



# ANNALES

DE

# L'INSTITUT FOURIER

Naoufel BATTIKH

**Relation entre les conjectures de Farrell-Jones en  $K$ -théories algébrique et hermitienne**

Tome 57, n° 1 (2007), p. 197-207.

[http://aif.cedram.org/item?id=AIF\\_2007\\_\\_57\\_1\\_197\\_0](http://aif.cedram.org/item?id=AIF_2007__57_1_197_0)

© Association des Annales de l'institut Fourier, 2007, tous droits réservés.

L'accès aux articles de la revue « Annales de l'institut Fourier » (<http://aif.cedram.org/>), implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://aif.cedram.org/legal/>). Toute reproduction en tout ou partie cet article sous quelque forme que ce soit pour tout usage autre que l'utilisation à fin strictement personnelle du copiste est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

cedram

Article mis en ligne dans le cadre du  
Centre de diffusion des revues académiques de mathématiques  
<http://www.cedram.org/>

# RELATION ENTRE LES CONJECTURES DE FARRELL-JONES EN $K$ -THÉORIES ALGÈBRIQUE ET HERMITIENNE

par Naoufel BATTIKH

---

RÉSUMÉ. — On montre que si la conjecture de Farrell-Jones en  $K$ -théorie algébrique est vérifiée alors celle de la  $K$ -théorie hermitienne est équivalente à l'existence d'un entier  $p \in \mathbb{Z}$  tel que “assembly map” soit un isomorphisme en degré  $p$  et  $p + 1$ .

ABSTRACT. — We prove that if the Farrell-Jones conjecture for algebraic  $K$ -theory is true then the same conjecture for hermitian  $K$ -theory is equivalent to the fact that it exists  $p \in \mathbb{Z}$  such that the assembly map is an isomorphism in degrees  $p$  and  $p + 1$ .

## 1. Introduction

Soient  $A$  un anneau et  $G$  un groupe discret. Dans [6] et pour tout  $n \in \mathbb{Z}$ , Loday définit un morphisme de groupes

$$\lambda_n : h_n(BG, \mathcal{K}_A) \longrightarrow K_n(AG)$$

couramment appelé “assembly map”. Les groupes d’homologie  $h_n(BG, \mathcal{K}_A)$  étant les groupes d’homotopie  $\pi_n(BG_+ \wedge \mathcal{K}_A)$  où  $\mathcal{K}_A$  est le spectre de  $K$ -théorie algébrique de l’anneau  $A$ . D’une façon analogue et pour tout  $n \in \mathbb{Z}$ , on définit pour un anneau hermitien  $A$ , un morphisme de groupes

$$\alpha_n : h_n(BG, \mathcal{L}_A) \longrightarrow L_n(AG)$$

où les groupes  $h_n(BG, \mathcal{L}_A)$  sont les groupes d’homotopie  $\pi_n(BG_+ \wedge \mathcal{L}_A)$  et  $\mathcal{L}_A$  est le spectre de  $K$ -théorie hermitienne associé à  $A$ . Dans [3] Farrell

et Jones ont conjecturé que pour  $A = Z$  le morphisme  $\lambda_n$  est un isomorphisme pour tout  $n \in Z$ . Ils ont aussi conjecturé que si  $A = Z \left[ \frac{1}{2} \right]$ , les morphismes  $\alpha_n$  sont des isomorphismes. Dans cet article, on prouve que si  $A$  est un anneau hermitien pour lequel la conjecture de Farrell-Jones est vérifiée en K-théorie algébrique, celle de la K-théorie hermitienne est alors équivalente à l'existence d'un entier relatif  $p$ , tel que  $\alpha_p$  et  $\alpha_{p+1}$  soient des isomorphismes.

## 2. Les spectres $\mathcal{K}_A$ et $\mathcal{L}_A$

### 2.1. Définitions

Soit  $A$  un anneau. Pour tout  $n \in Z$ , on pose,

$$(\mathcal{K}_A)_n = \begin{cases} \Omega^{-n} \left( K_0(A) \times BGL(A)^+ \right) & \text{si } n \leq 0 \\ K_0(S^n A) \times BGL(S^n A)^+ & \text{si } n \geq 0 \end{cases}$$

L'espace  $S^n A$  étant la  $n$ ème suspension algébrique de  $A$ . Loday montre dans [6] que  $\mathcal{K}_A$  est un  $\Omega$ -spectre et que pour tout  $n \in Z$ , on a

$$\pi_n(\mathcal{K}_A) = K_n(A) : \text{le } n\text{ème groupe de K-théorie algébrique de } A.$$

De même si  $A$  est un anneau hermitien, on pose pour tout  $n \in Z$

$$(\mathcal{L}_A)_n = \begin{cases} \Omega^{-n} \left( L_0(A) \times B_\varepsilon O(A)^+ \right) & \text{si } n \leq 0 \\ L_0(S^n A) \times B_\varepsilon O(S^n A)^+ & \text{si } n \geq 0 \end{cases}$$

où  $\varepsilon$  est un élément du centre de  $A$  tel que  $\varepsilon\bar{\varepsilon} = 1$ . Loday montre dans [6] que  $\mathcal{L}_A$  est un  $\Omega$ -spectre et que pour tout  $n \in Z$ ,

$$\pi_n(\mathcal{L}_A) = {}_\varepsilon L_n(A) : \text{le } n\text{ème groupe de K-théorie hermitienne de } A.$$

### 2.2. La structure multiplicative des spectres $\mathcal{K}_A$ et $\mathcal{L}_A$

Si  $A$  et  $B$  sont deux anneaux, un isomorphisme

$$\varphi : A^p \otimes B^q \longrightarrow (A \otimes B)^{pq}$$

de  $A \otimes B$ -modules permet par le produit tensoriel des matrices de définir un morphisme de groupes

$$GL_p(A) \times GL_q(B) \longrightarrow GL_{pq}(A \otimes B)$$

et donc une application continue

$$\gamma : BGL(A)^+ \times BGL(B)^+ \longrightarrow BGL(A \otimes B)^+$$

bien définie à homotopie faible près (cf. [6] pour plus de détails). D'autre part, le produit tensoriel des modules définit un produit

$$K_0(A) \times K_0(B) \longrightarrow K_0(A \otimes B)$$

et on a alors la proposition suivante :

PROPOSITION 2.1 ([6]). — *Pour tous anneaux  $A$  et  $B$ , l'application*

$$\gamma : BGL(S^n A)^+ \wedge BGL(S^m B)^+ \longrightarrow BGL(S^{n+m}(A \otimes B))^+$$

*s'étend à un accouplement de spectres*

$$\mathcal{K}_A \wedge \mathcal{K}_B \longrightarrow \mathcal{K}_{A \otimes B}$$

*au sens de Whitehead [7].*

### 3. “Assembly map”

#### 3.1. “Assembly map” pour la $K$ -théorie algébrique

Pour tout anneau  $A$ , le  $\Omega$ -spectre  $\mathcal{K}_A$  définit une théorie d'homologie généralisée de la catégorie des  $CW$ -complexes finis dans celles des groupes abéliens (cf. [7]) et ce en posant, pour tout  $CW$ -complexe fini  $X$ ,

$$h_n(X, \mathcal{K}_A) = \pi_n(X_+ \wedge \mathcal{K}_A).$$

Soient  $A$  un anneau et  $G$  un groupe discret. L'inclusion

$$j : G \longrightarrow GL(ZG)$$

induit l'application

$$j^+ : BG \longrightarrow BGL(ZG)^+$$

En composant  $j^+$  par l'application

$$\begin{aligned} BGL(ZG)^+ &\longrightarrow K_0(ZG) \times BGL(ZG)^+ \\ x &\longmapsto (0, x) \end{aligned}$$

on obtient l'application

$$BG \longrightarrow (\mathcal{K}_{ZG})_0$$

qui nous permet d'énoncer la proposition suivante.

PROPOSITION 3.1 ([6]). — *La composée*

$$(\mathcal{K}_A)_n \wedge BG_+ \longrightarrow (\mathcal{K}_A)_n \wedge (\mathcal{K}_{ZG})_0 \longrightarrow (\mathcal{K}_{AG})_n$$

définit un morphisme de spectres.

Ce morphisme de spectres induit par passages aux groupes d'homotopies "l'assembly map" :

$$\lambda_n : h_n(BG, \mathcal{K}_A) \longrightarrow K_n(AG)$$

### 3.2. "Assembly map" pour la K-théorie hermitienne

Soient  $A$  un anneau hermitien contenant  $\frac{1}{2}$  et  $G$  un groupe discret. L'anneau  $AG$  est muni de l'antiinvolution

$$\overline{\sum a_i g_i} = \sum \overline{a_i} g_i^{-1}$$

De façon analogue à la K-théorie et en utilisant l'inclusion

$$G \longrightarrow_\varepsilon O(ZG)$$

$$g \longmapsto \varphi \begin{pmatrix} g & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \varphi^{-1} \quad \text{où } \varphi = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

on définit "l'assembly map" pour la K-théorie hermitienne

$$\alpha_n : h_n(BG, \mathcal{L}_A) \longrightarrow_\varepsilon L_n(AG)$$

Ce qui nous permet d'énoncer les conjectures de Farrell et Jones :

CONJECTURE 3.2 ([2]). — *Pour tout groupe  $G$  sans torsion les morphismes*

$$\lambda_n : h_n(BG, \mathcal{K}_Z) \longrightarrow K_n(ZG) \quad \text{et} \quad \alpha_n : h_n(BG, \mathcal{L}_{Z'}) \longrightarrow_\varepsilon L_n(Z'G)$$

sont des isomorphismes pour tout  $n \in \mathbb{Z}$ . (L'anneau  $Z'$  étant  $Z[\frac{1}{2}]$ ).

Remarque 3.3 ([1]). — Cette conjecture de Farrell-Jones est fautive pour un anneau quelconque puisque si on prend  $G = C$  : le groupe cyclique infini, la formule de Bass-Heller-Swan [3] pour  $K_n(RC) = K_n(R[t, t^{-1}])$  induit que

$$K_n(RC) \simeq K_{n-1}(R) \oplus K_n(R) \oplus NK_n(R) \oplus NK_n(R)$$

où  $NK_n(R)$  désigne le coker de l'inclusion  $K_n(R) \longrightarrow K_n(R[t])$  qui n'est pas nul en général. D'autre part et puisque  $S^1$  est un modèle de  $BC$ , on a

$$h_n(BG, \mathcal{K}_A) \simeq K_{n-1}(R) \oplus K_n(R).$$

## 4. Foncteur hyperbolique et foncteur oubli

### 4.1. Définition

Soit  $A$  un anneau hermitien. On notera  $\mathcal{P}(A)$  la catégorie dont les objets sont les  $A$ -modules projectifs de type fini et les morphismes sont les isomorphismes et on notera  ${}_{\varepsilon}\mathcal{Q}(A)$  la catégorie dont les objets sont les  $A$ -modules projectifs de type fini munis de forme  $\varepsilon$ -hermitienne et les morphismes sont les isométries. Le foncteur “hyperbolique”

$$H : \mathcal{P}(A) \longrightarrow_{\varepsilon} \mathcal{Q}(A)$$

est le foncteur qui à tout  $A$ -module  $M$  associe  $H(M) = M \oplus {}^t M$  ( ${}^t M$  étant le dual de  $M$ ) qu'on munit de la forme  $\varepsilon$ -hermitienne associée à l'isomorphisme

$$\Theta : M \oplus {}^t M \longrightarrow {}^t (M \oplus {}^t M) \simeq {}^t M \oplus M$$

définie par la matrice suivante

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \varepsilon & 0 \end{pmatrix}$$

À tout isomorphisme  $f : M \longrightarrow N$ , on associe l'isométrie

$$H(f) : H(M) \longrightarrow H(N)$$

définie par la matrice

$$\begin{pmatrix} f & 0 \\ 0 & {}^t f^{-1} \end{pmatrix}$$

Ce foncteur induit une application

$$K_0(A) \longrightarrow_{\varepsilon} L_0(A)$$

D'autre part, on a un morphisme de groupes

$$GL_r(A) \longrightarrow_{\varepsilon} O_{r,r}(A)$$

défini par la correspondance

$$M \longrightarrow \begin{pmatrix} M & 0 \\ 0 & {}^t M^{-1} \end{pmatrix}$$

qui induit après passage aux limites inductives le morphisme

$$GL(A) \longrightarrow_{\varepsilon} O(A)$$

d'où l'application

$$(\mathcal{K}_A)_0 \longrightarrow (\mathcal{L}_A)_0$$

On notera  ${}_{\varepsilon}\mathcal{U}(A)$  la fibre homotopique de cette application. Le foncteur “oubli”

$$F : {}_{\varepsilon}\mathcal{Q}(A) \longrightarrow \mathcal{P}(A)$$

est le foncteur induit par les inclusions des objets et des morphismes. Ce foncteur induit une application

$${}_{\varepsilon}L_0(A) \longrightarrow K_0(A)$$

D'autre part, l'inclusion naturelle de  ${}_{\varepsilon}O_{r,r}(A)$  dans  $GL_{2r}(A)$  induit, par passage aux limites inductives le morphisme

$${}_{\varepsilon}O(A) \longrightarrow GL(A)$$

d'où l'application

$$(\mathcal{L}_A)_0 \longrightarrow (\mathcal{K}_A)_0$$

On notera  ${}_{\varepsilon}\mathcal{V}(A)$  la fibre homotopique de cette application. Ceci nous amène à énoncer le théorème suivant qui est dû à Karoubi.

**THÉORÈME 4.1** ([5]). — *Soit  $A$  un anneau hermitien contenant un élément  $\lambda$  dans son centre vérifiant  $\lambda + \bar{\lambda} = 1$  (cette condition est satisfaite si  $\frac{1}{2} \in A$ ). Il existe alors une équivalence d'homotopie naturelle entre les espaces  $\Omega_{\varepsilon}\mathcal{U}(A)$  et  ${}_{-\varepsilon}\mathcal{V}(A)$ .*

Pour tout  $n \geq 0$  on pose  ${}_{\varepsilon}U_n(A) = \pi_n({}_{\varepsilon}\mathcal{U}(A))$  et  ${}_{\varepsilon}V_n(A) = \pi_n({}_{\varepsilon}\mathcal{V}(A))$ . Pour  $n \leq 0$  on pose,  ${}_{\varepsilon}U_n(A) = {}_{\varepsilon}U_0(S^{-n}A)$  et  ${}_{\varepsilon}V_n(A) = {}_{\varepsilon}V_0(S^{-n}A)$ .

Pour tout  $n \in \mathbb{Z}$  on aura alors

$${}_{\varepsilon}U_{n+1}(A) \simeq_{{-\varepsilon}} V_n(A).$$

On aura aussi les longues suites exactes suivantes

$$\begin{aligned} \cdots \longrightarrow K_{n+1}(A) \longrightarrow {}_{\varepsilon}V_n(A) \longrightarrow {}_{\varepsilon}L_n(A) \longrightarrow K_n(A) \longrightarrow {}_{\varepsilon}V_{n-1}(A) \longrightarrow \cdots \\ \cdots \longrightarrow {}_{\varepsilon}L_{n+1}(A) \longrightarrow {}_{\varepsilon}U_n(A) \longrightarrow K_n(A) \longrightarrow {}_{\varepsilon}L_n(A) \longrightarrow {}_{\varepsilon}U_{n-1}(A) \longrightarrow \cdots \end{aligned}$$

## 5. Relation entre les conjectures de Farrell-Jones

### 5.1. Les spectres ${}_{\varepsilon}\mathcal{U}_A$ et ${}_{\varepsilon}\mathcal{V}_A$ .

Soit  $A$  un anneau hermitien. Pour tout  $n \in \mathbb{Z}$ , on notera  $({}_{\varepsilon}\mathcal{U}_A)_n$  la fibre homotopique de l'application  $(\mathcal{K}_A)_n \longrightarrow ({}_{\varepsilon}\mathcal{L}_A)_n$  induite par le foncteur hyperbolique. De même on notera  $({}_{\varepsilon}\mathcal{V}_A)_n$  la fibre homotopique de l'application  $({}_{\varepsilon}\mathcal{L}_A)_n \longrightarrow (\mathcal{K}_A)_n$  induite par le foncteur oubli et on a le lemme suivant.

LEMME 5.1. — Pour tout anneau hermitien contenant  $\frac{1}{2}$  les suites d'espaces  $(\varepsilon\mathcal{U}_A)_*$  et  $(\varepsilon\mathcal{V}_A)_*$  sont des  $\Omega$ -spectres et pour tout  $n \in Z$ , on a

$$\Omega(\varepsilon\mathcal{U}_A)_n \simeq (-\varepsilon\mathcal{V}_A)_n$$

Démonstration. —

Les applications  $S^1 \wedge (\varepsilon\mathcal{U}_A)_n \rightarrow (\varepsilon\mathcal{U}_A)_{n+1}$  et  $S^1 \wedge (\varepsilon\mathcal{V}_A)_n \rightarrow (\varepsilon\mathcal{V}_A)_{n+1}$  sont induites par les diagrammes suivant

$$\begin{array}{ccccc} S^1 \wedge (\varepsilon\mathcal{U}_A)_n & \longrightarrow & S^1 \wedge (\mathcal{K}_A)_n & \longrightarrow & S^1 \wedge (\varepsilon\mathcal{L}_A)_n \\ & & \downarrow & & \downarrow \\ (\varepsilon\mathcal{U}_A)_{n+1} & \longrightarrow & (\mathcal{K}_A)_{n+1} & \longrightarrow & (\varepsilon\mathcal{L}_A)_{n+1} \\ S^1 \wedge (\varepsilon\mathcal{V}_A)_n & \longrightarrow & S^1 \wedge (\varepsilon\mathcal{L}_A)_n & \longrightarrow & S^1 \wedge (\mathcal{K}_A)_n \\ & & \downarrow & & \downarrow \\ (\varepsilon\mathcal{V}_A)_{n+1} & \longrightarrow & (\varepsilon\mathcal{L}_A)_{n+1} & \longrightarrow & (\mathcal{K}_A)_{n+1} \end{array}$$

Ce qui induit que leur adjointes sont des équivalences d'homotopies. Ensuite pour tout  $n \in Z$ , on a

$$(\varepsilon\mathcal{V}_A)_n = \begin{cases} \Omega^{-n}(\varepsilon\mathcal{V}(A)) & \text{si } n \leq 0 \\ \varepsilon\mathcal{V}(S^n A) & \text{si } n \geq 0 \end{cases}$$

et

$$(\varepsilon\mathcal{U}_A)_n = \begin{cases} \Omega^{-n}(\varepsilon\mathcal{U}(A)) & \text{si } n \leq 0 \\ \varepsilon\mathcal{U}(S^n A) & \text{si } n \geq 0 \end{cases}$$

d'où le fait que pour tout  $n \in Z$ ,

$$\Omega(\varepsilon\mathcal{U}_A)_n \simeq (-\varepsilon\mathcal{V}_A)_n$$

□

THÉORÈME 5.2. — Soit  $A$  un anneau hermitien, contenant  $\frac{1}{2}$ , pour lequel la conjecture de Farrell-Jones est vraie en  $K$ -théorie algébrique. Celle de la  $K$ -théorie hermitienne est alors équivalente à l'existence d'un entier  $n \in Z$  tel que  $\alpha_n$  et  $\alpha_{n-1}$  soient des isomorphismes.

Démonstration. — Pour tout  $n \in Z$ , on a les diagrammes de suites exactes suivants :

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots \rightarrow h_n(BG, \varepsilon\mathcal{U}_A) & \rightarrow & h_n(BG, \mathcal{K}_A) & \rightarrow & h_n(BG, \varepsilon\mathcal{L}_A) & \rightarrow & h_{n-1}(BG, \varepsilon\mathcal{U}_A) \rightarrow \cdots \\ & & \downarrow \lambda_n & & \downarrow \alpha_n & & \downarrow \\ \cdots \rightarrow \varepsilon U_n(AG) & \rightarrow & K_n(AG) & \rightarrow & \varepsilon L_n(AG) & \rightarrow & \varepsilon U_{n-1}(AG) \rightarrow \cdots \end{array}$$



$$\begin{array}{ccccccc}
 \cdots & \rightarrow & h_n(BG, \varepsilon \mathcal{V}_A) & \rightarrow & h_n(BG, \varepsilon \mathcal{L}_A) & \rightarrow & h_n(BG, \mathcal{K}_A) \rightarrow h_{n-1}(BG, \varepsilon \mathcal{V}_A) \rightarrow \cdots \\
 & & \downarrow & & \alpha_n \downarrow & & \lambda_n \downarrow & & \downarrow \\
 \cdots & \rightarrow & \varepsilon V_n(AG) & \rightarrow & \varepsilon L_n(AG) & \rightarrow & K_n(AG) & \rightarrow & \varepsilon V_{n-1}(AG) \rightarrow \cdots
 \end{array}$$

Supposons donc que la conjecture soit vraie en K-théorie algébrique et que  $\alpha_{n-1}$  et  $\alpha_n$  soient des isomorphismes. On a alors le diagramme suivant

$$\begin{array}{ccccccc}
 \cdots & \rightarrow & h_n(BG, \varepsilon \mathcal{L}_A) & \rightarrow & h_n(BG, \mathcal{K}_A) & \rightarrow & h_{n-1}(BG, \varepsilon \mathcal{V}_A) \cdots \\
 & & \wr \downarrow & & \wr \downarrow & & \downarrow \\
 \cdots & \rightarrow & \varepsilon L_n(AG) & \rightarrow & K_n(AG) & \rightarrow & \varepsilon V_{n-1}(AG) \cdots \\
 & & & & & & \rightarrow h_{n-1}(BG, \varepsilon \mathcal{L}_A) \rightarrow h_{n-1}(BG, \mathcal{K}_A) \rightarrow \\
 & & & & & & \wr \downarrow & & \wr \downarrow \\
 & & & & & & \rightarrow \varepsilon L_{n-1}(AG) & \rightarrow & K_{n-1}(AG) \rightarrow
 \end{array}$$

Ce diagramme montre que le morphisme suivant

$$h_{n-1}(BG, \varepsilon \mathcal{V}_A) \longrightarrow \varepsilon V_{n-1}(AG)$$

est un isomorphisme. Par conséquent le morphisme

$$h_n(BG, \varepsilon \mathcal{U}_A) \longrightarrow \varepsilon U_n(AG)$$

est aussi un isomorphisme. Du diagramme

$$\begin{array}{ccccccc}
 \rightarrow h_{n+1}(BG, \mathcal{K}_A) \rightarrow h_{n+1}(BG, \varepsilon \mathcal{L}_A) \rightarrow h_n(BG, \varepsilon \mathcal{U}_A) \rightarrow h_n(BG, \varepsilon \mathcal{K}_A) \rightarrow \\
 \wr \downarrow & & \downarrow & & \wr \downarrow & & \wr \downarrow \\
 \rightarrow K_{n+1}(AG) \rightarrow \varepsilon L_{n+1}(AG) \rightarrow \varepsilon U_n(AG) \rightarrow K_n(AG) \rightarrow
 \end{array}$$

on déduit que le morphisme

$$h_{n+1}(BG, \varepsilon \mathcal{L}_A) \longrightarrow \varepsilon L_{n+1}(AG)$$

est surjectif. Considérons alors le diagramme suivant

$$\begin{array}{ccccccc}
 \cdots \rightarrow h_{n+1}(BG, \varepsilon \mathcal{L}_A) \rightarrow h_{n+1}(BG, \mathcal{K}_A) \rightarrow h_n(BG, \varepsilon \mathcal{V}_A) \cdots \\
 \wr \downarrow & & \wr \downarrow & & \downarrow \\
 \cdots \rightarrow \varepsilon L_{n+1}(AG) \rightarrow K_{n+1}(AG) \rightarrow \varepsilon V_n(AG) \cdots \\
 & & & & \rightarrow h_n(BG, \varepsilon \mathcal{L}_A) \rightarrow h_n(BG, \mathcal{K}_A) \rightarrow \\
 & & & & \wr \downarrow & & \wr \downarrow \\
 & & & & \rightarrow \varepsilon L_n(AG) \rightarrow K_n(AG) \rightarrow
 \end{array}$$

Ce diagramme montre que le morphisme

$$h_n(BG, \varepsilon \mathcal{V}_A) \longrightarrow_{\varepsilon} V_n(AG)$$

est un isomorphisme. D'où le morphisme

$$h_{n+1}(BG, \varepsilon \mathcal{U}_A) \longrightarrow_{\varepsilon} U_{n+1}(AG)$$

est aussi un isomorphisme. Soit enfin, le diagramme suivant

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \longrightarrow & h_{n+1}(BG, \varepsilon \mathcal{U}_A) & \longrightarrow & h_{n+1}(BG, \mathcal{K}_A) & \longrightarrow & h_{n+1}(BG, \varepsilon \mathcal{L}_A) & \cdots \\ & & \wr \downarrow & & \wr \downarrow & & \downarrow & \\ \cdots & \longrightarrow & \varepsilon U_{n+1}(AG) & \longrightarrow & K_{n+1}(AG) & \longrightarrow & \varepsilon L_{n+1}(AG) & \cdots \\ & & & & \longrightarrow & & h_n(BG, \varepsilon \mathcal{U}_A) & \longrightarrow & h_n(BG, \mathcal{K}_A) & \longrightarrow \\ & & & & & & \wr \downarrow & & \wr \downarrow & \\ & & & & \longrightarrow & & \varepsilon U_n(AG) & \longrightarrow & K_n(AG) & \longrightarrow \end{array}$$

Ce diagramme prouve que le morphisme

$$\alpha_{n+1} : h_{n+1}(BG, \varepsilon \mathcal{L}_A) \longrightarrow_{\varepsilon} L_{n+1}(AG)$$

est un isomorphisme. D'un autre côté, le diagramme suivant

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \longrightarrow & h_n(BG, \mathcal{K}_A) & \longrightarrow & h_n(BG, \varepsilon \mathcal{L}_A) & \longrightarrow & h_{n-1}(BG, \varepsilon \mathcal{U}_A) & \cdots \\ & & \wr \downarrow & & \wr \downarrow & & \downarrow & \\ \cdots & \longrightarrow & K_n(AG) & \longrightarrow & \varepsilon L_n(AG) & \longrightarrow & \varepsilon U_{n-1}(AG) & \cdots \\ & & & & \longrightarrow & & h_{n-1}(BG, \mathcal{K}_A) & \longrightarrow & h_{n-1}(BG, \varepsilon \mathcal{L}_A) & \longrightarrow \\ & & & & & & \wr \downarrow & & \wr \downarrow & \\ & & & & \longrightarrow & & K_{n-1}(AG) & \longrightarrow & \varepsilon L_{n-1}(AG) & \longrightarrow \end{array}$$

montre que le morphisme

$$h_{n-1}(BG, \varepsilon \mathcal{U}_A) \longrightarrow_{\varepsilon} U_{n-1}(AG)$$

est un isomorphisme. Ce qui implique que le morphisme

$$h_{n-2}(BG, \varepsilon \mathcal{V}_A) \longrightarrow_{\varepsilon} V_{n-2}(AG)$$

l'est aussi. Ensuite le diagramme suivant

$$\begin{array}{ccccccc} \rightarrow & h_{n-1}(BG, \mathcal{K}_A) & \rightarrow & h_{n-2}(BG, \varepsilon \mathcal{V}_A) & \rightarrow & h_{n-2}(BG, \varepsilon \mathcal{L}_A) & \rightarrow & h_{n-2}(BG, \mathcal{K}_A) & \rightarrow \\ & \downarrow & & \lambda_n \downarrow & & \alpha_n \downarrow & & \downarrow & \\ \rightarrow & K_n(AG) & \rightarrow & \varepsilon V_{n-2}(AG) & \rightarrow & \varepsilon L_{n-2}(AG) & \rightarrow & K_{n-2}(AG) & \rightarrow \end{array}$$

montre que le morphisme

$$h_{n-2}(BG, \varepsilon \mathcal{L}_A) \longrightarrow \varepsilon L_{n-2}(AG)$$

est injectif. Considérons alors le diagramme suivant

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \longrightarrow & h_{n-1}(BG, \mathcal{K}_A) & \longrightarrow & h_{n-1}(BG, \varepsilon \mathcal{L}_A) & \longrightarrow & h_{n-2}(BG, \varepsilon \mathcal{U}_A) & \cdots \\ & & \wr \downarrow & & \wr \downarrow & & \downarrow & \\ \cdots & \longrightarrow & K_{n-1}(AG) & \longrightarrow & \varepsilon L_{n-1}(AG) & \longrightarrow & \varepsilon U_{n-2}(AG) & \cdots \\ & & & & \longrightarrow & h_{n-2}(BG, \mathcal{K}_A) & \longrightarrow & h_{n-2}(BG, \varepsilon \mathcal{L}_A) & \longrightarrow \\ & & & & & \wr \downarrow & & \downarrow & \\ & & & & \longrightarrow & K_{n-2}(AG) & \longrightarrow & \varepsilon L_{n-2}(AG) & \longrightarrow \end{array}$$

On en déduit que le morphisme

$$h_{n-2}(BG, \varepsilon \mathcal{U}_A) \longrightarrow \varepsilon U_{n-2}(AG)$$

est un isomorphisme. Par conséquent le morphisme

$$h_{n-3}(BG, \varepsilon \mathcal{V}_A) \longrightarrow \varepsilon V_{n-3}(AG)$$

l'est aussi. Soit enfin le diagramme suivant

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \longrightarrow & h_{n-1}(BG, \mathcal{K}_A) & \longrightarrow & h_{n-2}(BG, \varepsilon \mathcal{V}_A) & \longrightarrow & h_{n-2}(BG, \varepsilon \mathcal{L}_A) & \cdots \\ & & \wr \downarrow & & \wr \downarrow & & \downarrow & \\ \cdots & \longrightarrow & K_{n-1}(AG) & \longrightarrow & \varepsilon V_{n-2}(AG) & \longrightarrow & \varepsilon L_{n-2}(AG) & \cdots \\ & & & & \longrightarrow & h_{n-2}(BG, \mathcal{K}_A) & \longrightarrow & h_{n-3}(BG, \varepsilon \mathcal{V}_A) & \longrightarrow \\ & & & & & \wr \downarrow & & \wr \downarrow & \\ & & & & \longrightarrow & K_{n-2}(AG) & \longrightarrow & \varepsilon V_{n-3}(AG) & \longrightarrow \end{array}$$

Ce diagramme montre que le morphisme

$$\alpha_{n-2} : h_{n-2}(BG, \varepsilon \mathcal{L}_A) \longrightarrow \varepsilon L_{n-2}(AG)$$

est un isomorphisme. □

*Remarque 5.3.* — D’une façon analogue, on peut montrer l’équivalent du théorème 5.4 pour les conjectures de Novikov [4] en K-théories algébrique et hermitienne.

## BIBLIOGRAPHIE

- [1] A. BARTELS & H. REICH, « On the Farrell-Jones conjectures for higher algebraic  $K$ -theory », Preprintreihe SFB, 2003.
- [2] F. T. FARRELL & L. JONES, « Isomorphism conjectures in algebraic  $K$ -theory », *J. Amer. Math. Soc.* **6** (1993), n° 2, p. 249-297.
- [3] A. H. H. BASS & R. G. SWAN, « The whitehead group of polynomial extension », *Inst. hautes études sci.* **22** (1964), p. 61-79.
- [4] W. C. HSIANG, *Borel's conjecture, Novikov's conjecture and the  $K$ -theoretic analogue*, World scientific book, Singapour, 1989.
- [5] M. KAROUBI, « Le théorème fondamental de la  $K$ -théorie hermitienne », *Annals of mathematics* **112** (1980), p. 259-282.
- [6] J.-L. LODAY, «  $K$ -théorie algébrique et représentation de groupes », *Ann. Sci. Ecole Normale Sup. Sér. 4* **9** (1976), n° 3, p. 309-377.
- [7] G. W. WHITEHEAD, « Generalised homology theories », *Trans. A. M. S* **102** (1962), p. 227-283.

Manuscrit reçu le 9 novembre 2005,  
révisé le 3 mars 2006,  
accepté le 23 mars 2006.

Naoufel BATTIKH  
Institut préparatoire aux études d'ingénieurs de  
Nabeul  
Campus universitaire  
Merazka, 8000 Nabeul (Tunisie)  
naoufelbattikh@yahoo.fr