2\pi}$ la fonction localement intégrable $e^{\sigma u} A_f(e^u)$. Donc $t^\sigma A_f(t)$ est une distribution tempérée en $u = \log(t) \in \mathbb{R}$ et l'identité de Müntz :

$$\int_0^\infty t^\sigma A_f(t) t^{i\tau} \frac{dt}{t} = \zeta(\sigma + i\tau)\widehat{f}(\sigma + i\tau),$$

vaut au sens des distributions tempérées. Ainsi le théorème 3.3 est établi.

La situation sur la droite $\text{Re}(s) = 1$ est un peu différente.

THÉORÈME 3.12. — Soit $f \in L^1(0, \infty; dx)$.

(1) La fonction $D(u) = \sum_{n \geq 1} x f(nx)$, $x = \exp(u)$ est définie ponctuellement pour presque tout $u \in \mathbb{R}$, est localement intégrable, et est tempérée comme distribution.

(2) On a les identités de distributions tempérées :

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} D'(u) e^{i\tau u} du &= -i\tau \zeta(1 + i\tau) \widehat{f}(1 + i\tau) \\ \text{sur } \mathbb{R} \setminus \{0\} \int_{\mathbb{R}} D(u) e^{i\tau u} du &= \zeta(1 + i\tau) \widehat{f}(1 + i\tau). \end{aligned}$$

(3) Si $f \in L^1(0, \infty; (1 + |\log x|)dx)$, alors :

$$\int_0^\infty \left(\sum_{n \geq 1} xf(nx) - \frac{1}{2} \int_0^\infty f(t) dt \right) x^{i\tau} \frac{dx}{x} = \text{V.P. } \zeta(1 + i\tau) \widehat{f}(1 + i\tau)$$

vaut comme une identité de distributions tempérées en τ , le symbole V.P. représentant la valeur principale au sens de Cauchy.

Remarque 3.13. — On notera le $\frac{1}{2}$ dans 3.12.(3).

Sous la seule hypothèse $f \in L^1(0, \infty; dx)$, le lemme 2.7 permet d'affirmer que $\sum_{n \geq 1} f(nx)$ est intégrable sur $]0, \infty[$ contre $dx/(1 + \log^2 x)$. Ainsi $\sum_{n \geq 1} xf(nx)$ comme fonction de $u = \log(x)$ est intégrable sur \mathbb{R} contre $du/(1 + u^2)$. Donc $\sum_{n \geq 1} xf(nx)$ est une distribution tempérée en $u = \log(x)$. Ceci prouve (1).

Pour la preuve du point (2) nous reprenons la technique de la preuve de 3.3. Soit $\epsilon > 0$ et $f_\epsilon(x) = e^{-\epsilon x} f(x)$; soit $\phi(t)$ de classe C^∞ à support dans $[a, b]$, $0 < a < b$ et soit $\alpha(s) = \int_a^b \phi(t)t^{-s} dt$. On justifie comme précédemment :

$$\int_0^\infty \sum_{n \geq 1} f_\epsilon(nt)\phi(t) dt = \int_{2-i\infty}^{2+i\infty} \alpha(s)\zeta(s) \int_0^\infty f_\epsilon(t)t^{s-1} dt \frac{|ds|}{2\pi}.$$

Faisons l'hypothèse $\alpha(1) = \int_0^\infty \phi(t)\frac{dt}{t} = 0$. Pour $\epsilon > 0$ fixé, la fonction $\int_0^\infty f_\epsilon(t)t^{s-1} dt$ est analytique pour $\text{Re}(s) > 1$, continue pour $\text{Re}(s) \geq 1$, bornée pour $1 \leq \text{Re}(s) \leq 2$. On peut donc décaler l'intégrale complexe sur la droite $\text{Re}(s) = 1$. Sur cette droite les quantités $\int_0^\infty f_\epsilon(t)t^{s-1} dt$ sont bornées indépendamment de ϵ et de s . On peut donc faire tendre ϵ vers 0, et ainsi, ($\alpha(1) = 0$) :

$$\int_0^\infty \sum_{n \geq 1} tf(nt)\phi(t) \frac{dt}{t} = \int_{\mathbb{R}} \alpha(1 + i\tau)\zeta(1 + i\tau)\widehat{f}(1 + i\tau) \frac{d\tau}{2\pi}.$$

Choisissons $\phi(t)$ de la forme $t\frac{d}{dt}\psi(t)$ avec $\psi \in C^\infty([a, b])$. On a alors

$$\alpha(s) = \int_0^\infty t\psi'(t)t^{-s} dt = (s - 1) \int_0^\infty \psi(t)t^{-s} dt = (s - 1)\beta(s).$$

On obtient donc pour toute fonction ψ de $t > 0$, C^∞ , supportée dans $[a, b]$:

$$\int_0^\infty \left(\sum_{n \geq 1} tf(nt) \right) t\psi'(t) \frac{dt}{t} = \int_{\mathbb{R}} i\tau\beta(1 + i\tau)\zeta(1 + i\tau)\widehat{f}(1 + i\tau) \frac{d\tau}{2\pi}.$$

En passant à la variable $u = \log(t)$ et en utilisant la distribution tempérée $D(u) = \sum_{n \geq 1} e^u f(ne^u)$ cela s'écrit

$$- \int_{\mathbb{R}} D'(u)\theta(u) du = \int_{\mathbb{R}} i\tau \left(\int_{\mathbb{R}} \theta(u)e^{-i\tau u} du \right) \zeta(1 + i\tau)\widehat{f}(1 + i\tau) \frac{d\tau}{2\pi},$$

pour toute fonction $\theta(u)$ de classe C^∞ et à support compact. Cela signifie exactement que la distribution tempérée

$$E(u) = \int_{\mathbb{R}} i\tau \zeta(1 + i\tau)\widehat{f}(1 + i\tau)e^{-i\tau u} \frac{d\tau}{2\pi},$$

vérifie $E(u) = -D'(u)$. Donc $\int_{\mathbb{R}} e^{i\tau u} E(u) du$ comme distribution tempérée en τ est d'une part $+i\tau \int_{\mathbb{R}} e^{i\tau u} D(u) du$, d'autre part $i\tau \zeta(1 + i\tau)\widehat{f}(1 + i\tau)$. Ceci prouve que la distribution $\int_{\mathbb{R}} e^{i\tau u} D(u) du$ a sa restriction à l'ouvert $\{\tau \neq 0\}$ égale à la fonction $\zeta(1 + i\tau)\widehat{f}(1 + i\tau)$.

Pour la preuve de (3) on introduit la notation :

$$A_f^*(x) = \sum_{n \geq 1} f(nx) - \frac{1}{2} \frac{\int_0^\infty f(t) dt}{x},$$

puis on reprend à l'identique la démonstration de 3.3. On obtient :

$$\int_0^\infty A_\epsilon^*(t)\phi(t)dt = \int_{2-i\infty}^{2+i\infty} \alpha(s)\zeta(s) \int_0^\infty f_\epsilon(t)t^{s-1} dt \frac{ds}{2\pi i} - \frac{1}{2}\alpha(1) \int_0^\infty f_\epsilon(t) dt.$$

On déforme le contour d'intégration vers le contour allant verticalement de $1 - i\infty$ à $1 - i\delta$ puis le long d'un demi-cercle dans $\text{Re}(s) \geq 1$ de $1 - i\delta$ à $1 + i\delta$, puis verticalement de $1 + i\delta$ à $1 + i\infty$. On note que grâce à l'hypothèse $f \in L^1(0, \infty; (1 + |\log x|)dx)$ on peut écrire

$$\alpha(s)\zeta(s)\widehat{f}_\epsilon(s) = \frac{\alpha(1)\widehat{f}_\epsilon(1)}{s - 1} + O_\epsilon(1)$$

pour $1 \leq \text{Re}(s)$, $|s - 1| \leq 1$. La contribution le long du demi-cercle de rayon δ est donc $\frac{1}{2}\alpha(1)\widehat{f}_\epsilon(1) + O_\epsilon(\delta)$. Ainsi :

$$\int_0^\infty A_\epsilon^*(t)\phi(t) dt = \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R} \setminus [-\delta, +\delta]} \alpha(1 + i\tau)\zeta(1 + i\tau)\widehat{f}_\epsilon(1 + i\tau) \frac{d\tau}{2\pi}.$$

On notera que, compte tenu de $f \in L^1(0, \infty; (1 + |\log x|)dx)$, l'on a pour $\tau \in \mathbb{R}$

$$\widehat{f}_\epsilon(1 + i\tau) = \widehat{f}_\epsilon(1) + O(\tau),$$

avec une constante implicite ne dépendant pas de $\epsilon > 0$. Cela signifie que la convergence pour $\delta \rightarrow 0$ est uniforme par rapport à ϵ . On peut donc

prendre la limite pour $\epsilon \rightarrow 0$ à l'intérieur de l'intégrale. Ainsi :

$$\int_0^\infty A_f^*(t)\phi(t) dt = \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R} \setminus [-\delta, +\delta]} \alpha(1+i\tau)\zeta(1+i\tau)\widehat{f}(1+i\tau) \frac{d\tau}{2\pi}.$$

Ceci prouve que la valeur principale au sens de Cauchy de la fonction $\zeta(1+i\tau)\widehat{f}(1+i\tau)$ existe et est bien une distribution, en fait une distribution tempérée égale au sens des distributions à $\int_0^\infty tA_f^*(t)t^{i\tau} \frac{dt}{t}$. Ceci complète la preuve du théorème 3.12.

COROLLAIRE 3.14. — *Au sens des distributions on a*

$$\text{pour } \tau \neq 0 \quad \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N \frac{1}{n^{1+i\tau}} = \zeta(1+i\tau).$$

Pour toute fonction de Schwartz $\beta(u)$ on a $\beta(u) = O(1/(1+u^2))$ et donc :

$$\int_{\mathbb{R}} \sum_{1 \leq n} e^u |f(ne^u)| \beta(u) du < \infty,$$

ce qui implique $\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{1 \leq n \leq N} xf(nx) = \sum_{1 \leq n} xf(nx)$, au sens des distributions tempérées en $\log(x)$. La transformée de Fourier d'une limite au sens des distributions est une limite au sens des distributions. Il suffit alors de choisir $f \in L^1(0, \infty; dx)$ de manière à ce que \widehat{f} soit égale à 1 sur un intervalle $[\tau_1, \tau_2]$ ne rencontrant pas 0, et de restreindre ensuite à l'intervalle ouvert $] \tau_1, \tau_2 [$, pour obtenir la conclusion.

Une démonstration directe et plus simple s'obtient à partir de l'expression

$$\zeta(s) = 1 + \frac{1}{2^s} + \dots + \frac{1}{N^s} + \frac{N^{1-s}}{s-1} - s \int_N^\infty \frac{\{t\}}{t^{s+1}} dt$$

qui est valable pour $N \geq 1, \text{Re}(s) > 0, s \neq 1$. En effet, au sens des distributions en $\tau : \lim_{N \rightarrow \infty} N^{-i\tau} = 0$.

3.3. La transformation de Fourier de la fonction dzêta

Revenons à la formule

$$\int_0^\infty \left(\sum_{n \geq 1} xf(nx) - \frac{1}{2} \int_0^\infty f(t) dt \right) x^{i\tau} \frac{dx}{x} = \text{V.P. } \zeta(1+i\tau)\widehat{f}(1+i\tau)$$

pour $f \in L^1(0, \infty; (1 + |\log x|)dx)$. On peut aussi écrire sous cette hypothèse :

$$\text{V.P. } \zeta(1+i\tau)\widehat{f}(1+i\tau) = \widehat{f}(1)\text{V.P. } \zeta(1+i\tau) + \zeta(1+i\tau)(\widehat{f}(1+i\tau) - \widehat{f}(1)).$$

Choisissons $f(x)$ de la forme $\theta(u)e^{-u}$, $u = \log x$, avec θ de classe C^∞ à support compact. Ainsi :

$$\sum_{n \geq 1} x f(nx) - \frac{1}{2} \int_0^\infty f(t) dt = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n} \theta(\log n + u) - \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} \theta(v) dv.$$

On a par ailleurs,

$$\widehat{f}(1 + i\tau) = \int_0^\infty f(x) x^{i\tau} dx = \int_{\mathbb{R}} \theta(u) e^{i\tau u} du.$$

Prenons θ avec $\int_{\mathbb{R}} \theta(u) du = 1$ et remplaçons $\theta(u)$ par $\theta_A(u) = A\theta(Au)$, avec $A > 0$, $A \rightarrow \infty$. On obtient l'identité de distributions tempérées :

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \left(\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n} \theta_A(\log n + u) - \frac{1}{2} \right) e^{i\tau u} du \\ = \zeta(1 + i\tau) (\widehat{f}(1 + i\frac{\tau}{A}) - 1) + \text{V.P. } \zeta(1 + i\tau). \end{aligned}$$

On passe à la limite au sens des distributions pour $A \rightarrow \infty$, et on obtient :

$$\int_0^\infty \left(\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n} \delta(\log n + u) - \frac{1}{2} \right) e^{i\tau u} du = \text{V.P. } \zeta(1 + i\tau).$$

Nous avons démontré :

PROPOSITION 3.15. — *La transformée de Fourier au sens des distributions de V.P. $\zeta(1 + i\tau)$ est donnée par la formule :*

$$\int_{\mathbb{R}} (\text{V.P. } \zeta(1 + i\tau)) e^{-i\tau u} \frac{d\tau}{2\pi} = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n} \delta(\log n + u) - \frac{1}{2}.$$

On peut aussi le voir de manière plus directe en partant de l'égalité :

$$\zeta(s) = \frac{s}{s-1} - s \int_1^\infty \frac{\{t\}}{t^{s+1}} dt.$$

Avec $s = 1 + i\tau$, $t = e^{-u}$, et en menant les calculs au sens des distributions :

$$\begin{aligned} \zeta(1 + i\tau) &= 1 + \frac{1}{i\tau} - (1 + i\tau) \int_{-\infty}^0 \{e^{-u}\} e^{1+i\tau u} du \\ &= \frac{1}{i\tau} + 1 + \int_{]-\infty, 0[} e^{(1+i\tau)u} \frac{d}{du} \{e^{-u}\} du. \end{aligned}$$

On remarque :

$$\frac{d}{du} \{e^{-u}\} = \sum_{n \geq 1} \delta(u + \log n) - e^{-u}.$$

Donc

$$\text{V.P. } \zeta(1 + i\tau) = \text{V.P. } \frac{1}{i\tau} + 1 + \int_{]-\infty, 0[} \left(\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n} \delta(u + \log n) - 1 \right) e^{i\tau u} du ,$$

$$\text{V.P. } \zeta(1 + i\tau) = \text{V.P. } \frac{1}{i\tau} + \int_{\mathbb{R}} \left(\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n} \delta(u + \log n) - \mathbf{1}_{u < 0}(u) \right) e^{i\tau u} du .$$

En utilisant alors la formule connue :

$$\int_{\mathbb{R}} \left(\text{V.P. } \frac{1}{i\tau} \right) e^{-i\tau u} \frac{d\tau}{2\pi} = \frac{1}{2} \mathbf{1}_{u < 0}(u) - \frac{1}{2} \mathbf{1}_{u > 0}(u),$$

sous la forme :

$$\text{V.P. } \frac{1}{i\tau} = \int_{\mathbb{R}} \left(\frac{1}{2} \mathbf{1}_{u < 0}(u) - \frac{1}{2} \mathbf{1}_{u > 0}(u) \right) e^{i\tau u} du,$$

on obtient finalement

$$\text{V.P. } \zeta(1 + i\tau) = \int_{\mathbb{R}} \left(\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n} \delta(u + \log n) - \frac{1}{2} \right) e^{i\tau u} du.$$

Dans le cas $\sigma > 1$ on a bien évidemment :

$$\sigma > 1 \Rightarrow \int_{\mathbb{R}} \zeta(\sigma + i\tau) e^{-i\tau u} \frac{d\tau}{2\pi} = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^\sigma} \delta(u + \log n).$$

Et pour $\sigma < 1$ on a :

PROPOSITION 3.16. — Soit $-\infty < \sigma < 1$. La distribution tempérée $\zeta(\sigma + i\tau)$ a une transformée de Fourier qui est donnée par la formule :

$$\int_{\mathbb{R}} \zeta(\sigma + i\tau) e^{-i\tau u} \frac{d\tau}{2\pi} = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^\sigma} \delta(u + \log n) - e^{(\sigma-1)u}.$$

On remarquera que la somme est convergente au sens des distributions, mais pas au sens des distributions tempérées ; ce n'est qu'après avoir soustrait l'exponentielle que l'on retrouve une distribution tempérée. Ce sont des exercices intéressants de montrer directement que cette différence est bien une distribution tempérée pour tout $\sigma < 1$, ou de montrer la proposition par des calculs analogues à ceux de la preuve précédente. Il est aussi possible d'établir la proposition 3.16 de la manière suivante : soit $f \in C^\infty([a, b])$, $0 < a < b$. Soit (pour $x > 0$) $A_f(x) = \sum_{n \geq 1} f(nx) - (\int_0^\infty f(t) dt)/x$. Alors $A_f(x)$ est $O(x^N)$ lorsque $x \rightarrow 0^+$ pour tout $N \in \mathbb{N}$ (en fait $A_f(x) = \phi(1/x)/x$ avec $\phi \in \mathcal{S}$). Donc $\widehat{A}_f(s) = \int_0^\infty A_f(x) x^{s-1} dx$ est absolument convergent dès que $\text{Re}(s) < 1$, et définit donc une fonction analytique dans ce demi-plan. Par la formule de Müntz (3.2), on a

$\widehat{A}_f(s) = \zeta(s)\widehat{f}(s)$ dans la bande critique donc dans tout ce demi-plan. Cette identité, restreinte à la droite $\operatorname{Re}(s) = \sigma$ détermine la distribution (tempérée) $\int_{\mathbb{R}} \zeta(\sigma + i\tau) e^{-i\tau u} \frac{d\tau}{2\pi}$ comme étant donnée par la formule de la proposition 3.16.

On peut donc considérer pour $0 < \sigma < 1$ que la formule de la proposition 3.16 est structurellement équivalente à la formule de Müntz (3.2), à condition toutefois que f soit de support compact en $\log x$, ou d'autres conditions s'en rapprochant.

3.4. Fonctions de carrés intégrables

Jusqu'à présent, nous avons pris f dans $L^1(0, \infty; dx)$. Supposons que l'hypothèse soit $f \in L^2(0, \infty; dx)$. On ne peut plus alors définir de fonction A_f par la formule 3.3.

Pour f de carré intégrable la transformée de Mellin

$$\widehat{f}(s) = \int_0^\infty f(x)x^{s-1} dx$$

n'existe, en général, que sur la droite critique $\operatorname{Re}(s) = \frac{1}{2}$, et seulement au sens L^2 (comme limite L^2 des intégrales prises sur $[a, A]$, $a \rightarrow 0$, $A \rightarrow \infty$). On utilisera parfois l'appellation « transformation de Mellin-Plancherel » dans ce contexte. La transformation inverse, au sens L^2 , est

$$f(x) = \int_{\operatorname{Re}(s)=\frac{1}{2}} x^{-s} \widehat{f}(s) \frac{|ds|}{2\pi}.$$

THÉORÈME 3.17. — Soit $f \in L^2(0, \infty; dx)$, et soit pour $\Lambda > 0$:

$$A_\Lambda(x) = \sum_{nx \leq \Lambda} f(nx) - \frac{\int_0^\Lambda f(t) dt}{x}.$$

Les fonctions localement intégrables $\sqrt{x} A_\Lambda(x)$ sont des distributions tempérées en $\log(x)$ et convergent au sens des distributions tempérées en $\log(x)$ lorsque $\Lambda \rightarrow \infty$ vers une distribution $\sqrt{x} D_f(x)$ sur $]0, \infty[$. On a au sens des distributions tempérées en $\log x$ et en τ :

$$(3.7) \quad \int_0^\infty \sqrt{x} D_f(x) x^{i\tau} \frac{dx}{x} = \zeta\left(\frac{1}{2} + i\tau\right) \widehat{f}\left(\frac{1}{2} + i\tau\right).$$

La distribution D_f sur $]0, \infty[$ est caractérisée par la formule suivante :

$$(3.8) \quad \int_0^\infty D_f(x) \phi(x) dx = \int_0^\infty f(x) \left(\sum_{n \geq 1} \frac{\phi(x/n)}{n} - \int_0^\infty \frac{\phi(1/t)}{t} dt \right) dx,$$

pour toute fonction ϕ de classe C^∞ à support compact éloigné de 0. Elle vérifie également, au sens des distributions sur $]0, \infty[$:

$$(3.9) \quad D_f(x) = x \frac{d}{dx} \int_0^\infty f(xu) \frac{\{u\}}{u} du.$$

Remarque 3.18. — Dans (3.8), le terme entre parenthèses est dans la classe de Schwartz et il s'agit donc d'une intégrale absolument convergente. Dans (3.9) l'intégrale est une fonction continue de $x > 0$.

Soit $f_\Lambda(x) = \mathbf{1}_{0 < x \leq \Lambda}(x)f(x)$. On a $f_\Lambda \in L^1(0, \infty; dx)$ et $A_\Lambda = A_{f_\Lambda}$. Les fonctions A_Λ sont dans $L^2(\epsilon, \infty; dx)$ pour tout $\epsilon > 0$ et aussi dans $L^1(0, \infty; dx/(1 + \log^2 x))$ par le lemme 2.7.

Soit σ vérifiant $\frac{1}{2} < \sigma < 1$. Comme $\int_0^\infty |f_\Lambda(x)|x^{\sigma-1} dx < \infty$, on peut appliquer le théorème 3.3, en fait sous la forme obtenue dans sa démonstration, à savoir l'identité d'intégrales absolument convergentes :

$$(3.10) \quad \int_0^\infty A_\Lambda(t)\phi(t) dt = \int_{s=\sigma+i\tau} \left(\int_0^\infty \phi(t)t^{-s} dt \right) \zeta(s)\widehat{f_\Lambda}(s) \frac{d\tau}{2\pi},$$

pour toute fonction $\widehat{\phi}(t)$ de classe C^∞ et à support dans $[a, b]$, $0 < a < b < \infty$. La fonction $\widehat{f_\Lambda}(s) = \int_0^\Lambda f(x)x^{s-1} dx$ est $\Lambda^{s-\frac{1}{2}}$ fois une fonction de l'espace de Hardy du demi-plan $\text{Re}(s) > \frac{1}{2}$. Ses restrictions aux droites $\text{Re}(s) = \sigma$ convergent donc au sens L^2 vers $\widehat{f_\Lambda}(\frac{1}{2} + i\tau)$ (elle-même n'est définie qu'au sens L^2). On peut donc prendre la limite pour $\sigma \rightarrow \frac{1}{2}$ dans (3.10), ce qui donne :

$$\int_0^\infty A_\Lambda(t)\phi(t) dt = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_0^\infty \phi(t)t^{-\frac{1}{2}-i\tau} dt \right) \zeta\left(\frac{1}{2} + i\tau\right)\widehat{f_\Lambda}\left(\frac{1}{2} + i\tau\right) \frac{d\tau}{2\pi}.$$

Écrivons $\phi(t) = \sqrt{t}\psi(t)$. Ainsi pour toute fonction $\psi \in C^\infty$, à support dans $[a, b]$, $0 < a < b < \infty$:

$$(3.11) \quad \int_0^\infty \sqrt{t} A_\Lambda(t)\psi(t) dt = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_0^\infty \psi(t)t^{-i\tau} dt \right) \zeta\left(\frac{1}{2} + i\tau\right)\widehat{f_\Lambda}\left(\frac{1}{2} + i\tau\right) \frac{d\tau}{2\pi}.$$

Ceci prouve que la distribution tempérée $\zeta(\frac{1}{2} + i\tau)\widehat{f_\Lambda}(\frac{1}{2} + i\tau)$ a comme transformée de Mellin inverse $\int_{\mathbb{R}} t^{-i\tau}\zeta(\frac{1}{2} + i\tau)\widehat{f_\Lambda}(\frac{1}{2} + i\tau) \frac{d\tau}{2\pi}$ au sens des distributions en τ et en $\log t$ la fonction localement intégrable $\sqrt{t} A_\Lambda(t)$. Ainsi, cette fonction est une distribution tempérée en $\log t$. Comme on a convergence au sens L^2 de $\widehat{f_\Lambda}$ vers \widehat{f} , on peut prendre la limite pour $\Lambda \rightarrow \infty$ dans (3.11). On obtient :

$$\lim_{\Lambda \rightarrow \infty} \int_0^\infty \sqrt{t} A_\Lambda(t)\psi(t) dt = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_0^\infty \psi(t)t^{-i\tau} dt \right) \zeta\left(\frac{1}{2} + i\tau\right)\widehat{f}\left(\frac{1}{2} + i\tau\right) \frac{d\tau}{2\pi}.$$

Ceci identifie la transformée de Mellin inverse de $\zeta(\frac{1}{2} + i\tau)\widehat{f}(\frac{1}{2} + i\tau)$ comme étant la limite au sens des distributions en $\log x$, lorsque Λ tend vers ∞ , des fonctions $\sqrt{x} A_\Lambda(x)$.

Revenons à l'intégrale absolument convergente $\int_0^\infty A_\Lambda(t)\phi(t) dt$. On a :

$$\int_0^\infty A_\Lambda(t)\phi(t) dt = \int_0^\infty f_\Lambda(t) \left(\sum_{n \geq 1} \frac{\phi(t/n)}{n} - \int_0^\infty \frac{\phi(1/u)}{u} du \right) dt,$$

et on passe à la limite lorsque $\Lambda \rightarrow \infty$. Ceci prouve (3.8).

Posons $\phi_1(t) = \phi(1/t)/t$, de sorte que le terme entre parenthèses dans (3.8) s'écrive

$$\sum_{n \geq 1} \frac{\phi_1(n/t)}{t} - \int_0^\infty \phi_1(u) du = \int_0^\infty \frac{\{tx\}}{t} \phi_1'(x) dx.$$

L'intégrale double

$$\int_0^\infty \int_0^\infty f(t) \frac{\{tx\}}{t} \phi_1'(x) dt dx$$

est absolument convergente, puisque

$$\int_0^\infty |f(t)| \frac{\{tx\}}{t} dt \leq \sqrt{x} \|f\|_2 \left\| \frac{\{t\}}{t} \right\|_2.$$

On peut donc écrire :

$$\begin{aligned} \int_0^\infty D_f(x)\phi(x) dx &= \int_0^\infty \left(\int_0^\infty f(t) \frac{\{tx\}}{t} dt \right) x \frac{d}{dx} \phi_1(x) \frac{dx}{x} \\ &= - \int_0^\infty \left(\int_0^\infty f(t) \frac{\{t/x\}}{t} dt \right) x \frac{d}{dx} (x\phi(x)) \frac{dx}{x} \\ &= \int_0^\infty x \frac{d}{dx} \left(\int_0^\infty f(t) \frac{\{t/x\}}{t} dt \right) \phi(x) dx, \end{aligned}$$

la dernière ligne étant écrite au sens des distributions sur $]0, \infty[$. On a donc en ce sens

$$D_f(x) = x \frac{d}{dx} \int_0^\infty f(t) \frac{\{t/x\}}{t} dt = x \frac{d}{dx} \int_0^\infty f(xu) \frac{\{u\}}{u} du.$$

La preuve du théorème 3.17 est complète.

Remarque 3.19. — La fonction $x \mapsto G(x) = \int_0^\infty f(xu)\{u\}u^{-1} du$ est une fonction continue de $x > 0$, que l'on peut aussi exprimer par l'identité de Parseval, compte tenu de $\zeta(s)/s = - \int_0^\infty \{u\}u^{-s-1} du$ ($0 < \text{Re}(s) < 1$), sous la forme :

$$x \mapsto - \int_{s=\frac{1}{2}+i\tau} x^{-s} \widehat{f}(s) \frac{\overline{\zeta(1-s)}}{1-s} \frac{d\tau}{2\pi} = -x^{-\frac{1}{2}} \int_{s=\frac{1}{2}+i\tau} x^{-i\tau} \widehat{f}(s) \frac{\zeta(s)}{s} \frac{d\tau}{2\pi}.$$

Cela montre que la fonction $\sqrt{x} G(x)$, comme fonction en $\log x$ est la transformée de Fourier inverse de $-\widehat{f}(\frac{1}{2} + i\tau)\zeta(\frac{1}{2} + i\tau)/(\frac{1}{2} + i\tau)$. Au sens des distributions en $\log x$ et en τ on a $i\tau = -xd/dx$, donc par (3.7) :

$$\sqrt{x} D_f(x) = -(\frac{1}{2} - x \frac{d}{dx})(\sqrt{x} G(x)).$$

L'on retrouve (et l'on pourrait la démontrer ainsi) la formule :

$$D_f(x) = x \frac{d}{dx} G(x) = x \frac{d}{dx} \int_0^\infty f(xu) \frac{\{u\}}{u} du.$$

PROPOSITION 3.20. — Soit $f \in L^2(0, \infty; dx)$, et soit pour $\epsilon > 0$:

$$A_\epsilon(x) = \sum_{n \geq 1} f(nx) e^{-\epsilon nx} - \frac{\int_0^\infty f(t) e^{-\epsilon t} dt}{x}.$$

Les fonctions localement intégrables $\sqrt{x} A_\epsilon(x)$ sont des distributions tempérées en $\log(x)$ et convergent au sens des distributions tempérées en $\log(x)$ lorsque $\epsilon \rightarrow 0$ vers la distribution $\sqrt{x} D_f(x)$ sur $]0, \infty[$.

On a $A_\epsilon = A_{f_\epsilon}$ avec $f_\epsilon(x) = f(x) e^{-\epsilon x}$. La fonction f_ϵ est dans L^1 donc la somme dans A_ϵ est presque partout absolument convergente et A_ϵ est localement (en $\log x$) intégrable par le lemme 2.7. De plus f_ϵ est dans $L^1(0, \infty; x^{\sigma-1} dx)$ pour tout $\sigma > \frac{1}{2}$; les fonctions $\widehat{f}_\epsilon(\sigma + i\tau)$ convergent au sens L^2 vers $\widehat{f}_\epsilon(\frac{1}{2} + i\tau)$ pour $\sigma \rightarrow \frac{1}{2}$ (puisque ce sont les transformées de Mellin-Plancherel des fonctions $f_\epsilon(x) x^{\sigma-\frac{1}{2}}$); les fonctions $\widehat{f}_\epsilon(\frac{1}{2} + i\tau)$ convergent au sens L^2 vers $\widehat{f}(\frac{1}{2} + i\tau)$. Compte tenu de ces éléments la proposition est démontrée par une preuve exactement semblable à celle de 3.17.

PROPOSITION 3.21. — Soit $f \in L^2(0, \infty; dx)$ et soit

$$D_f(x) = x \frac{d}{dx} \int_0^\infty f(xu) \frac{\{u\}}{u} du$$

la distribution sur $]0, \infty[$ définie dans 3.17. On a

$$D_f(x) = \frac{1}{x} D_{\widetilde{f}}(\frac{1}{x}),$$

avec \widetilde{f} la transformée en cosinus de f .

Il suffira pour la preuve de rappeler par exemple la formule (3.6) (ici, on a Mellin gauche!) :

$$\zeta(\frac{1}{2} - i\tau) \widehat{f}(\frac{1}{2} - i\tau) = \zeta(\frac{1}{2} + i\tau) \widehat{f}(\frac{1}{2} + i\tau),$$

et d'invoquer l'équation (3.7). Ou encore on utilisera (3.8) :

$$\int_0^\infty D_f(x)\phi(x) dx = \int_0^\infty f(x) \left(\sum_{n \geq 1} \frac{\phi(x/n)}{n} - \int_0^\infty \frac{\phi(1/t)}{t} dt \right) dx,$$

et la formule de co-Poisson pour ϕ .

PROPOSITION 3.22. — *La transformée en cosinus $\int_0^\infty 2 \cos(2\pi uv)g(u) du$ de la fonction de $L^2(0, \infty; du)$*

$$u \mapsto g(u) = \frac{\{u\}}{u}$$

est la fonction de $L^2(0, \infty; dv)$:

$$v \mapsto -\frac{\{v\}}{v} + \int_v^\infty \{u\} \frac{du}{u^2}.$$

Compte tenu de la formule connue $\zeta(s)/s = -\int_0^\infty \{u\}u^{-s-1} du$ pour $0 < \operatorname{Re}(s) < 1$, on a

$$\widehat{g}\left(\frac{1}{2} + i\tau\right) = \frac{\zeta\left(\frac{1}{2} - i\tau\right)}{\frac{1}{2} - i\tau}.$$

Or, par (3.6)

$$\zeta\left(\frac{1}{2} - i\tau\right)\widehat{g}\left(\frac{1}{2} - i\tau\right) = \zeta\left(\frac{1}{2} + i\tau\right)\widehat{g}\left(\frac{1}{2} + i\tau\right),$$

donc :

$$\widehat{g}\left(\frac{1}{2} + i\tau\right) = \frac{\zeta\left(\frac{1}{2} - i\tau\right)}{\frac{1}{2} + i\tau} = \frac{\frac{1}{2} - i\tau}{\frac{1}{2} + i\tau} \widehat{g}\left(\frac{1}{2} + i\tau\right).$$

On vérifie aisément que l'opérateur de Hardy $f(x) \mapsto \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt$ correspond à la multiplication par $1/(1-s)$ sur la droite critique (pour la transformée de Mellin $\widehat{f}(s) = \int_0^\infty f(x)x^{s-1} dx$), et donc que l'opérateur $f(x) \mapsto \int_x^\infty \frac{f(t)}{t} dt$ correspond à la multiplication par $1/s$. Comme $(\frac{1}{2} - i\tau)/(\frac{1}{2} + i\tau) = -1 + 1/s$ cela donne la formule de la proposition.

Remarque 3.23. — On peut considérer que la proposition précédente 3.21 est un corollaire. On a en effet par Parseval :

$$\begin{aligned} G_f(x) &= \int_0^\infty f(xu) \frac{\{u\}}{u} du = \int_0^\infty \frac{\tilde{f}(v/x)}{x} \left(-\frac{\{v\}}{v} + \int_v^\infty \{u\} \frac{du}{u^2} \right) dv \\ &= - \int_0^\infty \frac{\tilde{f}(v/x)}{x} \frac{\{v\}}{v} dv + \int_0^\infty \left(\int_0^u \tilde{f}(v/x) \frac{dv}{ux} \right) \frac{\{u\}}{u} du \\ &= - \int_0^\infty \frac{\tilde{f}(u/x)}{x} \frac{\{u\}}{u} du + \int_0^\infty \left(\int_0^{1/x} \tilde{f}(uw) dw \right) \frac{\{u\}}{u} du \\ &= -\frac{1}{x} \int_0^\infty \tilde{f}\left(\frac{u}{x}\right) \frac{\{u\}}{u} du + \int_0^{1/x} \left(\int_0^\infty \tilde{f}(uw) \frac{\{u\}}{u} du \right) dw. \end{aligned}$$

Ainsi (les dérivées sont au sens des distributions sur]0, ∞[) :

$$x \frac{d}{dx} G_f(x) = -\frac{d}{dx} \int_0^\infty \tilde{f}\left(\frac{u}{x}\right) \frac{\{u\}}{u} du = -\frac{d}{dx} G_{\tilde{f}}\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x^2} G'_{\tilde{f}}\left(\frac{1}{x}\right)$$

ce qui donne exactement par (3.9) :

$$D_f(x) = \frac{1}{x} D_{\tilde{f}}\left(\frac{1}{x}\right)$$

et donc prouve 3.21.

Remarque 3.24. — La preuve de 3.22 montre plus généralement que pour une fonction paire $f \in L^2(\mathbb{R}, dx)$, l'identité pour $y > 0$:

$$\tilde{f}(y) = -f(y) + \int_y^\infty f(x) \frac{1}{x} dx,$$

équivalent pour sa transformée de Mellin gauche $\hat{f}(s) = \int_0^\infty f(x)x^{s-1} dx$, $\text{Re}(s) = \frac{1}{2}$, d'être de la forme $Z(1-s)/(1-s)$, où Z vérifie la même équation fonctionnelle que la fonction $\zeta(s)$. Cela équivaut aussi, comme on le voit facilement, à ce que la distribution tempérée $D(x) = \frac{d}{dx}xf(x)$ soit invariante sous Fourier (ici $D(x) = 1 - \sum_{n \neq 0} \delta_n(x)$).

4. Entrelacement et fonctions méromorphes

Remarque 4.1. — Dans tout ce chapitre la transformée de Mellin est la transformée de Mellin droite :

$$\hat{f}(s) = \int_0^\infty f(t)t^{-s} dt.$$

La fonction paire de carré intégrable $u \mapsto g(u) = \frac{\{|u|\}}{|u|}$ a les deux propriétés suivantes :

- (1) elle est constante (égale à 1) sur $] -1, 1[$ et sa transformée de Fourier (par la proposition 3.22) est de la forme $A + B \log |u|$ sur le même intervalle ($A = -\gamma, B = -1$).
- (2) Sa transformée de Mellin complète

$$\pi^{-s/2} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \int_0^\infty g(t) t^{-s} dt = -\pi^{-s/2} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \frac{\zeta(s)}{s}$$

est une fonction méromorphe dans tout le plan complexe, avec un pôle double en $s = 0$ et un pôle simple en $s = 1$.

Nous allons voir dans ce chapitre, non seulement pour les fonctions, mais aussi pour les distributions, que la deuxième propriété est une conséquence de la première, et aussi comment l'on peut renforcer la deuxième propriété pour la rendre équivalente à la première. Nous étudierons tout d'abord les distributions (tempérées), paires, nulles et de Fourier nulles dans $] -a, a[$, puis dans un deuxième temps des situations plus générales. Nous aurons besoin de notions sur la convolution multiplicative, la transformation de Mellin pour les distributions, et les distributions quasi-homogènes. Ne connaissant pas de référence commode pour les résultats qui nous seront nécessaires, nous y consacrons quelques développements rapides.

Nous emploierons souvent la notation $\langle D, \phi \rangle$ pour représenter l'appariement d'une distribution D et d'une fonction test ϕ .

4.1. Convolution multiplicative

Nous notons $\mathcal{L}_c(\mathbb{R}^\times)$ l'espace des fonctions intégrables sur \mathbb{R} qui ont un support compact éloigné de l'origine. Soit $g \in \mathcal{L}_c(\mathbb{R}^\times)$. Comme on le vérifie aisément l'application linéaire :

$$(4.1) \quad \phi(x) \mapsto \int_{\mathbb{R}} g(t) \phi(tx) dt$$

va de $\mathcal{D}(\mathbb{R}) = \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$ vers lui-même et est continue pour sa topologie. Elle va aussi de $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ vers lui-même et est continue pour sa topologie.

Nous obtenons par dualité des applications linéaires continues,

$$(4.2) \quad D(x) \mapsto (g * D)(x)$$

de l'espace des distributions sur \mathbb{R} , resp. des distributions tempérées sur \mathbb{R} , vers lui-même. Si D est tempérée les deux définitions donnent la même convolution multiplicative $g * D$. Aussi, si D est en fait elle-même une fonction test $\phi(x)$ alors

$$(g * \phi)(x) = \int_{\mathbb{R}} g(t) \phi(x/t) \frac{dt}{|t|}.$$

Nous voyons donc que $\int_{\mathbb{R}} g(t)\phi(tx) dt$ peut aussi être écrite sous la forme $(I(g) * \phi)(x)$ avec $I(g)(t) = g(1/t)/|t|$. La définition de $g * D$ est donc

$$\langle g * D, \phi \rangle := \langle D, I(g) * \phi \rangle .$$

Supposons que la fonction $g(x)$ soit en fait supportée dans $]0, \infty[$. La restriction de $g * D$ à l'intervalle $]0, \infty[$ ne dépend alors que de la restriction de D à $]0, \infty[$. Un changement de variable $x = \exp(u)$, $u \in \mathbb{R}$, ramène l'étude de $g * D$ sur $]0, \infty[$ au cas de la convolution additive usuelle d'une distribution avec une fonction à support compact, pour laquelle nous disposons des résultats inclus dans les traités classiques [20, 14]. Par exemple, le théorème de Titchmarsh-Lions [14, IV] donne ici :

PROPOSITION 4.2. — Soit $g(x)$, non-nulle, supportée dans $[a, A]$, avec $a > 0$ le plus petit point du support fermé essentiel de g . Supposons que la restriction de D à $]0, \infty[$ ait le plus petit point de son support fermé en $b > 0$. Alors le plus petit point du support fermé de la restriction de $g * D$ à $]0, \infty[$ est ab . En particulier $g * D \neq 0$.

La propriété de régularisation (lissage) associée à la convolution ne vaut ici qu'en dehors de l'origine. Par exemple, la convolution multiplicative du Dirac à l'origine $\delta(x)$ est un multiple de $\delta(x)$. Plus généralement on a :

LEMME 4.3. — Soit $P(T)$ un polynôme, et soit $g \in \mathcal{L}_c(\mathbb{R}^\times)$. On a :

$$g * \left(P\left(\frac{d}{dx}\right)\delta \right) = \left(\int_{\mathbb{R}} g(t)P\left(t\frac{d}{dx}\right) dt \right)\delta .$$

Il suffit de le prouver pour $P(T) = T^N$, $N \in \mathbb{N}$. On calcule (rappelons $\langle \delta^{(k)}, \phi \rangle = (-1)^k \phi^{(k)}(0)$) :

$$\begin{aligned} \langle g * \delta^{(N)}, \phi \rangle &= \left(-\frac{d}{dx} \right)^N \left(\int_{\mathbb{R}} g(t)\phi(tx) dt \right)(0) \\ &= \left(\int_{\mathbb{R}} g(t)t^N dt \right) \langle \delta^{(N)}, \phi \rangle \end{aligned}$$

et donc

$$g * \delta^{(N)} = \left(\int_{\mathbb{R}} g(t)\left(t\frac{d}{dx}\right)^N dt \right)\delta .$$

En dehors de l'origine, la convolution régularise :

LEMME 4.4. — Soit $g \in \mathcal{L}_c(\mathbb{R}^\times)$ (essentiellement) bornée. Soit F une fonction localement intégrable. Alors $g * F$ est une fonction localement intégrable qui est donnée par :

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad (g * F)(t) = \int_{\mathbb{R}} g(x)F\left(\frac{t}{x}\right) \frac{dx}{|x|} = \int_{\mathbb{R}} \frac{g(1/x)}{|x|} F(tx)dx .$$

Pour $t \neq 0$ on a :

$$(g * F)(t) = \int_{\mathbb{R}} \frac{g(t/x)}{|x|} F(x) dx.$$

Si F est continue, resp. de classe C^N , alors $g * F$ est continue, resp. de classe C^N , sur \mathbb{R} tout entier. Si g est continue, resp. C^N , alors $g * F$ est continue, resp. C^N , sur \mathbb{R}^\times .

Pour la preuve, on applique le théorème de Fubini à l'intégrale $\langle g * F, \phi \rangle$. Les propriétés de continuité et de dérivabilité découlent des formules intégrales.

LEMME 4.5. — On a

$$(g * D)' = \frac{g(x)}{x} * D'.$$

En effet :

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{g(x)}{x} * \frac{d}{dx} D, \phi \right\rangle &= \left\langle \frac{d}{dx} D, \int \frac{g(t)}{t} \phi(tx) dt \right\rangle \\ &= - \left\langle D, \int g(t) \phi'(tx) dt \right\rangle \\ &= - \left\langle g * D, \frac{d}{dx} \phi \right\rangle = \left\langle \frac{d}{dx} (g * D), \phi \right\rangle, \end{aligned}$$

ce qui complète la preuve.

PROPOSITION 4.6. — On suppose que la fonction g est dans $C_c^\infty(\mathbb{R}^\times)$. La restriction de la convolution multiplicative $g * D$ à \mathbb{R}^\times est alors une fonction, qui est donnée par la formule :

$$t \neq 0 \Rightarrow (g * D)(t) = \left\langle D, \frac{g(t/x)}{|x|} \right\rangle.$$

Cette fonction est de classe C^∞ sur \mathbb{R}^\times .

L'application $x \mapsto g(t/x)/|x|$, pour $t \neq 0$ donné, est de classe C^∞ et à support compact, donc la formule a au moins un sens. On peut tout aussi bien pour la preuve supposer que g est supportée dans $x > 0$. Un changement de variable réduit l'énoncé au cas additif. Pour une autre démonstration, on peut commencer par dire que le terme de droite est une fonction C^∞ de $t \neq 0$, par [20, IV.1]. Nous savons par le lemme 4.4 que la formule est valable lorsque D est une fonction continue. Et pour étudier $g * D$ dans un voisinage d'un certain $t \neq 0$ on peut tout aussi bien supposer D de support compact (si $\theta \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ est 1 sur un intervalle suffisamment grand alors $g * D = g * \theta D$ dans un voisinage de t). Toute distribution à support compact est la dérivée à un certain ordre d'une fonction continue,

donc il suffira de montrer que si la formule vaut pour D elle vaut pour D' . De 4.5 on a :

$$(g * D')(t) = \frac{d}{dt}(xg(x) * D)(t) = \frac{d}{dt} \langle D(x), \frac{tg(t/x)}{x|x|} \rangle .$$

Par [20, IV.1] on peut mettre la dérivée à l'intérieur de l'appariement :

$$(g * D')(t) = \langle D, \frac{\partial}{\partial t} \frac{tg(t/x)}{x|x|} \rangle .$$

Par homogénéité :

$$t \frac{\partial}{\partial t} \frac{tg(t/x)}{|x|} = -x \frac{\partial}{\partial x} \frac{tg(t/x)}{|x|} \Rightarrow \frac{\partial}{\partial t} \frac{tg(t/x)}{x|x|} = -\frac{\partial}{\partial x} \frac{g(t/x)}{|x|} .$$

Donc :

$$(g * D')(t) = - \langle D(x), \frac{\partial}{\partial x} \frac{g(t/x)}{|x|} \rangle = \langle D', \frac{g(t/x)}{|x|} \rangle ,$$

ce qui complète la preuve.

COROLLAIRE 4.7. — Soit $a \neq 0$ et soit $P(T)$ un polynôme. Soit $g \in C_c^\infty(\mathbb{R}^\times)$. La convolution multiplicative $g * P(\frac{d}{dx})\delta(x - a)$ est la fonction de classe C^∞ , à support compact éloigné de l'origine, donnée par la formule :

$$t \mapsto P \left(-\frac{\partial}{\partial x} \right) \frac{g(t/x)}{|x|} \Big|_{x=a} .$$

Remarque 4.8. — Par le lemme 4.5 on a :

$$(g * \delta_a^{(j)})(t) = \left(\frac{d}{dt} \right)^j (x^j g(x) * \delta_a(x))(t) = \left(\frac{\partial}{\partial t} \right)^j \frac{t^j g(t/a)}{a^j |a|}$$

et la compatibilité avec la formule du corollaire équivaut à l'identité :

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} \right)^j t^j \frac{g(t/a)}{|a|} = (-1)^j a^j \left(\frac{\partial}{\partial a} \right)^j \frac{g(t/a)}{|a|} ,$$

que l'on peut bien sûr vérifier directement. Nous avons employé la notation $\delta_a^{(j)}(x) = (\frac{d}{dx})^j \delta(x - a)$. Ainsi $\langle \delta_a^{(j)}, \phi \rangle = (-1)^j \phi^{(j)}(a)$.

4.2. Le théorème d'entrelacement

La transformation de Fourier \mathcal{F} entrelace les dilatations et les contractions. Ceci donne un théorème simple et important :

THÉORÈME 4.9. — Soit D une distribution tempérée et soit $g \in \mathcal{L}_c(\mathbb{R}^\times)$ (c'est-à-dire g est intégrable et de support essentiel compact et éloigné de l'origine). Soit $I(g)$ la fonction $g(1/t)/|t|$. On a alors la formule d'entrelacement de la convolution multiplicative et de la transformation de Fourier :

$$\mathcal{F}(g * D) = I(g) * \mathcal{F}(D).$$

Soit ϕ une fonction de Schwartz. Soit $k = I(g)$. On a (les intégrales étant toutes étendues sur \mathbb{R} et absolument convergentes) :

$$\begin{aligned} (k * \mathcal{F}(\phi))(x) &= \int g(t) \mathcal{F}(\phi)(tx) dt = \int g(t) \left(\int e^{2\pi i t x z} \phi(z) dz \right) dt \\ &= \iint e^{2\pi i t x z} \phi(z) g(t) dt dz = \iint e^{2\pi i w x} \phi\left(\frac{w}{t}\right) g(t) \frac{dt}{|t|} dw \\ &= \iint e^{2\pi i w x} \phi(uw) \frac{g(1/u)}{|u|} du dw = \mathcal{F}(g * \phi)(x). \end{aligned}$$

Ainsi $k * \mathcal{F}(\phi) = \mathcal{F}(g * \phi)$ et donc en dualisant :

$$\begin{aligned} \langle g * D, \mathcal{F}(\phi) \rangle &= \langle D, k * \mathcal{F}(\phi) \rangle = \langle D, \mathcal{F}(g * \phi) \rangle \\ &= \langle \mathcal{F}(D), g * \phi \rangle = \langle k * \mathcal{F}(D), \phi \rangle, \end{aligned}$$

ce qui complète la preuve du théorème.

4.3. Transformation de Mellin

Nous développons ici la notion de transformation de Mellin pour une distribution. Nous supposons dans cette section que la distribution tempérée D a son support dans $[a, \infty[$ pour un certain $a > 0$. Les définitions faites ne dépendront pas du choix de a .

Considérons tout d'abord le cas où $D(x)$ est une fonction continue $C(x)$ avec croissance au plus polynomiale. Alors

$$\widehat{C}(s) = \int_0^\infty C(x) x^{-s} dx$$

existe comme fonction analytique de s pour $\operatorname{Re}(s) \gg 0$. Pour $\sigma \gg 0$ la fonction analytique $\widehat{C}(s)$ est $O(a^{-s})$ uniformément dans le demi-plan $\operatorname{Re}(s) > \sigma$.

Remarque 4.10. — On notera bien que dans tout ce chapitre la transformée de Mellin est définie suivant la formule « droite » $\int_0^\infty C(x) x^{-s} dx$.

Dans le cas général, on peut écrire $D(x)$ comme la $N^{\text{ième}}$ dérivée d'une fonction continue avec croissance au plus polynomiale, pour N suffisamment grand. Il y a un unique choix d'une telle fonction continue $C_N(x)$ qui soit nulle sur $] -\infty, a]$ (et C_N ne dépend pas du choix de $a > 0$). De $C'_{N+1}(x) = C_N(x)$ on déduit

$$\widehat{C}_N(s) = s \widehat{C}_{N+1}(s + 1).$$

DÉFINITION 4.11. — Nous définissons la transformée de Mellin de la distribution tempérée D , dont le support est inclus dans $[a, \infty[$, $a > 0$, comme étant la fonction analytique

$$\widehat{D}(s) = s(s + 1) \dots (s + N - 1) \widehat{C}_N(s + N)$$

avec comme domaine de définition le plus grand demi-plan $\text{Re}(s) > \sigma$ sur lequel un prolongement analytique soit possible (à partir de $\text{Re}(s) \gg 0$), ou \mathbb{C} tout entier éventuellement. Pour des raisons typographiques, il sera parfois plus aisé d'écrire $M(D)(s)$ en lieu et place de $\widehat{D}(s)$.

Prenons note des propriétés suivantes :

4.12. — Si $\widehat{D}(s) \equiv 0$ alors $D \equiv 0$.

4.13. — On a $\frac{d}{dx} \widehat{D}(s) = s \widehat{D}(s + 1)$.

4.14. — On a $x \widehat{D}(s) = \widehat{D}(s - 1)$.

En effet, c'est certainement vrai si D est une fonction continue de croissance polynomiale. Et si c'est vrai pour D c'est aussi vrai pour D' : $x \widehat{D}'(s) = (x \widehat{D})'(s) - \widehat{D}(s) = s x \widehat{D}(s + 1) - \widehat{D}(s) = (s - 1) \widehat{D}(s) = \widehat{D}'(s - 1)$.

4.15. — On a $x \frac{d}{dx} \widehat{D}(s) = (s - 1) \widehat{D}(s)$ et $\frac{d}{dx} x \widehat{D}(s) = s \widehat{D}(s)$.

Le lemme technique suivant est utile :

LEMME 4.16. — Soit $\theta(x) \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ ($\mathcal{D}(\mathbb{R}) = \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$) avec support dans $[\frac{1}{2}, 3]$ et valant identiquement 1 sur $[1, 2]$. Soit pour $M \geq 2$: $\theta_M(x)$ définie comme valant $\theta(x)$ sur $] -\infty, 1]$, 1 sur $[1, M]$, $\theta(x - M + 2)$ sur $[M, \infty[$. Soit D une distribution tempérée avec support inclus dans $[a, \infty[$, $a > 0$. On a alors

$$\text{Re}(s) \gg 0 \Rightarrow \widehat{D}(s) = \lim_{M \rightarrow \infty} \langle D, x^{-s} \theta_M(\frac{x}{a}) \rangle .$$

Et l'on peut choisir $\sigma_1 \gg 0$ de sorte que la convergence soit uniforme dans toute bande $\sigma_1 \leq \text{Re}(s) \leq \sigma_2$, $\sigma_2 > \sigma_1$.

Pour la preuve, nous choisissons $N \gg 0$ tel que D soit la $N^{\text{ième}}$ dérivée d'une fonction continue $C_N(x)$ de croissance polynomiale, nulle pour $x \leq a$. Considérons les fonctions entières :

$$A_M(s) = \langle D, x^{-s} \theta_M\left(\frac{x}{a}\right) \rangle = (-1)^N \int_a^\infty C_N(x) \left(\frac{d}{dx}\right)^N (x^{-s} \theta_M\left(\frac{x}{a}\right)) dx .$$

Pour s fixé avec $\text{Re}(s) \gg 0$ on a convergence dominée pour $M \rightarrow \infty$ vers

$$(-1)^N \int_a^\infty C_N(x) \left(\frac{d}{dx}\right)^N (x^{-s}) dx = s(s+1) \dots (s+N-1) \int_a^\infty C_N(x) x^{-s-N} dx,$$

qui est en fait par définition $\widehat{D}(s)$. Et la convergence dominée sera uniforme en s si $\sigma_1 \leq \text{Re}(s) \leq \sigma_2$ et $\sigma_1 \gg 0$.

Énonçons un certain nombre de corollaires, dont les preuves (simples) seront pour la plupart omises :

$$(4.3) \quad M(x^{-w} D(x))(s) = \widehat{D}(s+w)$$

$$(4.4) \quad M(\log(x) D(x))(s) = -\frac{d}{ds} \widehat{D}(s)$$

4.17. — Si f , avec son support dans $[a, \infty[$, $a > 0$, vérifie $\int_a^\infty |f(x)| x^{-\sigma} dx < \infty$ alors $\widehat{f}(s)$ définie selon 4.11 coïncide sur le demi-plan $\text{Re}(s) > \sigma$ avec $\int_a^\infty f(x) x^{-s} dx$ en tant qu'intégrale de Lebesgue. En particulier si $D(x)$ appartient à $L^1(a, \infty; dx)$ alors $\widehat{D}(s) = \int_a^\infty D(x) x^{-s} dx$ pour $\text{Re}(s) > 0$.

4.18. — Si $D(x)$ appartient à $L^2(a, \infty; dx)$ alors $\widehat{D}(s) = \int_a^\infty D(x) x^{-s} dx$ pour $\text{Re}(s) > \frac{1}{2}$.

4.19. — Si D a son support dans $[a, A]$, $0 < a < A < \infty$, alors sa transformée de Mellin est une fonction entière, qui peut être évaluée par la formule

$$s \mapsto \langle D, x^{-s} \theta(x) \rangle ,$$

où $\theta(x) \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ vaut identiquement 1 sur $[a, A]$.

4.20. — Si $D = \sum_n a_n \delta_{\lambda_n}$ avec une suite strictement croissante (finie ou infinie) λ_n telle que $S(X) = \sum_{\lambda_n \leq X} |a_n|$ ait une croissance (au plus) polynomiale, alors

$$\text{Re}(s) \gg 0 \Rightarrow \widehat{D}(s) = \sum_n \frac{a_n}{\lambda_n^s} .$$

PROPOSITION 4.21. — Soit D une distribution tempérée supportée dans $[a, \infty[$, $a > 0$, et soit g une fonction intégrable supportée dans $[b, B]$, $b > 0$. Alors, dans tout demi-plan $\text{Re}(s) > \sigma$ où \widehat{D} existe :

$$\widehat{g * D}(s) = \widehat{g}(s)\widehat{D}(s).$$

Si $D(x) = C(x)$ est continue de croissance polynomiale et $\text{Re}(s) \gg 0$ ceci résulte d'une application directe de Fubini. Dans le cas général, on a par le lemme 4.5 $(g * D)(t) = (x^N g(x) * C_N)^{(N)}(t)$ donc

$$\begin{aligned} M(g * D)(s) &= s \cdots (s + N - 1)M(x^N g * C_N)(s + N) \\ &= s \cdots (s + N - 1)\widehat{g}(s)\widehat{C_N}(s + N) = \widehat{g}(s)\widehat{D}(s), \end{aligned}$$

ce qui prouve la proposition.

4.4. Propriété S et transformées de Mellin entières

DÉFINITION 4.22. — On dira qu'une distribution D sur \mathbb{R} a la propriété S si elle est tempérée, et si il existe un intervalle $] -a, a[$, $a > 0$, sur lequel à la fois D et $\mathcal{F}(D)$ sont nulles.

Si D a la propriété S il en est de même de sa partie paire et de sa partie impaire.

Si D est paire et $g \in \mathcal{L}_c(\mathbb{R}^\times)$ est impaire alors $g * D = 0$. Si D est impaire et g est paire alors $g * D = 0$. Pour éviter ces problèmes, on prendra toujours dans la suite g avec son support dans $]0, +\infty[$. Si D est paire, $g * D$ l'est aussi. Si D est impaire $g * D$ l'est aussi. Pour une telle fonction $g \in \mathcal{L}_c(\mathbb{R}^{+\times})$ on pose $\widehat{g}(s) = \int_0^\infty g(t)t^{-s} dt$. Pour une distribution D , soit paire, soit impaire, et nulle dans un intervalle $] -a, a[$, la transformée de Mellin $\widehat{D}(s)$ est définie selon 4.11 appliqué à $D|_{]0, \infty[}$. Par la proposition 4.21, on a :

$$\widehat{g * D}(s) = \widehat{g}(s)\widehat{D}(s).$$

DÉFINITION 4.23. — On dira parfois que $g * D$ est la D -co-somme de g , et on utilisera parfois la notation $P'_D(g) = g * D$.

PROPOSITION 4.24. — Si D a la propriété S et si $g \in \mathcal{L}_c(\mathbb{R}^{+\times})$ alors $g * D$ a la propriété S .

En effet, par la proposition 4.2 la convolution $g * D$ est nulle dans l'intervalle $] -ab, ab[$ si g est nulle dans $] -b, b[$. Par le théorème d'entrelacement 4.9 $\mathcal{F}(g * D) = I(g) * \mathcal{F}(D)$ et elle est donc nulle dans l'intervalle $] -a/B, a/B[$ ($g(t) = 0$ pour $|t| \geq B$). Donc $g * D$ a la propriété S .

THÉORÈME 4.25. — Soit D une distribution, qui est soit paire, soit impaire, et qui possède la propriété \mathcal{S} . Soit g une fonction à support compact $[b, B]$, $0 < b$, et infiniment dérivable. Alors la D -co-somme de g est une fonction dans la classe de Schwartz, qui possède aussi la propriété \mathcal{S} .

Il reste à montrer que $g * D$ est dans \mathcal{S} . Rappelons qu'en tout cas par la proposition 4.6 elle est de classe C^∞ sur \mathbb{R} et qu'elle est donnée pour $t \neq 0$ par la formule :

$$t \neq 0 \Rightarrow (g * D)(t) = \langle D, \frac{g(t/x)}{|x|} \rangle .$$

Soit $k = I(g)$ et soit $\gamma(y) = \int_{\mathbb{R}} e^{-2\pi ixy} k(x) dx$ de sorte que $k = \mathcal{F}(\gamma)$, et que $\gamma \in \mathcal{S}$. Notons que pour $t \neq 0$ donné on a :

$$\frac{g(t/x)}{|x|} = \frac{k(x/t)}{|t|} = \mathcal{F}(\gamma(ty))(x),$$

et donc pour $t \neq 0$:

$$(g * D)(t) = \langle D, \mathcal{F}(\gamma(t \cdot)) \rangle = \langle \mathcal{F}(D), \gamma(t \cdot) \rangle .$$

Supposons par exemple que D soit paire ; c'est alors aussi le cas de $E = \mathcal{F}(D)$. Comme $E(y)$ est tempérée elle est la dérivée $C^{(2N)}(y)$ d'une fonction paire continue de croissance (au plus) polynomiale. La restriction de cette fonction à l'intervalle $] - a, a[$ est un polynôme de degré au plus $2N - 1$. Après avoir soustrait ce polynôme on pourra supposer que C elle-même est identiquement nulle dans l'intervalle $] - a, a[$. On obtient donc la formule suivante, pour $t \neq 0$:

$$\begin{aligned} (g * D)(t) &= \langle C^{(2N)}(y), \gamma(ty) \rangle = \int_{\mathbb{R}} C(y) t^{2N} \gamma^{(2N)}(ty) dy \\ &= t^{2N} \int_a^\infty C(y) (\gamma^{(2N)}(ty) + \gamma^{(2N)}(-ty)) dy. \end{aligned}$$

Par cette formule et $\gamma \in \mathcal{S}$ le fait que $(g * D)(t)$ et toutes ses dérivées décroissent plus vite que tout inverse de polynôme lorsque $t \rightarrow \pm\infty$ est apparent (le cas D impaire est traité de manière similaire). Donc $g * D \in \mathcal{S}$, ce qu'il fallait démontrer.

Nous en arrivons au théorème principal :

THÉORÈME 4.26. — Soit D une distribution, paire ou impaire, avec la propriété \mathcal{S} . Sa transformée de Mellin $\widehat{D}(s)$ est une fonction entière. Si D est paire, alors \widehat{D} a des zéros triviaux en $0, -2, -4, \dots$ et vérifie l'équation fonctionnelle

$$\pi^{-\frac{s}{2}} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \widehat{D}(s) = \pi^{-\frac{1-s}{2}} \Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right) \widehat{\mathcal{F}(D)}(1-s).$$

Si D est impaire, alors \widehat{D} a des zéros triviaux en $-1, -3, -5, \dots$ et vérifie l'équation fonctionnelle

$$\pi^{-\frac{1+s}{2}} \Gamma\left(\frac{1+s}{2}\right) \widehat{D}(s) = -i\pi^{-\frac{2-s}{2}} \Gamma\left(\frac{2-s}{2}\right) \widehat{\mathcal{F}(D)}(1-s).$$

Traisons le cas D paire. Prenons n'importe quelle fonction g non nulle, infiniment dérivable, supportée dans $[b, B]$, $0 < b < B < \infty$. Nous savons par le théorème 4.25 que $g * D$ est une fonction paire dans \mathcal{S} , identiquement nulle dans un voisinage de l'origine. Sa transformée de Mellin $\int_0^\infty (g * D)(t)t^{-s} dt$ est donc une fonction entière de s . Par la proposition 4.21 on a

$$\widehat{g * D}(s) = \widehat{g}(s) \widehat{D}(s),$$

ce qui fournit pour $\widehat{D}(s)$ un prolongement méromorphe à tout le plan complexe. En fait les pôles ne peuvent être qu'aux zéros de g , et g peut être choisie arbitrairement, donc $\widehat{D}(s)$ est bien une fonction entière. En ce qui concerne la fonction de Schwartz $\phi = g * D$ paire elle est certainement L^2 . Par (3.5) elle vérifie presque partout sur la droite critique

$$\pi^{-\frac{s}{2}} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \widehat{\mathcal{F}(\phi)}(s) = \pi^{-\frac{1-s}{2}} \Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right) \widehat{\phi}(1-s).$$

Par le théorème d'entrelacement 4.9 on a $\mathcal{F}(\phi) = \mathcal{F}(g * D) = I(g) * \mathcal{F}(D)$, qui est aussi dans \mathcal{S} et est nulle dans un voisinage de l'origine. Donc $\widehat{\mathcal{F}(\phi)}$ est aussi une fonction entière. Ainsi l'identité vaut dans tout le plan complexe, comme une identité de fonctions méromorphes, en fait entières car les pôles éventuels du terme de droite ne peuvent en être du terme de gauche et vice versa. Par ailleurs $\widehat{I(g)}(s) = \widehat{g}(1-s)$, d'où $\widehat{\mathcal{F}(\phi)}(s) = \widehat{g}(1-s) \widehat{\mathcal{F}(D)}(s)$, tandis que $\widehat{\phi}(s) = \widehat{g}(s) \widehat{D}(s)$. Ainsi :

$$\pi^{-\frac{s}{2}} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \widehat{g}(1-s) \widehat{\mathcal{F}(D)}(s) = \pi^{-\frac{1-s}{2}} \Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right) \widehat{g}(1-s) \widehat{D}(1-s),$$

puis

$$\pi^{-\frac{s}{2}} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \widehat{\mathcal{F}(D)}(s) = \pi^{-\frac{1-s}{2}} \Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right) \widehat{D}(1-s),$$

ce qui complète la preuve. Les zéros triviaux sont dus à l'équation fonctionnelle. En effet la fonction méromorphe $\mathcal{D}(s) = \pi^{-\frac{s}{2}} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \widehat{D}(s)$ ne peut avoir de pôles qu'en $s = -2n, n \in \mathbb{N}$. Mais $\mathcal{D}(1-s)$ est par l'équation fonctionnelle une fonction du même type, et donc $\mathcal{D}(s)$ ne peut avoir de pôles qu'en $s = 1 + 2n, n \in \mathbb{N}$. La fonction $\mathcal{D}(s)$ est donc en fait une fonction entière, d'où les zéros triviaux.

Le cas impair est traité quasiment à l'identique.

4.5. Fonctions modérées et propriété S

DÉFINITION 4.27. — Nous dirons qu'une fonction entière F est modérée si elle vérifie les deux conditions suivantes :

- (1) sur toute droite $\operatorname{Re}(s) = \sigma$, F est de croissance (au plus) polynomiale.
- (2) dans tout demi-plan $\operatorname{Re}(s) > \sigma$, F est dans la classe de Nevanlinna $\mathcal{N}(\operatorname{Re}(s) > \sigma)$.

Remarque 4.28. — On a renoncé à la terminologie plus précise « θ -modérée », où θ serait un angle et ici $\theta = 0$.

La classe de Nevanlinna \mathcal{N} d'un demi-plan ouvert est composé des fonctions analytiques que l'on peut écrire dans ce demi-plan sous la forme d'un quotient de deux fonctions analytiques bornées. Les fonctions méromorphes quotients de deux fonctions analytiques bornées sont dites de « caractéristiques bornées ». Pour ces notions et un certain nombre de résultats que nous supposons connus et utiliserons sans autre référence, nous renvoyons au livre de Rosenblum et Rovnyak [17] qui contient tout ce qui nous est nécessaire.

Remarque 4.29. — Faisons tout de suite la remarque qu'une fonction modérée $F(s)$ est, dans tout demi-plan $\operatorname{Re}(s) \geq \sigma_0$ donné, $O(A^{\operatorname{Re}(s)}(1 + |s|)^N)$ pour un certain $A > 0$ et un certain $N \in \mathbb{N}$. En effet par le théorème de factorisation de Smirnov-Nevanlinna, et la terminologie introduite par Beurling, on peut factoriser F (supposée non-nulle...) dans le demi-plan ouvert $\operatorname{Re}(s) > \sigma_0$ en un produit de Blaschke (qui est borné par 1), un facteur intérieur spécial $A^{s-\sigma_0}$, un facteur intérieur associé à une mesure singulière signée sur la droite $\operatorname{Re}(s) = \sigma_0$, qui est par force *inexistant* ici à cause du prolongement analytique de F à travers cette droite, et un facteur extérieur dont le module a comme logarithme l'intégrale de Poisson de $\log |F(\sigma_0 + it)|$. Par hypothèse ceci est $\leq \log C + N \log \sqrt{1+t^2}$ sur la droite, pour un certain $N \in \mathbb{N}$ et une constante $C > 0$, et par ailleurs l'intégrale de Poisson de $\log \sqrt{1+t^2}$ est $\log |s - \sigma_0 + 1|$, donc $F(s) = O(A^{\operatorname{Re}(s)}(1 + |s|)^N)$ dans le demi-plan $\operatorname{Re}(s) > \sigma_0$ (ou $\geq \sigma_0$). Signalons de plus que le A du facteur intérieur spécial est donné par la formule :

$$\log(A) = \limsup_{\sigma \rightarrow +\infty} \frac{\log |F(\sigma)|}{\sigma},$$

et ne dépend donc pas du demi-plan considéré. Suivant la terminologie de de Branges [8], on dit que $\log(A)$ est le « type moyen » de F dans le

demi-plan considéré. Notons de plus le fait utile suivant : si $a > 0$ est dans le support fermé essentiel de $f \in L^1(a, \infty; x^{-\sigma_0} dx)$ alors la fonction analytique $F(s) = \int_a^\infty f(x)x^{-s} dx$ est de Nevanlinna dans le demi-plan $\text{Re}(s) > \sigma_0$ et son type moyen est $\log \frac{1}{a}$. De même si $a > 0$ est la borne inférieure du support fermé essentiel de $f \in L^2(0, \infty; dx)$ alors la fonction $\widehat{f}(s) = \int_0^\infty f(x)x^{-s} dx$ est de Nevanlinna dans le demi-plan $\text{Re}(s) > \frac{1}{2}$ et son type moyen est $\log \frac{1}{a}$.

Remarque 4.30. — La propriété pour une fonction entière F d'être modérée équivaut à l'une ou l'autre des assertions :

$\forall \sigma_0 \in \mathbb{R} \exists A > 0 \exists N \in \mathbb{N} \quad F(s) = O(A^{\text{Re}(s)}(1 + |s|)^N)$ dans $\{\text{Re}(s) > \sigma_0\}$
 $\exists A > 0 \forall \sigma_0 \in \mathbb{R} \exists N \in \mathbb{N} \quad F(s) = O(A^{\text{Re}(s)}(1 + |s|)^N)$ dans $\{\text{Re}(s) > \sigma_0\}$
 car elles impliquent (1) et (2) de 4.27, et sont impliquées par 4.27, par la remarque qui précède.

Nous rappelons la notation

$$\chi(s) = \frac{\zeta(s)}{\zeta(1-s)} = \pi^{s-\frac{1}{2}} \frac{\Gamma(\frac{1-s}{2})}{\Gamma(\frac{s}{2})} = \frac{(2\pi)^s}{2 \cos(\frac{\pi s}{2})\Gamma(s)}$$

et le fait que cette fonction méromorphe et son inverse $\chi(1-s)$ sont de croissance au plus polynomiale lorsque $|\text{Im}(s)| \rightarrow \infty$ dans toute bande $-\infty < \sigma_1 \leq \text{Re}(s) \leq \sigma_2 < \infty$.

THÉORÈME 4.31. — *Soit D une distribution tempérée paire avec la propriété S . La fonction entière $F(s) = \widehat{D}(s)$ est modérée et $\chi(s)F(1-s)$ est aussi une fonction entière et modérée. Réciproquement si F est une fonction entière modérée et si $\chi(s)F(1-s)$ est aussi entière et modérée alors il existe une (unique) distribution tempérée paire D avec la propriété S telle que F en soit la transformée de Mellin.*

Supposons que la distribution paire D ait la propriété S , pour l'intervalle $] -a, a[$, $a > 0$. Soit g une fonction non nulle quelconque, choisie infiniment dérivable et de support dans $[b, B]$, $0 < b < B < \infty$. Nous savons alors par 4.25 que $\phi := g * D$ est une fonction paire, nulle dans $] -c, c[$, $c = ab$, et est dans la classe de Schwartz. Soit $\sigma \in \mathbb{R}$. Pour $\text{Re}(s) \geq \sigma$, on a $|\widehat{g * D}(s)| \leq \int_c^\infty |\phi(x)|x^{-\text{Re}(s)} dx \leq c^{-\text{Re}(s)} \int_1^\infty |\phi(cx)|x^{-\sigma} x^{-\text{Re}(s)+\sigma} c dx = O_\sigma(c^{-\text{Re}(s)})$. La fonction $c^s \widehat{\phi}(s)$ est ainsi bornée dans $\text{Re}(s) \geq \sigma$ et il en est de même de $b^s \widehat{g}(s)$. Comme $\widehat{D}(s) = \widehat{\phi}(s)/\widehat{g}(s)$ on en déduit que $F(s) = \widehat{D}(s)$ est dans la classe de Nevanlinna du demi-plan $\text{Re}(s) > \sigma$. Il en est de même de $G(s) = \chi(s)F(1-s)$ puisque par le théorème 4.26 on a $G(s) = \widehat{E}(s)$, $E = \mathcal{F}(D)$.

Remarquons que par la définition 4.11, on a pour un certain $N \in \mathbb{N}$:

$$\operatorname{Re}(s) \gg 0 \Rightarrow \widehat{D}(s) = s(s+1)\dots(s+N-1)\widehat{C}_N(s+N),$$

où C_N est une fonction continue de croissance polynomiale, nulle sur $]0, a[$. La fonction $\int_a^\infty C_N(x)x^{-s-N} dx$ est $O_{\sigma_0}(a^{-\operatorname{Re}(s)})$ dans tout demi-plan $\operatorname{Re}(s) \geq \sigma \geq \sigma_0$, $\sigma_0 \gg 0$. Donc $F(s) = \widehat{D}(s)$ est $O(A^{\operatorname{Re}(s)}(1+|s|)^N)$ dans un tel demi-plan ($A = a^{-1}$). Appliquons ce résultat à $E = \mathcal{F}(D)$. Nous obtenons en particulier que sur toute droite $\operatorname{Re}(s) = \sigma_1$, $\sigma_1 \ll 0$, la fonction $\widehat{E}(1-s)$ donc aussi $\chi(s)\widehat{E}(1-s) = \widehat{D}(s)$ est de croissance polynomiale. Or nous savons déjà que \widehat{D} est dans $\mathcal{N}(\operatorname{Re}(s) > \sigma_0)$, pour tout $\sigma_0 \in \mathbb{R}$, donc par la remarque 4.29, le fait qu'elle soit de croissance polynomiale sur la droite $\operatorname{Re}(s) = \sigma_1$ implique qu'elle l'est aussi sur toute droite $\operatorname{Re}(s) = \sigma$, $\sigma > \sigma_1$. Comme $\sigma_1 \ll 0$ est arbitraire, nous avons montré que $F(s) = \widehat{D}(s)$ est de croissance polynomiale sur toute droite verticale. Nous avons donc établi que F vérifie (1) et (2) de la définition 4.27. Comme de plus $\chi(s)F(1-s) = \widehat{E}(s)$, avec $E = \mathcal{F}(D)$, il est aussi établi que $\chi(s)F(1-s)$ est une fonction entière modérée.

Il nous faut montrer la réciproque. Soit donc F une fonction entière modérée, telle que $\chi(s)F(1-s)$ soit aussi une fonction entière modérée. Nous savons par la remarque 4.29 qu'il existe un certain $a > 0$ et un $N \in \mathbb{N}$ tel que $a^s F(s)$ est $O(|s|^N)$ dans $\operatorname{Re}(s) \geq \frac{1}{2}$. La fonction $a^s F(s)/s^{N+1}$ étant $O(1/|s|)$ dans ce demi-plan, les normes L^2 sur les droites verticales de ce demi-plan sont uniformément bornées. Par un théorème de Paley-Wiener, cela implique qu'il existe une fonction $f \in L^2(1, \infty; dx)$ avec

$$a^s \frac{F(s)}{s^{N+1}} = \int_1^\infty f(x)x^{-s} dx = \int_a^\infty f(x/a)a^{s-1}x^{-s} dx$$

dans ce demi-plan. Notons $g(x) = f(x/a)/a$, pour $x > a$, 0 pour $|x| \leq a$, $g(-x)$ pour $x < -a$. Ainsi

$$F(s) = s^{N+1}\widehat{g}(s),$$

et donc (par 4.15), $F = \widehat{D}$, avec D la distribution tempérée paire qui est égale à $(\frac{d}{dx} x)^{N+1}g(x)$, et est donc aussi nulle dans l'intervalle $] -a, a[$.

En répétant l'argument pour $G(s) = \chi(s)F(1-s)$ en lieu et place de F on voit qu'il existe aussi $a' > 0$, $N' \in \mathbb{N}$ et une fonction k paire, de carré intégrable, nulle sur $] -a', a'[$, telle que

$$G(s) = s^{N'+1}\widehat{k}(s),$$

pour $\operatorname{Re}(s) \geq \frac{1}{2}$ (presque partout sur la droite critique). Quitte à remplacer N et N' par $\max(N, N')$ et à adapter g ou k l'on peut supposer $N = N'$. Par (3.5) la transformée de Fourier \widetilde{g} de la fonction de carré intégrable g a

une transformée de Mellin qui est donnée par la formule $\widehat{g}(s) = \chi(s)\widehat{g}(1-s)$ sur la droite critique, c'est-à-dire ici :

$$\widehat{g}(s) = \chi(s)F(1-s)(1-s)^{-N-1} = G(s)(1-s)^{-N-1} = \left(\frac{s}{1-s}\right)^{N+1} \widehat{k}(s).$$

Rappelons que (via la transformée de Mellin droite) l'opérateur L de multiplication par $s/(1-s) = -1 + 1/(1-s)$ agit sur $L^2(0, \infty; dx)$ selon $k(x) \mapsto L(k)(x) = -k(x) + \int_x^\infty k(y)\frac{1}{y} dy$. La fonction $L(k)$ est constante pour $0 < x < a'$. La fonction $L(L(k))$ est affine en $\log x$ pour $0 < x < a'$, etc... La fonction paire $\widetilde{g} = L^{N+1}(k)$ est donc polynomiale en $\log x$ de degré au plus N pour $0 < x < a'$.

On note par ailleurs qu'il est correct d'écrire au sens des distributions (paires) sur \mathbb{R} :

$$x \frac{d}{dx} (\log |x|)^k = k(\log |x|)^{k-1}.$$

Donc la distribution paire

$$\left(x \frac{d}{dx}\right)^{N+1} \mathcal{F}(g)(x)$$

est identiquement nulle dans $] - a', a' [$. Il ne reste plus maintenant qu'à utiliser

$$\mathcal{F} \frac{d}{dx} x = -x \frac{d}{dx} \mathcal{F}$$

pour obtenir

$$D(x) = \left(\frac{d}{dx} x\right)^{N+1} g(x) \Rightarrow \mathcal{F}(D)(x) = (-1)^{N+1} \left(x \frac{d}{dx}\right)^{N+1} \mathcal{F}(g)(x),$$

et donc pouvoir conclure que la distribution paire tempérée D , qui est nulle dans un intervalle $] - a, a [$, $a > 0$, a sa transformée de Fourier $\mathcal{F}(D)$ identiquement nulle dans un intervalle $] - a', a' [$, $a' > 0$. La distribution D a donc la propriété S et le théorème est complètement démontré.

Définissons :

$$\chi^{\sin}(s) = i \pi^{s-\frac{1}{2}} \frac{\Gamma(\frac{2-s}{2})}{\Gamma(\frac{s+1}{2})} = i \frac{(2\pi)^s}{2 \sin(\frac{\pi s}{2}) \Gamma(s)}.$$

Si g est, par exemple, dans $L^2(0, \infty; dx)$, et est vue comme une fonction *impair* alors sa transformée de Fourier $k = \widetilde{g}$, $k(x) = i \int_0^\infty 2 \sin(2\pi xy) g(y) dy$ a une transformée de Mellin droite qui est reliée à celle de g par la formule (presque partout sur la droite critique) :

$$\widehat{k}(s) = \chi^{\sin}(s)\widehat{g}(1-s).$$

Si l'on préférerait travailler avec la transformée en sinus $\int_0^\infty 2 \sin(2\pi xy) g(y) dy$ il vaudrait donc mieux supprimer le « i » dans la définition de χ^{\sin} . Quoi

qu'il en soit, le théorème suivant a une démonstration tout-à-fait semblable à celle de 4.31, et elle est laissée au lecteur.

THÉORÈME 4.32. — *Soit D une distribution tempérée impaire avec la propriété S . La fonction entière $F(s) = \widehat{D}(s)$ est modérée et $\chi^{\sin}(s)F(1-s)$ est aussi une fonction entière et modérée. Réciproquement si F est une fonction entière modérée et si $\chi^{\sin}(s)F(1-s)$ est aussi entière et modérée alors il existe une (unique) distribution tempérée impaire D avec la propriété S telle que F en soit la transformée de Mellin.*

Nous établissons quelques résultats concernant les zéros de $\widehat{D}(s)$ lorsque D a la propriété S . Par l'équation fonctionnelle du théorème 4.26 nous savons déjà que $\widehat{D}(s)$ a des zéros triviaux. Si D est paire la fonction $\pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma(\frac{s}{2})\widehat{D}(s)$ est entière, et si D est impaire la fonction $\pi^{-\frac{1+s}{2}}\Gamma(\frac{1+s}{2})\widehat{D}(s)$ est entière : un « zéro non-trivial » est par définition un zéro de cette fonction entière.

LEMME 4.33. — *Soit D une distribution, paire ou impaire, avec la propriété S . Alors $\widehat{D}(s)$ a au moins un zéro non trivial.*

Nous supposons que D est paire (et non identiquement nulle), la preuve étant similaire dans le cas impaire. Soit $f(s) = \pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma(\frac{s}{2})\widehat{D}(s)$. On établit aisément que $\pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma(\frac{s}{2})$ est $O((1+|s-\frac{1}{2}|)^{\frac{1}{2}|s-\frac{1}{2}|})$ dans le demi-plan $\operatorname{Re}(s) \geq \frac{1}{2}$. Comme $\widehat{D}(s)$ est modérée, on en déduit que $|f(s)|$ est $O((1+|s-\frac{1}{2}|)^{|s-\frac{1}{2}|})$ dans ce demi-plan. Mais $f(1-s)$ est une fonction du même type, donc $|f(s)|$ est $O((1+|s-\frac{1}{2}|)^{|s-\frac{1}{2}|})$ dans tout le plan complexe. Si elle n'avait pas de zéro, on en déduirait que la fonction harmonique $\operatorname{Re}(\log f(s))$ serait $\leq O(1+|s-\frac{1}{2}|\log(1+|s-\frac{1}{2}|))$ dans \mathbb{C} . Cela n'est possible que si $\log f(s)$ est de la forme $\alpha s + \beta$. On obtiendrait dans ce cas :

$$\widehat{D}(s) = \frac{e^{\alpha s + \beta}}{\pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma(\frac{s}{2})},$$

puis (par exemple), en invoquant à nouveau la formule de Stirling :

$$\lim_{\sigma \rightarrow +\infty} \frac{\log |\widehat{D}(\sigma)|}{\sigma} = -\infty.$$

Mais ceci est impossible, puisque contradictoire avec la formule pour le type moyen de $\widehat{D}(s)$ dans les demi-plans $\operatorname{Re}(s) > \sigma_0$ (cf. remarque 4.29).

LEMME 4.34. — Soit D une distribution paire (resp. impaire) avec la propriété S . Soit ρ un zéro non-trivial de $\widehat{D}(s)$. Alors il existe une distribution paire (resp. impaire) D_1 avec la propriété S telle que

$$D(x) = \left(\frac{d}{dx} x - \rho \right) D_1(x).$$

On a $\widehat{D}(s) = (s - \rho)\widehat{D}_1(s)$.

En effet, soit $F_1(s)$ la fonction entière $F(s)/(s - \rho)$. Il s'agit certainement d'une fonction modérée, et comme ρ n'est pas un zéro trivial, la fonction $\chi(s)F_1(1 - s)$ (resp. $\chi^{\sin}(s)F_1(1 - s)$) est aussi entière (et modérée). Par le théorème 4.31 (resp. 4.32) $F_1(s) = \widehat{D}_1(s)$ pour une certaine distribution D_1 avec la propriété S . On a $\widehat{D}(s) = (s - \rho)\widehat{D}_1(s)$ et donc $D(x) = (\frac{d}{dx} x - \rho) D_1(x)$ par la propriété 4.15.

PROPOSITION 4.35. — Soit D une distribution paire (resp. impaire) avec la propriété S . Alors $\widehat{D}(s)$ a une infinité de zéros non-triviaux. Il existe un entier N tel que pour tout choix de N zéros non-triviaux ρ_1, \dots, ρ_N , il existe une fonction de carré intégrable C paire (resp. impaire) avec la propriété S , telle que l'identité de distributions

$$D(x) = P\left(\frac{d}{dx} x\right)C(x)$$

ait lieu avec $P(T) = \prod_{1 \leq j \leq N} (T - \rho_j)$.

Par les deux lemmes précédents et une récurrence, pour tout choix de N zéros non triviaux on aura $D(x) = \prod_{1 \leq j \leq N} (\frac{d}{dx} x - \rho_j) D_N(x)$ avec une distribution (dépendant des N zéros) possédant la propriété S . De plus $\widehat{D}(s) = \prod_{1 \leq j \leq N} (s - \rho_j)\widehat{D}_N(s)$; comme $\widehat{D}(s)$ est une fonction modérée, pour N suffisamment grand, et indépendamment du choix des zéros, on aura $\widehat{D}_N(s) = O(1/|s|)$ sur la droite critique. La distribution D_N est donc en fait une fonction de carré intégrable puisque sa transformée de Mellin est de carré intégrable sur la droite critique.

Remarque 4.36. — Si l'on prend un zéro de plus les fonctions C seront continues et $o(1/\sqrt{x})$ pour $x \rightarrow +\infty$ à cause de $C(x) = \int_{\mathbb{R}} \widehat{D}_N(\frac{1}{2} + i\tau)|x|^{-\frac{1}{2} + i\tau} \frac{d\tau}{2\pi}$.

THÉOREME 4.37. — Soit D une distribution paire (resp. impaire) avec la propriété S , non identiquement nulle. Soit $0 < \epsilon < \frac{\pi}{2}$. Le nombre des zéros de modules au plus T de la fonction entière $\widehat{D}(s)$ dans le secteur angulaire $|\arg(s - \frac{1}{2}) - \frac{\pi}{2}| < \epsilon$ est asymptotiquement équivalent à $\frac{T}{2\pi} \log(T)$, et de même pour $|\arg(s - \frac{1}{2}) + \frac{\pi}{2}| < \epsilon$. Le nombre des zéros non-triviaux

de modules au plus T dans les secteur angulaires $|\arg(s)| < \frac{\pi}{2} - \epsilon$ et $|\arg(s) - \pi| < \frac{\pi}{2} - \epsilon$ est $o(T)$.

Nous avons établi ce théorème pour les fonctions paires de carrés intégrables avec la propriété S dans [5] (Theorem 7.7). Il vaut aussi pour les fonctions impaires de carré intégrables par une preuve quasi-identique. Le théorème dans le cas général peut alors être établi en invoquant la proposition précédente. En fait on peut aussi simplement vérifier que la preuve donnée pour [5, Theorem 7.7] s'adapte aux cas envisagés ici.

4.6. Distributions homogènes et quasi-homogènes

Rappelons tout d'abord quelques notions sur les distributions homogènes (voir par exemple [13]). On dira que la distribution D sur \mathbb{R} est homogène si il existe une fonction $\lambda : \mathbb{R}^\times \rightarrow \mathbb{C}$ telle que $D(tx) = \lambda(t)D(x)$ pour tout $t \neq 0$. Si D n'est pas la distribution nulle alors λ est un morphisme continu de \mathbb{R}^\times vers \mathbb{C}^\times , qui est donc soit $|t|^{s-1}$ pour un certain $s \in \mathbb{C}$, soit $\frac{t}{|t|}|t|^{s-1}$ pour un certain $s \in \mathbb{C}$. À une constante multiplicative près il existe une unique distribution (non-nulle) d'une homogénéité donnée.

La fonction

$$s \mapsto D^s(x) = \frac{|x|^{s-1}}{\pi^{-\frac{s}{2}} \Gamma(\frac{s}{2})}$$

est analytique sur le demi-plan $\operatorname{Re}(s) > 0$ à valeurs dans les distributions, et elle admet un prolongement analytique en une fonction entière et sans zéro sur \mathbb{C} à valeurs dans les distributions paires sur \mathbb{R} . Pour tout $s \in \mathbb{C}$ la distribution D^s est homogène d'homogénéité $|t|^{s-1}$. La restriction de D^s à l'ouvert $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ est la fonction $|x|^{s-1} / \pi^{-\frac{s}{2}} \Gamma(\frac{s}{2})$ (donc nulle aux pôles du dénominateur).

La fonction

$$s \mapsto E^s(x) = \frac{x}{|x|} \frac{|x|^{s-1}}{\pi^{-\frac{s+1}{2}} \Gamma(\frac{s+1}{2})}$$

est analytique sur le demi-plan $\operatorname{Re}(s) > 0$ à valeurs dans les distributions, et elle admet un prolongement analytique en une fonction entière et sans zéro sur \mathbb{C} à valeurs dans les distributions impaires sur \mathbb{R} . Pour tout $s \in \mathbb{C}$ la distribution E^s est homogène d'homogénéité $\frac{t}{|t|}|t|^{s-1}$.

4.38. — *Les identités suivantes sont vérifiées :*

$$\frac{d}{dx} x D^s(x) = s D^s(x) \quad \frac{d}{dx} x E^s(x) = s E^s(x).$$

On fait le calcul pour $\text{Re}(s) > 0$ et ensuite on invoque un prolongement analytique en s .

4.39. — Soit $g \in \mathcal{L}_c(\mathbb{R}^\times)$ une fonction intégrable à support compact éloigné de l'origine. On a :

$$g * D^s = \left(\int_{\mathbb{R}} g(t)|t|^{-s} dt \right) D^s$$

$$g * E^s = \left(\int_{\mathbb{R}} \frac{t}{|t|} g(t)|t|^{-s} dt \right) E^s.$$

On fait le calcul pour $\text{Re}(s) > 0$ grâce au lemme 4.5 et ensuite on invoque un prolongement analytique en s .

4.40. — Si D est une distribution non-nulle d'homogénéité λ alors elle est tempérée et $\mathcal{F}(D)$ est une distribution non-nulle d'homogénéité $\lambda(1/t)/|t|$. On a en fait très exactement :

$$\mathcal{F}(D^s) = D^{1-s}$$

$$\mathcal{F}(E^s) = i E^{1-s}.$$

Il suffit d'évaluer sur les fonctions test $\exp(-\pi x^2)$ ou $x \exp(-\pi x^2)$.

Comme les fonctions $s \mapsto D^s$ et $s \mapsto E^s$ sont des fonctions entières on peut les dériver par rapport à s . Nous adopterons la définition suivante :

DÉFINITION 4.41. — On dira qu'une distribution D sur \mathbb{R} est quasi-homogène si elle est la combinaison linéaire complexe d'un nombre fini de distributions du type $D^{s,N} = \left(\frac{\partial}{\partial z} \right)^N D^z \Big|_{z=s}$ ou $E^{s,M} = \left(\frac{\partial}{\partial z} \right)^M E^z \Big|_{z=s}$.

Une distribution quasi-homogène est déterminée par sa restriction à n'importe quel intervalle $] -a, a[$, $a > 0$. Sa transformée de Fourier est aussi quasi-homogène.

4.42. — Pour tout $s \in \mathbb{C}$ et tout $N \in \mathbb{N}$ on a :

$$\left(\frac{d}{dx} x - s \right) D^{s,N+1} = (N+1) D^{s,N} \quad \left(\frac{d}{dx} x - s \right) E^{s,N+1} = (N+1) E^{s,N}$$

$$\left(\frac{d}{dx} x - s \right)^N D^{s,N} = N! D^s \quad \left(\frac{d}{dx} x - s \right)^N E^{s,N} = N! E^s$$

$$\left(\frac{d}{dx} x - s \right)^{N+1} D^{s,N} = 0 \quad \left(\frac{d}{dx} x - s \right)^{N+1} E^{s,N} = 0.$$

On dérive $\frac{d}{dx} x D^s = s D^s$ par rapport à s et on obtient $\frac{d}{dx} x D^{s,N+1}(x) = s D^{s,N+1}(x) + (N+1) D^{s,N}(x)$ (de même pour E^s). Les assertions en découlent. Remarquons que $D^{s,N}$ et $E^{s,N}$ ne sont jamais la distribution nulle.

4.43. — Ce n'est pas vraiment une définition, ni une remarque, mais plutôt un commentaire heuristique : la transformée de Mellin d'une distribution quasi-homogène (paire ou impaire) est la fonction complexe identiquement nulle.

DÉFINITION 4.44. — On dira qu'une distribution D est a -quasi-homogène si sa restriction à un intervalle $] - a, a[$, $a > 0$, coïncide avec la restriction à cet intervalle d'une distribution quasi-homogène D^{qh} . Celle-ci est uniquement déterminée et ne dépend pas de a .

DÉFINITION 4.45. — Soit D une distribution tempérée paire ou impaire a -quasi-homogène. La transformée de Mellin de D est définie comme étant la transformée de Mellin au sens de 4.11 de la distribution (paire ou impaire) $D - D^{qh}$.

Les deux propositions suivantes sont vérifiées aisément :

PROPOSITION 4.46. — Soit D une distribution paire (resp. impaire) a -quasi-homogène. Les distributions impaires (resp. paires) $x D$ et D' sont aussi a -quasi-homogènes. Les formules

$$\widehat{\frac{d}{dx} D}(s) = s \widehat{D}(s+1) \quad \widehat{x D}(s) = \widehat{D}(s-1)$$

sont valables et donc aussi :

$$\widehat{x \frac{d}{dx} D}(s) = (s-1) \widehat{D}(s) \quad \widehat{\frac{d}{dx} x D}(s) = s \widehat{D}(s).$$

PROPOSITION 4.47. — Soit D une distribution a -quasi-homogène, paire ou impaire. Soit $g \in \mathcal{L}_c(\mathbb{R}^{+\times})$. La convolution multiplicative $g * D$ est a' -quasi-homogène pour un certain $a' > 0$ et la formule

$$\widehat{g * D}(s) = \widehat{g}(s) \widehat{D}(s)$$

est valable.

Nous aurons aussi particulièrement besoin des lemmes suivant :

LEMME 4.48. — Soit D une distribution quasi-homogène et soit $s \in \mathbb{C}$. Il existe une distribution quasi-homogène D_1 avec $(\frac{d}{dx} x - s) D_1 = D$.

Cela découle directement de 4.42 pour $D = D^{s,N}$ ou $E^{s,N}$; et aussi pour $D = D^{w,N}$, $w \neq s$, puisque l'opérateur $L = \frac{d}{dx} x - s$ sur l'espace vectoriel des $D^{w,k}$ (resp. $E^{w,k}$), $0 \leq k \leq M$ est de la forme $w - s + N$ avec N nilpotent.

LEMME 4.49. — Soit D une distribution vérifiant

$$\left(\frac{d}{dx} x - s \right) D = 0.$$

Il existe alors deux constantes (uniques) telles que $D = \alpha D^s + \beta E^s$.

Soit $t > 0$ et soit $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$. Soit $f(t) = \int_{\mathbb{R}} D(x)\phi(tx) dx$. Par [20, IV.1] f est une fonction de classe C^∞ de $t > 0$ et l'on peut dériver sous le signe « intégrale ».

$$f'(t) = \int_{\mathbb{R}} D(x)x\phi'(tx) dx = - \left\langle \frac{d}{dx}xD, \frac{1}{t}\phi(tx) \right\rangle = -s\frac{1}{t}f(t).$$

Donc $f(t) = Ct^{-s}$ et

$$\langle D(x/t)/t, \phi(x) \rangle = t^{-s} \langle D(x), \phi(x) \rangle .$$

Autrement dit, $D(x/t)/t = t^{-s}D(x)$, $D(tx) = t^{s-1}D(x)$ pour tout $t > 0$. Si D est paire, on obtient que D est homogène pour le quasi-caractère $|t|^{s-1}$, et donc D est un multiple de D^s . Si D est impaire on obtient qu'elle est un multiple de E^s . Dans le cas général on applique le résultat séparément aux parties paires et impaires de D car elles vérifient la même équation.

LEMME 4.50. — Soit D une distribution nulle dans un intervalle $] -a, a[$, $a > 0$. Pour tout $s \in \mathbb{C}$ il existe une distribution (unique) D_1 qui est nulle dans $] -a, a[$ et qui vérifie :

$$\left(\frac{d}{dx}x - s \right) D_1(x) = D(x).$$

Si D est tempérée, D_1 l'est aussi. Si D est paire (resp. impaire) D_1 l'est aussi.

Pour la preuve de cet autre énoncé standard, indiquons simplement que comme D est nulle dans $] -a, a[$ on peut considérer la distribution identiquement nulle dans $] -a, a[$ et qui est donnée formellement pour $x \neq 0$ par la formule

$$D_1(x) = |x|^s \frac{1}{x} \int_0^x |y|^{-s} D(y) dy.$$

Cette distribution est l'unique solution.

PROPOSITION 4.51. — Soit D une distribution telle qu'il existe un $a > 0$ et un polynôme unitaire $P(T)$ tels que la distribution $P(\frac{d}{dx}x)D$ soit nulle dans l'intervalle $] -a, a[$. Alors D est a -quasi-homogène. La réciproque vaut aussi.

Par récurrence sur le degré de P , et il suffira de montrer que si $E = (\frac{d}{dx}x - s)D$ est a -quasi-homogène alors D l'est aussi. Par le lemme précédent appliqué à $E - E^{qh}$, il existe D_1 nulle dans $] -a, a[$ telle que $(\frac{d}{dx}x - s)D_1 = E - E^{qh}$. De plus par le lemme 4.48 il existe une distribution quasi-homogène D_2 vérifiant $(\frac{d}{dx}x - s)D_2 = E^{qh}$. La distribution $D_3 = D_1 + D_2$ est a -quasi-homogène et $(\frac{d}{dx}x - s)D_3 = (\frac{d}{dx}x - s)D$. Il ne reste plus qu'à faire appel au lemme 4.49. La réciproque vaut par 4.42.

4.7. Propriété S -étendue et fonctions méromorphes

DÉFINITION 4.52. — On dira qu'une distribution tempérée D a la propriété S -étendue si il existe $a > 0$ tel que à la fois D et $\mathcal{F}(D)$ sont a -quasi-homogènes.

Si D a la propriété S -étendue, il en est de même de xD et de D' , ainsi que de $g * D$ pour toute fonction $g \in \mathcal{L}_c(\mathbb{R}^\times)$, par le théorème d'entrelacement 4.9. Si D a la propriété S -étendue, il en est de même de $D + D_1$ pour toute distribution quasi-homogène D_1 . Les distributions quasi-homogènes ont la propriété S -étendue, et ce sont les seules à l'avoir pour tous les $a > 0$.

DÉFINITION 4.53. — On dira qu'une fonction méromorphe $F(s)$ est modérée s'il existe un polynôme non-nul $P(s)$ tel que la fonction $P(s)F(s)$ est entière et modérée au sens de la définition 4.27.

THÉORÈME 4.54. — Soit D une distribution paire avec la propriété S -étendue. Sa transformée de Mellin $F(s) = \widehat{D}(s)$ est alors une fonction méromorphe dans le plan complexe, modérée, et telle que la fonction $\chi(s)F(1-s)$ est aussi une fonction méromorphe modérée. Réciproquement si F est une fonction méromorphe modérée telle que $\chi(s)F(1-s)$ est aussi méromorphe et modérée alors il existe une distribution paire avec la propriété S -étendue telle que $F(s) = \widehat{D}(s)$; on peut fixer D de manière unique en lui imposant d'être nulle dans un voisinage de l'origine. Les seules autres distributions paires avec la propriété S -étendue et la même transformée de Mellin sont celles qui diffèrent de D par une distribution quasi-homogène paire. On a $\widehat{\mathcal{F}(\overline{D})}(s) = \chi(s)\widehat{D}(1-s)$. Le même énoncé vaut dans le cas impair en remplaçant $\chi(s)$ par $\chi^{\sin}(s)$.

Soit D une distribution paire avec la propriété S -étendue, D^{qh} sa partie quasi-homogène, $E = \mathcal{F}(D)$, E^{qh} sa partie quasi-homogène. On a :

$$\mathcal{F}(D - D^{qh}) = E - E^{qh} + E^{qh} - \mathcal{F}(D^{qh}).$$

Il existe un polynôme unitaire $Q(T)$ tel que $Q(\frac{d}{dx}x)$ annule la distribution quasi-homogène $E^{qh}(x) - \mathcal{F}(D^{qh})(x)$. Soit $D_1(x) = Q(-x\frac{d}{dx})(D(x) - D^{qh}(x))$. Comme $\mathcal{F}x\frac{d}{dx} = -\frac{d}{dx}x\mathcal{F}$ on a :

$$\mathcal{F}(D_1)(x) = Q(\frac{d}{dx}x)(E(x) - E^{qh}(x)).$$

La distribution paire D_1 a donc la propriété S stricte. Sa transformée de Mellin $F_1(s) = \widehat{D}_1(s)$ est ainsi une fonction entière modérée telle que $\chi(s)F_1(1-s)$ est aussi entière et modérée. Or,

$$F_1(s) = Q(1-s)\widehat{D}(s),$$

donc $F(s) = \widehat{D}(s)$ est une fonction méromorphe modérée, et $\chi(s)F(1-s) = \chi(s)F_1(1-s)/Q(s)$ également.

Pour la réciproque, si F est méromorphe et modérée, et aussi $\chi(s)F(1-s)$ alors la fonction méromorphe $\mathcal{F}(s) = \pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma(\frac{s}{2})F(s)$ ne peut avoir qu'un nombre fini de pôles. Soit $P(s)$ le polynôme unitaire dont les racines sont ces pôles, avec multiplicités éventuelles. La fonction $F_1(s) = P(s)F(s)$ est entière et modérée et la fonction $\chi(s)F_1(1-s) = \chi(s)P(1-s)F(1-s) = P(1-s)\mathcal{F}(1-s)/(\pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma(\frac{s}{2}))$ l'est également. Donc, par le théorème 4.31 c'est qu'il existe une distribution D_1 paire avec la propriété S stricte pour un certain intervalle $] -a, a[$, $a > 0$, telle que $F_1(s) = \widehat{D}_1(s)$. Par le lemme 4.50 il existe une distribution paire tempérée $D(x)$ (unique), identiquement nulle dans $] -a, a[$, et vérifiant : $P(\frac{d}{dx}x)D(x) = D_1(x)$. C'est donc que $P(s)\widehat{D}(s) = \widehat{D}_1(s)$ ou encore $\widehat{D}(s) = F(s)$. On a $P(-x\frac{d}{dx})\mathcal{F}(D)(x) = \mathcal{F}(D_1)(x)$, donc par la proposition 4.51, la distribution $\mathcal{F}(D)$ est a -quasi-homogène. Donc D a la propriété S -étendue. De plus $P(1-s)\widehat{\mathcal{F}(D)}(s) = \widehat{\mathcal{F}(D_1)}(s) = \chi(s)\widehat{D}_1(1-s) = \chi(s)P(1-s)\widehat{D}(1-s)$ donc $\widehat{\mathcal{F}(D)}(s) = \chi(s)\widehat{D}(1-s)$. Si D_2 a la même transformation de Mellin, alors par la définition 4.45 et par 4.12, $D_2 - D_2^{qh} = D - D^{qh}$, donc D_2 diffère de D par une distribution quasi-homogène. Réciproquement, si c'est le cas alors $\widehat{D}_2 = \widehat{D}$. Si de plus à la fois D_2 et D sont nulles dans un voisinage de l'origine alors $D_2 = D$. La démonstration du théorème dans le cas impair est quasi-identique.

Dans ce théorème, on a normalisé D on lui imposant d'être nulle dans un voisinage de l'origine. On peut tout aussi bien imposer cette condition à $\mathcal{F}(D)$, quitte à remplacer D par $D - \mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}(D)^{qh})$. C'est cette normalisation que nous utiliserons pour décrire la partie polaire de $\pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma(\frac{s}{2})\widehat{D}(s)$.

THÉORÈME 4.55. — *Soit D une distribution paire avec la propriété S -étendue, normalisée de sorte que $\mathcal{F}(D)$ ait une partie quasi-homogène nulle. Soit $\sum_{w \in \mathbb{C}, k \in \mathbb{N}} c_{w,k} D^{w,k}$ la partie quasi-homogène D^{qh} de D (avec un nombre fini de coefficients non nuls). La partie polaire de la transformée de Mellin complète $\pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma(\frac{s}{2})\widehat{D}(s)$ est :*

$$\sum_{w \in \mathbb{C}, k \in \mathbb{N}} c_{w,k} \frac{(-1)k!}{(s-w)^{k+1}}.$$

Dans le cas où D est une distribution impaire avec la propriété S -étendue, normalisée de sorte que $\mathcal{F}(D)^{qh} \equiv 0$, la partie polaire de $\pi^{-\frac{s+1}{2}}\Gamma(\frac{s+1}{2})\widehat{D}(s)$ est donnée par la même formule avec $D^{qh} = \sum_{w \in \mathbb{C}, k \in \mathbb{N}} c_{w,k} E^{w,k}$.

La partie polaire ne dépend (linéairement, et indépendamment de $a > 0$) que de D^{qh} , puisque si $D^{qh} = D_1^{qh}$ alors $D - D_1$ a la propriété S -stricte

et donc les transformées de Mellin complètes de D et de D_1 diffèrent par une fonction entière et ont la même partie polaire. De plus si la partie polaire s'annule alors D par le théorème 4.54 diffère d'une distribution avec la propriété S -stricte par une distribution quasi-homogène. Comme $\mathcal{F}(D) \equiv 0$ dans un voisinage de l'origine cela n'est possible que si cette distribution quasi-homogène est nulle. Donc D^{qh} est nulle. Il existe ainsi une correspondance linéaire bijective entre les distributions quasi-homogènes réalisables et les parties polaires réalisables, qu'il s'agit de préciser. Notons que toutes les parties polaires sont effectivement réalisées, comme on le voit en partant d'une quelconque distribution non-nulle E avec la propriété S stricte en formant des combinaisons linéaires avec les fonctions $(s-w)^{-k-1} \pi^{-\frac{s}{2}} \Gamma(\frac{s}{2}) \widehat{E}(s)$, $w \in \mathbb{C}$, $k \in \mathbb{N}$ (k au moins égal à la multiplicité éventuelle de w comme zéro non-trivial). Supposons alors que la distribution D avec $\mathcal{F}(D)^{qh} \equiv 0$ soit telle que seul un certain w soit un pôle, d'ordre au plus $k+1$, $k \in \mathbb{N}$. Alors $(\frac{d}{dx}x-w)^{k+1}(D)$ a une transformée de Mellin complète entière; elle diffère donc d'une distribution avec la propriété S -stricte par une distribution quasi-homogène, mais celle-ci doit être nulle car sa transformée de Fourier doit elle aussi être identiquement nulle dans un voisinage de l'origine. Donc $(\frac{d}{dx}x-w)^{k+1}$ annule D^{qh} . Les distributions quasi-homogènes compatibles avec cette condition sont les $D^{w,j}$, $0 \leq j \leq k$, et leurs combinaisons linéaires qui forment un espace de dimension $k+1$. Toutes sont donc réalisées puisque toutes les parties polaires sont réalisées et que les dimensions correspondent.

Soit donc D telle que $D^{qh} = D^{w,0}$ pour un certain $w \in \mathbb{C}$ (et $\mathcal{F}(D)^{qh} \equiv 0$). Supposons tout d'abord que w n'est pas $0, -2, -4, \dots$. Soit g infiniment dérivable, non nulle, à support dans $]0, +\infty[$, compact et éloigné de l'origine. Par la méthode de la démonstration de 4.25 $\mathcal{F}(D)^{qh} \equiv 0$ implique que la fonction $(g * D)(x)$ (de classe C^∞ pour $x \neq 0$) est à décroissance rapide pour $x \rightarrow +\infty$. Sa partie quasi-homogène est $\widehat{g}(w)D^{w,0}$. La transformée de Mellin de $g * D$ est donc donnée par définition, pour $\text{Re}(s) \gg 0$, par

$$\int_a^\infty \left((g * D)(x) + (-1)\widehat{g}(w) \frac{x^{w-1}}{\pi^{-\frac{w}{2}} \Gamma(\frac{w}{2})} \right) x^{-s} dx,$$

avec $a > 0$ suffisamment petit. Le premier terme donne une fonction entière et le deuxième terme a comme partie polaire de son prolongement méromorphe $-\widehat{g}(w)(\pi^{-\frac{w}{2}} \Gamma(\frac{w}{2}))^{-1} \frac{1}{s-w}$. La partie polaire de la transformée de Mellin complète de $g * D$ est donc $-\widehat{g}(w) \frac{1}{s-w}$ (on savait déjà a priori par le paragraphe précédent que cette partie polaire était un multiple de $\frac{1}{s-w}$, donc malgré la multiplication par $\pi^{-\frac{s}{2}} \Gamma(\frac{s}{2})$, il n'y a

pas création de pôles additionnels en $s = 0, -2, -4, \dots$). On peut toujours choisir g avec $\widehat{g}(w) \neq 0$, et on conclut que la partie polaire de $\pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma(\frac{s}{2})\widehat{D}(s)$ est exactement $\frac{-1}{s-w}$, lorsque $D^{qh} = D^{w,0}$ et $\mathcal{F}(D)^{qh} \equiv 0$. Ceci a été démontré pour $w \neq 0, -2, -4, \dots$, mais en remplaçant D par $E = \mathcal{F}(D - D^{w,0}) = \mathcal{F}(D) - D^{1-w,0}$, on remplace $D^{w,0}$ par $-D^{1-w,0}$ et s par $1-s$ (par l'équation fonctionnelle du théorème 4.54), donc la conclusion vaut aussi sous l'autre condition $w \neq 1, 3, 5, \dots$. Elle vaut donc pour tout $w \in \mathbb{C}$.

Soit maintenant $\phi(x)$ une fonction paire non nulle dans \mathcal{S} et avec la propriété \mathcal{S} -stricte. Posons, pour $w \in \mathbb{C} : \phi_w(x) = |x|^w x^{-1} \int_0^x |y|^{-w} \phi(y) dy$, de sorte que ϕ_w est à nouveau nulle dans $] -a, a[$ et vérifie $(\frac{d}{dx} x - w)\phi_w = \phi$, et donc $(s-w)\widehat{\phi}_w(s) = \widehat{\phi}(s)$. On notera $\Phi(s) := \pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma(\frac{s}{2})\widehat{\phi}(s)$, qui est une fonction entière, et $\Phi_w(s) := \pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma(\frac{s}{2})\widehat{\phi}_w(s) = \frac{\Phi(s)}{s-w}$. Considérons, pour w restreint à l'ouvert U complémentaire dans \mathbb{C} des zéros non triviaux de $\widehat{\phi}(s)$, la distribution paire

$$\Delta_w := \frac{\phi_w - \mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}(\phi_w)^{qh})}{\Phi(w)},$$

qui est normalisée de sorte que $\mathcal{F}(\Delta_w)^{qh} \equiv 0$, et dont la transformée de Mellin est $\frac{1}{s-w} \frac{\Phi(s)}{\Phi(w)}$. Par ce qui précède on sait sans calcul que la partie quasi-homogène de Δ_w est exactement $-D^{w,0}$, et donc l'on peut aussi écrire $\Delta_w = \frac{1}{\Phi(w)}\phi_w - D^{w,0}$. Par ailleurs la formule qui définit ϕ_w prouve qu'en tant que distribution elle dépend analytiquement de w . La distribution Δ_w dépend donc analytiquement de w . Il faut aussi se convaincre que le passage à la transformée de Mellin est une opération qui commute à la dérivation un nombre quelconque de fois par rapport au paramètre w . Au facteur $\frac{1}{\Phi(w)}\pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma(\frac{s}{2})$ près il s'agit de regarder, au moins pour $\text{Re}(s) \gg 0$, $\int_a^\infty \phi_w(x)x^{-s} dx$. Certainement on peut permuter $(\frac{\partial}{\partial w})^k$ et l'intégrale, pour tout $k \in \mathbb{N}$, pour w dans un ouvert d'adhérence compacte dans U et pour $\text{Re}(s) \geq \sigma$ avec $\sigma \gg 0$. Par le principe du prolongement analytique, $(\frac{\partial}{\partial w})^k \frac{1}{s-w} \frac{\Phi(s)}{\Phi(w)}$ est la transformée de Mellin complète de $(\frac{\partial}{\partial w})^k \Delta_w$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ (et tout $w \in U$). Or la partie quasi-homogène de $(\frac{\partial}{\partial w})^k \Delta_w$ est $-D^{w,k}$, tandis que

$$\frac{1}{s-w} \frac{\Phi(s)}{\Phi(w)} = \frac{1}{s-w} + \frac{1}{\Phi(w)} \frac{\Phi(s) - \Phi(w)}{s-w}$$

diffère de $\frac{1}{s-w}$ par une fonction $F(s, w)$ conjointement analytique en $s \in \mathbb{C}$, $w \in U$. Donc la partie polaire de $(\frac{\partial}{\partial w})^k \frac{1}{s-w} \frac{\Phi(s)}{\Phi(w)}$, comme fonction de $s \in \mathbb{C}$ est exactement $\frac{k!}{(s-w)^{k+1}}$. Ainsi la partie polaire correspondant à la

distribution $D^{w,k}$ est exactement $-\frac{k!}{(s-w)^{k+1}}$. Ce résultat est établi pour w distinct des zéros non triviaux de $\widehat{\phi}(s)$, et en changeant ϕ il est donc établi pour tout $w \in \mathbb{C}$. Le théorème 4.55 est donc établi dans le cas pair, et le cas impair est traité quasiment à l'identique.

Il peut parfois être plus commode de disposer de la partie polaire de $\widehat{D}(s)$:

COROLLAIRE 4.56. — *Soit D une distribution non nulle, paire ou impaire, avec la propriété S -étendue, et normalisée par $\mathcal{F}(D)^{qh} \equiv 0$. Soit w distinct de $0, -2, -4, \dots$ si D est paire ou distinct de $-1, -3, -5, \dots$ si D est impaire. Soit $(c_0 + c_1 \log(x) + c_2 \log^2(x) + \dots + c_N \log^N(x))x^{w-1}$ la w -composante de la restriction (quasi-homogène) de D à $]0, a[$, $a > 0$ suffisamment petit. Alors la w -composante de la partie polaire de la transformée de Mellin simple $\widehat{D}(s)$ est*

$$\sum_{0 \leq k \leq N} c_k \frac{(-1)^k k!}{(s-w)^{k+1}}.$$

Nous traitons le cas pair. Notons $\gamma(s) = \pi^{-\frac{s}{2}} \Gamma(\frac{s}{2})$. Il suffit de considérer un cas où la restriction de D à $] -a, a[$ est $\log^N(|x|)|x|^{w-1}$. La composante quasi-homogène est donc $(\frac{\partial}{\partial w})^N \gamma(w) D^{w,0}$, que l'on peut écrire :

$$\sum_{0 \leq j \leq N} N! \frac{\gamma^{(N-j)}(w)}{(N-j)!} \frac{D^{w,j}}{j!}.$$

Par le théorème précédent la partie polaire de $\gamma(s)\widehat{D}(s)$ est

$$\sum_{0 \leq j \leq N} N! \frac{\gamma^{(N-j)}(w)}{(N-j)!} \frac{-1}{(s-w)^{j+1}},$$

qui est aussi la partie w -polaire du produit

$$N! \gamma(s) \frac{-1}{(s-w)^{N+1}}.$$

Ainsi $\gamma(s) \left(\widehat{D}(s) + \frac{N!}{(s-w)^{N+1}} \right)$ est holomorphe en w et donc la partie polaire de $\widehat{D}(s)$ en w est exactement $\frac{-N!}{(s-w)^{N+1}}$, ce qu'il fallait démontrer.

4.8. Exemples

Dans cette dernière section nous évoquerons brièvement quelques exemples, notables ou anodins, de distributions et de fonctions de carrés intégrables avec la propriété S ou la propriété S -étendue. À tout seigneur

tout honneur notre premier exemple est probablement le plus important : il s'agit bien sûr de la distribution de Poisson

$$D(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \delta_n(x).$$

Sa transformée de Mellin est $\zeta(s)$. Si l'on remplace D par $D - 1$ de sorte que $\mathcal{F}(D)^{qh} \equiv 0$, on a $D^{qh} = \delta_0 - 1 = D^{0,0} - D^{1,0}$. La partie polaire de $\pi^{-\frac{s}{2}} \Gamma(\frac{s}{2}) \zeta(s)$ est donc par le théorème 4.55 : $\frac{-1}{s} + \frac{1}{s-1}$, ce qui n'est certes pas un résultat d'une fracassante nouveauté. Notons néanmoins que la preuve du prolongement analytique et de l'équation fonctionnelle de la fonction $\zeta(s)$ implicite dans cette approche est nouvelle, et que ses mots-clés sont : régularisation multiplicative et transformée de Mellin, formule d'entrelacement (de co-Poisson), opérateur invariant d'échelle \mathcal{FI} , espaces de Hardy, espaces de de Branges, propriété S -étendue, fonctions de Nevanlinna.

Citons ensuite la fonction paire de carré intégrable :

$$f(x) = \frac{\{|x|\}}{|x|},$$

qui vérifie

$$-\frac{d}{dx} x f(x) = \sum_{n \neq 0} \delta_n(x) - 1 = D_1(x),$$

et dont la transformée de Mellin est donc $-\frac{\zeta(s)}{s}$ (on laisse au lecteur la vérification de la conformité de la partie polaire avec le théorème 4.55). L'avantage de la distribution D_1 c'est que les convolutions $g * D_1$ avec des fonctions de classe C^∞ à support compact éloigné de l'origine sont des fonctions de Schwartz (dont la transformée de Fourier est calculée par la formule de co-Poisson 1.5, c'est-à-dire par la formule d'entrelacement 4.9).

Des exemples d'un tout autre type sont fournis par les distributions paires A_a et B_a , et leurs analogues impaires, qui ont été obtenues dans [2]. L'opérateur sur $L^2(0, a; dx)$ donné par

$$\phi(x) \mapsto (x \mapsto \int_0^a 2 \cos(2\pi xy) \phi(y) dy)$$

est un opérateur auto-adjoint compact, et comme il n'existe pas de fonction non nulle à support compact dont la transformée de Fourier soit à support compact, la norme de cet opérateur est strictement inférieure à 1. Il existe donc une unique fonction $\phi_a \in L^2(0, a; dx)$ vérifiant

$$\phi_a(x) + \int_0^a 2 \cos(2\pi xy) \phi_a(y) dy = 2 \cos(2\pi ax).$$

Remarquons que l'on peut alors donner un sens par cette équation à $\phi_a(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ et même pour tout $x \in \mathbb{C}$ puisque l'intégrale et le cosinus sont des fonctions entières de x . Donc $\phi_a(x)$ est une fonction entière, paire, de x . Elle est $2 \cos(2\pi ax) + O(1/x)$ pour $x \rightarrow +\infty$, donc tempérée comme distribution de x . Par l'équation qui la définit sa transformée de Fourier vérifie l'équation :

$$\mathcal{F}(\phi_a)(y) + \mathbf{1}_{]-a, a[}(y)\phi_a(y) = \delta_a(y) + \delta_{-a}(y),$$

donc :

$$\mathcal{F}(\phi_a)(y) + \phi_a(y) = \delta_a(y) + \delta_{-a}(y) + \mathbf{1}_{|y| \geq a}(y)\phi_a(y).$$

et ainsi la distribution tempérée paire

$$A_a = \frac{\sqrt{a}}{2} (\mathcal{F}(\phi_a) + \phi_a)$$

est identiquement nulle dans $] -a, a[$. Comme elle est sa propre transformée de Fourier elle a la propriété S stricte (le facteur \sqrt{a} est introduit pour d'autres raisons ; cf. [2, 3]). De même en partant de

$$\phi_a^-(x) - \int_0^a 2 \cos(2\pi xy)\phi_a^-(y) dy = 2 \cos(2\pi ax)$$

et en définissant

$$B_a = \frac{i\sqrt{a}}{2} (\mathcal{F}(\phi_a^-) - \phi_a^-)$$

on obtient une autre distribution tempérée paire, anti-invariante sous Fourier, avec la propriété S stricte pour l'intervalle $] -a, a[$.

Les fonctions

$$\mathcal{A}_a(s) = \pi^{-\frac{s}{2}} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \widehat{A}_a(s) \quad \mathcal{B}_a(s) = \pi^{-\frac{s}{2}} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \widehat{B}_a(s)$$

sont donc par le théorème 4.26 des fonctions entières vérifiant les équations fonctionnelles

$$\mathcal{A}_a(s) = \mathcal{A}_a(1-s), \quad \mathcal{B}_a(s) = -\mathcal{B}_a(1-s),$$

et on notera aussi que

$$\mathcal{A}_a(s) = \overline{\mathcal{A}_a(\bar{s})}, \quad \mathcal{B}_a(s) = -\overline{\mathcal{B}_a(\bar{s})}.$$

Nous avons le théorème suivant (et des définitions analogues avec la fonction sinus mènent à des distributions impaires avec la propriété S pour l'intervalle $] -a, a[$ qui vérifient aussi ce théorème) :

THÉORÈME 4.57 ([2]). — *Les fonctions entières $\widehat{A}_a(s)$ et $\widehat{B}_a(s)$ ont tous leurs zéros non-triviaux sur la droite critique.*

Cela résulte des équations fonctionnelles et du fait suivant : la fonction entière $\mathcal{E}_a(s) = \mathcal{A}_a(s) - i\mathcal{B}_a(s)$ vérifie $|\mathcal{E}_a(s)| > |\mathcal{E}_a(\overline{1-s})|$ pour $\text{Re}(s) > \frac{1}{2}$, car $(|\mathcal{E}_a(s)|^2 - |\mathcal{E}_a(\overline{1-s})|^2)/(2\text{Re}(s) - 1)$ est le carré de la norme de l'évaluation en s de $\pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma(\frac{s}{2})\widehat{f}(s)$ pour f paire, de carré intégrable, nulle et de Fourier nulle dans $] -a, a[$. Que de telles transformées de Mellin (à un changement de variable près) forment un espace de de Branges au sens de [8] avait été démontré par de Branges dans [7], et de cela découlait déjà l'existence d'une fonction entière \mathcal{E}_a donnant la norme des évaluateurs par la formule ci-dessus, sans toutefois que l'on puisse en donner de formule explicite. Les distributions A_a et B_a ont été obtenues par l'auteur dans son article [2] qui résolvait ce problème de donner une formule « explicite » pour \mathcal{E}_a .

On peut aussi prouver 4.57, en donnant de plus une interprétation opératorielle aux zéros, en utilisant les équations différentielles par rapport à a qui ont été établies par l'auteur dans [3] et qui donnent la déformation des espaces de Hilbert de de Branges-Rovnyak-Fourier par rapport à $a > 0$.

Rappelons de plus que comme conséquence du théorème 4.26 (dont la preuve a fait appel à [5, Theorem 7.7]) le nombre des zéros de parties imaginaires entre 0 et T est équivalent à $T \log(T)/2\pi$.

Revenons pour conclure à des exemples déduits de la distribution de Poisson (ou de la fonction dzêta de Riemann) :

4.58. — Soit $0 < a < 1$, $A = 1/a$. La fonction paire donnée pour $x > 0$ selon :

$$f_a(x) = \sum_{ax \leq n \leq Ax} \frac{3(\frac{x}{n} + \frac{n}{x}) - (A + a + 4)}{\sqrt{nx}}$$

est de carré intégrable sur \mathbb{R} , vérifie $\mathcal{F}(f_a) = +f_a$, et est identiquement nulle sur l'intervalle $] -a, a[$.

4.59. — Soit $0 < a < 1$, $A = 1/a$. Soient $f_a(x), g_a(x), k_a(x)$ les fonctions impaires données pour $x > 0$ selon :

$$\begin{aligned} f_a(x) &= \sum_{ax \leq n + \frac{1}{2} \leq Ax} \frac{(-1)^n}{x} \\ g_a(x) &= \sum_{ax \leq n + \frac{1}{2} \leq Ax} \frac{(-1)^n}{n + \frac{1}{2}} \\ k_a(x) &= \sum_{ax \leq n + \frac{1}{2} \leq Ax} \frac{(-1)^n}{\sqrt{(n + \frac{1}{2})x}}. \end{aligned}$$

Elles sont de carrés intégrables sur \mathbb{R} et identiquement nulles sur $] -\frac{a}{2}, +\frac{a}{2}[$. La transformée en sinus de f_a est g_a . La fonction k_a est sa propre transformée en sinus.

4.60. — Soit $N \in \mathbb{N}$. Soit

$$Q_N(n) = \prod_{0 \leq j < N} (n(n+1) - j(j+1)).$$

La fonction paire (non-identiquement nulle!!) qui est donnée pour $x > 0$ par la formule :

$$\sum_{\substack{n \text{ tel que} \\ \frac{n+\frac{1}{2}}{\sqrt{N+\frac{1}{2}}} \leq 2x}} (-1)^n Q_N(n) \left(\left(\frac{x}{n+\frac{1}{2}} - \frac{1}{\sqrt{4N+2}} \right) \left(\frac{x}{n+\frac{1}{2}} - \frac{1}{\sqrt{N+\frac{1}{2}}} \right) \right)^{2N+1}$$

est de carré intégrable sur \mathbb{R} . Elle-même et sa transformée de Fourier sont identiquement nulles dans l'intervalle $] -\frac{1}{2}(N+\frac{1}{2})^{1/2}, +\frac{1}{2}(N+\frac{1}{2})^{1/2}[$.

Remerciements. Je remercie Jean-Pierre Kahane : dans sa lettre (22 mars 2002) il m'indiquait une construction explicite de fonctions dans \mathcal{S} avec la propriété de support pour un intervalle $] -a, a[$ quelconque, par modification puis régularisation par convolution additive de la distribution de Poisson. En étudiant la régularisation multiplicative et les propriétés des fonctions analytiques obtenues par transformation de Mellin, j'avais alors établi plusieurs des résultats qui ont été présentés ici et qui furent déjà employés dans [2]. Je remercie Luis Báez-Duarte : plusieurs échanges depuis décembre 2001 sur la formule de co-Poisson, en particulier sur l'intérêt de résultats dans un style « classique » (tel que celui de l'ouvrage de Titchmarsh [21]), m'ont incité à obtenir plusieurs parmi les propositions qui ont été présentées ici.

Le présent manuscrit est celui qui a été annoncé par l'auteur dans de précédentes publications sous le titre « Co-Poisson intertwining : distribution and function theoretic aspects ».

BIBLIOGRAPHIE

- [1] J.-F. BURNOL, « Sur certains espaces de Hilbert de fonctions entières, liés à la transformation de Fourier et aux fonctions L de Dirichlet et de Riemann », *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.* **333** (2001), n° 3, p. 201-206.

- [2] ———, « Sur les “espaces de Sonine” associés par de Branges à la transformation de Fourier », *C. R. Math. Acad. Sci. Paris* **335** (2002), n° 8, p. 689-692.
- [3] ———, « Des équations de Dirac et de Schrödinger pour la transformation de Fourier », *C. R. Math. Acad. Sci. Paris* **336** (2003), n° 11, p. 919-924.
- [4] ———, « On Fourier and Zeta(s) », *Forum Math.* **16** (2004), n° 6, p. 789-840.
- [5] ———, « Two complete and minimal systems associated with the zeros of the Riemann Zeta function », *J. Théor. Nombres Bordeaux* **16** (2004), n° 1, p. 65-94.
- [6] ———, « Spacetime causality in the study of the Hankel transform », *Annales Henri Poincaré* **7** (2006), p. 1013-1034.
- [7] L. DE BRANGES, « Self-reciprocal functions », *J. Math. Anal. Appl.* **9** (1964), p. 433-457.
- [8] ———, *Espaces hilbertiens de fonctions entières*, Masson et Cie. Éditeurs, Paris, 1972, Traduit de l'anglais par R. Parrot.
- [9] R. J. DUFFIN, « Representation of Fourier integrals as sums I, II, III », *Bull. Am. Math. Soc.* 51 (1945), 447-455; *Proc. Am. Math. Soc.* 1 (1950), 250-255; *Proc. Am. Math. Soc.* 8 (1957), 272-277.
- [10] R. J. DUFFIN & H. F. WEINBERGER, « Dualizing the Poisson summation formula », *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.* **88** (1991), n° 16, p. 7348-7350.
- [11] ———, « On dualizing a multivariable Poisson summation formula », *J. Fourier Anal. Appl.* **3** (1997), n° 5, p. 487-497, Dedicated to the memory of Richard J. Duffin.
- [12] H. DYM & H. P. MCKEAN, *Fourier series and integrals*, Academic Press, New York, 1972.
- [13] I. M. GEL'FAND, M. I. GRAEV & I. I. PYATETSKII-SHAPIRO, *Representation theory and automorphic functions*, W. B. Saunders Co., Philadelphia, Pa., 1969, Translated from the Russian by K. A. Hirsch.
- [14] L. HÖRMANDER, *The analysis of linear partial differential operators. I*, vol. 256, Springer-Verlag, Berlin, 1983.
- [15] Y. KATZNELSON, « Une remarque concernant la formule de Poisson », *Studia Math.* **29** (1967), p. 107-108.
- [16] C. H. MÜNTZ, « Beziehungen der Riemannschen-Funktion zu willkürlichen reellen Funktionen », *Mat. Tidsskrift B* (1922), p. 39-47.
- [17] M. ROSENBLUM & J. ROVNYAK, *Topics in Hardy classes and univalent functions*, Birkhäuser Verlag, Basel, 1994.
- [18] J. ROVNYAK & V. ROVNYAK, « Self-reciprocal functions for the Hankel transformation of integer order », *Duke Math. J.* **34** (1967), p. 771-785.
- [19] ———, « Sonine spaces of entire functions », *J. Math. Anal. Appl.* **27** (1969), p. 68-100.
- [20] L. SCHWARTZ, *Théorie des distributions*, Hermann, Paris, 1966.
- [21] E. C. TITCHMARSH, *Introduction to the theory of Fourier integrals*, third éd., Chelsea Publishing Co., New York, 1986.
- [22] ———, *The theory of the Riemann zeta-function*, second éd., The Clarendon Press Oxford University Press, New York, 1986.
- [23] H. F. WEINBERGER, *Fourier transforms of Moebius series*, Ph.D. Dissertation, Carnegie-Mellon University, Pittsburgh, 1950.

Manuscrit reçu le 12 décembre 2005,
accepté le 6 juillet 2006.

Jean-François BURNOL
Université Lille 1
UFR de Mathématiques
Cité Scientifique M2
59655 Villeneuve d'Ascq Cedex (France)
burnol@math.univ-lille1.fr