CLAUDE FRASNAY

Quelques problèmes combinatoires concernant les ordres totaux et les relations monomorphes

Annales de l'institut Fourier, tome 15, n^o 2 (1965), p. 415-524

<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1965__15_2_415_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
15, 2 (1965), 415-524.

QUELQUES PROBLÈMES COMBINATOIRES CONCERNANT LES ORDRES TOTAUX ET LES RELATIONS MONOMORPHES

par Claude FRASNAY

Introduction.

Parmi les travaux consacrés à des problèmes de la théorie des relations figurent déjà les thèses de J. Riguet (1951, [8]) et de R. Fraïssé (1953, [4]). Notre étude s'attache plus particulièrement aux problèmes combinatoires et répond ainsi à des conjectures de R. Fraïssé concernant l'*interprétabilité* par un ordre total (ou *chaîne*) de certaines relations m-aires remarquables, dites *relations monomorphes*. Pour atteindre cet objectif, nous avons dû développer un aspect de la théorie des permutations finies qui n'avait pas, semble-t-il, retenu l'attention des algébristes : il s'agit des *groupes de compatibilité* qui apparaissent dans la comparaison des restrictions communes $\alpha|X$, $\beta|X$ de deux chaînes quelconques α, β.

Voici un résumé de notre travail :

1° Soit φ une *relation m-aire* de *base* E (fonction appliquant E^m dans $\{0, 1\}$) : une restriction $\varphi|F$ ayant comme base une *n-partie* F de E (partie de cardinal n) est dite une *n-restriction* de φ.

Si X, Y sont deux n-parties de E, une bijection σ de X sur Y est un *n-morphisme* de φ lorsque les relations $\varphi|X$, $\varphi|Y$ sont *isomorphes* par σ, au sens suivant :

$$\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_m) = \varphi(\sigma(x_1), \sigma(x_2), \ldots, \sigma(x_m))$$

pour tout $(x_1, x_2, \ldots, x_m) \in X^m$.

a) Si θ est une chaîne de base E et si (quel que soit n) tout n-morphisme de θ est un n-morphisme de φ, on dit que φ est *interprétable* par θ. On peut construire et dénombrer (§ 5) l'ensemble fini des relations m-aires de base E interprétables par θ : il s'agit d'un *clan* (ensemble fermé pour la négation $\neg\varphi$ et la conjonction $\varphi \wedge \varphi'$) engendré par les $m(m-1)$ relations $\theta(x_i, x_j)$. Lorsque $m = 3$, la plus classique des relations non constantes de ce clan est le *cycle* ψ dérivé de la chaîne θ, pour lequel $\psi(x_1, x_2, x_3) = 1$ revient à :

$$x_1 \leqslant x_2 \leqslant x_3 \quad \text{ou} \quad x_2 \leqslant x_3 \leqslant x_1$$

ou

$$x_3 \leqslant x_1 \leqslant x_2 \quad (\text{mod. } \theta).$$

Au § 5, un théorème combinatoire sur les équivalences ayant pour base l'ensemble des m-parties de E (théorème dont la forme initiale est due à F. P. Ramsey [7]) permet d'obtenir le *théorème d'interprétabilité restreinte :* « *Pour toute chaîne* θ *et toute relation m-aire* φ *de même base* E *telle que* Card (E) $\geqslant \xi_m(n)$ *(cardinal convenable), il existe une n-partie* F *de* E *telle que la restriction* $\varphi|$F *soit interprétable par la chaîne* $\theta|$F. »

b) Supposons qu'une relation φ de base E vérifie la condition : « Pour tout couple (X, Y) de n-parties de E, les restrictions $\varphi|$X et $\varphi|$Y sont isomorphes ». On dit alors que φ est *n-monomorphe.*

Une relation n-monomorphe pour tout entier n est dite *monomorphe* (ou *monotype*, [4]).

Toute relation interprétable par une chaîne est monomorphe. Dans sa thèse, en 1953, R. Fraïssé avait annoncé une réciproque partielle : « *Toute relation monomorphe de base infinie est interprétable par une chaîne* » (résultat obtenu par ultrafiltration). Le cas d'une base finie restait à élucider, et exigeait une méthode fondamentalement différente : nous n'avons pu l'atteindre qu'en développant la théorie « des chaînes permutées ».

2° Notons S_m le groupe des permutations de $\{1, 2, \ldots, m\}$.

Étant donné deux chaînes α, β de bases respectives A, B, et une m-partie $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_m\}$ de A $\cap$ B, les inégalités :

$$x_1 < x_2 < \cdots < x_m \quad (\text{mod. } \alpha),$$
$$x_{\sigma(1)} < x_{\sigma(2)} < \cdots < x_{\sigma(m)} \quad (\text{mod. } \beta),$$

définissent une permutation $\sigma \in S_m$. Quand X varie, ces permutations σ engendrent un groupe Q_m. Pour tout sous-groupe G de S_m contenant Q_m, nous disons que les chaînes α et β sont G-*compatibles*. Quand $A \cap B$ est infini, la suite Q des groupes $Q_1, Q_2, \ldots, Q_m, \ldots$ est appelée une *suite indicative*.

a) Un sous-groupe G de S_m est dit un *groupe indicatif* dès qu'il existe une suite indicative Q telle que $G = Q_m$. Au § 6, nous montrons que les sous-groupes indicatifs de S_m forment un *lattis* pour l'ordre par inclusion. Plus précisément, le groupe $G \nabla H$ engendré par la réunion de deux sous-groupes indicatifs G, H est lui-même indicatif (par contre, le groupe $G \cap H$ n'est généralement pas indicatif).

b) Au § 4, une variante du théorème de Ramsey et un contre-exemple tiré d'un produit lexicographique nous avaient donné (pour k, n entiers $\geqslant 1$) le *théorème des multichaînes*, dans lequel $n^{(2^k)}$ apparaît comme le plus petit des entiers p tels que: « *Pour* Card (E) $> p$ *et* $k + 1$ *chaînes* $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_k$ *de base* E, *il existe une* $(n+1)$-*partie* F *de* E *telle que* $\alpha_0|F, \alpha_1|F, \ldots, \alpha_k|F$ *soient identiques ou symétriques* ». Le cas particulier des *bichaînes* ($k = 1$), déjà obtenu par P. Erdös et G. Szekeres [3], permet d'entamer une étude dont le résultat essentiel est un *théorème de réduction* (§ 8). Si H désigne le groupe indicatif maximum contenu dans un sous-groupe G de S_m, nous mettons en évidence un entier $k \geqslant 0$ vérifiant la condition : « *Pour* Card (E) $\geqslant m + k$, *la* G-*compatibilité de deux chaînes* α, β *de base* E *implique la* H-*compatibilité de ces chaînes* ». Le plus petit $s_0(G)$ de ces entiers k sera le *seuil de réduction* du groupe G.

Du fait que la compatibilité de deux chaînes de même base relativement à un groupe indicatif correspond toujours à une situation simple (chaînes identiques ou symétriques, chaînes ayant même cycle dérivé, etc...), le théorème de réduction prend une certaine importance dans la théorie « des chaînes permutées ».

c) Soit Φ un ensemble de chaînes dont les bases sont des parties de E. Si Card (E) $\geqslant n$ et si toute n-partie de E est contenue dans l'une des bases des chaînes $\varphi \in \Phi$, nous disons que Φ est un n-*recouvrement* de E.

Au § 9, l'examen des divers groupes indicatifs et le théorème de réduction permettent de prouver un lemme dont l'énoncé avait été pressenti, sans démonstration, par R. Fraïssé. Il en résulte un *théorème de* G-*recollement:* « *Étant donné un sous-groupe* G *de* S_m, *il existe un entier* $k \geqslant 0$ *tel que, pour tout* $(m + k)$-*recouvrement* Φ *de* E *par des chaînes* G-*compatibles, il existe une chaîne* θ *de base* E *qui est* G-*compatible avec toute chaîne* $\varphi \in \Phi$ ». Le *seuil de recollement* du groupe G est le plus petit $s_1(G)$ de ces entiers k. Il vérifie : $s_1(G) \leqslant 3$ si G est indicatif, et $s_1(G) \leqslant 1 + s_0(G)$ si G est non indicatif.

3° Pour une relation m-aire ψ de base E, le groupe des automorphismes d'une m-restriction $\psi|F$ s'identifie à un sous-groupe G de S_m. Si ψ est n-monomorphe et si Card (E) $\geqslant \xi_m(n)$, les n-restrictions $\psi|X$ sont interprétables par des chaînes G-compatibles appartenant à un n-recouvrement Φ de E. Ainsi, le théorème d'interprétabilité restreinte et le théorème de G-recollement nous permettent de démontrer (§ 12) deux propositions qui répondent à la conjecture de R. Fraïssé, et même affaiblissent les hypothèses nécessaires :

a) Pour tout entier $m \geqslant 1$, il existe un *entier* p tel que : « *Si* Card (E) $\geqslant p$, *toute relation m-aire monomorphe de base* E *est interprétable par une chaîne* ». Ainsi, pour le plus petit $\pi(m)$ de ces entiers p : $\pi(2) = 4$ (mais nous ignorons la valeur de $\pi(3)$).

b) Pour tout entier $m \geqslant 1$, il existe un couple d'entiers (n, p) tel que : « *Si* Card (E) $\geqslant p$, *toute relation m-aire n-monomorphe de base* E *est monomorphe* ». Le plus petit d_m des entiers n figurant dans ces couples (n, p) est le *degré optimum de monomorphie m-aire*. Ainsi : $d_1 = 1$, $d_2 = 3$, $d_3 = 4$, $d_4 = 5$ ou 6 (question ouverte). Pour $m \geqslant 5$, nous ne connaissons que l'encadrement : $m + 1 \leqslant d_m \leqslant 2 + (3m - 8)^2$.

Au § 13, le théorème de G-recollement permet encore de mettre en évidence un entier q vérifiant la condition suivante : « *Soit* ψ *une relation m-aire monomorphe de base finie* E *telle que* Card (E) $\geqslant q$. *Pour qu'une relation m-aire* ψ' *de base* E *soit isomorphe à* ψ, *il suffit que les q-restrictions de* ψ' *soient isomorphes aux q-restrictions de* ψ ». Ainsi, pour le plus petit $\lambda(m)$ de ces entiers q : $\lambda(2) = 3$ (mais nous ignorons la valeur de $\lambda(3)$).

4° Enfin, parmi les problèmes combinatoires (relatifs aux chaînes) qui ne se rattachent pas directement à l'étude des chaînes permutées et des relations monomorphes, signalons le *problème de la croissance* (§ 2). « *Soit f une fonction appliquant* *l'une sur l'autre deux parties* A, B *de* E. *Pour qu'il existe une chaîne* θ *de base* E *telle que* f *soit croissante relativement aux chaînes* $\theta|A$, $\theta|B$, *il faut et il suffit que cette fonction soit acyclique* ». (Une fonction f est *acyclique* lorsqu'aucune permutation circulaire de degré $\geqslant 2$ ne figure parmi les restrictions finies de f.)

Quand E est infini, la démonstration utilise une méthode d'ultrafiltration sous-jacente au *théorème de cohérence partielle* (§ 1) : pour un ensemble Φ de relations m-aires dont les bases forment un ensemble $\mathcal{F}$ de parties finies de E, ce théorème donne une condition d'existence d'une relation m-aire θ de base E telle que $\theta|X \in \Phi$ pour tout $X \in \mathcal{F}$. La condition ainsi obtenue par ultrafiltration sert plusieurs fois dans notre étude, par exemple dans la démonstration de la forme « infinie » du théorème de G-recollement.

Les résultats que nous venons de résumer ont été annoncés dans six Notes aux *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences* [5] présentées par MM. A. Denjoy et H. Villat de novembre 1962 à novembre 1964. D'autres résultats signalés dans ces Notes feront l'objet de publications ultérieures.

TABLE DES MATIÈRES

CHAPITRE PREMIER

RELATION, ÉQUIVALENCE, CHAINE. COMPATIBILITÉ, INTERPRÉTABILITÉ

1. Ensemble de relations. Cohérence partielle.

Une fois pour toutes, $\{0, 1\}$ désigne une *paire de valeurs* munie de la transposition $\urcorner x$ (échangeant 0,1) et des opérations $x \vee y$, $x \wedge y$ (pour lesquelles 0,1 sont idempotents et respectivement neutres).

Si $F \subset E$, Card $(F) = n$, Card $(E) = p$, nous disons que F est une *n-partie* du *p-ensemble* E. Nous notons $\mathfrak{P}_n(E)$ l'ensemble des n-parties de E.

1.1. *Relation, restriction, compatibilité. Relations binaires classiques.*

1.1.1. Pour un entier $m \geqslant 1$ et un p-ensemble E, soit $\mathbf{R}_m(E)$ l'ensemble des applications de E^m dans $\{0, 1\}$: toute fonction $\varphi \in \mathbf{R}_m(E)$ est une *relation m-aire* de *base* E (si p est fini, φ est dite elle-même une *relation finie*). Pour toute n-partie F de E, nous notons $\varphi|F$ la restriction de φ ayant F comme base : $\varphi|F$ est une *n-restriction* de φ, φ est une *p-extension* de $\varphi|F$.

Il est clair que : $X \subset Y \subset E \Longrightarrow (\varphi|Y)|X = \varphi|X$.

Si G est l'ensemble des m-uples $(x_1, x_2, \ldots, x_m) \in E^m$ vérifiant une condition $\gamma\{x_1, x_2, \ldots, x_m\}$, il existe une relation $\psi \in \mathbf{R}_m(E)$ (et une seule) telle que :

$$\psi(x_1, x_2, \ldots, x_m) = 1 \Longleftrightarrow (x_1, x_2, \ldots, x_m) \in G.$$

On l'exprime en disant que $G = \Gamma(\psi)$ est l'*ensemble caractéristique* (ou *graphe*) de la relation ψ *définie* par la condition γ.

Deux relations m-aires α, β de bases respectives A, B sont dites *compatibles* lorsque : $\alpha|A \cap B = \beta|A \cap B$.

1.1.2. Dans $\mathbf{R}_m(E)$, les fonctions $\neg x$, $x \vee y$, $x \wedge y$ sur $\{0, 1\}$ associent de manière évidente aux relations φ, φ' (de graphes respectifs G, G′) les relations $\neg\varphi$, $\varphi \vee \varphi'$, $\varphi \wedge \varphi'$ (de graphes respectifs $\complement G$, $G \cup G'$, $G \cap G'$). Une partie non vide de $\mathbf{R}_m(E)$ est un *clan* dès qu'elle est fermée pour la *négation* $\neg\varphi$ et la *conjonction* $\varphi \wedge \varphi'$ (donc aussi pour la *disjonction* $\varphi \vee \varphi'$). Toute partie Φ de $\mathbf{R}_m(E)$ est contenue dans un clan minimum (clan *engendré* par Φ).

La condition sur les graphes : $\Gamma(\varphi_1) \subset \Gamma(\varphi_2)$ (φ_1 est *plus fine que* φ_2) définit une relation binaire de base $\mathbf{R}_m(E)$, dite *relation de déduction.*

1.1.3. Parmi les relations binaires $\varphi \in \mathbf{R}_2(E)$, les plus classiques sont les *équivalences* et les *ordres* de base E.

a) Une équivalence φ de base E associe à tout $x \in E$ une classe $\langle x \rangle_\varphi$. L'ensemble E/φ de ces classes forment une partition de E : nous dirons que $k = \text{Card}\ (E/\varphi)$ est l'*indice* de φ.

Pour un entier $k \geqslant 1$, des ensembles $V_1, V_2, \ldots, V_k$ deux à deux disjoints, de réunion E, définissent un *k-partage* $\varepsilon = (V_1, V_2, \ldots, V_k)$ de E (plus particulièrement, ε est une *k-partition* de E si les ensembles V_i sont non vides).

b) Un ordre total est encore appelé une *chaîne* (on parle ainsi de la *chaîne naturelle* ω de base N, ensemble des entiers $\geqslant 0$). Nous noterons $\mathbf{J}(E)$ l'ensemble des chaînes de base E.

Pour un *k*-partage $(V_1, V_2, \ldots, V_k)$ de E et des chaînes $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_k$ de bases respectives $V_1, V_2, \ldots, V_k$, on note $\varphi_1 + \varphi_2 + \cdots + \varphi_k$ *(somme ordinale)* l'unique chaîne φ de base E telle que :

$$\begin{cases} 1 \leqslant i \leqslant k \Longrightarrow \varphi_i = \varphi | V_i. \\ 1 \leqslant i < j \leqslant k,\ x \in V_i,\ y \in V_j \Longrightarrow x < y \quad (\text{mod. } \varphi). \end{cases}$$

Un *lattis* de base E est un ordre pour lequel Sup X (majorant minimum) et Inf X (minorant maximum) existent pour tout $X \in \mathfrak{P}_2(E)$ (et, par conséquent, pour toute partie finie non vide de E).

1.2. *Isomorphie, groupe d'automorphismes. Interprétabilité.*

1.2.1. Soient φ, φ' deux relations *m*-aires de bases respectives E, E′.

S'il existe une bijection σ de E sur E' telle que :

$$\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_m) = \varphi'(\sigma(x_1), \sigma(x_2), \ldots, \sigma(x_m))$$

pour tout m-uple $(x_1, x_2, \ldots, x_m) \in E^m$, on dit que σ est un *isomorphisme* entre les relations φ et φ'. Nous notons alors : $\varphi' \sim \varphi$ (φ' est *isomorphe* à φ) ou, plus précisément : $\varphi' \overset{\sigma}{\sim} \varphi$ (φ' est isomorphe à φ par σ). Si $F \subset E$, $F' = \sigma(F)$, la restriction de σ à F est encore un isomorphisme entre les relations $\varphi|F$ et $\varphi'|F'$.

Dans le cas particulier : $\varphi \overset{\sigma}{\sim} \varphi$, on dit que σ est un *automorphisme* de la relation φ.

Si E, E' sont deux p-ensembles finis, deux chaînes φ et φ' de bases respectives E, E' sont isomorphes par une seule fonction σ (application *croissante* de E sur E').

1.2.2. Pour des relations m-aires φ, φ', φ'', il est clair que :

$$\begin{cases} \varphi' \overset{\sigma}{\sim} \varphi \Longrightarrow \varphi \overset{\sigma^{-1}}{\sim} \varphi' \\ \varphi' \overset{\sigma_1}{\sim} \varphi \quad \text{et} \quad \varphi'' \overset{\sigma_2}{\sim} \varphi' \Longrightarrow \varphi'' \overset{\sigma_2 \circ \sigma_1}{\sim} \varphi. \end{cases}$$

On en déduit, plus particulièrement :

a) L'ensemble des automorphismes d'une relation φ de base E forme un groupe de permutations de E (pour toute partie F de E, nous noterons $\mathbf{G}_F(\varphi)$ le *groupe des automorphismes* de la relation $\varphi|F$).

b) La condition $\varphi_1 \sim \varphi_2$ définit une équivalence μ de base $\mathbf{R}_m(E)$: on dit que $\langle\varphi\rangle_\mu$ est la *classe d'isomorphie* de φ.

1.2.3. Soit σ un isomorphisme entre deux n-restrictions $\varphi|F$ et $\varphi|F'$ d'une relation φ : nous disons que σ est un *n-morphisme* de φ. (Dès lors, les restrictions de σ sont encore des morphismes de φ.)

Pour un cardinal n et deux relations $\theta \in \mathbf{R}_k(E)$, $\varphi \in \mathbf{R}_m(E)$, supposons que tout n-morphisme de θ soit un n-morphisme de φ : nous disons que φ est *n-interprétable* par θ. Pour que cette condition soit vérifiée quel que soit n, il suffit qu'elle le soit pour tout entier h tel que $1 \leqslant h \leqslant m$: dans ce cas, on dit simplement que φ est *interprétable* par θ.

Étant donné la relation $\theta \in \mathbf{R}_k(E)$, il est facile de voir que l'ensemble $\mathbf{R}_m^\theta(E)$ des relations m-aires de base E interprétables par θ est un clan. Dans le cas d'une chaîne θ, nous donnerons au § 5 une génération simple de ce clan.

Comme exemple de relation ternaire interprétable par une chaîne θ, citons le *cycle* ψ *dérivé* de θ, défini par :

$$\psi(x_1, x_2, x_3) = (y_2 \wedge y_3) \vee (y_3 \wedge y_1) \vee (y_1 \wedge y_2),$$

pour

$$y_1 = \theta(x_2, x_3), \qquad y_2 = \theta(x_3, x_1), \qquad y_3 = \theta(x_1, x_2).$$

1.3. *Théorème de cohérence partielle.*

1.3.1. Soit Φ un ensemble de relations m-aires dont les bases forment un ensemble $\mathcal{F}$ de parties de E : nous disons que Φ est un ensemble de relations *dans* E, de *support* $\mathcal{F}$. Ce support est *filtrant* si, quels que soient $X \in \mathcal{F}$, $Y \in \mathcal{F}$, il existe $Z \in \mathcal{F}$ tel que $(X \cup Y) \subset Z$. Si Card (E) $\geqslant n$ et si toute n-partie de E est contenue dans une base $X \in \mathcal{F}$, nous disons que Φ est un *n-recouvrement* de E.

Lorsque les relations appartenant à Φ sont deux à deux compatibles, l'ensemble Φ est dit *cohérent.* Il existe alors une relation $\theta \in \mathbf{R}_m(E)$ telle que Φ soit l'ensemble des restrictions $\theta|X$ quand X parcourt le support $\mathcal{F}$ (ce qu'on peut noter : $\Phi = \theta||\mathcal{F}$), et cette relation θ est unique dès que Φ est un m-recouvrement de E. En particulier, comme une relation binaire est une chaîne dès que ses 3 restrictions sont des chaînes, on peut énoncer la proposition suivante (qui recevra, au § 9, une très notable extension) :

Proposition. — *Si Φ est un* 3*-recouvrement de* E *(de support $\mathcal{F}$) par des chaînes deux à deux compatibles, il existe une chaîne θ de base* E *(et une seule) telle que : $\Phi = \theta||\mathcal{F}$.*

1.3.2. Soit Φ un ensemble de relations m-aires dans E, de support $\mathcal{F}$.

Si $\varphi|X \in \Phi$ pour tout $X \in \mathcal{F}$ et toute relation $\varphi \in \Phi$ dont la base contient X, nous disons que l'ensemble Φ est *saturé.*

Si Φ contient un sous-ensemble cohérent Φ' de même support $\mathcal{F}$, nous disons que Φ est *partiellement cohérent.* Il existe alors une relation m-aire θ de base E telle que $\theta|X \in \Phi$ pour tout $X \in \mathcal{F}$.

En utilisant l'*axiome des ultrafiltres :* « Tout filtre sur un ensemble $\mathcal{E}$ est contenu dans un ultrafiltre sur $\mathcal{E}$ », nous allons démontrer le théorème suivant :

THÉORÈME. — *Tout ensemble saturé de relations m-aires finies, de support filtrant, est partiellement cohérent.*

Preuve. — Soit Φ un ensemble saturé de relations m-aires finies, de support filtrant non vide $\mathcal{F}$. Pour tout $X \in \mathcal{F}$, notons Φ_X l'ensemble des relations $\alpha \in \mathbf{R}_m(E)$ telles que $\alpha|X \in \Phi$, et montrons que la famille d'ensembles $(\Phi_X)_{X\in\mathcal{F}}$ constitue une *base de filtre* sur $\mathbf{R}_m(E)$.

En effet : *a*) Cette famille est non vide, et aucun Φ_X n'est vide puisqu'il existe une relation $\varphi \in \Phi \cap \mathbf{R}_m(X)$ dont il suffit de prendre une extension $\alpha \in \mathbf{R}_m(E)$.

b) Quels que soient $X \in \mathcal{F}$, $Y \in \mathcal{F}$, il existe $Z \in \mathcal{F}$ tel que $\Phi_Z \subset (\Phi_X \cap \Phi_Y)$: il suffit (puisque $\mathcal{F}$ est filtrant) de prendre $Z \in \mathcal{F}$ tel que $(X \cup Y) \subset Z$, et de constater que

$$X \in \mathcal{F},\ Z \in \mathcal{F},\ X \subset Z \Longrightarrow \Phi_Z \subset \Phi_X.$$

(Pour $\alpha \in \mathbf{R}_m(E)$ tel que $\alpha|Z \in \Phi$, la formule $\alpha|X \in \Phi$ résulte de $\alpha|X = (\alpha|Z)|X$ et du fait que Φ est saturé).

Dès lors, soit $\mathcal{V}$ l'ensemble des parties V de $\mathbf{R}_m(E)$ contenant un ensemble Φ_X. Il existe un ultrafiltre $\mathcal{U}$ sur $\mathbf{R}_m(E)$ contenant le filtre $\mathcal{V}$. En particulier : $\Phi_X \in \mathcal{U}$ pour tout $X \in \mathcal{F}$, et la condition $\alpha_1|X = \alpha_2|X$ définit une équivalence $\alpha_1 \equiv \alpha_2$ de base Φ_X pour laquelle Φ_X se partage en un nombre fini de classes $\Phi_X^1, \Phi_X^2, \ldots, \Phi_X^k$. De $\Phi_X = \bigcup_{1\leqslant i\leqslant k} \Phi_X^i$, il résulte (d'après une propriété classique des ultrafiltres) l'existence d'un entier h $(1 \leqslant h \leqslant k)$ tel que $\Phi_X^h \in \mathcal{U}$; et cet entier h est unique, puisque les Φ_X^i sont deux à deux disjoints. A tout $X \in \mathcal{F}$, on associe de cette façon un ensemble $\Phi'_X \in \mathcal{U}$ et une relation $\varphi_X \in \Phi \cap \mathbf{R}_m(X)$ tels que : $\alpha \in \Phi'_X \Longrightarrow \alpha|X = \varphi_X$.

Si Φ' est l'ensemble des relations φ_X lorsque X parcourt $\mathcal{F}$, Φ' est un sous-ensemble de Φ ayant $\mathcal{F}$ comme support. Si $X \in \mathcal{F}$, $Y \in \mathcal{F}$, l'ensemble $\Phi'_X \cap \Phi'_Y$ (appartenant à $\mathcal{U}$) est non vide. Il existe une relation $\alpha \in \Phi'_X \cap \Phi'_Y$ telle que :

$$\alpha|X = \varphi_X, \qquad \alpha|Y = \varphi_Y,$$

d'où : $\alpha|X \cap Y = \varphi_X|X \cap Y = \varphi_Y|X \cap Y$. L'ensemble Φ' est bien cohérent.

1.3.3. Lorsque E est infini, on sait que l'axiome des ultrafiltres implique l'existence d'une chaîne de base E : le théorème de cohérence partielle en fournit une preuve immédiate, quand on prend pour Φ l'ensemble des chaînes finies dans E. Voici deux corollaires du même théorème 1.3.2. :

Corollaire 1. — *Pour un entier* $k \geqslant 1$, *soit* Φ *un ensemble d'équivalences finies dans* E *ayant toutes un indice* $\leqslant k$. *Si* Φ *est saturé, de support filtrant* $\mathcal{F}$, *il existe une équivalence* θ *de base* E, *d'indice* $\leqslant k$, *telle que* $\theta|X \in \Phi$, *pour tout* $X \in \mathcal{F}$.

(Au § 3, nous verrons un exemple d'emploi du corollaire 1.)

Corollaire 2. — *Soit* Φ *un ensemble saturé de chaînes finies dans* E, *de support filtrant* $\mathcal{F}$. *Il existe alors une chaîne* θ *de base* E *telle que* $\theta|X \in \Phi$ *pour tout* $X \in \mathcal{F}$.

Comme application du corollaire 2 (nous en verrons d'autres au § 2 et au § 9), retrouvons une proposition de E. Szpilrajn [9] :

Proposition. — *Pour tout ordre* φ *de base* E, *il existe une chaîne* θ *de base* E *telle que* $\Gamma(\varphi) \subset \Gamma(\theta)$.

(Autrement dit : de tout ordre, on peut déduire une chaîne.)

Preuve. — Soit $\mathcal{F}$ l'ensemble des parties finies de E. Pour tout $X \in \mathcal{F}$, notons Φ_X l'ensemble des chaînes de base X moins fines que $\varphi|X$. Enfin, considérons l'ensemble de chaînes finies : $\Phi = \bigcup_{X \in \mathcal{F}} \Phi_X$.

a) Comme : $X \subset Y$ et $\alpha \in \Phi_Y \Longrightarrow \alpha|X \in \Phi_X$, l'ensemble Φ est saturé. Pour montrer que le support de Φ est l'ensemble filtrant $\mathcal{F}$, il suffit de constater que Φ_X est non vide (quel que soit $X \in \mathcal{F}$). Si M est l'ensemble des entiers $n \geqslant 0$ tels que $\Phi_X \neq \emptyset$ pour toute n-partie X de E, il est trivial que $0 \in M$, $1 \in M$, ... et il s'agit de montrer que : $n \in M \Longrightarrow n + 1 \in M$. Or, pour $A \in \mathfrak{P}_{n+1}(E)$, l'hypothèse de récurrence implique $\Phi_X \neq \emptyset$ pour toute n-partie X de A. Comme A possède un élément maximal a pour l'ordre fini $\varphi|A$, on peut poser : $B = A - \{a\}$, $\beta \in \Phi_B$ et considérer la chaîne α de base A définie par : $\alpha|B = \beta$, $x < a$ (mod. α) pour tout $x \in B$. Il est immédiat que $\alpha \in \Phi_A$.

b) Le corollaire 2 du théorème de cohérence partielle implique alors l'existence d'une chaîne θ de base E telle que : $\Gamma(\varphi|X) \subset \Gamma(\theta|X)$ pour tout $X \in \mathcal{F}$. Dès que X parcourt $\mathfrak{P}_2(E)$, cette condition assure : $\Gamma(\varphi) \subset \Gamma(\theta)$.

2. Fonction acyclique, théorème de croissance.

2.1. *Fonction acyclique. Dénombrement de bijections acycliques.*

Soit f une application d'un ensemble A sur un ensemble B. Si $A \cup B \subset E$, la condition $f(x_1) = x_2$ définit une relation binaire φ de base E : φ est la *relation fonctionnelle associée* à f. La fonction f et la relation fonctionnelle associée φ sont dites *acycliques* lorsqu'il n'existe, parmi les restrictions de f aux parties fines de A, aucune permutation circulaire $(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ de degré $m \geqslant 2$.

2.1.1. Voici d'abord deux cas particuliers :

a) Dans les notations précédentes, désignons par V l'ensemble des éléments $x \in A \cap B$ tels que $f(x) = x$, et posons : $X_0 = (A \cap B) - V$, $X_{n+1} = X_n \cap f(X_n)$. Lorsque X_0 est *fini*, la suite décroissante $(X_n)_{n \geqslant 0}$ est stationnaire, de valeur constante $X_n = T$ pour $n \geqslant n_0$ (convenable). Dans ce cas, on obtient facilement :

« *Pour que f soit acyclique, il faut et il suffit que* $T = \emptyset$. »

b) Étant donné une chaîne θ de base E, et une fonction f appliquant l'une sur l'autre deux parties A, B de E, supposons que cette fonction f soit *croissante* quand on ordonne A et B par θ. Pour la relation fonctionnelle φ de base E associée à f, la condition de croissance relativement à θ s'exprime par :

$$\varphi(x, y) = \varphi(x', y') = 1 \quad \text{et} \quad x \leqslant x' \ (\text{mod.}\ \theta) \Longrightarrow y \leqslant y' \ (\text{mod.}\ \theta).$$

Si f laisse invariante une partie finie X de A, la restriction de f à X (en tant qu'automorphisme de la chaîne finie $\theta|X$) est nécessairement la permutation identique de X. La fonction f et la relation φ sont donc acycliques.

Réciproquement, nous montrerons en 2.2. que toute fonction acyclique est croissante pour une chaîne convenable.

2.1.2. Soient A, B deux ensembles finis tels que :

$$\begin{cases} \text{Card}\,(A) = \text{Card}\,(B) = n & (n \geqslant 0) \\ \text{Card}\,(A \cap B) = p & (0 \leqslant p \leqslant n). \end{cases}$$

Le nombre des applications de A sur B est $n!$

Nous noterons ω_n^p le nombre des applications acycliques de A sur B.

a) On peut indiquer un procédé récurrent pour calculer ω_n^p, basé sur la remarque triviale : « Pour qu'une application f de A sur B soit acyclique, il faut et il suffit que la restriction g de f à $A \cap B$ soit acyclique ». Notons h la restriction de f à $A - B$, et posons :

$$\begin{cases} G = g(A \cap B) \\ X = G \cap (A \cap B), \qquad Y = G \cap (B - A) \\ q = \mathrm{Card}\,(X) \quad (0 \leqslant q \leqslant p). \end{cases}$$

Pour déterminer f, on choisit d'abord l'image $G = X \cup Y$ de $A \cap B$ (autrement dit : une q-partie X de $A \cap B$, et une $(p-q)$-partie Y de $B - A$). Pour q fixé, le nombre des images G est donc : $\binom{p}{q}\binom{n-p}{p-q}$. Lorsque G a été choisie, on obtient f acyclique en choisissant l'une des ω_p^q applications acycliques g de $A \cap B$ sur G, et l'une des $(n-p)\,!$ applications h de $A - B$ sur $B - G$.

Il en résulte :

$$\omega_n^p = (n-p)\,! \sum_{0 \leqslant q \leqslant p} \binom{p}{q}\binom{n-p}{p-q}\omega_p^q.$$

Les coefficients $a_p^q = \binom{p}{q}\dfrac{\omega_p^q}{(p-q)\,!}$ sont des entiers $\geqslant 1$ pour lesquels :

$$\omega_n^p = (n-p)\,! \sum_{0 \leqslant q \leqslant p} a_p^q(n-p)(n-p-1)\ldots(n-2p+q+1).$$

b) Directement, il est clair que : $\omega_n^0 = n\,!$, $\omega_n^n = 1$. La formule précédente donne ensuite :

$$\begin{cases} \omega_n^1 = (n-1)\,!\,[(n-1)\omega_1^0 + \omega_1^1] = n\,! \\ \omega_n^2 = (n-2)\,!\left[\dfrac{1}{2}(n-2)(n-3)\omega_2^0 + 2(n-2)\omega_2^1 + \omega_2^2\right] \\ \qquad\qquad\qquad\qquad = (n-2)\,!\,(n^2-n-1) \\ \omega_n^3 = (n-3)\,!\,(n^3-3n^2-n+4) \\ \omega_n^4 = (n-4)\,!\,(n^4-6n^3+5n^2+16n-15), \text{ etc...} \end{cases}$$

ainsi que : $\omega_{n+1}^n = \omega_n^n + n\omega_n^{n-1}$, d'où (par récurrence) :

$$\omega_{n+1}^n = n\,! \sum_{0 \leqslant p \leqslant n} \frac{1}{p\,!} = \text{part. ent. } (n\,!\,e) \quad (\text{si } n \geqslant 1).$$

Les coefficients qui en résultent :

$$a_p^0 = 1, \qquad a_p^1 = p^2, \qquad a_p^2 = \frac{1}{2} p(p-1)(p^2-p-1), \ldots$$

permettent d'obtenir les développements :

$$\begin{cases} \omega_n^p = (n-p)!\Big[n^p - \dfrac{p(p-1)}{2} n^{p-1} \\ \qquad\qquad + \dfrac{p(p-1)(p+1)(3p-10)}{24} n^{p-2} + \cdots\Big] \\ n(n-1)\ldots(n-p+1) = n^p - \dfrac{p(p-1)}{2} n^{p-1} \\ \qquad\qquad + \dfrac{p(p-1)(p-2)(3p-1)}{24} n^{p-2} + \cdots \\ 1 - \dfrac{\omega_n^p}{n!} = \dfrac{p(p-1)n^{p-3} + \cdots}{2(n-1)(n-2)\ldots(n-p+1)}. \end{cases}$$

Dans les notations précédentes : Card (A) = Card (B) = n, Card (A ∩ B) = p, il en résulte :

Proposition. — *Pour p fixé et $n \to \infty$, la probabilité pour qu'une application de* A *sur* B *ne soit pas acyclique vaut asymptotiquement* $\dfrac{p(p-1)}{2n^2}$.

2.2. *Théorème de croissance.*

2.2.1. Lemme. — *Soit f une fonction acyclique appliquant l'un sur l'autre deux ensembles finis* A, B, *et soit β une chaîne de base* B — A. *Il existe alors une chaîne α de base* A *telle que f soit croissante relativement à la chaîne $\alpha + \beta$.*

Preuve. — Posons Card (A) = n, Card (A ∩ B) = p. Nous distinguerons les deux cas : B ⊂ A (récurrence sur n),

$$A \cap B \neq B \quad (\text{récurrence sur } p).$$

a) Dans le cas B ⊂ A, β est la chaîne vide. Par récurrence sur $n \geqslant 1$ (le cas $n = 1$ est trivial), démontrons l'existence d'une chaîne α de base A pour laquelle f soit croissante.

Si B = A, f est la permutation identique de A : n'importe quelle chaîne α de base A convient.

Si $B \neq A$, introduisons la restriction g de f à B : g est une fonction acyclique appliquant B sur $f(B) \subset B$. Comme Card $(B) < n$, l'hypothèse de récurrence implique l'existence d'une chaîne α' de base B pour laquelle g est croissante. Posons :

$$\begin{cases} B = \{b_1, b_2, \dots, b_k\}, & b_1 < b_2 < \cdots < b_k \quad (\text{mod. } \alpha') \\ A_i = \overset{-1}{f}(b_i), & B_i = \overset{-1}{g}(b_i) = A_i \cap B \quad (1 \leqslant i \leqslant k) \end{cases}$$

$(B_1, B_2, \dots, B_k)$ est un k-partage de B et, comme g est croissante pour α', les chaînes $\alpha'_i = \alpha'|B_i$ vérifient :

$$\alpha' = \alpha'_1 + \alpha'_2 + \cdots + \alpha'_k.$$

Pour $1 \leqslant i \leqslant k$, soit α_i une chaîne de base A_i telle que

$$\alpha'_i = \alpha_i|B_i.$$

Du k-partage $(A_1, A_2, \dots, A_k)$ de A, on déduit une chaîne $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_k$ de base A telle que $\alpha' = \alpha|B$. Ainsi : $b_1 < b_2 < \cdots < b_k$ (mod. α), et f est croissante pour la chaîne α.

b) Lorsque $A \cap B \neq B$, la chaîne β n'est pas vide. L'existence de la chaîne α peut se démontrer par récurrence sur $p \geqslant 0$. Posons :

$$\begin{cases} B' = B - A = \{b_1, b_2, \dots, b_k\}, \quad b_1 < b_2 < \cdots < b_k \ (\text{mod. } \beta) \\ B_0 = A \cap B, \qquad A_0 = \overset{-1}{f}(B_0), \qquad A' = \overset{-1}{f}(B'), \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad A_i = \overset{-1}{f}(b_i) \quad (1 \leqslant i \leqslant k). \end{cases}$$

Notons g, h (respectivement) les restrictions de f à A_0, A'. Comme $(A_1, A_2, \dots, A_k)$ est un k-partage de A', on peut obtenir une chaîne $\alpha' = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_k$ de base A' telle que $\alpha_i = \alpha'|A_i$.

L'application h de A' sur B' est alors croissante pour la chaîne $\alpha' + \beta$ (le lemme est ainsi démontré lorsque $p = 0$). Distinguons deux cas pour

$$B_0 - A_0 = A' \cap B_0 = (A' \cup B') \cap (A_0 \cup B_0).$$

b_1) Si $B_0 - A_0 = \emptyset$, l'application acyclique g de A_0 sur B_0 vérifie $B_0 \subset A_0$. D'après (*a*), il existe alors une chaîne α_0 de base A_0 pour laquelle g est croissante. Comme (A_0, A', B')

est un 3-partage de $A \cup B$, on en déduit une chaîne $\alpha_0 + \alpha' + \beta$ pour laquelle f est croissante.

b_2) Si $B_0 - A_0 \neq \emptyset$, l'application acyclique g de A_0 sur B_0 vérifie $A_0 \cap B_0 \neq B_0$ et Card $(A_0 \cap B_0) < p$. Etant donné la chaîne $\beta' = \alpha'|(A' \cap B_0)$ de base $B_0 - A_0$, l'hypothèse de récurrence implique l'existence d'une chaîne α_0 de base A_0 telle que g soit croissante pour la chaîne $\alpha_0 + \beta'$. Comme β' est une restriction de α', les chaînes $\alpha_0 + \beta'$ (de base $A_0 \cup B_0$) et $\alpha' + \beta$ (de base $A' \cup B'$) sont compatibles et, toujours au moyen du 3-partage (A_0, A', B') de $A \cup B$, il en résulte une chaîne $\alpha_0 + \alpha' + \beta$ pour laquelle f est croissante.

Remarque. — Soit V l'ensemble des $x \in A \cap B$ tels que $f(x) = x$, et soit $q = \text{Card}\,(V)$. Lorsque la fonction acyclique f est *bijective*, on peut apporter au lemme le complément suivant : « *Étant donné la chaîne* β *de base* $B - A$, *il existe* $q\,!$ *chaînes* α *de base* A *telles que* f *soit croissante pour* $\alpha + \beta$, *et ces chaînes* α *sont de la forme* $\alpha|V + \alpha|(A - V)$ ». La donnée de f et de β détermine donc $\alpha|(A - V)$ et laisse arbitraire $\alpha|V$.

2.2.2. Du lemme 2.2.1. et du théorème de cohérence partielle (corollaire 2), nous allons déduire le *théorème de croissance.*

Théorème. — *Soit* f *une fonction appliquant l'une sur l'autre deux parties* A, B *d'un ensemble* E. *Pour qu'il existe une chaîne* θ *de base* E *telle que* f *soit croissante quand on ordonne* A *et* B *par* θ, *il faut et il suffit que cette fonction* f *soit acyclique.*

Preuve. — En 2.1.1., nous avons vu que la condition est nécessaire. Lorsque E est fini, le lemme 2.2.1. montre que la condition est suffisante. Lorsque E est infini, il est commode d'introduire la relation fonctionnelle φ de base E associée à f. Dès que φ est acyclique, il s'agit de montrer que cette relation binaire est croissante (2.1.1.) pour une chaîne convenable de base E.

Soit $\mathcal{F}$ l'ensemble des parties finies de E : pour tout $X \in \mathcal{F}$, la relation $\varphi|X$ est fonctionnelle et acyclique. Si Φ_X est l'ensemble des chaînes de base X pour lesquelles $\varphi|X$ est croissante, le lemme 2.2.1. montre que $\Phi_X \neq \emptyset$. L'ensemble des chaînes finies $\Phi = \bigcup_{X \in \mathcal{F}} \Phi_X$ admet donc comme support l'ensemble filtrant $\mathcal{F}$. Par ailleurs, il est clair que :

$$X \subset Y \qquad \text{et} \qquad \alpha \in \Phi_Y \Longrightarrow \alpha \in \Phi_X,$$

autrement dit : Φ est saturé. D'après le corollaire 2 du théorème 1.3.2., il existe alors une chaîne θ de base E telle que $\theta|X \in \Phi$ pour tout $X \in \mathcal{F}$. Pour des éléments x, x', y, y' de E tels que : $\varphi(x, y) = \varphi(x', y') = 1$, $x \leqslant x'$ (mod. θ), il suffit de prendre $X = \{x, x', y, y'\}$ pour en déduire : $y \leqslant y'$ (mod. θ). La relation φ est bien croissante pour la chaîne θ.

2.2.3. D'après le théorème de croissance, pour qu'une bijection f entre deux parties de E soit un *morphisme d'une chaîne* (convenable) de base E, il faut et il suffit que f soit acyclique.

Voici une autre application qui semble nécessiter l'axiome des ultrafiltres (sous-jacent à la forme « infinie » du théorème de croissance) et l'*axiome de régularité* selon lequel : « Tout ensemble non vide F possède un élément $X \in F$ tel que $X \cap F = \emptyset$ ».

Proposition. — *Soit* A *l'ensemble des parties non vides d'un ensemble* B, *et soit* f *une fonction de choix appliquant* A *sur* B (*de telle sorte que* $f(X) \in X$ *pour tout* $X \in A$). *Il existe alors une chaîne* θ *de base* $A \cup B$ *pour laquelle* f *est croissante.*

Preuve. — D'après le théorème 2.2.2., il suffit de montrer que toute fonction de choix f est acyclique.

Soit $F = \{X_1, X_2, \ldots, X_m\}$ une m-partie finie de A. Si la restriction de f à F était la permutation circulaire

$$(X_1, X_2, \ldots, X_m),$$

on en déduirait :

$$X_1 \in X_m \cap F, \qquad X_{i+1} \in X_i \cap F \quad (1 \leqslant i < m)$$

en contradiction avec l'axiome de régularité.

3. Équivalences particulières. Nombres de Stirling, nombres de Ramsey.

3.1. *Équivalences d'indice donné, nombres de Stirling.*

3.1.1. Pour un entier $k \geqslant 0$ et un p-ensemble fini E, notons $\mathbf{P}_k(E)$ l'ensemble des équivalences de base E, d'indice k, et posons : $S(p, k) = \text{Card}\ (\mathbf{P}_k(E))$. Les entiers $S(p, k) \geqslant 0$ (que certains auteurs introduisent parfois différemment) sont appelés les *nombres de Stirling*. Si $k \geqslant 1$, le nombre des k-partitions de E est alors $k!\,S(p, k)$, le nombre des k-partages de E est k^p, d'où : $k!\,S(p, k) \leqslant k^p$. Il en résulte que les nombres de Stirling ont des *séries génératrices* $\sigma_k(z) = \sum_{p \geqslant 0} S(p, k) \frac{z^p}{p!}$ convergentes en tout $z \in \mathbf{C}$.

Fixons $a \in E$. Quand φ parcourt $\mathbf{P}_k(E)$, la trace X de $\langle a \rangle_\varphi$ sur $F = E - \{a\}$ et la restriction $\psi = \varphi | F$ définissent une bijection $\varphi \to (\psi, X)$ dont on déduit :

$$S(p, k) = S(p-1, k-1) + k\,S(p-1, k).$$

Cette formule se traduit par l'équation différentielle : $\sigma'_k - k\sigma_k = \sigma_{k-1}$. Comme $\sigma_0(z) = 1$ et $\sigma_k(0) = 0$ pour $k \geqslant 1$, on obtient ainsi :

$$\sigma_k(z) = \frac{(e^z - 1)^k}{k!}, \qquad \text{d'où} \qquad S(p, k) = \sum_{0 \leqslant h \leqslant k} \frac{(-1)^h (k-h)^p}{h!\,(k-h)!}.$$

3.1.2. Pour tout entier $m \geqslant 0$, posons : $\nu^{(m)} = \sum_{0 \leqslant k \leqslant m} k!\,S(m, k)$. Pour $1 \leqslant k \leqslant m$, soit A_m^k l'ensemble des applications de $[1, m]$ sur $[1, k]$ (intervalles d'entiers), et soit : $\bigcup_{1 \leqslant k \leqslant m} A_m^k = A_m$. A toute fonction $f \in A_m^k$ correspond une k-partition

$$\varepsilon = (\overset{-1}{f}(1), \overset{-1}{f}(2), \ldots, \overset{-1}{f}(k))$$

de $[1, m]$, et cette correspondance $f \to \varepsilon$ est bijective. Ainsi :

$$\operatorname{Card}(A_m^k) = k!\,S(m, k), \qquad \operatorname{Card}(A_m) = \nu^{(m)}.$$

Au § 5, nous verrons les entiers $\nu^{(m)}$ intervenir dans le dénombrement des relations m-aires interprétables par une chaîne donnée. Pour calculer directement ces entiers (sans les rapporter aux nombres de Stirling), déterminons leur série génératrice. Pour $|z| < \operatorname{Log} 2$, qui implique $|e^z - 1| < 1$, la série $\sum_{k \geqslant 0} k!\,\sigma_k(z)$ converge absolument vers $(2 - e^z)^{-1}$. Il en résulte :

$$\sum_{m \geqslant 0} \nu^{(m)} \frac{z^m}{m!} = \sum_{m \geqslant 0} \frac{z^m}{m!} \Big(\sum_{k \geqslant 0} k!\,S(m, k) \Big)$$
$$= \sum_{k \geqslant 0} k! \Big(\sum_{m \geqslant 0} S(m, k) \frac{z^m}{m!} \Big) = (2 - e^z)^{-1}.$$

De : $\left(1-\frac{z}{1!}-\frac{z^2}{2!}-\cdots\right)\left(\nu^{(0)}+\nu^{(1)}\frac{z}{1!}+\nu^{(2)}\frac{z^2}{2!}+\cdots\right)=1,$

on déduit : $\nu^{(m)}=\sum\limits_{0\leqslant k<m}\binom{m}{k}\nu^{(k)}$, et la formule symbolique :

$2\nu^{(m)}=(1+\nu)^{(m)}$. Les premières valeurs de $\nu^{(m)}$ sont :

$\nu^{(0)}=\nu^{(1)}=1, \quad \nu^{(2)}=3, \quad \nu^{(3)}=13, \quad \nu^{(4)}=75, \quad \nu^{(5)}=541.$

3.2. *Équivalence de base* E^m *liée à une chaîne de base* E.

Soient θ une chaîne de base E, et m un entier $\geqslant 1$. Pour $1\leqslant k\leqslant m$, $X\in\mathfrak{P}_k(E)$, $\sigma\in A_m^k$, posons :

$$\begin{cases} X=\{a_1, a_2, \ldots, a_k\}, & a_1<a_2<\cdots<a_k \quad (\text{mod. } \theta) \\ x_i=a_{\sigma(i)} \quad (a\leqslant i\leqslant m). \end{cases}$$

On obtient ainsi un m-uple $x=(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ dans lequel x_i est le $\sigma(i)$-ième élément de $X=\{x_1, x_2, \ldots, x_m\}$ pour la chaîne $\theta|X$. Réciproquement, la donnée de la chaîne $\theta\in J(E)$ et de $x\in E^m$ détermine la fonction σ : nous poserons

$$\sigma=\hat{\theta}(x)=\hat{\theta}(x_1, x_2, \ldots, x_m),$$

définissant ainsi une application $\hat{\theta}$ de E^m dans A_m. Cette application est surjective dès que Card (E) $\geqslant m$. Ainsi :

a) Pour que $\hat{\theta}(x_1, x_2, \ldots, x_m)=\hat{\theta}(y_1, y_2, \ldots, y_m)$, il faut et il suffit qu'il existe un morphisme f de la chaîne θ tel que :

$$1\leqslant i\leqslant m \Longrightarrow x_i\in \operatorname{def}(f) \qquad \text{et} \qquad y_i=f(x_i).$$

b) La condition $\hat{\theta}(x)=\hat{\theta}(y)$ définit une équivalence $\varphi(x, y)$ de base E^m. Dès que Card (E) $\geqslant m$, l'indice de cette équivalence φ (dite θ-*équivalence* de base E^m) est $\nu^{(m)}$.

3.3. *Équivalences de base* $\mathfrak{P}_k(E)$ *liées à une chaîne de base* E.

Soient θ une chaîne de base E et k, m deux entiers tels que : $1\leqslant k\leqslant m\leqslant$ Card (E).

3.3.1. Pour deux k-parties X, X′ de E, supposons qu'il existe un entier $p\geqslant 1$, une suite $(X_0, X_1, \ldots, X_p)$ de k-parties de E et une suite $(f_1, f_2, \ldots, f_p)$ de m-morphismes de θ tels que :

$$\begin{cases} X_0=X, \qquad X_p=X' \\ 1\leqslant i\leqslant p \Longrightarrow X_{i-1}\subset \operatorname{def}(f_i) \qquad \text{et} \qquad X_i=f_i(X_{i-1}). \end{cases}$$

Dans ce cas, nous dirons que X est *m-transférable* en X′ (relativement à la chaîne θ) par la suite de fonctions

$$(f_1, f_2, \ldots, f_p),$$

et nous noterons : $X - (f_1, f_2, \ldots, f_p) \to X'$.

Comme les formules :

$$\begin{cases} X - (f_1, f_2, \ldots, f_p) \to X' \\ X' - (g_1, g_2, \ldots, g_q) \to X'' \end{cases}$$

impliquent :

$$\begin{cases} X' - (\overset{-1}{f_p}, \ldots, \overset{-1}{f_2}, \overset{-1}{f_1}) \to X \\ X - (f_1, f_2, \ldots, f_p, g_1, g_2, \ldots, g_q) \to X'' \end{cases}$$

il est clair que la condition « X_1 est m-transférable en X_2 » (pour θ) définit une équivalence ψ de base $\mathfrak{P}_k(E)$. On peut dire que ψ est la *θ_m-équivalence* de base $\mathfrak{P}_k(E)$.

3.3.2. Pour Card (E) $= m$, ψ est *la plus fine* des équivalences de base $\mathfrak{P}_k(E)$: elle correspond à $X_1 = X_2$. Dès que

$$\text{Card}\,(E) > m,$$

nous allons montrer que ψ devient *la moins fine* des équivalences de base $\mathfrak{P}_k(E)$:

Proposition. — *Pour* $1 \leqslant k \leqslant m <$ Card (E) *et toute chaîne* θ *de base* E, *deux k-parties quelconques de* E *sont m-transférables l'une en l'autre* (*relativement à* θ).

Preuve. — *a*) Dans le cas minimal Card (E) $= m + 1$, il suffit de prendre $E = [0, m]$ (intervalle d'entiers muni de la chaîne naturelle θ) et de prouver la proposition (triviale pour $m = k$) par récurrence sur m. Posons $E' = [0, m - 1]$ (muni de la chaîne naturelle $\theta' = \theta|E'$) et introduisons le m-morphisme f de θ défini par : $f(x) = x + 1$ $(0 \leqslant x < m)$. Les 1-parties de E sont θ_m-équivalentes puisque

$$\{x\} - (f) \to \{x + 1\}$$

pour $0 \leqslant x < m$. Pour $k \geqslant 2$, l'hypothèse de récurrence implique la θ_{m-1}-équivalence des $(k - 1)$-parties de E′. Pour prouver que les k-parties de E sont θ_m-équivalentes, il suffit de le montrer pour deux k-parties X, Z de E telles que : $\mathrm{Max}\, X < m$, $\mathrm{Max}\, Z = m$. Si $p = m - \mathrm{Max}\, X$, posons :

$$f_h = f \qquad (1 \leqslant h \leqslant p)$$

et considérons la k-partie Y de E définie par :

$$X - (f_1, f_2, \ldots, f_p) \rightarrow Y.$$

Comme $\mathrm{Max}\, Y = m$, $Y' = Y - \{m\}$ et $Z' = Z - \{m\}$ sont deux $(k - 1)$-parties de E', de sorte que :

$$Y' - (g'_1, g'_2, \ldots, g'_q) \rightarrow Z'$$

pour des $(m - 1)$-morphismes convenables g'_i de θ'. Pour $1 \leqslant i \leqslant q$, les m-morphismes g_i de θ définis par :

$$g_i(m) = m, \qquad g_i(x) = g'_i(x) \qquad \text{pour} \qquad x \in \mathrm{def}\,(g'_i),$$

vérifient alors : $Y - (g_1, g_2, \ldots, g_q) \rightarrow z$. Ainsi X, Y, Z sont θ_m-équivalentes.

b) Dans le cas général d'une chaîne θ de base E telle que $\mathrm{Card}\,(E) \geqslant m + 1$, soit F une $(m + 1)$-partie de E. D'après (*a*), les k-parties de F sont θ_m-équivalentes. Et, par ailleurs, toute k-partie X de E est θ_m-équivalente à une k-partie Y de F : il suffit de prendre $Y = f(X)$ pour un m-morphisme f de θ tel que $X \subset \mathrm{def}(f)$, $\mathrm{val}\,(f) \subset F$, d'où $X - (f) \rightarrow Y$.

3.3.3. Pour $1 \leqslant k < m < \mathrm{Card}\,(E)$, il existe toujours une chaîne θ de base E et deux k-parties X_1, X_2 de E telles que : $\theta = (\theta|X_1) + \theta' = \theta'' + (\theta|X_2)$. Dès lors, toute suite $(f_1, f_2, \ldots, f_p)$ de m-morphismes de θ telle que :

$$X_1 - (f_1, f_2, \ldots, f_p) \rightarrow X_2,$$

vérifie $p \geqslant 2$. Ceci étant, signalons seulement la proposition suivante (que nous avons obtenue en prenant $n = 2l(2k+1)$) :

Proposition. — *Pour tout couple* (k, l) *d'entiers* $\geqslant 1$, *il existe un entier* $n > k + l$ *vérifiant la condition :* « *Pour toute chaîne* θ *de base* E *telle que* $\mathrm{Card}\,(E) \geqslant n$ *et tout couple* (X, X') *de k-parties de* E, *il existe un couple* (f_1, f_2) *de* $(k + l)$*-morphismes de* θ *tel que* $X - (f_1, f_2) \rightarrow X'$ ».

En dehors de $n_0(k, 1) = k + 2$ et de $n_0(1, l) = 2l + 1$, nous ne connaissons pas la valeur du plus petit $n_0(k, l)$ de ces entiers n.

3.4. *Équivalence quelconque de base* $\mathfrak{P}_m(\mathrm{E})$. *Nombres de Ramsey.*

Pour un ensemble E et un entier $m \geqslant 1$, soit $\varepsilon(\mathrm{X}, \mathrm{Y})$ une équivalence de base $\mathfrak{P}_m(\mathrm{E})$. S'il existe une n-partie F de E telle que la restriction $\varepsilon|\mathfrak{P}_m(\mathrm{F})$ soit constante, nous disons que l'équivalence ε est *n-monochrome.* Si Card (E) $\geqslant m$, il revient au même de dire que les m-parties de F appartiennent à une même classe V (mod. ε).

3.4.1. Pour les équivalences ε d'indice fini, et $n \leqslant \aleph_0$, F. P. Ramsey a énoncé en 1930 [7] un théorème combinatoire qui devait devenir la source et le modèle de nombreuses propositions analogues. Ce théorème a été étendu à tout indice k et à tout cardinal n par P. Erdös et R. Rado en 1956 [2]. Nous énoncerons ce théorème sous la forme suivante :

Théorème de monochromie. — *Quels que soient l'entier* $m \geqslant 1$ *et les cardinaux* $k \geqslant 1$, $n \geqslant 1$, *il existe un cardinal* $p \geqslant n$ *tel que :* « *Pour* Card (E) $\geqslant p$, *toute équivalence de base* $\mathfrak{P}_m(\mathrm{E})$, *d'indice* $\leqslant k$, *est n-monochrome* ». On notera $\rho_m^k(n)$ le plus petit des cardinaux p vérifiant cette condition.

La valeur $\rho_m^k(n) = n$ est triviale dans chacun des deux cas minimaux : « $k = 1$, n quelconque », « k quelconque, $n \leqslant m$ ». Pour k et n finis, la valeur $\rho_1^k(n) = 1 + k(n - 1)$ correspond au *principe des tiroirs*, selon lequel : « Si $1 + k(n - 1)$ éléments sont répartis entre k tiroirs, alors l'un des tiroirs renferme au moins n éléments ».

Pour k fini, F. P. Ramsey avait obtenu deux formes particulières du théorème de monochromie :

a) Une forme « infinie » pour $n = \aleph_0$, avec $\rho_m^k(\aleph_0) = \aleph_0$. (Par la suite, P. Erdös et R. Rado devaient obtenir : $\rho_2^2(\aleph_1) = \aleph_2$).

b) Une forme « finie » associant à k, m, n entiers $\geqslant 1$ des *entiers* remarquables $\rho_m^k(n)$ qu'on peut appeler les *nombres de Ramsey.* Pour $k > 1$ et $n > m > 1$, les seuls nombres de Ramsey connus actuellement sont :

$$\begin{cases} \rho_2^2(3) = 6 \ [7] \\ \rho_2^2(4) = 18 \end{cases} \quad \text{et} \quad \rho_2^3(3) = 17 \ [6].$$

3.4.2. Bien que la forme « finie » du théorème de Ramsey n'exige nullement l'axiome des ultrafiltres, il est intéressant (à titre d'exemple) d'utiliser le corollaire 1 du théorème de cohérence partielle (1.3.3.) pour effectuer rapidement cette finitisation de manière purement qualitative. Pour des entiers $k > 1$, $n > m > 1$, il s'agit de retrouver la seconde proposition de Ramsey : $\rho_m^k(n) < \aleph_0$, en supposant connue l'existence du cardinal infini $p_0 = \rho_m^k(\aleph_0)$ (mais pas nécessairement la valeur de p_0).

Pour un p_0-ensemble E, soit $\mathcal{F}$ l'ensemble des parties finies F de E telles que Card (F) $\geqslant m$, et soit $\mathcal{F}_m$ l'ensemble des $\mathfrak{P}_m(\mathrm{F})$ lorsque F parcourt $\mathcal{F}$. Pour tout $\mathrm{F} \in \mathcal{F}$, notons Φ_F l'ensemble des équivalences non n-monochromes de base $\mathfrak{P}_m(\mathrm{F})$, d'indice $\leqslant k$. L'ensemble $\Phi = \bigcup_{\mathrm{F} \in \mathcal{F}} \Phi_\mathrm{F}$ est un ensemble saturé d'équivalences finies dans $\mathfrak{P}_m(\mathrm{E})$.

Si $\rho_m^k(n)$ était infini, on aurait $\Phi_\mathrm{F} \neq \emptyset$ pour tout $\mathrm{F} \in \mathcal{F}$, et le support de Φ serait l'ensemble filtrant $\mathcal{F}_m$. D'après le corollaire 1 du théorème 1.3.2., il existerait une équivalence ε de base $\mathfrak{P}_m(\mathrm{E})$, d'indice $\leqslant k$, telle que : $\mathrm{F} \in \mathcal{F} \Longrightarrow \varepsilon | \mathfrak{P}_m(\mathrm{F}) \in \Phi_\mathrm{F}$. Comme ε est $\aleph_0$-monochrome, la contradiction apparaît en prenant pour F une n-partie de E telle que $\varepsilon | \mathfrak{P}_m(\mathrm{F})$ soit d'indice 1.

3.4.3. Faute de connaître les valeurs exactes des nombres de Ramsey, on s'est efforcé d'en obtenir des majorations et minorations aussi bonnes que possible.

a) En dehors de l'inégalité sommaire : $\rho_m^k(n) \geqslant \sqrt[n]{n!\,k^{l-1}}$ pour $l = \binom{n}{m}$ [1], ces majorations et minorations concernent surtout $\rho_2^k(n)$. Ainsi : $\sqrt{2} \leqslant \sqrt[n]{\rho_2^2(n)} \leqslant 4$ [1], sans qu'on sache si $\sqrt[n]{\rho_2^2(n)}$ converge quand $n \to \infty$.

Pour obtenir, par exemple : $\rho_2^k(3) > 2^k$, introduisons les intervalles d'entiers $\mathrm{E} = [0,\ 2^k - 1]$, $\mathrm{F} = [0,\ k-1]$, et notons $2^{\pi(x)}$ le p.g.c.d. de 2^k et de $b - a$, pour toute paire $\mathrm{X} = \{a, b\}$ d'éléments de E. On définit ainsi une application $\mathrm{X} \to \pi(\mathrm{X})$ de $\mathfrak{P}_2(\mathrm{E})$ sur F vérifiant, pour toute 3-partie $\{a, b, c\}$ de E la condition :

$$\pi(\{a, b\}) = \pi(\{b, c\}) = h \Longrightarrow \pi(\{a, c\}) > h.$$

La condition $\pi(\mathrm{X}) = \pi(\mathrm{Y})$ définit donc une équivalence $\varepsilon(\mathrm{X}, \mathrm{Y})$ d'indice k, de base $\mathfrak{P}_2(\mathrm{E})$, non 3-monochrome.

b) P. Erdös et G. Szekeres [3] pour $k = 2$, puis R. E. Greenwood et A. M. Gleason [6] pour $k \geqslant 2$ ont obtenu une majoration : $\rho_2^k(n+1) \leqslant \beta_k(n)$ par le coefficient multinomial

$$\beta_k(n) = \frac{(kn)\,!}{(n\,!)^k}.$$

En [6] apparaît également la majoration : $\rho_2^k(3) < 1 + k\,!\, e$.

En [5*b*], nous avons signalé la majoration : $\rho_2^2(n+1) \leqslant \mu(n)$ par l'entier $\mu(n) = \sum\limits_{0 \leqslant h \leqslant n} \frac{1 + \beta_2(h)}{(-2)^{n-h}}$. Quand $n \to \infty$, la valeur asymptotique de $\mu(n)$ est $\frac{8}{9}\,\beta_2(n)$, et :

$$n \geqslant 4 \Longrightarrow \mu(n) < \frac{8}{9}\,\beta_2(n).$$

L'inégalité donnée en [3] est ainsi légèrement améliorée.

c) En [6] et [5*b*], des minorations particulières $q < \rho_2^k(n)$ sont obtenues en considérant, pour un groupe additif abélien G, des équivalences ε de base $\mathfrak{P}_2(\mathrm{G})$ *invariantes* par les translations du groupe G (autrement dit :

$$\mathrm{X} \equiv \mathrm{Y} \ (\mathrm{mod.}\ \varepsilon) \Longrightarrow a + \mathrm{X} \equiv a + \mathrm{Y} \ (\mathrm{mod.}\ \varepsilon)$$

pour tout $a \in \mathrm{G}$).

Pour une partie A du groupe additif Z_d des entiers modulo d, notons $\Delta(\mathrm{A})$ l'ensemble des $\mathrm{M} \subset \mathrm{A}$ tels que :

$$\{x, y\} \in \mathfrak{P}_2(\mathrm{M}) \Longrightarrow x - y \in \mathrm{A},$$

et $\delta(\mathrm{A})$ le maximum de Card (M) quand M parcourt $\Delta(\mathrm{A})$.

Pour un corps fini F_q de caractéristique p (nombre premier tel que : Card $(\mathrm{F}_q) = q = p^r$) et un diviseur k de $q - 1$, soit H le sous-groupe multiplicatif d'index k de F_q^*. Comme H est un groupe cyclique d'ordre $d = \frac{q-1}{k}$, chaque générateur g de H définit un isomorphisme $x \to \sigma(x)$ de H sur Z_d tel que : $x = g^{\sigma(x)}$. En notant H_g l'image par σ de $\mathrm{H} \cap (\mathrm{H} + 1)$, nous avons obtenu : « *Si pd est pair, l'entier* $n = 3 + \delta(\mathrm{H}_g)$ (***indépendant de*** *g*) *vérifie* $q < \rho_2^k(n)$ ».

Ce principe de minoration et les majorations signalées en (*b*) permettent de retrouver : $\rho_2^2(3) = 6$, $\rho_2^2(4) = 18$, $\rho_2^3(3) = 17$, et fournissent les inégalités :

$$\begin{cases} 41 < \rho_2^4(3) \leqslant 66 \ [6] \\ 37 < \rho_2^2(5) \leqslant 62 \ [5b] \\ \rho_2^3(4) > 61, \qquad \rho_2^2(6) > 73, \qquad \rho_2^3(5) > 199 \ [5b]. \end{cases}$$

3.5. *Équivalence de base* $\mathfrak{P}_2(\mathrm{E})$ *respectant une chaîne de base* E.

Soit θ une chaîne de base E. Pour cette chaîne θ et une partie V de $\mathfrak{P}_2(\mathrm{E})$, envisageons la condition suivante :

« Quels que soient x, y, z dans E tels que $x < y < z$ (mod. θ) :

$$\{x, y\} \in \mathrm{V} \quad \text{et} \quad \{y, z\} \in \mathrm{V} \Longrightarrow \{x, z\} \in \mathrm{V} \text{ ».}$$

Lorsque cette condition est vérifiée par tous les ensembles V d'un k-partage $\varepsilon = (\mathrm{V}_1, \mathrm{V}_2, \ldots, \mathrm{V}_k)$ de $\mathfrak{P}_2(\mathrm{E})$ (ou par toutes les classes V d'une équivalence φ de base $\mathfrak{P}_2(\mathrm{E})$), nous disons que le k-partage ε (ou l'équivalence φ) *respecte* la chaîne θ.

3.5.1. Soit (α, β) un couple de chaînes (ou *bichaîne*) de base E. Le *comparateur* de cette bichaîne sera le 2-partage $(\mathrm{V}_1, \mathrm{V}_2)$ de $\mathfrak{P}_2(\mathrm{E})$ défini, pour $\mathrm{X} \in \mathfrak{P}_2(\mathrm{E})$, par la condition : $\mathrm{X} \in \mathrm{V}_1 \Longleftrightarrow \alpha|\mathrm{X} = \beta|\mathrm{X}$. Ainsi, pour $x < y$ (mod. α), une paire $\{x, y\}$ d'éléments de E appartient à V_1 si $x < y$ (mod. β), et à V_2 si $y < x$ (mod. β). Il est immédiat que le comparateur ε de (α, β) respecte chacune des chaînes α, β. Réciproquement :

Proposition. — *Si un 2-partage* ε *de* $\mathfrak{P}_2(\mathrm{E})$ *respecte une chaîne* $\alpha \in \mathbf{J}(\mathrm{E})$, *il existe une chaîne* $\beta \in \mathbf{J}(\mathrm{E})$ *(et une seule) telle que la bichaîne* (α, β) *admette* ε *comme comparateur.*

Preuve. — Posons $\mathrm{V}_0 = \mathfrak{P}_1(\mathrm{E})$, $\varepsilon = (\mathrm{V}_1, \mathrm{V}_2)$. La relation $\beta(x, y)$ est déterminée par :

$$(1) \qquad \begin{cases} \{x, y\} \in \mathrm{V}_0 \cup \mathrm{V}_1 \Longrightarrow \beta(x, y) = \alpha(x, y) \\ \{x, y\} \in \mathrm{V}_2 \Longrightarrow \beta(x, y) = \alpha(y, x). \end{cases}$$

Cette relation β est réflexive, totale, asymétrique. Pour montrer qu'elle est transitive, il suffit d'envisager une 3-partie $\{x, y, z\}$ de E telle que $\beta(x, y) = \beta(y, z) = 1$. Six cas se présentent alors pour appliquer les conditions (1) :

$$(2)\quad \begin{cases} y < x < z \ (\text{mod. } \alpha) : & \{y, x\} \in V_2, & \{y, z\} \in V_1. \\ x < y < z \ (\text{mod. } \alpha) : & \{x, y\} \in V_1, & \{y, z\} \in V_1. \\ x < z < y \ (\text{mod. } \alpha) : & \{x, y\} \in V_1, & \{z, y\} \in V_2. \end{cases}$$

$$(3)\quad \begin{cases} y < z < x \ (\text{mod. } \alpha) : & \{y, z\} \in V_1, & \{y, x\} \in V_2. \\ z < y < x \ (\text{mod. } \alpha) : & \{z, y\} \in V_2, & \{y, x\} \in V_2. \\ z < x < y \ (\text{mod. } \alpha) : & \{z, y\} \in V_2, & \{x, y\} \in V_1. \end{cases}$$

Comme $\varepsilon = (V_1, V_2)$ respecte α, les cas (2) et (3) donnent respectivement :

$$\begin{cases} \alpha(x, z) = 1 \Longrightarrow \{x, z\} \in V_1. \\ \alpha(z, x) = 1 \Longrightarrow \{z, x\} \in V_2. \end{cases}$$

Dans tous les cas, on obtient $\beta(x, z) = 1$: β est une chaîne et ε est le comparateur de la bichaîne (α, β).

Corollaire. — *Si une chaîne α de base finie* E *est respectée par un* 2-*partage* (V_1, V_2) *de* $\mathfrak{P}_2(E)$, *il existe une permutation* f *de* E *(et une seule) admettant* V_1 *comme ensemble des paires* $\{x, y\} \in \mathfrak{P}_2(E)$ *telles que* $x < y$ *(mod.* α*) et* $f(x) < f(y)$ *(mod.* α*).*

(Il suffit d'introduire la bichaîne (α, β) de comparateur (V_1, V_2) et la permutation f de E telle que : $\alpha \xrightarrow{f} \beta$).

3.5.2. Lorsque $x = (x_1, x_2, \ldots, x_k)$ et $y = (y_1, y_2, \ldots, y_k)$ parcourent un ensemble produit $E = E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_k$, notons V_h l'ensemble des paires $\{x, y\} \in \mathfrak{P}_2(E)$ telles que : $x_1 = y_1$, $x_2 = y_2$, $\ldots$, $x_{h-1} = y_{h-1}$, $x_h \neq y_h$. Nous dirons que $\varepsilon = (V_1, V_2, \ldots, V_k)$ est le k-partage de $\mathfrak{P}_2(E)$ *lié au produit* $E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_k$.

Dans ces notations, si $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_k$ sont des chaînes de bases respectives $E_1, E_2, \ldots, E_k$, le *produit lexicographique* $\theta_1\theta_2 \ldots \theta_k$ est l'unique chaîne θ de base E telle que :

$$\{x, y\} \in V_h \Longrightarrow \theta(x, y) = \theta_h(x_h, y_h).$$

En particulier, lorsque $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_k$ sont identiques à la chaîne naturelle ayant pour base l'intervalle d'entiers

$$F = [0, n - 1] \quad (n \geqslant 2),$$

le développement $\sigma(x_1, x_2, \ldots, x_k) = \sum\limits_{1 \leqslant h \leqslant k} x_h n^{k-h}$ définit un isomorphisme σ entre la chaîne lexicographique $\theta = \theta_1\theta_2 \ldots \theta_k$ de base $E = F^k$ et la chaîne naturelle θ' de base $E' = [0, n^k - 1]$.

En accord avec la terminologie concernant les équivalences, disons qu'un partage $\varepsilon' = (V'_1, V'_2, \ldots, V'_l)$ est *moins fin* que le partage $\varepsilon = (V_1, V_2, \ldots, V_k)$ dès que tout ensemble V'_i est réunion d'ensembles V_h.

Proposition. — *Si* ε *est le* k*-partage de* $\mathfrak{P}_2(E)$ *lié au produit* $E = \prod_{1 \leqslant h \leqslant k} E_h$ *et si* θ *est le produit lexicographique de chaînes* $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_k$ *basées respectivement sur* $E_1, E_2, \ldots, E_k$, *alors* ε *et tous les partages de* $\mathfrak{P}_2(E)$ *moins fins que* ε *respectent la chaîne* θ.

Preuve. — Soit V' une classe d'un partage ε' de $\mathfrak{P}_2(E)$ moins fin que $\varepsilon = (V_1, V_2, \ldots, V_k)$. Pour des éléments x, y, z de E tels que: $x < y < z \pmod{\theta}$, $\{x, y\} \in V'$, $\{y, z\} \in V'$, V' contient deux classes V_p, V_q de ε telles que:

$$\{x, y\} \in V_p, \qquad \{y, z\} \in V_q.$$

Il en résulte: $\{x, z\} \in V_r$ pour $r = \mathrm{Min}\,(p, q)$, donc $\{x, z\} \in V'$.

3.5.3. Voici un corollaire immédiat de la seconde proposition de Ramsey:

Proposition. — *Quels que soient les entiers* $k \geqslant 1$, $n \geqslant 1$, *il existe un entier* $p \geqslant n$ *tel que: « Si* Card (E) $\geqslant p$, *toute équivalence de base* $\mathfrak{P}_2(E)$, *d'indice* $\leqslant k$, *respectant une chaîne de base* E, *est* n*-monochrome.* »

Si $\sigma_2^k(n)$ désigne le plus petit des entiers p vérifiant cette condition, il est clair que: $\sigma_2^k(n) \leqslant \rho_2^k(n)$. Mais alors que les nombres de Ramsey $\rho_2^k(n)$ se laissent seulement majorer et minorer (sans rien livrer d'autre concernant leur expression), nous verrons au § 4 que $\sigma_2^k(n) = 1 + (n - 1)^k$.

4. Théorème des multichaînes.

4.1. *Coefficient d'un* k*-partage de* $\mathfrak{P}_2(E)$.

Soit θ une chaîne de base finie non vide E. Pour toute partie $F = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ de E telle que

$$x_1 < x_2 < \cdots < x_n \pmod{\theta},$$

notons $\mathfrak{P}_2^\theta(E)$ l'ensemble des paires

$$\{x_h, x_{h+1}\} \quad (1 \leqslant h < n).$$

A tout k-partage $\varepsilon = (V_1, V_2, \ldots, V_k)$ de $\mathfrak{P}_2(E)$, associons les entiers $\geqslant 1$:

$$p_i(\varepsilon) = \operatorname*{Max\,Card}_{\mathfrak{P}_2(F) \subset V_i} (F), \qquad p_i^\theta(\varepsilon) = \operatorname*{Max\,Card}_{\mathfrak{P}_2^\theta(F) \subset V_i} (F)$$

et le nombre rationnel $r_\theta(\varepsilon)$ (*coefficient* de ε relatif à θ) défini par :

$$\prod_{1 \leqslant i \leqslant k} p_i^\theta(\varepsilon) = r_\theta(\varepsilon) \times \text{Card}\,(E).$$

4.1.1. La proposition suivante montre que les k-partages ε de $\mathfrak{P}_2(E)$ ayant un coefficient $r_\theta(\varepsilon) = 1$ jouent un rôle minimal remarquable :

Proposition. — *Relativement à une chaîne θ de base finie non vide* E, *tout k-partage ε de $\mathfrak{P}_2$*(E) *possède un coefficient $r_\theta(\varepsilon) \geqslant 1$ et vérifie (pour $1 \leqslant i \leqslant k$) les inégalités :*

$$p_i(\varepsilon) \leqslant p_i^\theta(\varepsilon) \leqslant r_\theta(\varepsilon) \times p_i(\varepsilon).$$

Preuve. — L'inégalité $p_i(\varepsilon) \leqslant p_i^\theta(\varepsilon)$ est triviale. Dans chacun des deux cas minimaux $k = 1$, Card (E) $= 1$, il est évident que $p_i(\varepsilon) = p_i^\theta(\varepsilon)$ et que $r_\theta(\varepsilon) = 1$. Pour $k \geqslant 2$ et Card (E) $\geqslant 2$, il suffit (puisque les classes V_i de ε jouent le même rôle) de prouver :

$$p_1^\theta(\varepsilon) \leqslant r_\theta(\varepsilon) \times p_1(\varepsilon),$$

autrement dit :

$$\text{Card}\,(E) \leqslant p_1(\varepsilon) \times p_2^\theta(\varepsilon) p_3^\theta(\varepsilon) \ldots p_k^\theta(\varepsilon).$$

Posons $n = p_k^\theta(\varepsilon)$, et opérons par récurrence sur $k +$ Card (E) :

a) Si $n = 1$ (autrement dit : $V_k = \varnothing$), on considère le $(k-1)$-partage $\varepsilon_1 = (V_1, V_2, \ldots, V_{k-1})$ de $\mathfrak{P}_2(E)$. L'hypothèse de récurrence appliquée à (θ, ε_1) fournit l'inégalité concernant (θ, ε).

b) Si $n \geqslant 2$, soit E′ l'ensemble non vide des éléments $x = \text{Max}\, F$ correspondant aux n-parties F de E telles que $\mathfrak{P}_2^\theta(F) \subset V_k$. Comme Min E $\notin$ E′, l'ensemble E″ = E — E′ est non vide. Posons :

$$\begin{cases} V'_i = V_i \cap \mathfrak{P}_2(E'), & \varepsilon' = (V'_1, V'_2, \ldots, V'_k), \qquad \theta' = \theta | E', \\ V''_i = V_i \cap \mathfrak{P}_2(E''), & \varepsilon'' = (V''_1, V''_2, \ldots, V''_k), \qquad \theta'' = \theta | E''. \end{cases}$$

Comme $p_1(\varepsilon') \leqslant p_1(\varepsilon)$ et $p_i^{\theta'}(\varepsilon') \leqslant p_i^\theta(\varepsilon)$ $(1 < i < k)$ — inégalités analogues pour θ'', ε'' — l'hypothèse de récurrence appliquée à (θ', ε') et $(\theta'', \varepsilon'')$ fournit l'inégalité :

$$\text{Card}\,(\mathrm{E}) \leqslant p_1(\varepsilon) \times p_2^{\theta}(\varepsilon) \ \ldots \ p_{k-1}^{\theta}(\varepsilon) \times [p_k^{\theta'}(\varepsilon') + p_k^{\theta''}(\varepsilon'')].$$

Mais, d'une part : $p_k^{\theta'}(\varepsilon') = 1$ (puisque deux éléments distincts x, y de E' vérifient nécessairement $\{x, y\} \notin \mathrm{V}_k$). D'autre part : $p_k^{\theta''}(\varepsilon'') \geqslant n$ impliquerait l'existence d'une n-partie F de E'' telle que $\mathfrak{P}_2^{\theta}(\mathrm{F}) \subset \mathrm{V}_k$, d'où la contradiction : $\text{Max}\,\mathrm{F} \in \mathrm{E}' \cap \mathrm{E}''$. Il en résulte : $p_k^{\theta'}(\varepsilon') + p_k^{\theta''}(\varepsilon'') \leqslant n$, et l'inégalité cherchée concernant (θ, ε).

Corollaire. — *Soient m_1, m_2, $\ldots$, m_k des entiers $\geqslant 1$. Pour toute chaîne θ de base finie* E *telle que*

$$\text{Card}\,(\mathrm{E}) > m_1 m_2 \ldots m_k$$

et tout k-partage $\varepsilon = (\mathrm{V}_1, \mathrm{V}_2, \ldots, \mathrm{V}_k)$ de $\mathfrak{P}_2(\mathrm{E})$, il existe :

soit deux entiers i, j $(1 \leqslant i < j \leqslant k)$ tels que $p_i^{\theta}(\varepsilon) > m_i$ et $p_j^{\theta}(\varepsilon) > m_j$;
soit un entier h $(1 \leqslant h \leqslant k)$ tel que $p_h(\varepsilon) > m_h$.

(Sinon, il existerait un entier h tel que $p_h(\varepsilon) \leqslant m_h$ et $p_i^{\theta}(\varepsilon) \leqslant m_i$ pour tout $i \neq h$. On en déduirait $p_h^{\theta}(\varepsilon) \leqslant r_{\theta}(\varepsilon) \times m_h$, et $\prod_{1 \leqslant i \leqslant k} p_i^{\theta}(\varepsilon) < r_{\theta}(\varepsilon) \times \text{Card}\,(\mathrm{E})$ contrairement à la définition de $r_{\theta}(\varepsilon)$).

4.1.2. Parmi les k-partages ε de $\mathfrak{P}_2(\mathrm{E})$ vérifiant : $p_i^{\theta}(\varepsilon) = p_i(\varepsilon)$ pour $1 \leqslant i \leqslant k$, citons :

a) ceux qui respectent la chaîne θ (3.5.);

b) ceux de coefficient minimal $r_{\theta}(\varepsilon) = 1$.

En outre, $r_{\theta}(\varepsilon) = 1$ implique la factorisation :

$$\text{Card}\,(\mathrm{E}) = \prod_{1 \leqslant i \leqslant k} p_i(\varepsilon).$$

Réciproquement :

Proposition. — *Pour toute chaîne θ de base finie non vide* E, *et toute factorisation* $\text{Card}\,(\mathrm{E}) = m_1 m_2 \ldots m_k$, *il existe un k-partage ε de $\mathfrak{P}_2(\mathrm{E})$ respectant la chaîne θ, de coefficient $r_{\theta}(\varepsilon) = 1$, tel que : $p_i(\varepsilon) = m_i$ (pour $1 \leqslant i \leqslant k$).*

Preuve. — Soient θ_1, θ_2, $\ldots$, θ_k des chaînes de bases respectives E_1, E_2, $\ldots$, E_k telles que $\text{Card}\,(\mathrm{E}_i) = m_i$. Par isomorphisme entre deux chaînes finies équipotentes, on se ramène au cas $E = E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_k$ en prenant pour chaîne θ (de base E) le produit lexicographique $\theta_1\theta_2 \ldots \theta_k$. Dès lors, soit $\varepsilon = (V_1, V_2, \ldots, V_k)$ le k-partage de $\mathfrak{P}_2(E)$ lié au produit $E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_k$ (3.5.2.) : on sait que ε respecte la chaîne θ. Pour $n = p_h(\varepsilon)$, soit $F = \{a, b, \ldots, l\}$ une n-partie de E telle que $a < b < \cdots < l$ (mod. θ) et $\mathfrak{P}_2(F) \subset V_h$. Les projections des éléments de F vérifient alors :

$$\begin{cases} 1 \leqslant i < h \Longrightarrow a_i = b_i = \cdots = l_i \\ a_h < b_h < \cdots < l_h \ (\text{mod. } \theta_h). \end{cases}$$

Il en résulte :

$$p_h(\varepsilon) \leqslant m_h \quad \text{pour} \quad 1 \leqslant h \leqslant k, \qquad \prod_{1 \leqslant i \leqslant k} p_i(\varepsilon) \leqslant \text{Card (E)},$$

ce qui implique $r_\theta(\varepsilon) = 1$ et $p_h(\varepsilon) = m_h$ pour $1 \leqslant h \leqslant k$.

4.2. *Variantes du théorème de Ramsey.*

Pour parvenir à de nouvelles majorations des nombres de Ramsey, par exemple : $\rho_2^2(n+1) \leqslant \binom{2n}{n}$, P. Erdös et G. Szekeres associaient à tout système $(k, m, n_1, n_2, \ldots, n_k)$ d'entiers $\geqslant 1$ un entier $\psi_m^k(n_1, n_2, \ldots, n_k)$ défini comme minimum des entiers p vérifiant la condition suivante [3] : « *Pour* Card (E) $\geqslant p$ *et tout k-partage* $(V_1, V_2, \ldots, V_k)$ *de* $\mathfrak{P}_m(E)$, *il existe une classe* V_i *et une n_i-partie* F *de* E *telles que* $\mathfrak{P}_m(F) \subset V_i$ ». Il est clair que

$$\begin{cases} \rho_m^k(n) = \psi_m^k(n, n, \ldots, n) \\ n = \operatorname*{Max}_{1 \leqslant i \leqslant k} n_i \Longrightarrow \psi_m^k(n_1, n_2, \ldots, n_k) \leqslant \rho_m^k(n). \end{cases}$$

Pour $m = 2$, les propositions données en 4.1. conduisent à une variante qui apparaît comme une forme affaiblie de l'énoncé précédent. Il est curieux de constater que le seuil de validité de cette forme affaiblie se calcule aisément, mais que la détermination des entiers analogues $\psi_2^k(n_1, n_2, \ldots, n_k)$ reste un problème ouvert.

Proposition. — *L'entier* $1 + (n_1 - 1)(n_2 - 1) \ldots (n_k - 1)$ *est le plus petit des entiers* p *vérifiant la condition suivante :* « *Pour* Card (E) $\geqslant p$ *et tout k-partage* $(V_1, V_2, \ldots, V_k)$ *de* $\mathfrak{P}_2(E)$ *respectant une chaîne de base* E, *il existe une classe* V_i *et une n_i-partie* F *de* E *telles que* $\mathfrak{P}_2(F) \subset V_i$ ».

Preuve. — La proposition est triviale si l'un des entiers $m_i = n_i - 1$ est nul. Si $m_i \geqslant 1$ (pour tout i), elle se ramène évidemment à l'examen des cas où la base E est finie. Pour tout k-partage ε de $\mathfrak{P}_2(E)$ respectant une chaîne θ de base E (ce qui implique $p_i^\theta(\varepsilon) = p_i(\varepsilon)$), l'existence d'un entier i $(1 \leqslant i \leqslant k)$ tel que $p_i(\varepsilon) \geqslant n_i$ résulte de la proposition 4.1.1. (corollaire) dès que Card (E) $> m_1 m_2 \ldots m_k$. Un tel entier i peut ne pas exister (proposition 4.1.2.) si

$$\text{Card (E)} = m_1 m_2 \ldots m_k.$$

Remarques. — *a*) On obtient, comme cas particulier, le seuil de validité $\sigma_2^k(n) = 1 + (n - 1)^k$ de la proposition 3.5.3.

b) Étant donné une chaîne α de base E, nous avons établi (proposition 3.5.1.) une correspondance bijective $\beta \to \varepsilon$ entre les chaînes β de base E et les 2-partages ε de $\mathfrak{P}_2(E)$ respectant α, en interprétant ε comme comparateur de la bichaîne (α, β). Compte tenu de cette correspondance, la proposition précédente admet comme cas particulier (pour $k = 2$) une proposition de P. Erdös et G. Szekeres [3] :

L'entier $1 + (n_1 - 1)(n_2 - 1)$ *est le plus petit des entiers* p *vérifiant la condition suivante: « Pour toute bichaîne* (α, β) *de base* E *telle que* Card (E) $\geqslant p$, *il existe: soit une* n_1*-partie* F *de* E *telle que* $\alpha|F$, $\beta|F$ *sont identiques, soit une* n_2*-partie* F *de* E *telle que* $\alpha|F$, $\beta|F$ *sont symétriques* ».

L'extension de cette proposition sur les bichaînes peut s'envisager différemment, par le *théorème des multichaînes.*

4.3. *Restriction* J^1*-cohérente d'une multichaîne.*

Si $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ sont des chaînes de même base E, le multiplet $\mu = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k)$ est une *multichaîne* (plus précisément : une *k-chaîne*) de base E. A toute partie F de E correspond une multichaîne $\mu|F = (\alpha_1|F, \alpha_2|F, \ldots, \alpha_k|F)$, dite *restriction* de μ. Lorsque les chaînes $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ sont deux à deux identiques ou symétriques, nous disons que la multichaîne μ est J^1*-cohérente* (cas particulier d'une notion qui sera étudiée au Chapitre II).

4.3.1. Pour $k \geqslant 1$, associons à tout entier $h \in [0, 2^k - 1]$ la suite $(h_0, h_1, \ldots, h_{k-1})$ des chiffres de son développement de base 2 :

$$h = \sum_{0 \leqslant i \leqslant k-1} h_i \times 2^{k-1-i}.$$

A tout 2^k-partage $\varepsilon = (A_0, A_1, \ldots, A_h, \ldots, A_{2^k-1})$ d'un ensemble M correspond alors une suite $(\varepsilon_0, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{k-1})$ de bipartages de M définie par :

$$\begin{cases} \varepsilon_i = (B_i^0, B_i^1) & (0 \leqslant i \leqslant k-1) \\ B_i^\nu = \bigcup\limits_{h_i=\nu} A_h & (\nu = 0 \text{ ou } 1). \end{cases}$$

Comme : $A_h = \bigcap\limits_{0 \leqslant i \leqslant k-1} B_i^{h_i}$ pour tout $h \in [0, 2^k - 1]$, on reconnaît facilement que la correspondance

$$\varepsilon \to (\varepsilon_0, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{k-1})$$

est bijective.

Lorsque $M = \mathfrak{P}_2(E)$, nous allons utiliser cette correspondance dans l'étude des multichaînes de base E.

4.3.2. Théorème des multichaines. — *Quels que soient les entiers $k \geqslant 1$, $n \geqslant 1$, l'entier $n^{(2^k)}$ est le plus petit des entiers p vérifiant la condition : « Pour* Card (E) $> p$ *et toute $(k+1)$-chaîne μ de base* E, *il existe une $(n+1)$-partie* F *de* E *telle que la restriction $\mu|F$ soit J^1-cohérente ».*

Preuve. — *a*) Soit $\mu = (\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_k)$ une $(k+1)$-chaîne de base E telle que Card (E) $\geqslant 1 + n^{(2^k)}$. Pour $0 \leqslant i \leqslant k-1$, notons ε_i le comparateur de la bichaîne (α_0, α_{i+1}) et introduisons (conformément à 4.3.1.) le 2^k-partage $\varepsilon = (A_0, A_1, \ldots, A_{2^k-1})$ de $\mathfrak{P}_2(E)$ associé à la suite $(\varepsilon_0, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{k-1})$. Comme chaque ε_i respecte la chaîne α_0, il en est de même pour ε.

D'après la proposition 4.2., il existe alors une classe

$$A_h \ (0 \leqslant h \leqslant 2^k - 1)$$

et une $(n+1)$-partie $F = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ de E vérifiant : $x_0 < x_1 < \cdots < x_n \pmod{\alpha_0}$ et $\mathfrak{P}_2(F) \subset A_h$. Si

$$(h_0, h_1, \ldots, h_{k-1})$$

est la suite des chiffres de h dans son développement de base 2, il en résulte :

$$\begin{cases} x_0 < x_1 < \cdots < x_n \pmod{\alpha_{i+1}} & \text{si} \quad h_i = 0 \\ x_0 > x_1 > \cdots > x_n \pmod{\alpha_{i+1}} & \text{si} \quad h_i = 1 \end{cases}$$

et la multichaîne $\mu|F$ est bien J^1-cohérente.

b) Si Card (E) $= n^{(2^k)}$, montrons qu'il existe une $(k+1)$-chaîne μ de base E dont toute restriction J^1-cohérente $\mu|F$ vérifie Card $(F) \leqslant n$.

C'est trivial pour $n = 1$. Pour $n \geqslant 2$, prenons pour α_0 la chaîne naturelle de base $E = [0, n^{(2^k)} - 1]$. Lorsque x parcourt E, nous avons rappelé (3.5.2.) que le développement de base n :

$$x = \sum_{0 \leqslant h < 2^k} x_h \times n^{(2^k - 1 - h)},$$

définit un isomorphisme $x \rightarrow (x_0, x_1, \ldots, x_{2^k-1})$ entre α_0 et une chaîne lexicographique de base $\prod\limits_{0 \leqslant h < 2^k} E_h$, où

$$E_h = [0, n - 1].$$

Le 2^k-partage lié au produit $E_0 \times E_1 \times \cdots \times E_{2^k-1}$ se transporte alors en un 2^k-partage $\varepsilon = (A_0, A_1, \ldots, A_{2^k-1})$ de $\mathfrak{P}_2(E)$, dans lequel A_h désigne l'ensemble des paires d'entiers $\{x, y\}$ de E telles que :

$$x_0 = y_0, \qquad x_1 = y_1, \ldots, \qquad x_{h-1} = y_{h-1}, \qquad x_h \neq y_h.$$

Introduisons (comme en 4.3.1.) la suite $(\varepsilon_0, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{k-1})$ de bipartages de $\mathfrak{P}_2(E)$ associée à ε. D'après la proposition 3.5.2., ε et tous les partages $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{k-1}$ (moins fins que ε) respectent la chaîne α_0. Il existe donc (proposition 3.5.1.) des chaînes $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ de base E telles que $\varepsilon_i = (B_i^0, B_i^1)$ s'interprète (pour $0 \leqslant i \leqslant k - 1$) comme le comparateur de la bichaîne (α_0, α_{i+1}). Posons : $\mu = (\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_k)$.

Si $\mu|F$ est une restriction J^1-cohérente de la multichaîne μ, il existe une suite $(h_0, h_1, \ldots, h_{k-1})$ de chiffres 0 ou 1, et un entier $h = \sum\limits_{0 \leqslant i \leqslant k-1} h_i \times 2^{k-1-i}$ $(0 \leqslant h \leqslant 2^k - 1)$ tels que :

$$\begin{cases} h_i = 0 \quad \text{si} \quad \alpha_0|F,\ \alpha_{i+1}|F \quad \text{sont identiques} \\ h_i = 1 \quad \text{si} \quad \alpha_0|F,\ \alpha_{i+1}|F \quad \text{sont symétriques.} \end{cases}$$

De : $0 \leqslant i \leqslant k - 1 \Longrightarrow \mathfrak{P}_2(F) \subset B_i^{h_i}$, il résulte : $\mathfrak{P}_2(F) \subset A_h$. Les éléments $a, b, \ldots, l$ de F ont ainsi (dans leur développement de base n) des chiffres $a_h, b_h, \ldots, l_h$ deux à deux distincts, ce qui implique Card $(F) \leqslant n$.

Exemples : (b_1) Pour $k = 1$, cette méthode fournit une bichaîne $\mu = (\alpha_0, \alpha_1)$ de base $E = [0, n^2 - 1]$ dont toute restriction J^1-cohérente $\mu|F$ vérifie Card $(F) \leqslant n$. Notons

$x \to f(x)$ l'isomorphisme entre la chaîne naturelle α_0 et la chaîne α_1. Si $x \in E$ admet $x = x_0 n + x_1$ comme développement de base n, on obtient : $f(x) = x_0 n + (n - 1 - x_1)$.

(b_2) Pour $k = n = 2$, la méthode fournit une 3-chaîne $\mu = (\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2)$ de base $E = [0, 15]$ ayant, lorsque F parcourt $\mathfrak{P}_3(E)$, 560 restrictions $\mu|F$ dont aucune n'est J^1-cohérente. Relativement à la chaîne naturelle α_0, les chaînes α_1 et α_2 sont déterminées par les isomorphismes : $\alpha_1 \overset{f}{\sim} \alpha_0$, $\alpha_2 \overset{g}{\sim} \alpha_0$. On obtient :

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
$f(x)$	3	2	1	0	7	6	5	4	11	10	9	8	15	14	13	12
$g(x)$	5	4	7	6	1	0	3	2	13	12	15	14	9	8	11	10

5. Relation interprétable par une chaîne. Interprétabilité restreinte.

5.1. *Réduction à la m-interprétabilité.*

Pour qu'une relation m-aire φ soit interprétable (1.2.3.) par une relation θ de même base, il suffit qu'elle soit k-interprétable par θ pour tout entier k tel que $1 \leqslant k \leqslant m$. Lorsque θ est une chaîne, la proposition 3.3.2. permet de réduire encore cette condition :

PROPOSITION. — *Si* Card (E) $\geqslant m + 1$ *et si une relation* $\varphi \in \mathbf{R}_m(E)$ *est m-interprétable par une chaîne* $\theta \in \mathbf{J}(E)$, *alors* φ *est interprétable par* θ.

Preuve. — Pour $1 \leqslant k \leqslant m$, soient X et X' deux k-parties de E. On sait (3.3.2.) qu'il existe des k-parties $X_0, X_1, \ldots, X_p$ de E et des m-morphismes $f_1, f_2, \ldots, f_p$ de θ (donc aussi de φ) tels que :

$$\begin{cases} X_0 = X, \ X_p = X' \\ 1 \leqslant i \leqslant p \Longrightarrow X_{i-1} \subset \operatorname{def}(f_i) \quad \text{et} \quad X_i = f_i(X_{i-1}). \end{cases}$$

Si g_i ($1 \leqslant i \leqslant p$) désigne la restriction de f_i à X_{i-1}, il est clair que $g_1, g_2, \ldots, g_p$ sont des k-morphismes de θ et de φ.

Pour la fonction $g = g_p \circ \cdots \circ g_2 \circ g_1$, il en résulte :

$$\theta | X' \overset{g}{\sim} \theta | X, \qquad \varphi | X' \overset{g}{\sim} \varphi | X.$$

Ainsi, φ est k-interprétable par θ.

5.2. *Génération et dénombrement du clan* $\mathbf{R}^\theta_m(E)$, *pour une chaîne* θ *de base* E.

En 1.2.3., pour une chaîne $\theta \in \mathbf{J}(E)$ et un entier $m \geqslant 1$, nous avions noté $\mathbf{R}^\theta_m(E)$ le clan des relations m-aires de base E interprétables par la chaîne θ.

5.2.1. A^k_m désignant l'ensemble des applications de $[1, m]$ sur $[1, k]$, nous avions défini en 3.2. une application $\hat{\theta}$ de E^m dans $A_m = \bigcup_{1 \leqslant k \leqslant m} A^k_m$ vérifiant la condition suivante :

« Pour que deux éléments

$$x = (x_1, x_2, \ldots, x_m) \qquad \text{et} \qquad y = (y_1, y_2, \ldots, y_m)$$

de E^m aient même image $\hat{\theta}(x) = \hat{\theta}(y)$, il faut et il suffit qu'il existe un morphisme f de θ tel que :

$$1 \leqslant i \leqslant m \Longrightarrow x_i \in \operatorname{def}(f) \qquad \text{et} \qquad y_i = f(x_i) \text{ ».}$$

Il en résulte :

a) Pour toute relation $\varphi \in \mathbf{R}^\theta_m(E)$:

$$\hat{\theta}(x) = \hat{\theta}(y) \Longrightarrow \varphi(x) = \varphi(y).$$

b) Pour toute relation unaire $\psi \in \mathbf{R}_1(A_m)$: $\psi \circ \hat{\theta} \in \mathbf{R}^\theta_m(E)$. Réciproquement :

Proposition. — *Pour toute relation* $\varphi \in \mathbf{R}^\theta_m(E)$, *il existe une relation* $\psi \in \mathbf{R}_1(A_m)$ *telle que* $\varphi = \psi \circ \hat{\theta}$. *Cette relation* ψ *est unique dès que* Card (E) $\geqslant m$.

Preuve. — La condition $\varphi = \psi \circ \hat{\theta}$ impose $\psi(\sigma) = \varphi(x)$ dès que $\sigma = \hat{\theta}(x)$. Les valeurs $\psi(\sigma)$ sont ainsi déterminées de manière cohérente (d'après la remarque (*a*) faite précédemment) pour tout $\sigma \in \hat{\theta}(E^m)$. Les valeurs $\psi(\sigma)$ restent arbitraires pour $\sigma \notin \hat{\theta}(E^m)$, mais l'on sait que $\hat{\theta}(E^m) = A_m$ dès que

$$\text{Card (E)} \geqslant m.$$

Par ailleurs, Card $(A_m) = \nu^{(m)}$ (fonction étudiée en 3.1.2.). On en déduit :

Corollaire. — *Pour toute chaîne* θ *de base* E *telle que* Card (E) $\geqslant m$, *il existe une bijection* $\psi \to \varphi = \psi \circ \hat{\theta}$ *de* $\mathbf{R}_1(A_m)$ *sur* $\mathbf{R}_m^\theta(E)$. *Le nombre des relations m-aires de base* E *interprétables par* θ *est alors* $2^{(\nu(m))}$.

5.2.2. Cherchons une génération du clan *fini* $\mathbf{R}_m^\theta(E)$ à partir des relations m-aires les plus simples interprétables par la chaîne θ.

Soit (i, j) un couple d'entiers tels que $1 \leqslant i \leqslant m$, $1 \leqslant j \leqslant m$, $i \neq j$. Pour $(x_1, x_2, \ldots, x_m) \in E^m$, posons :

$$\theta^{i,j}(x_1, x_2, \ldots, x_m) = \theta(x_i, x_j),$$

définissant ainsi une relation m-aire $\theta^{i,j}$ de base E correspondant à la condition : $x_i \leqslant x_j \pmod{\theta}$.

Si l'on note $\mathbf{J}_m^\theta(E)$ l'ensemble des $m\ (m - 1)$ relations $\theta^{i,j}$, il est clair que : $\mathbf{J}_m^\theta(E) \subset \mathbf{R}_m^\theta(E)$.

Proposition. — *Le clan* $\mathbf{R}_m^\theta(E)$ *des relations m-aires de base* E *interprétables par la chaîne* θ *est engendré par l'ensemble* $\mathbf{J}_m^\theta(E)$.

Preuve. — Dans le cas trivial $m = 1$, $\mathbf{J}_1^\theta(E)$ est vide et $\mathbf{R}_1^\theta(E)$ est le clan minimum (réduit aux deux relations unaires constantes). Pour $m \geqslant 2$, montrons que toute relation $\varphi \in \mathbf{R}_m^\theta(E)$ appartient au clan H engendré par $\mathbf{J}_m^\theta(E)$.

a) D'après la proposition 5.2.1., il existe une relation $\psi \in \mathbf{R}_1(A_m)$, de graphe $K \subset \hat{\theta}(E^m)$, telle que $\varphi = \psi \circ \hat{\theta}$. Pour $\sigma \in \hat{\theta}(E^m)$, notons θ_σ la relation m-aire de base E dont le graphe est l'ensemble des $(x_1, x_2, \ldots, x_m) \in E^m$ tels que

$$\hat{\theta}(x_1, x_2, \ldots, x_m) = \sigma.$$

Il est clair que : $\varphi = \bigvee\limits_{\sigma \in K} \theta_\sigma$.

b) Pour montrer que $\theta_\sigma \in H$ quel que soit $\sigma \in A_m^k$, rappelons que $\sigma = \hat{\theta}(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ lorsque chaque x_i est le $\sigma(i)$-ième élément du k-ensemble $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_m\}$ pour la chaîne $\theta|X$. Pour $1 \leqslant h \leqslant k$, posons : Card $(\overset{-1}{\sigma}(h)) = h'$ et introduisons une application $n \to (h, n)$ de $[1, h']$ sur $\overset{-1}{\sigma}(h)$. Pour $1 \leqslant l < k$, $1 \leqslant h \leqslant k$, $1 \leqslant n < h'$, soient α^l, β_n^h, $\beta_{h'}^h$ les relations $\theta^{i,j} \in \mathbf{J}_m^\theta(E)$ correspondant respectivement aux couples (i, j) suivants : $((l + 1,1), (l, 1))$, $((h, n), (h, n + 1))$,

$((h, h'), (h, 1))$. On vérifie que $\theta_\sigma = (\neg\theta'_\sigma) \wedge (\theta''_\sigma)$ pour $\theta'_\sigma = \bigvee_{1 \leqslant l < k} \alpha^l$ et $\theta''_\sigma = \bigwedge_{1 \leqslant h \leqslant k} \left(\bigwedge_{1 \leqslant n \leqslant h'} \beta^h_n \right)$.

5.2.3. Soient une chaîne θ et une relation m-aire φ ayant même base E. Si φ est interprétable par θ, chaque restriction $\varphi|X$ est interprétable par la chaîne $\theta|X$. Réciproquement :

Proposition. — *Soient θ une chaîne de base* E, *et α une relation m-aire basée sur une n-partie* X *de* E. *Si cette relation α est interprétable par $\theta|X$, elle admet une extension $\varphi \in \mathbf{R}^\theta_m(E)$ (unique si $n \geqslant m$).*

Preuve. — Si $\omega = \theta|X$, on sait qu'il existe une relation $\psi \in \mathbf{R}_1(A_m)$ telle que $\alpha = \psi \circ \hat{\omega}$. Comme $\hat{\omega}$ est la restriction de $\hat{\theta}$ à X^m, la relation $\varphi = \psi \circ \hat{\theta}$ de $\mathbf{R}^\theta_m(E)$ est une extension de α. En outre, la donnée de α détermine ψ de manière unique dès que Card $(X) \geqslant m$.

5.3. *Relations particulières interprétables par une chaîne.*

5.3.1. Soit θ' la chaîne symétrique d'une chaîne θ de base E. Si Card $(E) \geqslant 2$, alors $\mathbf{J}^\theta_2(E) = \{\theta, \theta'\}$ et le clan $\mathbf{R}^\theta_2(E)$ comprend 8 relations $\varphi(x_1, x_2)$ correspondant à des conditions (mod. θ) sur x_1, x_2 : $\theta(x_1 \leqslant x_2)$, $\theta'(x_2 \leqslant x_1)$, $\neg\theta(x_2 < x_1)$, $\neg\theta'(x_1 < x_2)$, $\theta \vee \theta'$ (constante 1), $(\neg\theta) \wedge (\neg\theta')$ (constante 0), $\theta \wedge \theta'$ $(x_1 = x_2)$ et $(\neg\theta) \vee (\neg\theta')$ $(x_1 \neq x_2)$.

5.3.2. Dès que Card $(E) \geqslant 3$, $\mathbf{R}^\theta_3(E)$ comprend 2^{13} relations : la plus intéressante est le *cycle* $\varphi(x_1, x_2, x_3)$ *dérivé* de la chaîne θ (1.2.3.), d'expression $\varphi = (\theta^{1,2} \wedge \theta^{2,3}) \vee (\theta^{2,3} \wedge \theta^{3,1}) \vee (\theta^{3,1} \wedge \theta^{1,2})$. Si $X \subset E$, il est clair que $\varphi|X$ est le cycle dérivé de $\theta|X$.

Proposition. — *Pour que deux chaînes θ_1, θ_2 de base* E *admettent le même cycle dérivé, il faut et il suffit qu'il existe deux chaînes α, β telles que : $\theta_1 = \alpha + \beta$, $\theta_2 = \beta + \alpha$.*

Preuve. — La proposition étant assez classique, montrons simplement que la condition est nécessaire. Introduisons le comparateur (V_1, V_2) de la bichaîne (θ_1, θ_2) (au sens de 3.5.1.) et posons $V_0 = \mathfrak{P}_1(E)$. Notons $\varepsilon(x, y)$ la relation binaire de base E définie par la condition : $\{x, y\} \in V_0 \cup V_1$, et vérifions que ε est une équivalence d'indice $\leqslant 2$.

La réflexivité et la symétrie de ε sont évidentes, et la transitivité de ε n'a besoin d'être vérifiée que pour une 3-partie $\{x, y, z\}$ de E, en utilisant l'hypothèse que θ_1, θ_2 ont même cycle dérivé φ, et en montrant que :

$$\{x, y\} \in V_1 \quad \text{et} \quad \{y, z\} \in V_1 \Longrightarrow \{x, z\} \in V_1.$$

Comme x et z jouent le même rôle, les trois cas à considérer sont :

$$x < y < z \ (\text{mod. } \theta_1),$$
$$y < z < x \ (\text{mod. } \theta_1), \qquad z < x < y \ (\text{mod. } \theta_1),$$

pour lesquels $\varphi(x, y, z) = 1$, d'où un choix entre trois possibilités analogues relativement à θ_2. Si $\{x, y\} \in V_1$ et $\{y, z\} \in V_1$, θ_1 et θ_2 ont même restriction sur $\{x, y, z\}$ (compte tenu des inégalités mod. θ_2) : ainsi $\{x, z\} \in V_1$, et ε est bien une équivalence de base E. Si l'indice de ε était $\geqslant 3$, il existerait 3 éléments x, y, z de E, deux à deux non équivalents (mod. ε) tels que $x < y < z$ (mod. θ_1) : les paires $\{x, y\}$ et $\{y, z\}$ appartiendraient à V_2, et l'on aurait $z < y < x$ (mod. θ_2) en contradiction avec $\varphi(x, y, z) = 1$. L'indice de ε est donc $\leqslant 2$; s'il vaut 0 ou 1, c'est que $V_2 = \varnothing$ et que $\theta_1 = \theta_2$ (on prendrait $\alpha = \theta_1 = \theta_2$ et β vide).

Supposons que l'indice de ε soit 2. Les deux classes A, B de E (mod. ε) introduisent deux chaînes $\alpha = \theta_1|A = \theta_2|A$, $\beta = \theta_1|B = \theta_2|B$, et il existe (par exemple) deux éléments $a \in A$, $b \in B$ tels que $a < b$ (mod. θ_1). Dès lors, il n'existe aucun élément $x \in A$ tel que $b < x$ (mod. θ_1) car on aurait en ce cas : $a < b < x$ (mod. θ_1), avec $\{a, b\} \in V_2$, $\{a, x\} \in V_1$, $\{b, x\} \in V_2$, d'où les inégalités contradictoires :

$$b < a, \qquad a < x, \qquad x < b \quad (\text{mod. } \theta_2).$$

Ainsi, de façon générale :

$$x \in A \quad \text{et} \quad y \in B \Longrightarrow x < y \quad (\text{mod. } \theta_1) \quad \text{et} \quad y < x \quad (\text{mod. } \theta_2).$$

On obtient bien : $\theta_1 = \alpha + \beta$, $\theta_2 = \beta + \alpha$.

5.3.3. Pour une relation m-aire φ de base E et une partie F de E, nous avions noté $\mathbf{G}_F(\varphi)$ le groupe des automorphismes de $\varphi|F$ (1.2.2.). Si θ est une chaîne de base E, et si $F \in \mathfrak{P}_m(E)$, montrons que le groupe $\mathbf{G}_F(\varphi)$ prend toutes les valeurs possibles lorsque φ parcourt $\mathbf{R}_m^\theta(E)$:

PROPOSITION. — *Etant donné une chaîne* θ *de base* E, *une* m*-partie* F *de* E, *et un groupe de permutations* H *de* F, *il existe une relation* m*-aire* φ *de base* E, *interprétable par* θ, *telle que:* $\mathbf{G}_{\mathrm{F}}(\varphi) = \mathrm{H}$.

Preuve. — Il est commode d'identifier F (ordonné par θ) avec l'intervalle d'entiers $[1, m]$ (naturellement ordonné), de sorte que : $\mathrm{F} = \{1, 2, \ldots, m\}$, pour

$$1 < 2 < \cdots < m \quad (\mathrm{mod.}\ \theta).$$

Dans l'ensemble de fonctions $\mathrm{A}_m = \bigcup_{1 \leqslant k \leqslant m} \mathrm{A}_m^k$ que nous avons introduit en 3.1.2., la partie A_m^m représente alors le groupe des permutations de F, et H est un sous-groupe de A_m^m.

Pour l'application $\hat{\theta}$ de E^m sur A_m, notons K l'ensemble des m-uples $(x_1, x_2, \ldots, x_m) \in \mathrm{E}^m$ tels que $\hat{\theta}(x_1, x_2, \ldots, x_m) \in \mathrm{H}$, et prenons pour φ la relation m-aire de base E ayant K comme graphe. La condition $\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_m) = 1$ signifie donc qu'il existe une permutation $\sigma \in \mathrm{H}$ telle que :

$$x_{\sigma(1)} < x_{\sigma(2)} < \cdots < x_{\sigma(m)} \quad (\mathrm{mod.}\ \theta)$$

et, dès lors : $\hat{\theta}(x_1, x_2, \ldots, x_m) = \overset{-1}{\sigma}$. Si ψ est la relation unaire de base A_m ayant H comme graphe, il est clair que : $\varphi = \psi \circ \hat{\theta}$. Ainsi (conformément à 5.2.1.), la relation φ est interprétable par θ.

Par ailleurs, lorsque f parcourt l'ensemble F^{F} des applications de $\mathrm{F} = [1, m]$ dans lui-même, la restriction $\varphi|\mathrm{F}$ vérifie :

$$\varphi(f(1), f(2), \ldots, f(m)) = 1 \Longleftrightarrow f \in \mathrm{H}.$$

Pour les permutations g de F, il en résulte :

$$g \in \mathbf{G}_{\mathrm{F}}(\varphi) \Longleftrightarrow (g \circ f \in \mathrm{H} \text{ pour tout } f \in \mathrm{H})$$

et, par conséquent, $\mathbf{G}_{\mathrm{F}}(\varphi) = \mathrm{H}$.

5.4. *Théorème d'interprétabilité restreinte. Cardinaux* $\xi_m(n)$.

5.4.1. Étant donné une chaîne θ et une relation m-aire φ de même base E, le problème d'*interprétabilité restreinte* concerne l'ensemble $\mathfrak{J}_\varphi^\theta$ des parties X de E telles que la restriction $\varphi|\mathrm{X}$ soit interprétable par la chaîne $\theta|\mathrm{X}$. Comme l'ordre par inclusion de base $\mathfrak{J}_\varphi^\theta$ est un ordre *inductif*, le théorème de Zorn permet d'affirmer : « *Pour tout* $X \in \mathfrak{J}_\varphi^\theta$, *il existe un ensemble maximal* $Y \in \mathfrak{J}_\varphi^\theta$ *tel que* $X \subset Y$ ».

Par ailleurs, pour un cardinal $n \geqslant 1$, on peut se demander s'il existe un ensemble $F \in \mathfrak{J}_\varphi^\theta$ tel que Card $(F) \geqslant n$:

Théorème. — *Étant donné l'entier* $m \geqslant 1$ *et le cardinal* $n \geqslant 1$, *il existe un cardinal* $p \geqslant n$ *vérifiant la condition suivante :* « *Pour toute chaîne* θ *et toute relation m-aire* φ *de même base* E *telle que* Card $(E) \geqslant p$, *il existe une n-partie* F *de* E *telle que la restriction* $\varphi|F$ *soit interprétable par la chaîne* $\theta|F$ ».

(Par la suite, nous noterons $\xi_m(n)$ le plus petit des cardinaux p vérifiant cette condition.)

Preuve. — Le nombre des relations m-aires basées sur un m-ensemble X étant $k = 2^{(m^m)}$, supposons que θ et φ aient une base E de cardinal $\geqslant \rho_m^k(n)$ pour $n > m$ (cas qu'il suffit d'envisager). La condition :

$$« \theta|Y \mathrel{\mathcal{L}} \theta|X \Longrightarrow \varphi|Y \mathrel{\mathcal{L}} \varphi|X »$$

définit une équivalence $\varepsilon(X, Y)$ de base $\mathfrak{P}_m(E)$, d'indice $\leqslant k$. Dès lors, le théorème de monochromie (3.4.1.) permet d'affirmer l'existence d'une n-partie F de E et d'une classe V (mod. ε) telles que $\mathfrak{P}_m(F) \subset V$. Ainsi, la restriction $\varphi|F$ est m-interprétable par la chaîne $\theta|F$ et (puisque Card $(F) \geqslant m + 1$) la proposition 5.1. montre que $\varphi|F$ est interprétable par $\theta|F$.

Remarques. — *a*) Les seules relations unaires interprétables par une chaîne étant les constantes, il est immédiat que : $\xi_1(n) = \rho_1^2(n) = 2n - 1$. Triviales également sont les valeurs : $\xi_m(1) = 1$, $\xi_m(2) = 3$.

b) Pour $n > m$ et $k = 2^{(m^m)}$, la méthode précédente donne : $n \leqslant \xi_m(n) \leqslant \rho_m^k(n)$. Il en résulte, plus particulièrement :

$$\xi_m(\aleph_0) = \aleph_0.$$

Par ailleurs, $\xi_m(n)$ est fini tant que n est fini, mais une majoration telle que : $\xi_2(3) \leqslant \rho_2^{16}(3)$ est assurément beaucoup trop large (en 5.4.3., nous obtiendrons : $\xi_2(3) \leqslant 131$).

5.4.2. Pour mieux étudier les cardinaux $\xi_m(n)$, nous allons associer à toute chaîne $\theta \in \mathbf{J}(E)$ et à toute relation $\varphi \in \mathbf{R}_m(E)$ une suite d'équivalences $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_m$ de bases respectives $\mathfrak{P}_1(E)$, $\mathfrak{P}_2(E)$, $\ldots$, $\mathfrak{P}_m(E)$. En 3.1.2., nous avons rappelé comment les nombres de Stirling $S(m, h)$ interviennent dans le dénombrement des ensembles de fonctions A_m^h :

$$\text{Card}\,(A_m^h) = h\,!S(m, h) = \sum_{0 \leqslant j \leqslant h} (-1)^j \binom{h}{j} (h-j)^m.$$

Dans ce qui suit (m étant fixé, h variant de 1 à m), nous poserons : $k(h) = \text{Card}\,(\mathbf{R}_1(A_m^h)) = 2^{h!S(m,h)}$, et nous introduirons la fonction composée : $\Phi_m = \rho_1^{k(1)} \circ \rho_2^{k(2)} \circ \cdots \circ \rho_m^{k(m)}$.

a) Étant donné une h-partie $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_h\}$ de E telle que $x_1 < x_2 < \cdots < x_h$ (mod. θ), associons à toute fonction $\sigma \in A_m^h$ la valeur : $r_X(\sigma) = \varphi(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, \ldots, x_{\sigma(m)})$ (ce qui définit une relation unaire r_X de base A_m^h). A la condition $r_X = r_Y$, correspond une équivalence $\varepsilon_h(X, Y)$ de base $\mathfrak{P}_h(E)$, d'indice $\leqslant k(h)$.

b) Démontrons la *formule de majoration :* $\xi_m(n) \leqslant \Phi_m(n)$.

Posons : $p_m = n$, $p_{h-1} = \rho_h^{k(h)}(p_h)$ (pour $1 \leqslant h \leqslant m$), d'où : $p_0 = \Phi_m(n)$. Si E_{h-1} est une (p_{h-1})-partie de E, le théorème de monochromie appliqué à l'équivalence $\varepsilon_h | \mathfrak{P}_h(E_{h-1})$ montre l'existence d'une p_h-partie E_h de E_{h-1} et d'une relation $r \in \mathbf{R}_1(A_m^h)$ telles que, pour toute fonction $\sigma \in A_m^h$:

$$\left\{\begin{array}{c}\{x_1, x_2, \ldots, x_h\} \subset E_h \\ x_1 < x_2 < \cdots < x_h \text{ (mod. } \theta)\end{array}\right\} \Longrightarrow \varphi(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, \ldots, x_{\sigma(m)}) = r(\sigma).$$

Si $\text{Card}\,(E) \geqslant \Phi_m(n)$, on passe ainsi (lorsque h croît de 1 à m) de $E_0 = E$ à une n-partie $E_m = F$ de E par une suite décroissante : $E_0 \supset E_1 \supset E_2 \supset \cdots \supset E_m$. Si $x_1, x_2, \ldots, x_h, y_1, y_2, \ldots, y_h$ sont des éléments de F tels que : $x_1 < x_2 < \cdots < x_h$ (mod. θ), $y_1 < y_2 < \cdots < y_h$ (mod. θ), il en résulte :

$$\varphi(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, \ldots, x_{\sigma(m)}) = \varphi(y_{\sigma(1)}, y_{\sigma(2)}, \ldots, y_{\sigma(m)})$$

pour toute fonction $\sigma \in A_m^h$. Cette identité se traduit aisément (comme en 3.2.) par :

$$\varphi(z_1, z_2, \ldots, z_m) = \varphi(f(z_1), f(z_2), \ldots, f(z_m))$$

pour tout morphisme f de $\theta | F$ et des éléments quelconques $z_1, z_2, \ldots, z_m$ de l'ensemble def (f). Autrement dit : $\varphi | F$ est interprétable par $\theta | F$.

5.4.3. Comme $\text{Card}\,(A_m^2) = 2S(m, 2) = 2^m - 2$, nous poserons : $t(m) = 2^{(2^m - 2)} = \text{Card}\,(\mathbf{R}_1(A_m^2))$.

Démontrons la *formule de minoration :* $\xi_m(n) \geqslant 2\rho_2^{t(m)}(n) - 1$.

Soient E_0, E_1 deux p-ensembles disjoints, de réunion E, tels que $p < \rho_2^{t(m)}(n)$. D'après le théorème de Ramsey, il existe un $t(m)$-partage $(V_1, V_2, \ldots, V_{t(m)})$ de $\mathfrak{P}_2(E)$ tel que :

$$F \subset E_i \quad \text{et} \quad \mathfrak{P}_2(F) \subset V_j \Longrightarrow \text{Card}\,(F) < n.$$

Étant donné une chaîne θ de base E, on peut déterminer une relation $\varphi \in \mathbf{R}_m(E)$ en précisant la valeur

$$a = \varphi(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, \ldots, x_{\sigma(m)})$$

pour toute fonction $\sigma \in A_m^h$ $(1 \leqslant h \leqslant m)$ et toute h-partie $\{x_1, x_2, \ldots, x_h\}$ de E telle que $x_1 < x_2 < \cdots < x_h$ (mod. θ).

Posant : $\mathbf{R}_1(A_m^2) = \{\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_{t(m)}\}$, nous prendrons :

$$\begin{cases} a = i & \text{pour} \quad h = 1,\ x_1 \in E_i \\ a = \nu_j(\sigma) & \text{pour} \quad h = 2,\ \{x_1, x_2\} \in V_j \\ a = 0 & \text{pour} \quad h \geqslant 3. \end{cases}$$

Dès lors, si une restriction $\varphi|F$ est interprétable par $\theta|F$, la 1-interprétabilité exige $F \subset E_i$ (pour $i = 0$ ou 1), puis la 2-interprétabilité exige $\mathfrak{P}_2(F) \subset V_j$ (j convenable, $1 \leqslant j \leqslant t(m)$). Finalement : Card (F) $< n$, et l'hypothèse

$$\text{Card}\,(E) < 2\rho_2^{t(m)}(n) - 1$$

implique bien Card (E) $< \xi_m(n)$.

Remarque. — Il est trivial que $\xi_1(n) = \Phi_1(n) = 2n - 1$. Par ailleurs, les deux premières valeurs $\xi_m(1)$, $\xi_m(2)$ ne dépendent pas de m : $\xi_m(1) = \Phi_m(1) = 1$, $\xi_m(2) = \Phi_m(2) = 3$. Les précédentes formules de majoration et minoration de $\xi_m(n)$ donnent encore :

$$\begin{cases} \xi_2(n) = \Phi_2(n) = 2\rho_2^4(n) - 1. \\ \xi_m(3) = \Phi_m(3) = 2\rho_2^{t(m)}(3) - 1. \end{cases}$$

La valeur $\xi_m(3)$ croît rapidement avec m. Les résultats numériques sur les nombres de Ramsey (3.4.3.) se traduisent en effet par : $\xi_1(3) = 5$, $83 \leqslant \xi_2(3) \leqslant 131$, $\xi_m(3) > 2^{1+t(m)}$.

Une comparaison plus poussée des fonctions ξ_m et Φ_m semble difficile actuellement, faute de certaines précisions concernant les k-partages des ensembles $\mathfrak{P}_h(E)$.

CHAPITRE II

CHAINES COMPATIBLES RELATIVEMENT A UN GROUPE DE PERMUTATIONS

6. Suite indicative d'une bichaîne infinie, groupes indicatifs.

Pour tout entier $m \geqslant 1$, nous noterons S_m le groupe des permutations de l'intervalle d'entiers $[1, m]$ (*groupe symétrique* de degré m), et Σ_m l'ensemble des sous-groupes de S_m. Une *fiche* Q sera une suite de groupes : $Q_1, Q_2, \ldots, Q_m, \ldots$ vérifiant la condition : $Q_m \in \Sigma_m$ (pour tout $m \geqslant 1$).

Pour une m-partie X de la base d'une chaîne θ, X_θ désignera l'application croissante de $[1, m]$ (naturellement ordonné) sur X (ordonné par θ).

6.1. *Chaînes* G-*compatibles. Suite indicative.*

6.1.1. Étant donné deux chaînes α, β de bases respectives A, B, associons à toute m-partie X de $A \cap B$ la permutation $\sigma = (X_\alpha)^{-1} \circ X_\beta$. Cette permutation $\sigma \in S_m$ peut encore être définie par les conditions :

$$\begin{cases} X = \{x_1, x_2, \ldots, x_m\} \\ x_1 < x_2 < \cdots < x_m \quad (\text{mod. } \alpha) \\ x_{\sigma(1)} < x_{\sigma(2)} < \cdots < x_{\sigma(m)} \quad (\text{mod. } \beta). \end{cases}$$

Pour un groupe $G \in \Sigma_m$ tel que : $(X_\alpha)^{-1} \circ X_\beta \in G$ quel que soit $X \in \mathfrak{P}_m(A \cap B)$, nous disons que les chaînes α et β sont G-*compatibles*.

Voici des conséquences immédiates de cette définition :

a) Pour que α, β soient G-compatibles, il faut et il suffit que $\alpha|(A \cap B)$ et $\beta|(A \cap B)$ le soient. Si Card $(A \cap B) < m$, α et β sont G-compatibles quel que soit $G \in \Sigma_m$.

b) Notons e_m la permutation identique de $[1, m]$, et posons :

$I_m^1 = \{e_m\}$. Pour deux chaînes α, β, la notion de *compatibilité* (définie en 1.1.1.) coïncide avec la I_2^1-compatibilité.

c) Si deux chaînes α, β sont G-compatibles et H-compatibles (pour $G \in \Sigma_m$, $H \in \Sigma_m$), elles sont aussi $(G \cap H)$-compatibles.

6.1.2. Pour une bichaîne (α, β) et un entier $m \geqslant 1$, soit Q_m le plus petit des groupes $G \in \Sigma_m$ pour lesquels α et β sont G-compatibles : on peut dire que Q_m est le *groupe propre* (de degré m) de la bichaîne (α, β). Nous appellerons *suite indicative* toute fiche Q dont les termes $Q_1, Q_2, \ldots, Q_m, \ldots$ sont les groupes propres d'une bichaîne (α, β) de base *infinie*.

Exemple. — La suite S des groupes symétriques

$$S_1, S_2, \ldots, S_m, \ldots$$

est une suite indicative.

Pour le montrer, utilisons la possibilité d'engendrer le groupe S_m par la paire de permutations $\{(1, m), (1, 2, \ldots, m)\}$. Soient $\alpha = \theta_1 + \theta_2 + \theta_3$ et $\beta = \theta_3 + \theta_2 + \theta_1$ deux sommes ordinales dans lesquelles les chaînes θ_1, θ_2, θ_3 ont des bases respectives : $E_1 \neq \varnothing$, E_2 infinie, $E_3 \neq \varnothing$. Pour une m-partie $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_m\}$ de $E_1 \cup E_2 \cup E_3$ telle que :

$$x_1 < x_2 < \cdots < x_m \ (\text{mod. } \alpha),$$
$$x_1 \in E_1, \qquad \{x_2, x_3, \ldots, x_{m-1}\} \subset E_2,$$

la permutation associée $\sigma = (X_\alpha)^{-1} \circ X_\beta$ vaut :

$$\begin{cases} \sigma = (1, m) & \text{si} \quad x_m \in E_3 \\ \sigma = (1, 2, \ldots, m) & \text{si} \quad x_m \in E_2 \end{cases}$$

d'où un groupe propre $Q_m = S_m$ pour la bichaîne (α, β).

6.2. *Ensemble des* G-*compatibilités de base* J(E).

6.2.1. Soient un groupe $G \in \Sigma_m$ et un ensemble E. Pour des chaînes α, β de base E, il est clair que la condition : « α et β sont G-compatibles » définit une équivalence ε_G de base J(E). Cette condition se notera simplement : $\alpha \equiv \beta$ (mod. G), et nous dirons encore que ε_G est la G-*compatibilité* de base J(E).

Si H est un sous-groupe de G, l'équivalence ε_H est évidemment plus fine que l'équivalence ε_G. Si Card (E) $\geqslant m$, la moins fine et la plus fine des équivalences de base J(E) coïncident, respectivement, avec la S_m-compatibilité (pour tout $m \geqslant 1$) et la I_m^1-compatibilité (pour tout $m \geqslant 2$).

6.2.2. Soient G, H deux sous-groupes *distincts* de S_m.

a) Si Card (E) $= m$, la G-compatibilité et la H-compatibilité de base $\mathbf{J}$(E) sont toujours deux équivalences distinctes.

Par exemple, pour une permutation $\sigma \in G$ telle que $\sigma \notin H$, deux chaînes α, β de base $E = [1, m]$ telles que : $\beta \overset{\sigma}{\sim} \alpha$ (ou, aussi bien, $E_\beta = \sigma \circ E_\alpha$) sont G-compatibles sans être H-compatibles.

b) Par contre, dès que Card (E) $> m$, la G-compatibilité et la H-compatibilité de base $\mathbf{J}$(E) peuvent coïncider.

Par exemple, pour $m = 4$, considérons le groupe

$$G = \{e_4, (2, 4)\}.$$

Si Card (E) $\geqslant 5$, montrons que la G-compatibilité de base $\mathbf{J}$(E) coïncide avec la I_4^1-compatibilité.

Pour des éléments distincts $a, b, c, \ldots, l$ de E, utilisons le mot $abc \ldots l$ pour désigner l'ensemble des chaînes θ de base E telles que : $a < b < c < \cdots < l$ (mod. θ). Si α et β sont deux chaînes G-compatibles de base E, et si $\alpha \in abcde$, alors $\beta \in V_i$ pour : $V_1 = bcde \cup bedc$, $V_2 = acde \cup aedc$, $V_3 = abde \cup aedb$, et $V_4 = V_1 \cap V_2 \cap V_3 = abcde$. Il en résulte bien : $\alpha = \beta$.

6.2.3. Des équivalences particulières de base $\mathbf{J}$(E), déjà rencontrées, apparaissent comme des G-compatibilités :

a) Considérons, comme permutation remarquable de $[1, m]$, le *retournement* $r_m = (1, m)\ (2, m-1)\ \ldots$, et notons

$$J_m^1 = \{e_m, r_m\}$$

le sous-groupe de S_m engendré par r_m.

Proposition. — *L'équivalence de base* $\mathbf{J}$(E) *définie par la condition : « α et β sont identiques ou symétriques » coïncide avec la* J_3^1*-compatibilité.*

Preuve. — En notant β' la chaîne symétrique de β, il est trivial que $(\alpha = \beta$ ou $\alpha = \beta') \Longrightarrow \alpha \equiv \beta$ (mod. J_3^1). Réciproquement, pour Card (E) $\geqslant 3$ (cas qu'il suffit d'envisager), soit : $\alpha \equiv \beta$ (mod. J_3^1). En remplaçant éventuellement β par β', on peut se ramener au cas où il existe deux éléments a, b de E tels que $\alpha|\{a, b\} = \beta|\{a, b\}$. Pour en déduire $\alpha = \beta$, on utilise la J_3^1-compatibilité des 3-restrictions $\alpha|X$, $\beta|X$ en deux étapes successives, afin d'obtenir : $\alpha|Y = \beta|Y$ quel que soit

$Y \in \mathfrak{P}_2(E)$. Les paires $Y = \{a, x\}$ sont atteintes en partant de $X = \{a, b, x\}$, puis les paires $Y = \{x, y\}$ en partant de $X = \{a, x, y\}$.

b) Une autre permutation remarquable de $[1, m]$ est la permutation circulaire $t_m = (1, 2, \ldots, m)$. Notons T_m le sous-groupe (d'ordre m) de S_m engendré par t_m; en particulier $T_3 = \{e_3, (1, 2, 3), (1, 3, 2)\}$.

Proposition. — *L'équivalence de base* $\mathbf{J}(E)$ *définie par la condition:* « α *et* β *ont même cycle dérivé* » *coïncide avec la* T_3*-compatibilité.*

Preuve. — Il suffit d'envisager le cas Card $(E) \geqslant 3$. Notons u, v les cycles dérivés (respectivement) des chaînes α, β. Pour que $u = v$, il faut et il suffit que $u|X = v|X$ pour tout $X \in \mathfrak{P}_3(E)$. Posons : $X = \{x_1, x_2, x_3\}$, $x_1 < x_2 < x_3$ (mod. α), $\sigma = (X_\alpha)^{-1} \circ X_\beta$.

Pour que les chaînes $\alpha|X$, $\beta|X$ aient même cycle dérivé : $u|X = v|X$, il faut et il suffit que β vérifie l'une des trois conditions :

$$x_1 < x_2 < x_3 \quad (\text{mod. } \beta), \qquad x_2 < x_3 < x_1 \quad (\text{mod. } \beta),$$

$x_3 < x_1 < x_2$ (mod. β) (c'est l'aspect le plus simple de la proposition 5.3.2.). Ces conditions s'expriment respectivement par : $\sigma = e_3$, $\sigma = (1, 2, 3)$, $\sigma = (1, 3, 2)$. Autrement dit : $u|X = v|X \Longleftrightarrow \sigma \in T_3$, et finalement :

$$u = v \Longleftrightarrow \alpha \equiv \beta \quad (\text{mod. } T_3).$$

6.3. *Groupes indicatifs.*

Nous allons introduire un ensemble dénombrable $\mathfrak{L}$ de fiches Q munies chacune d'un *rang* $l(Q)$. Les termes Q_m des fiches $Q \in \mathfrak{L}$ seront appelés les *groupes indicatifs* (de degré m).

6.3.1. Pour des entiers $p \geqslant 1$, $q \geqslant 1$, $r \geqslant 2$, les fiches de $\mathfrak{L}$ sont notées S, $I^{p,q}$, J^1, T, D, J^r, et les rangs respectivement attribués à ces fiches sont : 1, $p + q$, 3, 3, 4, $2r$. Les termes de la fiche S (déjà considérée en 6.1.2.) sont les groupes symétriques S_m. Pour les fiches $Q \in \mathfrak{L}$ autres que S, le rang $l(Q) \geqslant 2$ répond à la condition : $1 \leqslant m < l(Q) \Longleftrightarrow Q_m = S_m$.

Pour $m \geqslant l(Q)$, voici la définition des groupes indicatifs

Q_m (simple rappel pour les termes S_m, I_m^1, J_m^1, T_m) :

S_m : groupe des permutations de l'intervalle $[1, m]$.
$I_m^{p,q}$: groupe des permutations de $[1, m]$ conservant les intervalles $[1, p]$, $[m-q+1, m]$ et tout entier h tel que $p < h < m-q+1$.
J_m^1 : groupe engendré par le retournement
$$r_m = (1, m)\,(2, m-1)\ldots$$
T_m : groupe engendré par la permutation circulaire
$$t_m = (1, 2, \ldots, m).$$
D_m : produit direct $J_m^1 \times T_m$.
J_m^r : produit direct $J_m^1 \times I_m^{r,r}$.

(Nous pourrons noter I_m^r au lieu de $I_m^{r,r}$.)

Les groupes $I_m^{p,q}$ et $I_m^{q,p}$ sont conjugués par le retournement r_m, autrement dit : $I_m^{q,p} = r_m \circ I_m^{p,q} \circ r_m$. Quant aux produits directs $J_m^1 \times T_m$, $J_m^1 \times I_m^r$, ils s'interprètent bien comme sous-groupes $D_m = J_m^1 T_m$, $J_m^r = J_m^1 I_m^r$ de S_m puisque :

$$J_m^1 \cap T_m = J_m^1 \cap I_m^r = I_m^1,$$
$$J_m^1 T_m = T_m J_m^1, \qquad J_m^1 I_m^r = I_m^r J_m^1.$$

Remarque. — Lorsqu'un groupe indicatif G est un sous-groupe *strict* de S_m, il existe une seule fiche $Q \in \mathcal{L}$ telle que $Q_m = G$. Par contre, le groupe symétrique S_m est un terme de S et de toutes les fiches $Q \in \mathcal{L}$ de rang $l(Q) > m$.

6.3.2. Proposition. — *Toutes les fiches* S, T, D, $I^{p,q}$, J^r *appartenant à l'ensemble* $\mathcal{L}$ *sont des suites indicatives.*

Preuve. — Le cas de la fiche S a été examiné, à titre d'exemple, en 6.1.2. Notons $Q_m(\alpha, \beta)$ le groupe propre de degré m d'une bichaîne (α, β).

a) Soient $\alpha = \theta_1 + \theta_2$, $\beta = \theta_2 + \theta_1$ deux sommes ordinales dans lesquelles les chaînes θ_1, θ_2 ont des bases respectives E_1, E_2 non vides dont l'une (E_2 par exemple) est infinie. Soit β' la chaîne symétrique de β.

Pour une m-partie X de $E_1 \cup E_2$, posons :

$$\begin{cases} \sigma = (X_\alpha)^{-1} \circ X_\beta, & \sigma' = (X_\alpha)^{-1} \circ X_{\beta'} = \sigma \circ r_m, \\ X_1 = X \cap E_1, & X_2 = X \cap E_2,\ \mathrm{Card}\,(X_1) = h\ (0 \leqslant h \leqslant m). \end{cases}$$

De : $\alpha|X = \theta_1|X_1 + \theta_2|X_2$, $\beta|X = \theta_2|X_2 + \theta_1|X_1$, on déduit facilement : $\sigma = (t_m)^h$, d'où $Q_m(\alpha, \beta) \subset T_m$, $Q_m(\alpha, \beta') \subset D_m$.

Par ailleurs, quel que soit m, on peut choisir X de manière à obtenir :

$$h = 0\ (\sigma = e_m,\ \sigma' = r_m) \qquad \text{et} \qquad h = 1\ (\sigma = t_m,\ \sigma' = t_m \circ r_m).$$

Il en résulte : $Q_m(\alpha, \beta) = T_m$, $Q_m(\alpha, \beta') = D_m$ (groupe engendré par $\{r_m, t_m\}$), et les fiches T, D sont bien des suites indicatives.

b) Pour deux entiers $p \geqslant 1$, $q \geqslant 1$, soit M l'ensemble des transpositions $\sigma \in S_m$ ayant l'une des deux formes : $\sigma = (1, h)$ pour $1 < h \leqslant p$, $\sigma = (m, m - k + 1)$ pour $1 < k \leqslant q$. Cet ensemble M engendre le groupe $I_m^{p,q}$ (qui coïncide avec S_m si $m < p + q$).

Pour une 3-partition (E_1, E_2, E_3) d'un ensemble infini E, telle que $E_1 = \{u_1, u_2, \ldots, u_p\}$, $E_3 = \{v_1, v_2, \ldots, v_q\}$, soient : $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$ et $\beta = \beta_1 + \beta_2 + \beta_3$ deux sommes ordinales dans lesquelles les chaînes α_i, β_i ont E_i comme base. On peut imposer les conditions :

$$\begin{cases} \alpha_2 = \beta_2 \\ u_1 < u_2 < \cdots < u_{p-1} < u_p & (\text{mod. } \alpha_1), \\ u_p < u_2 < \cdots < u_{p-1} < u_1 & (\text{mod. } \beta_1). \\ v_1 < v_2 < \cdots < v_{q-1} < v_q & (\text{mod. } \alpha_3), \\ v_q < v_2 < \cdots < v_{q-1} < v_1 & (\text{mod. } \beta_3). \end{cases}$$

Pour la chaîne β' symétrique de β, et $X \in \mathfrak{P}_m(E)$, posons comme précédemment :

$$\sigma = (X_\alpha)^{-1} \circ X_\beta, \qquad \sigma' = (X_\alpha)^{-1} \circ X_{\beta'} = \sigma \circ r_m.$$

Les traces X_1, X_2, X_3 de E_1, E_2, E_3 sur X vérifient les conditions : Card $(X_1) \leqslant p$, $\alpha_2|X_2 = \beta_2|X_2$, Card $(X_3) \leqslant q$, qui se traduisent par $\sigma \in I_m^{p,q}$, d'où : $Q_m(\alpha, \beta) \subset I_m^{p,q}$. Par ailleurs, quel que soit m, on peut choisir X de manière à obtenir chacune des valeurs $\sigma = e_m$, $\sigma \in M$; en particulier, $\sigma = (1, h)$ est associée à $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_m\}$ lorsque

$$x_1 < x_2 < \cdots < x_m < v_1 \quad (\text{mod. } \alpha), \qquad x_1 = u_1, \qquad x_h = u_p.$$

Il en résulte : $Q_m(\alpha, \beta) = I_m^{p,q}$. Si $p = q = r$, les permutations $\sigma' = \sigma \circ r_m$ engendrent alors le groupe $Q_m(\alpha, \beta') = J_m^r$.

Ainsi, les fiches $I^{p,q}$ et J^r sont bien des suites indicatives.

Remarque. — Au § 8, nous montrerons que les fiches S, T, D, $I^{p,q}$, J^r, sont les *seules* suites indicatives. Il en résultera une caractérisation simple et naturelle des groupes indicatifs, justifiant la terminologie adoptée : « *Pour qu'un sous-groupe* G *de* S_m *soit un groupe indicatif, il faut et il suffit qu'il existe une suite indicative* Q *telle que* $Q_m = G$ ».

6.3.3. Pour tout entier $m \geqslant 1$, notons Σ'_m l'ensemble des sous-groupes indicatifs de S_m.

a) Tous les groupes de permutations de degré $\leqslant 3$ sont des groupes indicatifs (par contre, $G = \{e_m, (1, m)\}$ est un groupe non indicatif pour tout $m \geqslant 4$) :

$$\begin{cases} \Sigma'_1 = \Sigma_1 = \{S_1\}. \\ \Sigma'_2 = \Sigma_2 = \{S_2, I^1_2\}. \\ \Sigma'_3 = \Sigma_3 = \{S_3, I^1_3, I^{1,2}_3, I^{2,1}_3, J^1_3, T_3\}. \end{cases}$$

Un dénombrement facile donne :

$$\text{Card}\,(\Sigma'_m) = \text{part. ent.}\left(3 + \frac{m^2}{2}\right)$$

pour tout $m \geqslant 4$. Par exemple : Card $(\Sigma'_4) = 11$ (alors que Card $(\Sigma_4) = 30$),

$$\Sigma'_4 = \{S_4, I^1_4, I^{1,2}_4, I^{2,1}_4, I^2_4, I^{1,3}_4, I^{3,1}_4, J^1_4, J^2_4, T_4, D_4\}.$$

b) Pour deux groupes $G \in \Sigma_m$, $H \in \Sigma_m$, notons $G \nabla H$ le sous-groupe de S_m engendré par $G \cup H$. Autrement dit, pour le lattis par inclusion de base Σ_m :

$$\text{Sup}\,(G, H) = G \nabla H, \qquad \text{Inf}\,(G, H) = G \cap H.$$

Lemme. — *Si* G *et* H *sont deux sous-groupes indicatifs de* S_m, *il en est de même pour* $G \nabla H$.

Preuve. — On construit facilement la table des valeurs $G \nabla H = H \nabla G$ lorsque G, H sont pris parmi S_m, T_m, D_m, $I^{p,q}_m$, J^r_m, en se rappelant (par exemple) que le groupe S_m peut être engendré par $\{t_m, (p, p+1)\}$ ou par

$$\{(1, 2), (1, 3), \ldots (1, p), (p, m), (p+1, m), \ldots, (m-1, m)\}.$$

Il est commode de poser :

$$(p, q) = \text{Max}\,\{p, q\}, \qquad (p, q, r) = \text{Max}\,\{p, q, r\},$$

d'où par exemple : $I^{p,q}_m \nabla I^{q,p}_m = I^{(p,q)}_m$. A côté des valeurs triviales :

$$\begin{cases} G \nabla S_m = S_m, \quad G \nabla I^1_m = G \nabla G = G, \\ J^1_m \nabla T_m = J^1_m \nabla D_m = T_m \nabla D_m = D_m \end{cases}$$

on obtient :

$$\left\{\begin{array}{llll} \mathrm{I}_m^{p,q} \nabla \mathrm{I}_m^{p',q'} & = \mathrm{I}_m^{(p,p'),(q,q')}, & \mathrm{J}_m^r \nabla \mathrm{J}_m^{r'} = \mathrm{J}_m^{(r,r')}, & \\ \mathrm{I}_m^{p,q} \nabla \mathrm{J}_m^r & = \mathrm{J}_m^{(p,q,r)}, & \mathrm{J}_m^r \nabla \mathrm{T}_m = \mathrm{J}_m^r \nabla \mathrm{D}_m = \mathrm{S}_m & (\text{si } r > 1), \\ \mathrm{I}_m^{p,q} \nabla \mathrm{T}_m & = \mathrm{I}_m^{p,q} \nabla \mathrm{D}_m = \mathrm{S}_m & (\text{si } pq > 1). & \end{array}\right.$$

c) Pour tout $m \geqslant 1$, notons γ_m l'ordre par inclusion de base Σ'_m.

Proposition. — *L'ordre γ_m de base Σ'_m est un lattis.*

Preuve. — Pour deux sous-groupes indicatifs G, H de S_m, il résulte du lemme précédent que $\mathrm{G} \nabla \mathrm{H}$ (borne supérieure de $\{\mathrm{G}, \mathrm{H}\}$ pour l'ordre par inclusion de base Σ_m) est aussi la borne supérieure de $\{\mathrm{G}, \mathrm{H}\}$ pour l'ordre restreint γ_m. Si

$$\Phi = \{\mathrm{G}_1, \mathrm{G}_2, \ldots, \mathrm{G}_n\}$$

est l'ensemble des sous-groupes indicatifs de S_m contenus dans le groupe $\mathrm{G} \cap \mathrm{H}$, le lemme montre aussi que

$$\operatorname{Sup} \Phi = \mathrm{G}_1 \nabla \mathrm{G}_2 \nabla \cdots \nabla \mathrm{G}_n$$

coïncide avec l'un des groupes $\mathrm{G}_i \in \Phi$: ainsi Sup Φ est la borne inférieure de $\{\mathrm{G}, \mathrm{H}\}$ pour l'ordre γ_m.

Remarque. — Pour $\mathrm{G} \in \Sigma'_m$, $\mathrm{H} \in \Sigma'_m$, et le lattis γ_m de base Σ'_m, on peut poser Sup $(\mathrm{G}, \mathrm{H}) = \mathrm{G} \nabla \mathrm{H}$, Inf $(\mathrm{G}, \mathrm{H}) = \mathrm{G} \Delta \mathrm{H}$. En général, le groupe $\mathrm{G} \cap \mathrm{H}$ n'est pas indicatif et, dans ce cas, le groupe $\mathrm{G} \Delta \mathrm{H}$ est strictement contenu dans $\mathrm{G} \cap \mathrm{H}$. Par exemple :

$$\mathrm{J}_4^2 \cap \mathrm{D}_4 = \{e_4, (1, 2)(3, 4), (1, 3)(2, 4), (1, 4)(2, 3)\},$$

alors que

$$\mathrm{J}_4^2 \Delta \mathrm{D}_4 = \mathrm{J}_4^1 = \{e_4, (1, 4)(2, 3)\}.$$

6.3.4. Lorsque Q, Q′ parcourent l'ensemble $\mathfrak{L}$ des fiches S, T, D, $\mathrm{I}^{p,q}$, J^r, la condition : « $\mathrm{Q}_m \subset \mathrm{Q}'_m$ pour tout $m \geqslant 1$ » définit un ordre γ (Q, Q′) de base $\mathfrak{L}$.

Pour deux sous-groupes indicatifs G, H de S_m, la table des valeurs $\mathrm{G} \nabla \mathrm{H}$ (construite pour démontrer le lemme 6.3.3.) et la remarque : $\mathrm{H} \subset \mathrm{G} \Longleftrightarrow \mathrm{G} \nabla \mathrm{H} = \mathrm{G}$, montrent que les seules inégalités relatives à l'ordre γ sont : $\mathrm{I}^1 \leqslant \mathrm{Q} \leqslant \mathrm{S}$ (pour tout $\mathrm{Q} \in \mathfrak{L}$), $\mathrm{J}^1 \leqslant \mathrm{D}$, $\mathrm{T} \leqslant \mathrm{D}$, $\mathrm{I}^{p,q} \leqslant \mathrm{I}^{p',q'} \leqslant \mathrm{J}^r \leqslant \mathrm{J}^{r'}$ dès que : $p \leqslant p'$, $q \leqslant q'$, Max $(p', q') \leqslant r \leqslant r'$.

Si $\mathcal{L}_m$ désigne l'ensemble des fiches $Q \in \mathcal{L}$ de rang $l(Q) \leqslant m$, l'ordre restreint $\gamma|\mathcal{L}_m$ est donc isomorphe au lattis γ_m de base Σ'_m. Pour que deux fiches Q, Q' de $\mathcal{L}$ vérifient : $Q \leqslant Q'$ (mod. γ), il faut et il suffit qu'il existe un entier $m \geqslant l(Q')$ tel que $Q_m \subset Q'_m$.

Dans l'ensemble $\mathcal{L} = \bigcup_{m \geqslant 1} \mathcal{L}_m$ (ordonné par γ), toute fiche $Q \neq S$ admet un nombre fini de minorants. On en déduit facilement que Inf $\mathcal{H}$, puis Sup $\mathcal{H}$, existent pour toute partie $\mathcal{H}$ de $\mathcal{L}$, ce qu'on exprime en disant que l'ordre γ est un *lattis achevé*.

6.4. *Fiche d'un groupe de permutations.*

6.4.1. Soit G un sous-groupe quelconque de S_m. Puisque l'ordre γ_m (par inclusion) de base Σ'_m est un lattis, il existe une fiche $Q \in \mathcal{L}_m$ (et une seule) telle que Q_m soit le groupe indicatif maximum contenu dans G : nous dirons alors que Q est la *fiche du groupe* G, ce qui introduit une application $G \to Q$ de Σ_m sur $\mathcal{L}_m$.

De cette définition, il résulte immédiatement :

a) Pour toute fiche $Q \in \mathcal{L}_m$, le groupe indicatif Q_m est le plus petit sous-groupe de S_m ayant Q comme fiche.

b) Si deux sous-groupes G, H de S_m ont même fiche Q, la fiche de $G \cap H$ est également Q.

c) Si G, H sont deux groupes indicatifs de degré *m*, et si Q est la fiche de $G \cap H$, alors : $G \Delta H = Q_m$.

Exemples. — 1° La fiche Q du groupe alterné A_m (de degré $m \geqslant 2$) dépend du résidu de m (mod. 4). Pour $m \equiv 0, 1, 2, 3$ (mod. 4), on obtient respectivement $Q = J^1$, D, I^1, T.

2° On sait que Card $(\mathcal{L}_4) = 11$. Mais, parmi les 19 groupes non indicatifs de degré 4, on compte : 12 groupes de fiche I^1, 5 groupes de fiche J^1, 1 groupe de fiche $I^{1,2}$ et 1 groupe de fiche $I^{2,1}$.

6.4.2. Les seuls groupes de degré 4 ayant une fiche de rang 4 sont les groupes indicatifs D^4, $I_4^{1,3}$, $I_4^{3,1}$, I_4^2, J_4^2. De même :

Proposition. — *Les seuls groupes de permutations de degré $m \geqslant 5$ ayant une fiche de rang m sont les groupes indicatifs $I_m^{p,m-p}$ $(1 \leqslant p < m)$ et J_m^r $(2r = m)$.*

Preuve. — Lorsque $m = p + q$, il suffit de déterminer les sous-groupes G de S_m contenant $I_m^{p,q}$. Supposons $G \neq I_m^{p,q}$: pour $\sigma \in G - I_m^{p,q}$, il existe alors deux entiers a, $b = \sigma(a)$, tels que $1 \leqslant a \leqslant p < b \leqslant m$.

a) S'il existe une permutation $\sigma \in G - I_m^{p,q}$ et des entiers u, $v = \sigma(u)$, tels que $1 \leqslant u \leqslant p$, $1 \leqslant v \leqslant p$, introduisons $\sigma' \in G$ tel que $\sigma'(v) = p$, $\sigma'(b) = p + 1$ (par exemple $\sigma' = (v, p)(b, p + 1)$ si $v < p$, $p + 1 < b$) et posons : $\varphi = \sigma' \circ \sigma$. Comme S_m est engendré par l'ensemble des $m - 1$ transpositions $(h, h + 1)$, le fait que $\varphi \circ (u, a) \circ \overset{-1}{\varphi} = (p, p + 1)$ appartienne à G implique $G = S_m$. La conclusion serait la même si u, $v = \sigma(u)$ vérifiaient $u > p$ et $v > p$.

b) Si toute permutation $\sigma \in G - I_m^{p,q}$ vérifie les conditions :

$$\begin{cases} 1 \leqslant x \leqslant p & \Longrightarrow p + 1 \leqslant \sigma(x) \leqslant m, \\ p + 1 \leqslant y \leqslant m & \Longrightarrow 1 \leqslant \sigma(y) \leqslant p, \end{cases}$$

c'est que $p = q$. Dès lors, puisque $r_m \circ \sigma \in I_m^p$, on obtient successivement : $r_m \in G$, $J_m^p \subset G$, $\sigma \in J_m^p$, d'où $G = J_m^p$.

COROLLAIRE. — *Les sous-groupes non indicatifs de* S_m *ont des fiches de rang* $\leqslant m - 1$.

7. Suite de réduction d'un groupe de permutations.

7.1. *Groupe réduit* $G^{(1)}$ *d'un sous-groupe* G *de* S_m.

7.1.1. Le *problème de réduction* va faire apparaître une intéressante application $G \rightarrow G^{(1)}$ de Σ_m dans Σ_{m+1}. Auparavant, une remarque s'impose concernant le changement de base.

a) Si (α, α') et (β, β') sont deux bichaînes *isomorphes* de bases respectives E, F (autrement dit : s'il existe une bijection f de E sur F telle que $\beta \overset{f}{\sim} \alpha$ et $\beta' \overset{f}{\sim} \alpha'$), on vérifie que :

$$\begin{cases} (E_\alpha)^{-1} \circ E_{\alpha'} = (F_\beta)^{-1} \circ F_{\beta'} & \text{lorsque E, F sont finis.} \\ \alpha \equiv \alpha' \pmod{G} \Longleftrightarrow \beta \equiv \beta' \pmod{G}. \end{cases}$$

(En effet, pour toute restriction g de f appliquant l'un sur l'autre deux ensembles finis $X \subset E$, $Y \subset F$, il est clair que : $Y_\beta = g \circ X_\alpha$, $Y_{\beta'} = g \circ X_{\alpha'}$, d'où : $(X_\alpha)^{-1} \circ X_{\alpha'} = (Y_\beta)^{-1} \circ Y_{\beta'}$).

b) La proposition suivante montre la possibilité de réduire l'une à l'autre deux G-compatibilités de base $\mathbf{J}(E)$, de degrés différents :

PROPOSITION. — *Etant donné un groupe* $G \in \Sigma_m$, *il existe un groupe* $H \in \Sigma_{m+1}$ *(et un seul) vérifiant la condition: « Pour tout ensemble* E *de cardinal* $> m$, *les compatibilités relatives aux groupes* G *et* H *définissent la même équivalence:* $\varepsilon_G = \varepsilon_H$, *de base* $\mathbf{J}(E)$ ».

Preuve. — Si un groupe $H \in \Sigma_{m+1}$ répond à la condition pour un ensemble particulier E_0 de cardinal $m+1$, il est le seul (d'après une remarque faite en 6.2.2.). La remarque précédente concernant le changement de base montre que H convient également pour tout ensemble F_0 de cardinal $m+1$: une bijection donnée f de E_0 sur F_0 définit en effet un isomorphisme $(\alpha, \alpha') \rightarrow (\beta, \beta')$ entre les deux compatibilités de bases $\mathbf{J}(E_0)$ et $\mathbf{J}(F_0)$ relatives à un même groupe. Enfin, H convient encore pour tout ensemble E de cardinal $> m$ puisque, relativement à un groupe donné de degré $\leqslant m+1$, la compatibilité d'une bichaîne (α, α') de base E se ramène à la compatibilité de toutes les bichaînes $(\alpha|F, \alpha'|F)$ lorsque F parcourt $\mathfrak{P}_{m+1}(E)$.

Dans le cas Card $(E) = m+1$ auquel on est ainsi ramené, introduisons l'ensemble H des permutations $\sigma = (E_\alpha)^{-1} \circ E_{\alpha'}$ liées aux bichaînes (α, α') de base E telles que : $\alpha \equiv \alpha'$ (mod. G). La réflexivité et la symétrie de l'équivalence ε_G impliquent: $e_{m+1} \in H$, et $\overset{-1}{\sigma} \in H$ pour tout $\sigma \in H$. Si deux permutations $\sigma = (E_\alpha)^{-1} \circ E_{\alpha'}$, $\varphi = (E_\beta)^{-1} \circ E_{\beta'}$ appartiennent à H, notons f la permutation de E telle que $\beta \overset{f}{\leadsto} \alpha'$, et θ la chaîne de base E telle que $\beta' \overset{f}{\leadsto} \theta$. Les bichaînes (β, β') et (α', θ) étant isomorphes, la remarque faite en (a) montre que:

$$\varphi = (E_{\alpha'})^{-1} \circ E_\theta, \quad \alpha' \equiv \theta \ \text{(mod. G)}, \quad \text{puis} \quad \alpha \equiv \theta \ \text{(mod. G)}$$

(par transitivité de ε_G), de sorte que $\sigma \circ \varphi = (E_\alpha)^{-1} \circ E_\theta$ appartient à H. Ainsi, H est un sous-groupe de S_{m+1} et sa définition au moyen des bichaînes (α, α') de base E montre que:

$$\alpha \equiv \alpha' \ \text{(mod. G)} \Longrightarrow \alpha \equiv \alpha' \ \text{(mod. H)}.$$

Réciproquement, l'hypothèse $\alpha \equiv \alpha'$ (mod. H) implique l'existence d'une bichaîne (β, β') de base E vérifiant:

$$\begin{cases} (E_\alpha)^{-1} \circ E_{\alpha'} = (E_\beta)^{-1} \circ E_{\beta'}, \\ \beta \equiv \beta' \ \text{(mod. G)}. \end{cases}$$

Les permutations f et g de E définies par : $\beta \overset{f}{\sim} \alpha$, $\beta' \overset{g}{\sim} \alpha'$, vérifient : $E_\beta = f \circ E_\alpha$, $E_{\beta'} = g \circ E_{\alpha'}$, d'où $f = g$. Les bichaînes (α, α') et (β, β') sont isomorphes, donc : α et α' sont G-compatibles. Autrement dit :

$$\alpha \equiv \alpha' \quad (\text{mod. H}) \Longrightarrow \alpha \equiv \alpha' \quad (\text{mod. G}).$$

Les équivalences ε_G, ε_H de base $J(E)$ coïncident.

7.1.2. Pour le groupe $G \in \Sigma_m$, posons : $G^{(0)} = G$ et notons $G^{(1)}$ le groupe $H \in \Sigma_{m+1}$ associé à G conformément à la proposition 7.1.1. Nous dirons que $G^{(1)}$ est le *groupe réduit* du groupe G. Si L et M sont deux sous-groupes de S_m, la génération du groupe réduit donnée en 7.1.1. montre d'ailleurs que :

$$L \subset M \Longrightarrow L^{(1)} \subset M^{(1)}.$$

La définition récurrente : $G^{(n+1)} = (G^{(n)})^{(1)}$ (n entier $\geqslant 0$) associe au groupe $G \in \Sigma_m$ une suite de groupes $G^{(n)} \in \Sigma_{m+n}$ vérifiant la condition : « *Pour* Card (E) $\geqslant m + n$, *les compatibilités de base* $J(E)$ *relatives aux groupes* G *et* $G^{(n)}$ *coïncident* ». Nous dirons que $(G^{(n)})_{n \geqslant 0}$ est la *suite de réduction* du groupe G.

Pour déterminer pratiquement le groupe réduit $G^{(1)}$ d'un groupe $G \in \Sigma_m$, il est commode d'utiliser la chaîne naturelle α_0 de base $E = [1, m + 1]$. En procédant comme en 6.2.2. (par réunion et intersection d'ensembles convenables de mots injectifs $abc \ldots l$), on obtient la classe d'équivalence

$$V = \{\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_k\}$$

formée des chaînes de base E qui sont G-compatibles avec α_0. A chacune de ces chaînes α_i correspond une permutation $\sigma_i \in S_{m+1}$ telle que : $\sigma_i(1) < \sigma_i(2) < \cdots < \sigma_i(m+1)$ (mod. α_i). Toute bichaîne (α, α') de base E vérifiant $\alpha \equiv \alpha'$ (mod. G) est isomorphe à une bichaîne (α_0, α_i), et il est clair que $E_{\alpha_i} = \sigma_i$. Il en résulte : $G^{(1)} = \{\sigma_0, \sigma_1, \ldots, \sigma_k\}$.

Pour $G = \{e_4, (2, 4)\}$, par exemple, le calcul fait en 6.2.2. se traduit par : $G^{(n)} = I^1_{n+4}$ pour tout $n \geqslant 1$. Pour le groupe alterné $G = A_4$, on trouve :

$$G^{(1)} = \{e_5, (2, 4)\,(3, 5), (1, 3)\,(2, 4), (1, 5)\,(2, 4), (1, 3, 5), (1, 5, 3)\},$$

puis $G^{(n)} = J^1_{n+4}$ pour tout $n \geqslant 2$. Pour chacune des suites de réduction $(G^{(n)})_{n \geqslant 0}$ ainsi obtenues, on constate que les termes $G^{(n)}$ sont des groupes de même fiche, et que ces groupes sont tous indicatifs à partir d'un certain rang. Cette remarque sera généralisée au § 8.

7.2. *Suite de réduction d'un groupe indicatif.*

Le résultat suivant souligne la parenté des groupes indicatifs de même fiche :

PROPOSITION. — *Pour toute fiche* $Q \in \mathfrak{L}$ *et tout entier* $m \geqslant l(Q)$, *le groupe réduit du groupe indicatif* $G = Q_m$ *est* $G^{(1)} = Q_{m+1}$.

(Corollairement, *la suite de réduction* $(G^{(n)})_{n \geqslant 0}$ *est formée des groupes indicatifs* $G^{(n)} = Q_{m+n}$.)

Preuve. — Posons $k = l(Q)$ et considérons, pour tout entier $n \geqslant k$, deux chaînes quelconques α, β ayant pour base un n-ensemble E. Pour chacune des fiches $Q = S$, J^1, T, D, $I^{p,q}$, J^r (de rangs $k = 1, 3, 3, 4, p + q, 2r$), il suffit de montrer que :

$$\alpha \equiv \beta \quad (\text{mod. } Q_k) \Longleftrightarrow \alpha \equiv \beta \quad (\text{mod. } Q_n).$$

Comme Card (E) $= n$, la compatibilité de base $J(E)$ relative au groupe $Q_k^{(n-k)} \in \Sigma_n$ détermine ce groupe de manière unique (6.2.2.), et $Q_k^{(n-k)} = Q_n$ pour tout entier $n \geqslant k$. Il en résultera bien :

$$Q_m^{(1)} = (Q_k^{(m-k)})^{(1)} = Q_k^{(m+1-k)} = Q_{m+1}.$$

Pour établir l'identité des deux compatibilités de base $J(E)$ relatives aux groupes Q_k et Q_n, on peut (sans inconvénient) prendre pour α la chaîne naturelle de base $E = [1, n]$:

$$1 < 2 < \cdots < n \quad (\text{mod. } \alpha).$$

La chaîne β correspond alors à une permutation $\sigma \in S_n$ telle que : $\sigma(1) < \sigma(2) < \cdots < \sigma(n)$ (mod. β), de sorte que :

$$\alpha \equiv \beta \quad (\text{mod. } Q_n) \Longleftrightarrow \sigma \in Q_n.$$

7.2.1. Envisageons tout d'abord le cas des fiches S, J^1, T.

a) Le cas $Q = S$ est trivial, puisque deux chaînes quelconques α, β sont S_n-compatibles pour tout $n \geqslant 1$.

b) Pour que α, β soient J_n^1-compatibles, il faut et il suffit que $\sigma = (r_n)^h$ pour $h = 0$ ou 1. Ces deux possibilités :

$$1 < 2 < \cdots < n \quad (\text{mod. } \beta)$$

ou

$$n < n-1 < \cdots < 1 \quad (\text{mod. } \beta)$$

expriment que α, β sont identiques ou symétriques. D'après 6.2.3., l'équivalence ainsi définie coïncide avec la J_3^1-compatibilité.

c) Pour que α, β soient T_n-compatibles, il faut et il suffit que $\sigma = (t_n)^h$ pour $0 \leqslant h \leqslant n-1$. Ces n possibilités :

$$\begin{cases} 1 < 2 < \cdots < n \quad (\text{mod. } \beta) \\ 2 < 3 < \cdots < n < 1 \quad (\text{mod. } \beta) \\ \cdots \\ n < 1 < \cdots < n-1 \quad (\text{mod. } \beta) \end{cases}$$

expriment l'existence de deux chaînes θ_1, θ_2 telles que : $\alpha = \theta_1 + \theta_2$, $\beta = \theta_2 + \theta_1$. Autrement dit : α et β ont même cycle dérivé (5.3.2.) et, d'après 6.2.3., l'équivalence ainsi définie coïncide avec la T_3-compatibilité.

7.2.2. Envisageons maintenant le produit direct

$$D_n = J_n^1 T_n = T_n J_n^1.$$

Le groupe D_4, en particulier, comprend les 8 permutations : e_4, $(1, 2, 3, 4)$, $(1, 3)(2, 4)$, $(1, 4, 3, 2)$, $(1, 4)(2, 3)$, $(2, 4)$, $(1, 2)(3, 4)$, $(1, 3)$.

Au moyen de deux permutations de E appartenant respectivement à J_n^1 et T_n, on peut associer à toute chaîne $\beta \in \mathbf{J}(E)$ une chaîne D_n-compatible $\beta' \in \mathbf{J}(E)$ ayant 1 comme élément minimum, et telle que $1 < 2 < 3$ (mod. β').

a) Si α, β sont D_n-compatibles, introduisons les permutations $\varphi \in J_n^1$ et $\psi \in T_n$ telles que $\sigma = \psi \circ \varphi$. La chaîne θ de base E définie par : $\psi(1) < \psi(2) < \cdots < \psi(n)$ (mod. θ), vérifie : $\alpha \equiv \theta$ (mod. T_n). Sous la forme :

$$\sigma(\varphi(1)) < \sigma(\varphi(2)) < \cdots < \sigma(\varphi(n)) \quad (\text{mod. } \theta),$$

les mêmes inégalités montrent que : $\theta \equiv \beta$ (mod. J_n^1). D'après 7.2.1. (examen des fiches J^1, T), on en déduit : $\alpha \equiv \theta$ (mod. T_4), $\theta \equiv \beta$ (mod. J_4^1), et $\alpha \equiv \beta$ (mod. D_4).

b) Réciproquement, supposons que α, β soient D_4-compatibles. La chaîne β' associée à β vérifie :

$$\beta' \equiv \beta \equiv \alpha \quad (\text{mod. } D_4), \qquad 2 < 3 \quad (\text{mod. } \beta'),$$

et elle correspond à une permutation φ de E telle que :

$$\varphi(1) < \varphi(2) < \cdots < \varphi(n) \quad (\text{mod. } \beta'), \qquad \varphi(1) = 1.$$

Pour en déduire $\alpha \equiv \beta$ (mod. D_n), nous allons montrer que $\alpha = \beta'$ en appliquant la D_4-compatibilité de α, β' aux 4-parties $X = \{1, 2, u, v\}$ de E. Comme e_4 et $(2, 4)$ sont les seules permutations $\pi \in D_4$ telles que $\pi(1) = 1$, le cas $u = 3$ fournit : $\varphi(2) = 2$, $\varphi(3) = 3$. Comme e_4 est la seule permutation $\pi \in D_4$ telle que $\pi(1) = 1$, $\pi(2) = 2$, le cas des paires $\{u, v\}$ appartenant à $F = \{4, 5, \ldots, n\}$ donne ensuite : $\alpha|F = \beta'|F$. Il en résulte bien : $\varphi = e_n$, et $\alpha \equiv \beta$ (mod. D_n).

7.2.3. Dans le cas d'une fiche $I^{p,q}$, le rang est $k = p + q$.

a) Si α, β sont $I_n^{p,q}$-compatibles, associons à tout $X \in \mathfrak{P}_k(E)$ les traces X_1, X_2, X_3 de X respectivement sur $\{1, 2, \ldots, p\}$, $\{p+1, p+2, \ldots, n-q\}$, $\{n-q+1, \ldots, n-1, n\}$. De :

$$\begin{cases} \text{Card}\,(X_1) \leqslant p, \ \alpha|X_2 = \beta|X_2, \ \text{Card}\,(X_3) \leqslant q, \\ \alpha|X = \alpha|X_1 + \alpha|X_2 + \alpha|X_3, \qquad \beta|X = \beta|X_1 + \beta|X_2 + \beta|X_3, \end{cases}$$

il résulte facilement : $(X_\alpha)^{-1} \circ X_\beta \in I_k^{p,q}$. Ainsi : $\alpha \equiv \beta$ (mod. $I_k^{p,q}$).

b) Réciproquement, supposons que α, β soient $I_k^{p,q}$-compatibles. Au moyen de k-parties X, Y, Z de E telles que :

$$\begin{cases} \{1, 2, \ldots, p, h\} \subset X, \qquad \{h, n-q+1, \ldots, n\} \subset Y, \\ Z = \{1, 2, \ldots, p-1, i, j, n-q+2, \ldots, n\}, \end{cases}$$

on obtient :

$$\begin{cases} p < h \leqslant n \quad (\text{mod. } \alpha) \Longrightarrow \sigma(p) < h \quad (\text{mod. } \beta) \\ 1 \leqslant h < n-q+1 \ (\text{mod. } \alpha) \Longrightarrow h < \sigma(n-q+1) \ (\text{mod. } \beta) \\ p < i < j < n-q+1 \quad (\text{mod. } \alpha) \Longrightarrow i < j \quad (\text{mod. } \beta). \end{cases}$$

Il en résulte successivement :

$$\{\sigma(1), \sigma(2), \ldots, \sigma(p)\} = \{1, 2, \ldots, p\},$$
$$\{\sigma(n-q+1), \ldots, \sigma(n)\} = \{n-q+1, \ldots, n\}, \ \sigma(h) = h$$

pour $p < h < n - q + 1$. Autrement dit : α et β sont $\mathrm{I}_n^{p,q}$-compatibles.

7.2.4. Envisageons enfin le produit direct $\mathrm{J}_n^r = \mathrm{J}_n^1 \mathrm{I}_n^r = \mathrm{I}_n^r \mathrm{J}_n^1$ pour $r \geqslant 2$ (le rang de la fiche J^r est alors $k = 2r$).

a) Si α, β sont J_n^r-compatibles, il existe (pour la même raison qu'en 7.2.2. dans le cas du produit direct D_n) une chaîne θ de base E telle que : $\alpha \equiv \theta \pmod{\mathrm{I}_n^r}$, $\theta \equiv \beta \pmod{\mathrm{J}_n^1}$. De l'étude des fiches J^1 (7.2.1.) et $\mathrm{I}^{p,q}$ (7.2.3.), il résulte alors : $\alpha \equiv \theta \pmod{\mathrm{I}_k^r}$, $\theta \equiv \beta \pmod{\mathrm{J}_k^1}$, donc : $\alpha \equiv \beta \pmod{\mathrm{J}_k^r}$.

b) Réciproquement, supposons que α, β soient J_k^r-compatibles et posons :

$$\mathrm{E}_1 = \{1, 2, \ldots, r\}, \qquad \mathrm{E}_2 = \{r+1, \ldots, n-r\}, \\ \mathrm{E}_3 = \{n-r+1, \ldots, n\}.$$

Au moyen de k-parties X, Y de E telles que

$$\{x\} \cup \mathrm{E}_3 \subset \mathrm{X} \ (x \in \mathrm{E}_1), \qquad \{y\} \cup \mathrm{E}_1 \subset \mathrm{Y} \ (y \in \mathrm{E}_3),$$

on constate que l'une θ des deux chaînes β et β' (symétrique de β) vérifie : $\theta|(\mathrm{E}_1 \cup \mathrm{E}_3) = \theta|\mathrm{E}_1 + \theta|\mathrm{E}_3$.

Par ailleurs, pour la chaîne naturelle de base $\{1, 2, \ldots, k\}$, le groupe I_k^r est l'ensemble des permutations $\pi \in \mathrm{J}_k^r$ telles que $\pi(1) < \pi(k)$. Cette condition est réalisée par $\pi = (\mathrm{X}_\theta)^{-1} \circ \mathrm{X}_\alpha$ quand X est une k-partie de E ayant (pour h, i, j dans E_2) l'un des trois types suivants :

$$\mathrm{X} = \{1, 2, \ldots, r, h, n-r+2, \ldots, n\}, \\ \mathrm{X} = \{1, 2, \ldots, r-1, h, n-r+1, \ldots, n\}, \\ \mathrm{X} = \{1, 2, \ldots, r-1, i, j, n-r+2, \ldots, n\}.$$

Il en résulte :

$$\theta = \theta|\mathrm{E}_1 + \theta|\mathrm{E}_2 + \theta|\mathrm{E}_3, \qquad \theta|\mathrm{E}_2 = \alpha|\mathrm{E}_2,$$

donc :

$$\alpha \equiv \theta \pmod{\mathrm{I}_n^r}, \qquad \alpha \equiv \beta \pmod{\mathrm{J}_n^r}.$$

Remarque. — On sait que l'application $\mathrm{G} \to \mathrm{G}^{(1)}$ de Σ_m dans Σ_{m+1} est croissante (pour l'inclusion). Si Q et Q′ sont les fiches respectives des groupes G et $\mathrm{G}^{(1)}$, la proposition précédente (déterminant le groupe réduit d'un groupe indicatif) implique : $\mathrm{Q} \leqslant \mathrm{Q}' \pmod{\gamma}$. En fait, nous montrerons au § 8 que $\mathrm{Q} = \mathrm{Q}'$.

8. Théorème de réduction.

8.1. *Seuil de réduction d'un groupe de permutations.*

Pour tout sous-groupe H d'un groupe $G \in \Sigma_m$, la H-compatibilité de deux chaînes α, β de base E est une équivalence *plus fine* que la G-compatibilité :

$$\alpha \equiv \beta \text{ (mod. H)} \Longrightarrow \alpha \equiv \beta \text{ (mod. G)}.$$

Toutefois, dans le cas particulier où H est le sous-groupe indicatif maximum de G, nous allons montrer que ces deux équivalences *coïncident* dès que Card (E) est assez grand.

Un élément important de la démonstration est le théorème de P. Erdös et G. Szekeres [3] concernant les bichaînes et leurs restrictions J^1-cohérentes : « *Pour tout entier* $h \geqslant 1$ *et toute bichaîne* (α, β) *de base* E *telle que* Card (E) $\geqslant 1 + (h - 1)^2$, *il existe une h-partie* F *de* E *pour laquelle les chaînes* $\alpha|F$, $\beta|F$ *sont identiques ou symétriques* ».

(Ce *théorème des bichaînes* a été étendu aux multichaînes en 4.3.2.) L'énoncé suivant montre la possibilité de réduire l'une à l'autre deux compatibilités relatives à des groupes (de degré m) ayant même fiche :

Théorème de réduction. — Etant donné un groupe $G \in \Sigma_m$, *de fiche* Q, *il existe un entier* $s \geqslant 0$ *vérifiant la condition:* « *Pour tout ensemble* E *de cardinal* $\geqslant m + s$, *la* G*-compatibilité des deux chaînes* α, β *de base* E *implique la* Q_m*-compatibilité de ces chaînes* ».

(Par la suite, nous noterons $s_0(G)$ le plus petit des entiers $s \geqslant 0$ vérifiant la condition précédente. Nous dirons que $s_0(G)$ est le *seuil de réduction* du groupe G. Pour que G soit un groupe indicatif, il faut et il suffit que $s_0(G) = 0$.)

Preuve. — Considérons (pour $m \geqslant 4$) un groupe non indicatif $G \in \Sigma_m$, de fiche $Q = T$, D, $I^{p,q}$ ou J^r. Pour un entier convenable $n \geqslant m$ et toute bichaîne (α, β) basée sur un n-ensemble, il s'agit de montrer que :

$$\alpha \equiv \beta \quad \text{(mod. G)} \Longrightarrow \alpha \equiv \beta \quad \text{(mod. } Q_m\text{)}.$$

Cette implication subsiste alors pour toute bichaîne de base E telle que Card (E) $\geqslant n$ (puisqu'elle vaut pour les n-restrictions d'une telle bichaîne) et le théorème de réduction s'ensuit pour le groupe G, avec $s_0(G) \leqslant n - m$. Nous n'envisagerons donc que des bichaînes (α, β) de base E finie.

Pour $h \geqslant m$, Card (E) $= n = 1 + (h - 1)^2$, et deux chaînes G-compatibles α, β de base E, introduisons le plus grand entier $k \leqslant n$ pour lequel (α, β) admette une k-restriction J^1-cohérente $(\alpha|F, \beta|F)$. Le *théorème des bichaînes* entraîne : $k \geqslant h \geqslant m$.

Si les chaînes $\alpha|F$, $\beta|F$ sont symétriques, c'est que $r_m \in G$: la fiche de G est alors $Q = D$ ou $Q = J^r$. Si β' désigne la chaîne symétrique de β, les chaînes α et β', sont encore G-compatibles, et la bichaîne (α, β') admet une restriction J^1-cohérente maximale $(\alpha|F, \beta'|F)$ formée de deux chaînes identiques. Il suffit de prouver : $\alpha \equiv \beta'$ (mod. Q_m) pour en déduire :

$$\alpha \equiv \beta \quad (\text{mod. } Q_m).$$

Pour un entier convenable $h \geqslant m$, Card (E) $= 1 + (h - 1)^2$, et un groupe non indicatif $G \in \Sigma_m$, nous sommes ainsi ramené au seul cas de deux chaînes G-compatibles α, β de base E pour lesquelles la bichaîne (α, β) admet une k-restriction J^1-cohérente maximale $(\alpha|F, \beta|F)$ vérifiant : $k \geqslant h$ et $\alpha|F = \beta|F$. Écartant le cas trivial $k = n$, nous poserons :

$$F = \{a_1, a_2, \ldots, a_k\}, \qquad a_1 < a_2 < \cdots < a_k \quad (\text{mod. } \alpha \text{ et } \beta).$$

A tout élément $x \in E - F$, nous associerons le 3-partage $\varepsilon(x) = (F_1, F_2, F_3)$ de F vérifiant (par exemple) :

$$\begin{cases} \alpha|(F \cup \{x\}) = \alpha|F_1 + \alpha|\{x\} + \alpha|F_2 + \alpha|F_3. \\ \beta|(F \cup \{x\}) = \beta|F_1 + \beta|F_2 + \beta|\{x\} + \beta|F_3. \end{cases}$$

avec F_2 non vide, en raison du caractère maximal de la restriction J^1-cohérente $(\alpha|F, \beta|F)$.

8.1.1. Supposons que la fiche Q du groupe G soit T ou D, ce qui implique : $t_m \in G$. Comme les deux permutations $t_m = (1, 2, \ldots, m)$ et $(i, i + 1)$ engendrent le groupe S_m, il est clair que : $(1, 2) \notin G$, $(m - 1, m) \notin G$. Comme entier $h \geqslant m$, nous allons prendre : $h = 3m - 8$. Dans les conditions précédemment indiquées, il s'agit de démontrer :

$$\alpha \equiv \beta \quad (\text{mod. } T_m).$$

a) Pour α et β, montrons d'abord que tout élément $x \in E - F$ majore ou minore l'ensemble

$$V = \{a_{m-2}, a_{m-1}, \ldots, a_{k-m+3}\}.$$

En effet, si l'un des deux ensembles F_1, F_3 du 3-partage associé $\varepsilon(x) = (F_1, F_2, F_3)$ avait un cardinal $\geqslant m - 2$, il existerait une m-partie $X = \{x, y\} \cup Z$ de E vérifiant l'une ou l'autre des deux conditions suivantes :

$$\begin{cases} y \in F_2, \ Z \subset F_1 & \text{et} \quad (X_\alpha)^{-1} \circ X_\beta = (m-1, m) \\ y \in F_2, \ Z \subset F_3 & \text{et} \quad (X_\alpha)^{-1} \circ X_\beta = (1, 2) \end{cases}$$

(en contradiction avec $(i, i+1) \notin G$).

De Card $(F_1) < m - 2$ et Card $(F_3) < m - 2$, il résulte : $V \subset F_2$. Avec l'exemple choisi : x minore V pour α, x majore V pour β.

b) Pour $\alpha_2 = \alpha|V = \beta|V = \beta_2$, les chaînes α et β prennent ainsi des expressions : $\alpha = \alpha_1 + (\alpha_2 + \alpha_3)$, $\beta = \beta_1 + (\beta_2 + \beta_3)$. Posons : $\alpha_0 = (\alpha_2 + \alpha_3) + \alpha_1$, $\beta_0 = (\beta_2 + \beta_3) + \beta_1$. Deux chaînes ayant même cycle dérivé (5.3.2.) sont T_3-compatibles (6.2.3.), donc T_m-compatibles (7.2.1.). Par conséquent :

$$\alpha \equiv \alpha_0 \quad (\text{mod. } T_m), \qquad \beta \equiv \beta_0 \quad (\text{mod. } T_m),$$

et $\alpha_0 \equiv \beta_0$ (mod. G). De $k \geqslant h$, il résulte par ailleurs :

$$\text{Card } (V) = k - 2m + 6 \geqslant m - 2.$$

Si les chaînes α_0, β_0 étaient distinctes, il existerait deux éléments x, y de $E - V$ et une m-partie $X = \{x, y\} \cup Z$ de E tels que : $Z \subset V$, $x < y$ (mod. α_0), $y < x$ (mod. β_0), d'où la contradiction : $(X_{\alpha_0})^{-1} \circ X_{\beta_0} = (m-1, m)$.

Finalement : $\alpha_0 = \beta_0$ et $\alpha \equiv \beta$ (mod. T_m).

8.1.2. Supposons maintenant que la fiche Q du groupe G soit $I^{p,q}$ ou J^r : nous examinerons simultanément les deux cas en posant $p = q = r$ lorsque $Q = J^r$. Au groupe G appartiennent ainsi les $p + q - 2$ permutations

$$(1, i) \qquad \text{et} \qquad (m - j + 1, m)$$

(pour $1 < i \leqslant p$, $1 < j \leqslant q$). Par ailleurs :

$$\begin{cases} (1, 2), (1, 3), \ldots, (1, p), (1, p+1) & \text{engendrent} \quad I_m^{p+1,1} \\ (m-q, m), (m-q+1, m), \ldots, (m-1, m) & \text{engendrent} \quad I_m^{1,q+1}. \end{cases}$$

Comme G contient le groupe indicatif $I_m^{p,q}$, mais aucun des deux groupes : $I_m^{p+1,q} = I_m^{p,q} \nabla I_m^{p+1,1}$, $I_m^{p,q+1} = I_m^{p,q} \nabla I_m^{1,q+1}$, il en résulte : $(1,\ p+1) \notin G$, $(m-q,\ m) \notin G$.

De même, $T \not\subset I_m^{p,q}$ implique : $t_m \notin G$.

En 6.4.1., nous avions signalé que les fiches des groupes non indicatifs de degré 4 étaient I^1, J^1, $I^{1,2}$, $I^{2,1}$. Comme entier $h \geqslant m$, nous pouvons donc prendre : $h = 3m - p - q - 5$. Dans les conditions précédemment indiquées, il s'agit de démontrer : $\alpha \equiv \beta \pmod{I_m^{p,q}}$.

a) Posons : $V = \{a_p, a_{p+1}, \ldots, a_{k-q+1}\}$ et montrons que tout élément $x \in E - F$ se comporte pareillement pour α et β, soit en majorant V, soit en minorant V. Pour cela, vérifions successivement chacune des alternatives suivantes concernant le 3-partage associé $\varepsilon(x) = (F_1, F_2, F_3)$:

$$\begin{cases} (a_1)\ \text{Card}\,(F_1) \geqslant m - q - 1 & \text{ou} \quad \text{Card}\,(F_3) \geqslant m - p - 1 \\ (a_2)\ \text{Card}\,(F_1 \cup F_2) < p & \text{ou} \quad \text{Card}\,(F_2 \cup F_3) < q. \end{cases}$$

Tout d'abord, Card $(F_2) \geqslant m - 1$ impliquerait l'existence d'une m-partie $X = \{x\} \cup Y$ de E telle que

$$Y \subset F_2, \qquad (X_\alpha)^{-1} \circ X_\beta = t_m,$$

en contradiction avec $t_m \notin G$. De Card $(F_2) \leqslant m - 2$, il résulte : Card $(F_1 \cup F_3) \geqslant 2m - p - q - 3$, d'où l'alternative (a_1) pour $\varepsilon(x)$.

Si $\varepsilon(x)$ ne vérifiait pas l'alternative (a_2), il existerait deux entiers i, j $(1 \leqslant i \leqslant p,\ 1 \leqslant j \leqslant q)$ et quatre ensembles $Y_1 \subset F_1$, $Y_2 \subset F_2$, $Z_2 \subset F_2$, $Z_3 \subset F_3$ tels que :

$$\begin{cases} \text{Card}\,(Y_1 \cup Y_2) = p, & \text{Card}\,(Y_1) = i - 1 \\ \text{Card}\,(Z_2 \cup Z_3) = q, & \text{Card}\,(Z_3) = j - 1. \end{cases}$$

Lorsque Card $(F_3) \geqslant m - p - 1$, on pourrait trouver une m-partie $X = \{x\} \cup Y_1 \cup Y_2 \cup Y_3$ de E telle que $Y_3 \subset F_3$, pour laquelle $\sigma = (X_\alpha)^{-1} \circ X_\beta = (i,\ i+1,\ \ldots,\ p,\ p+1)$. Dans chacun des cas :

$$\begin{cases} i = 1, p = 1 \Longrightarrow \sigma = (1, 2) \\ i = 1, p > 1 \Longrightarrow \overset{-1}{\sigma} \circ (1, 2) \circ \sigma = (1, p+1) \\ i > 1, p > 1 \Longrightarrow \sigma \circ (1, p) \circ \overset{-1}{\sigma} = (1, p+1) \end{cases}$$

on aboutirait à la contradiction : $(1, p+1) \in G$.

Lorsque Card $(F_1) \geqslant m - q - 1$, un raisonnement analogue (avec une m-partie $X = \{x\} \cup Z_1 \cup Z_2 \cup Z_3$ de E telle que $Z_1 \subset F_1$) aboutirait à la contradiction : $(m - q, m) \in G$.

Avec l'alternative (a_2), l'élément x vérifie donc bien l'une des deux conditions :

$$\begin{cases} \text{Card}\,(F_1 \cup F_2) < p, & V \subset F_3 : \ x \text{ minore } V \text{ pour } \alpha \text{ et } \beta \\ \text{Card}\,(F_2 \cup F_3) < q, & V \subset F_1 : \ x \text{ majore } V \text{ pour } \alpha \text{ et } \beta. \end{cases}$$

b) Pour toute partie non vide X de l'ensemble fini E et toute chaîne θ de base E, notons $\text{Min}_{(\theta)}\, X$ et $\text{Max}_{(\theta)}\, X$ respectivement le premier élément et le dernier élément de X pour la chaîne θ. D'après ce que nous venons de démontrer concernant les chaînes G-compatibles α, β et les ensembles F, V, $E - F$, il existe un 3-partage (E_1, E_2, E_3) de E vérifiant les conditions suivantes :

$$(b_1) \qquad \begin{cases} \alpha = \alpha|E_1 + \alpha|E_2 + \alpha|E_3, \\ \beta = \beta|E_1 + \beta|E_2 + \beta|E_3, \\ V \subset E_2 \quad \text{et} \quad \alpha|E_2 = \beta|E_2. \end{cases}$$

$$(b_2) \qquad \begin{cases} E_1 \neq \varnothing \Longrightarrow \text{Max}_{(\alpha)}\, E_1 \neq \text{Max}_{(\beta)}\, E_1 \\ E_3 \neq \varnothing \Longrightarrow \text{Min}_{(\alpha)}\, E_3 \neq \text{Min}_{(\beta)}\, E_3. \end{cases}$$

Les conditions (b_2) expriment le caractère maximal de E_2 vis-à-vis des conditions (b_1).

Choisissons deux ensembles Y' et Z' tels que :

$$\begin{cases} Y' \subset \{a_p, a_{p+1}, \ldots, a_k\} \subset (E_2 \cup E_3), & \text{Card}\,(Y') = m - p - 1 \\ Z' \subset \{a_1, a_2, \ldots, a_{k-q+1}\} \subset (E_1 \cup E_2), & \text{Card}\,(Z') = m - q - 1. \end{cases}$$

Si le cardinal de E_1 était $\geqslant p + 1$, on pourrait trouver une m-partie $X = \{a, b\} \cup Y \cup Y'$ de E telle que :

$$a = \text{Max}_{(\alpha)}\, E_1, \qquad b = \text{Max}_{(\beta)}\, E_1, \qquad Y \subset E_1 - \{a, b\}.$$

Comme $\alpha|Y' = \beta|Y'$, la permutation $(X_\alpha)^{-1} \circ X_\beta \in G$ conserverait chaque entier $p + 2, p + 3, \ldots, m$, mais elle aurait (pour des entiers $i, j, \ldots, l$ compris entre 1 et p) un cycle composant :

$$(i, j, \ldots, l, p + 1) = (i, p + 1) \circ (i, j, \ldots, l).$$

Il en résulterait $(i, p + 1) \in G$ et l'on aboutirait (comme précédemment) à la contradiction : $(1, p + 1) \in G$.

Par un raisonnement analogue, l'hypothèse Card $(E_3) \geqslant q+1$ conduirait à la contradiction : $(m-q,\ m) \in G$.

On en déduit, finalement :

$$\text{Card}\,(E_1) \leqslant p, \qquad \text{Card}\,(E_3) \leqslant q, \qquad (E_\alpha)^{-1} \circ E_\beta \in I_n^{p,q},$$

et (d'après 7.2.3.) : $\alpha \equiv \beta$ (mod. $I_m^{p,q}$).

8.2. *Suite de réduction d'un groupe de permutations quelconque.*

8.2.1. Soit Q la fiche d'un groupe $G \in \Sigma_m$. Pour n fixé (et G variant dans Σ_m), l'application $G \to G^{(n)}$ de Σ_m dans Σ_{m+n} est croissante pour l'inclusion. La proposition 7.2. montre alors que le groupe indicatif Q_{m+n} est un sous-groupe de $G^{(n)}$ pour tout entier $n \geqslant 0$. Le théorème 8.1. (introduisant le seuil de réduction $s_0(G)$ du groupe G) permet d'apporter la précision suivante :

Proposition. — *Etant donné un groupe* $G \in \Sigma_m$, *de fiche* Q, *les entiers* $n \geqslant s_0(G)$ *sont ceux pour lesquels* $G^{(n)} = Q_{m+n}$ *dans la suite de réduction de* G *(alors que* Q_{m+n} *est un sous-groupe strict de* $G^{(n)}$ *pour* $0 \leqslant n < s_0(G)$).

Preuve. — Pour $n \geqslant 0$, Card $(E) = m+n$ et deux chaînes quelconques α, β de base E, on sait que :

$$\begin{cases} \alpha \equiv \beta \ (\text{mod. } G) \Longleftrightarrow \alpha \equiv \beta \ (\text{mod. } G^{(n)}) & (7.1.2.) \\ \alpha \equiv \beta \ (\text{mod. } Q_m) \Longleftrightarrow \alpha \equiv \beta \ (\text{mod. } Q_{m+n}) & (7.2.) \end{cases}$$

Pour que $G^{(n)} = Q_{m+n}$, il faut et il suffit (6.2.2.) que les deux compatibilités de base $J(E)$ relatives aux groupes $G^{(n)}$ et Q_{m+n} coïncident. Comme ces équivalences s'identifient aux compatibilités de base $J(E)$ relatives aux groupes G et Q_m, la condition imposée caractérise (d'après 8.1.) les entiers $n \geqslant s_0(G)$.

8.2.2. Proposition. — *Si* Q *est la fiche d'un groupe* $G \in \Sigma_m$, Q *est aussi la fiche du groupe réduit* $G^{(1)}$ *(ou encore : tous les groupes d'une suite de réduction* $(G^{(n)})_{n \geqslant 0}$ *ont même fiche).*

Preuve. — Soient Q, Q′, Q″, ... les fiches respectives des groupes G, $G^{(1)}$, $G^{(2)}$, ... Pour le lattis γ de base $\mathcal{L}$ (ensemble des fiches S, T, D, $I^{p,q}$, J^r), nous avons déjà obtenu : $Q \leqslant Q'$ (mod. γ) en utilisant la croissance de la fonction

$G \to G^{(1)}$ et la proposition 7.2. (réduction des groupes indicatifs). Par itération, il en résulte : $Q \leqslant Q' \leqslant Q'' \leqslant \dots$ (mod. γ). Par ailleurs, nous venons de voir que $G^{(n)}$ est un groupe indicatif de fiche Q pour tout entier $n \geqslant s_0(G)$, de sorte que la suite : Q, Q′, Q″, ... est nécessairement constante.

8.3. *Caractérisation des groupes indicatifs.*

Rappelons qu'une fiche P est une suite indicative (6.1.2.) dès qu'il existe une bichaîne de base infinie admettant les termes $P_1, P_2, \dots, P_m, \dots$ comme groupes propres. Nous savons que les fiches S, T, D, $I^{p,q}$, J^r sont des suites indicatives particulières (6.3.2.).

8.3.1. Voici une conséquence du théorème de réduction (8.1.) :

Proposition. — *Chaque terme d'une suite indicative est un groupe indicatif.*

Preuve. — Si G est le groupe propre de degré m d'une bichaîne (α, β) de base E infinie, et si Q est la fiche de G, le théorème 8.1. implique : $\alpha \equiv \beta$ (mod. Q_m). Puisque $Q_m \subset G$, la définition même des groupes propres nécessite : $G = Q_m$.

Ainsi se trouve finalement justifiée une remarque faite en 6.3.2., concernant la caractérisation des groupes indicatifs :

Corollaire. — *Pour qu'un sous-groupe* G *de* S_m *soit un groupe indicatif, il faut et il suffit qu'il existe une suite indicative* P *telle que* $G = P_m$.

8.3.2. Pour achever la détermination des suites indicatives, nous utiliserons les propositions 7.2. et 8.3.1., ainsi que deux remarques concernant l'ensemble $\mathfrak{L}$ des fiches S, T, D, $I^{p,q}$, J^r. Cet ensemble $\mathfrak{L}$ est ordonné par le lattis γ défini en 6.3.4.

a) Pour $Q \in \mathfrak{L}$, $Q \neq S$, la fonction $Q \to l(Q)$ (rang de Q) est une application croissante de $\mathfrak{L} - \{S\}$ (ordonné par γ) dans N (naturellement ordonné).

(La vérification est facile en interprétant le rang $l(Q)$, pour $Q \neq S$, par la condition : $1 \leqslant m < l(Q) \iff Q_m = S_m$).

b) Pour que deux fiches Q, Q′ de $\mathfrak{L}$ vérifient :

$$Q \leqslant Q' \quad (\text{mod. } \gamma),$$

il suffit qu'il existe un entier $m \geqslant l(Q')$ tel que : $Q_m \subset Q'_m$. (Remarque déjà faite en 6.3.4.)

Proposition. — *Les fiches* S, T, D, $I^{p,q}$ J^r (p, q, r *entiers* $\geqslant 1$) *sont les seules suites indicatives.*

Preuve. — Soit P une suite indicative (formée des groupes propres P_m d'une bichaîne (α, β) de base E infinie). Nous venons de voir que chaque groupe P_m est un groupe indicatif (8.3.1.).

Si $P \neq S$, il existe un entier $k \geqslant 2$ tel que P_k soit un sous-groupe strict de S_k, alors que : $1 \leqslant m < k \Longrightarrow P_m = S_m$. La fiche Q du groupe P_k est l'une des suites T, D, $I^{p,q}$, J^r : elle vérifie $2 \leqslant l(Q) \leqslant k$. Puisque $\alpha \equiv \beta$ (mod. Q_k), la proposition 7.2. montre que α et β sont Q_m-compatibles pour tout entier $m \geqslant l(Q)$; dans ce cas, $Q_m \neq S_m$ assure $l(Q) = k$. Ainsi :

$$\begin{cases} 1 \leqslant m \leqslant k \Longrightarrow P_m = Q_m, \\ \quad\;\; m \geqslant k \Longrightarrow P_m \subset Q_m. \end{cases}$$

Pour un entier fixé $m \geqslant k$, soit Q′ la fiche du groupe P_m. D'après la remarque (b), l'inclusion : $Q'_m \subset Q_m$ pour un entier $m \geqslant l(Q)$ implique : $Q' \leqslant Q$ (mod. γ), avec $Q \neq S$, ce qui assure également $Q' \neq S$. D'après la remarque (a), il en résulte : $l(Q') \leqslant k \leqslant m$. Puisque $\alpha \equiv \beta$ (mod. Q'_m), la proposition 7.2. implique : $\alpha \equiv \beta$ (mod. Q'_k). Comme précédemment, l'inclusion : $Q_k \subset Q'_k$ pour un entier $k \geqslant l(Q')$ entraîne : $Q \leqslant Q'$ (mod. γ).

Finalement : $Q' = Q$, $P_m = Q_m$ pour tout entier $m \geqslant 1$, et la suite indicative P coïncide avec la fiche $Q \in \mathfrak{L}$.

L'ensemble infini dénombrable $\mathfrak{L}$ est donc l'*ensemble des suites indicatives.*

9. Théorème de recollement.

9.1. *Le problème de* G-*recollement.*

9.1.1. Soit Φ un ensemble de chaînes dont les bases sont des parties d'un ensemble E (l'ensemble $\mathcal{F}$ de ces bases est le *support* de Φ). Étant donné un groupe de permutations $G \in \Sigma_m$, il est intéressant de savoir s'il existe une chaîne θ de base E qui soit G-compatible avec toute chaîne $\varphi \in \Phi$: dans l'affirmative, nous dirons qu'une telle chaîne θ est un G-*recollement* de l'ensemble Φ. Voici, à ce propos, quelques remarques simples :

a) Si θ existe, les chaînes de Φ sont nécessairement G-compatibles deux à deux : cette dernière condition peut encore s'exprimer (que θ existe ou non) en disant que l'ensemble Φ est G-*cohérent.*

b) Si Φ est G-cohérent et si toutes les chaînes de Φ ont même base F, toute extension $\theta \in \mathbf{J}(\mathrm{E})$ d'une chaîne particulière $\varphi_0 \in \Phi$ est un G-recollement de Φ.

c) Voici une situation moins triviale :

Pour un entier $n \geqslant m$ et un $(n+1)$-ensemble

$$\mathrm{E} = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\},$$

posons $\mathrm{F}_i = \mathrm{E} - \{x_i\}$ $(0 \leqslant i \leqslant n)$ et supposons que le support de Φ soit $\mathcal{F} = \mathfrak{P}_n(\mathrm{E}) = \{\mathrm{F}_0, \mathrm{F}_1, \ldots, \mathrm{F}_n\}$. Au sens de 1.3.1., nous dirons alors que l'ensemble E est *strictement recouvert* par les chaînes de Φ.

Dans ces conditions, introduisons $m+1$ chaînes

$$\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_m$$

de Φ ayant $\mathrm{F}_0, \mathrm{F}_1, \ldots, \mathrm{F}_m$ comme bases respectives, et posons : $\Phi' = \{\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_m\}$. Du seul fait que toute m-partie X de E est contenue dans l'une F_i des bases $\mathrm{F}_0, \mathrm{F}_1, \ldots, \mathrm{F}_m$ (il suffit, pour cela, que $x_i \notin \mathrm{X}$), on déduit :

Proposition. — *Pour* $\theta \in \mathbf{J}(\mathrm{E})$, *la* G-*cohérence de chacun des ensembles* Φ *et* $\Phi' \cup \{\theta\}$ *implique celle de* $\Phi \cup \{\theta\}$.

(Pour toute chaîne $\varphi \in \Phi$ et toute m-partie X de la base de φ, c'est une conséquence de :

$$(\mathrm{X}_\theta)^{-1} \circ \mathrm{X}_\varphi = [(\mathrm{X}_\theta)^{-1} \circ \mathrm{X}_{\varphi_i}] \circ [(\mathrm{X}_{\varphi_i})^{-1} \circ \mathrm{X}_\varphi]).$$

9.1.2. Dans le cas d'un $(n+1)$-ensemble E strictement recouvert par des chaînes G-compatibles $\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_n$, il peut n'exister aucun G-recollement pour l'ensemble

$$\Phi = \{\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_n\}.$$

Par exemple, pour $m = 4$, $n = 5$, considérons le groupe : $\mathrm{G} = \{e_4, (2, 4)\}$ et les chaînes α, β de base $\mathrm{E} = \{x_0, x_1, \ldots, x_5\}$ telles que :

$$\begin{cases} x_0 < x_1 < x_2 < x_3 < x_4 < x_5 & (\text{mod. } \alpha) \\ x_0 < x_1 < x_5 < x_4 < x_3 < x_2 & (\text{mod. } \beta). \end{cases}$$

On vérifie facilement la G-cohérence de l'ensemble de chaînes :

$$\Phi = \{\alpha|F_0,\ \alpha|F_1,\ \beta|F_2,\ \beta|F_3,\ \beta|F_4,\ \beta|F_5\}.$$

Puisque le groupe réduit de G est $G^{(1)} = I_5^1$ (7.1.2.), la G-compatibilité d'une chaîne $\varphi \in \Phi$ avec une chaîne $\theta \in \mathbf{J}(E)$ implique : $\varphi = \theta|F$. La G-cohérence de $\Phi \cup \{\theta\}$ impliquerait donc la I_2^1-cohérence de Φ, en contradiction avec :

$$x_2 < x_3 \quad (\text{mod. } \varphi_0), \qquad x_3 < x_2 \quad (\text{mod. } \varphi_4).$$

Par contre, pour le même groupe G et $n \geqslant 6$, la G-compatibilité de deux chaînes quelconques φ_i, φ_j de Φ implique leur compatibilité (puisque Card $(F_i \cap F_j) \geqslant 5$ et $G^{(1)} = I_5^1$). L'existence d'un G-recollement θ pour Φ résulte alors de la proposition 1.3.1. (que nous allons généraliser).

9.2. *Seuil de recollement d'un groupe de permutations.*

Par une étude directe pour les groupes indicatifs, et grâce au théorème de réduction pour les groupes non indicatifs, nous allons démontrer un résultat préliminaire :

Lemme de recollement. — *Etant donné un groupe* $G \in \Sigma_m$, *il existe un entier* $s \geqslant 0$ *vérifiant la condition suivante :* « *Pour tout entier* $n \geqslant m + s$ *et tout* $(n+1)$*-ensemble* E *strictement recouvert par des chaînes* G*-compatibles* $\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_n$, *il existe un* G*-recollement* θ *de base* E *pour l'ensemble*

$$\Phi = \{\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_n\} \text{ ».}$$

(Par la suite, nous noterons $s_1(G)$ le plus petit des entiers $s \geqslant 0$ vérifiant la condition précédente, et nous dirons que $s_1(G)$ est le *seuil de recollement* du groupe G).

Preuve. — Comme précédemment, nous poserons

$$E = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$$

et nous noterons $F_i = E - \{x_i\}$ la base de la chaîne φ_i $(0 \leqslant i \leqslant n)$.

Le cas du groupe S_m est trivial (pour $s = 0$). Comme sous-groupes stricts G de S_m, nous envisagerons successivement : I_m^1, J_m^1, T_m, D_m (pour lesquels convient $s = 1$), $I_m^{p,q}$, J_m^r, puis les groupes non indicatifs. En prenant $n \geqslant m + 1$, nous assurerons Card $(F_i \cap F_j) \geqslant m$ pour le support $\{F_0, F_1, \ldots, F_n\}$ de l'ensemble G-cohérent Φ. Lorsque G est un groupe indicatif : $G = Q_m$ (Q étant une fiche de rang $k \leqslant m$), la proposition 7.2. montre alors que Φ est Q_h-cohérent pour tout entier $h \geqslant k$.

9.2.1. Pour $G = I^1_m$ $(m \geqslant 2)$ et $n \geqslant m+1$, Φ est un ensemble cohérent de chaînes auquel s'applique la proposition 1.3.1. Il existe alors une chaîne θ de base E telle que $\Phi = \theta || \mathfrak{P}_n(E)$, et $\Phi \cup \{\theta\}$ est I^1_m-cohérent.

Pour $G = J^1_m$ $(m \geqslant 3)$ et $n \geqslant m+1$, les restrictions $\varphi_i|(F_i \cap F_j)$ et $\varphi_j|(F_i \cap F_j)$ sont identiques ou symétriques. Il existe alors un ensemble de chaîne $\Psi = \{\varphi_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\}$ vérifiant (pour $1 \leqslant i \leqslant n$) les conditions :

$$\begin{cases} \alpha_i \text{ et } \varphi_i \quad \text{sont identiques ou symétriques.} \\ \varphi_0|(F_0 \cap F_i) = \alpha_i|(F_0 \cap F_i). \end{cases}$$

Pour $1 \leqslant i < j \leqslant n$, l'ensemble

$$V = F_0 \cap F_i \cap F_j = E - \{x_0, x_i, x_j\}$$

vérifie : Card $(V) \geqslant 2$, $\alpha_i|V = \varphi_0|V = \alpha_j|V$, de sorte que : $\alpha_i|(F_i \cap F_j) = \alpha_j|(F_i \cap F_j)$. Comme précédemment, la proposition 1.3.1. s'applique à l'ensemble cohérent Ψ : pour la chaîne θ de base E telle que $\Psi = \theta || \mathfrak{P}_n(E)$, l'ensemble $\Phi \cup \{\theta\}$ est J^1_m-cohérent.

9.2.2. Pour $G = T_m$ $(m \geqslant 3)$ et $n \geqslant m+1$, les restrictions $\varphi_i|(F_i \cap F_j)$ et $\varphi_j|(F_i \cap F_j)$ ont même cycle dérivé. Il existe alors un ensemble de chaînes $\Psi = \{\varphi_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\}$ vérifiant (pour $1 \leqslant i \leqslant n$) les conditions :

$$\begin{cases} \alpha_i \in J(F_i) \qquad \text{et} \qquad \alpha_i \equiv \varphi_i \quad (\text{mod. } T_n). \\ x_0 \neq \operatorname{Max}_{(\alpha_i)} F_i, \qquad \varphi_0|(F_0 \cap F_i) = \alpha_i|(F_0 \cap F_i). \end{cases}$$

Cet ensemble Ψ est encore T_m-cohérent. Posons :

$$\Psi' = \{\varphi_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\} \qquad \text{et} \qquad x_1 < x_2 < \cdots < x_n \quad (\text{mod. } \varphi_0).$$

Les conditions :

$$x_0 < x_n \quad (\text{mod. } \alpha_1), \qquad x_2 < x_3 < x_4 < \cdots < x_n \quad (\text{mod. } \alpha_1),$$

donnent $(n-1)$ possibilités pour la chaîne α_1. De même :

$$\begin{cases} x_0 < x_n \quad (\text{mod. } \alpha_2), \qquad x_1 < x_3 < x_4 < \cdots < x_n \quad (\text{mod. } \alpha_2) \\ x_0 < x_n \quad (\text{mod. } \alpha_3), \qquad x_1 < x_2 < x_4 < \cdots < x_n \quad (\text{mod. } \alpha_3). \end{cases}$$

En appliquant la T_3-compatibilité de α_1, α_2, α_3 à des 3-parties convenables de E, il est alors possible (pour chaque chaîne α_1) de préciser α_2 et α_3 :

a) La T_3-compatibilité de α_1, α_2 appliquée à $\{x_0, x_3, x_n\}$ et $\{x_0, x_i, x_{i+1}\}$ donne les conditions :

$$\begin{cases} x_0 < x_3 \quad (\text{mod. } \alpha_1) \Longrightarrow x_0 < x_3 \quad (\text{mod. } \alpha_2) \\ x_3 \leqslant x_i < x_0 < x_{i+1} \quad (\text{mod. } \alpha_1) \Longrightarrow x_i < x_0 < x_{i+1} \quad (\text{mod. } \alpha_2). \end{cases}$$

Il en résulte $(n+1)$ possibilités pour le couple (α_1, α_2).

b) La T_3-compatibilité de α_1, α_2, α_3 appliquée à $\{x_0, x_1, x_n\}$, $\{x_0, x_1, x_4\}$, $\{x_0, x_2, x_4\}$, $\{x_0, x_i, x_{i+1}\}$ donne les conditions :

$$\begin{cases} x_0 < x_1 \quad (\text{mod. } \alpha_2) \Longrightarrow x_0 < x_1 \quad (\text{mod. } \alpha_3). \\ x_0 < x_2 \quad (\text{mod. } \alpha_1) \quad \text{et} \quad x_1 < x_0 < x_3 \quad (\text{mod. } \alpha_2) \\ \qquad \Longrightarrow x_1 < x_0 < x_2 \quad (\text{mod. } \alpha_3) \\ x_2 < x_0 < x_3 \quad (\text{mod. } \alpha_1) \Longrightarrow x_2 < x_0 < x_4 \quad (\text{mod. } \alpha_3) \\ x_3 < x_0 < x_4 \quad (\text{mod. } \alpha_1) \Longrightarrow x_2 < x_0 < x_4 \quad (\text{mod. } \alpha_3) \\ x_4 \leqslant x_i < x_0 < x_{i+1} \quad (\text{mod. } \alpha_1) \Longrightarrow x_i < x_0 < x_{i+1} \quad (\text{mod. } \alpha_3). \end{cases}$$

Sur les $(n+1)$ cas possibles concernant (α_1, α_2), ces conditions écartent le cas :

$$x_2 < x_0 < x_3 \quad (\text{mod. } \alpha_1) \qquad \text{et} \qquad x_0 < x_1 < x_3 \quad (\text{mod. } \alpha_2).$$

Il reste alors n possibilités pour $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$. Dans chaque cas, φ_0, α_1, α_2, α_3 apparaissent comme les restrictions d'une chaîne θ (et une seule) de base E telle que : $x_0 < x_n$ (mod. θ) et

$$x_1 < x_2 < \cdots < x_n \quad (\text{mod. } \theta).$$

Ainsi, $\Psi' \cup \{\theta\}$ est cohérent et (d'après 9.1.1.) $\Psi \cup \{\theta\}$ est T_3-cohérent. La chaîne θ est donc T_m-compatible avec $\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_n$.

9.2.3. Envisageons maintenant le produit direct

$$G = D_m = J_m^1 T_m \quad (m \geqslant 4)$$

pour $n \geqslant m+1$. Quand on remplace une chaîne $\varphi_i \in \Phi$ par la chaîne symétrique φ_i', ou par une chaîne ayant même cycle dérivé que φ_i ou φ_i', Φ est remplacé par un ensemble qui est encore D_m-cohérent. Il existe donc un ensemble de chaînes

D_m-cohérent $\Psi = \{\varphi_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\}$ vérifiant (pour $1 \leqslant i \leqslant n$) les conditions :

$$\begin{cases} \alpha_i \in J(F_i) & \text{et} \quad \alpha_i \equiv \varphi_i \quad (\text{mod. } D_n), \\ x_0 = \operatorname{Min}_{(\alpha_i)} F_i, & \varphi_0|(F_0 \cap F_i) \equiv \alpha_i|(F_0 \cap F_i) \quad (\text{mod. } T_{n-1}). \end{cases}$$

a) Montrons que les chaînes $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ sont deux à deux compatibles. Pour $1 \leqslant i < j \leqslant n$, posons :

$$V = F_0 \cap F_i \cap F_j = E - \{x_0, x_i, x_j\},$$

d'où :
$$\begin{cases} F_i \cap F_j = \{x_0\} \cup V, & \text{Card}(V) \geqslant 3, \\ \alpha_i|V \equiv \varphi_0|V \equiv \alpha_j|V & (\text{mod. } T_3). \end{cases}$$

Comme x_0 est le premier élément de $F_i \cap F_j$ pour α_i et α_j il s'agit de montrer que $\alpha_i|V = \alpha_j|V$. Pour cela, considérons, l'application $X \to Y$ de $\mathfrak{P}_3(V)$ dans $\mathfrak{P}_4(F_i \cap F_j)$ telle que $Y = \{x_0\} \cup X$. Puisque :

$$\alpha_i|X \equiv \alpha_j|X \quad (\text{mod. } T_3), \qquad \sigma = (Y_{\alpha_i})^{-1} \circ Y_{\alpha_j}$$

est l'une des trois permutations e_4, $(2, 3, 4)$, $(2, 4, 3)$. De $\sigma \in D_4$ et $(2, 3, 4) \notin D_4$, il résulte alors : $\sigma = e_4$ et $\alpha_i|X = \alpha_j|X$. Les chaînes $\alpha_i|V$ et $\alpha_j|V$ (ayant les mêmes 3-restrictions) sont bien identiques.

b) L'ensemble Ψ étant T_m-cohérent, nous venons de voir (9.2.2.) qu'il existe une chaîne θ de base E telle que $\Psi \cup \{\theta\}$ soit T_m-cohérent. Il est clair qu'une telle chaîne θ est D_m-compatible avec $\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_n$.

9.2.4. Avant d'aborder le cas des groupes $G = I_m^{p,q}$, une remarque s'impose concernant les sous-groupes G, H de S_m qui sont conjugués par le retournement r_m (autrement dit : $H = r_m \circ G \circ r_m$). Si deux chaînes α, β sont G-compatibles, leurs symétriques α', β' sont H-compatibles (puisque, par exemple, $X_{\alpha'} = X_\alpha \circ r_m$ pour toute m-partie X de la base de α). Pour de tels groupes G, H, la condition du lemme de recollement est donc vérifiée par les mêmes entiers $s \geqslant 0$, de sorte que : $s_1(G) = s_1(H)$. Cette égalité vaudra, en particulier, pour $G = I_m^{p,q}$ et $H = I_m^{q,p}$. Dans ce cas, nous allons mettre en évidence l'entier $s_1(G)$ en procédant par récurrence sur le couple (p, q).

a) Supposons démontré le lemme de recollement pour le groupe $I_m^{p,1}$, et prenons :

$$n \geqslant \operatorname{Max}(m + 1, m + s_1(I_m^{p,1}), p + q + 3).$$

Pour l'ensemble des chaînes $I_m^{p,q}$-cohérent $\Phi = \{\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$, posons :

$$\begin{cases} x_1 < x_2 < \cdots < x_n \ (\text{mod. } \varphi_0), \quad y_1 < y_2 < \cdots < y_n \ (\text{mod. } \varphi_1) \\ A = \{x_1, y_1, y_2, \ldots, y_{n-q-2}\}, \quad B = \{y_{n-q-1}, y_{n-q}, \ldots, y_n\}, \\ A_i = A - \{x_i\}, \qquad B_i = B - \{x_i\} \quad (0 \leqslant i \leqslant n). \end{cases}$$

La bipartition (A, B) de E vérifie: Card (A) $\geqslant p + 2$ (puisque $n \geqslant p + q + 3$) et Card (B) $= q + 2$. La $I_{n-1}^{p,q}$-compatibilité de φ_0 avec $\varphi_1 = \varphi_1|A_1 + \varphi_1|B$ montre que :

$$\begin{cases} x_0 \in A \Longrightarrow A = \{x_0, x_1, \ldots, x_{n-q-2}\} \quad \text{et} \quad \varphi_0 = \varphi_0|A_0 + \varphi_0|B. \\ x_0 \in B \Longrightarrow A = \{x_1, x_2, \ldots, x_{n-q-1}\} \quad \text{et} \quad \varphi_0 = \varphi_0|A + \varphi_0|B_0. \end{cases}$$

La $I_{n-1}^{p,q}$-compatibilité de φ_i $(2 \leqslant i \leqslant n)$ avec φ_0 et φ_1 montre que :

$$\begin{cases} \varphi_i|(F_0 \cap F_i) = \varphi_i|(A_i - \{x_0\}) + \varphi_i|(B_i - \{x_0\}). \\ \varphi_i|(F_1 \cap F_i) = \varphi_i|(A_i - \{x_1\}) + \varphi_i|B_i. \end{cases}$$

L'hypothèse $n \geqslant p + q + 3$ assurant $x_1 \neq \mathrm{Max}_{(\varphi_i)} A_i$ lorsque $x_0 \in B$, on obtient ainsi (dans chacun des deux cas : $x_0 \in A$, $x_0 \in B$) :

$$\varphi_i = \varphi_i|A_i + \varphi_i|B_i \qquad \text{pour} \qquad 0 \leqslant i \leqslant n.$$

b) Introduisons les chaînes $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n$ (de bases respectives $F_0, F_1, \ldots, F_n$) définies par : $\alpha_i = \varphi_i|A_i + \varphi_1|B_i$. Puisque Card (B) $= q + 2$, il est clair que l'ensemble

$$\Psi = \{\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$$

est $I_{n-1}^{h,1}$-cohérent pour $h = n - q - 1$. Par ailleurs :

$$\alpha_i \equiv \varphi_i \ (\text{mod. } I_n^{1,q}) \qquad \text{pour} \qquad 0 \leqslant i \leqslant n.$$

Deux chaînes quelconques α_i, α_j $(0 \leqslant i < j \leqslant n)$ sont donc compatibles relativement aux deux groupes $I_{n-1}^{p,q}$ et $I_{n-1}^{h,1}$, d'intersection $I_{n-1}^{p,1}$. Ainsi, l'ensemble Ψ est $I_m^{p,1}$-cohérent, et l'hypothèse $n \geqslant m + s_1(I_m^{p,1})$ assure l'existence d'une chaîne θ de base E telle que :

$$\alpha_i \equiv \theta|F_i \quad (\text{mod. } I_n^{p,1}) \qquad \text{pour} \qquad 0 \leqslant i \leqslant n.$$

Comme $I_n^{p,1} \nabla I_n^{1,q} = I_n^{p,q}$, la chaîne θ est $I_m^{p,q}$-compatible avec chacune des chaînes $\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_n$.

Par la méthode que nous venons d'exposer, la validité du lemme de recollement se transmet du groupe $I_m^{1,1}$ (9.2.1.) aux groupes $I_m^{1,p}$ (et à leurs conjugués $I_m^{p,1} = r_m \circ I_m^{1,p} \circ r_m$), puis des groupes $I_m^{p,1}$ aux groupes $I_m^{p,q}$.

9.2.5. Pour le produit direct $G = J_m^r = J_m^1 I_m^r$ ($r > 1, m \geqslant 2r$), prenons : $n \geqslant \mathrm{Max}\ (m+1,\ m + s_1(I_m^r),\ 2r+2)$. Il existe alors un ensemble de chaînes $\Psi^r = \{\varphi_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\}$ vérifiant (pour $1 \leqslant i \leqslant n$) les conditions :

$$\begin{cases} \alpha_i \text{ et } \varphi_i \text{ sont identiques ou symétriques} \\ \varphi_0|(F_0 \cap F_i) \equiv \alpha_i|(F_0 \cap F_i) \quad (\text{mod. } I_{n-1}^r). \end{cases}$$

a) Montrons que les chaînes $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ sont I_m^r-compatibles.

Pour $1 \leqslant i < j \leqslant n$, l'ensemble $V = F_0 \cap F_i \cap F_j$ et la permutation $\sigma = (V_{\alpha_i})^{-1} \circ V_{\alpha_j}$ de $\{1, 2, \ldots, n-2\}$ vérifient :

$$\begin{cases} F_i \cap F_j = \{x_0\} \cup V, \qquad \mathrm{Card}\ (V) \geqslant 2r, \\ \alpha_i|V \equiv \varphi_0|V \equiv \alpha_j|V \quad (\text{mod. } I_{n-2}^r), \qquad \text{d'où} \qquad \sigma(1) \leqslant r. \end{cases}$$

Les restrictions $\alpha_i|(F_i \cap F_j)$ et $\alpha_j|(F_i \cap F_j)$ sont J_{n-1}^r-compatibles. Si elles n'étaient pas I_{n-1}^r-compatibles, il existerait deux r-parties X, Z de $F_i \cap F_j$ et deux restrictions symétriques $\alpha_i|Y$, $\alpha_j|Y$ telles que : $\alpha_i|(F_i \cap F_j) = \alpha_i|X + \alpha_i|Y + \alpha_i|Z$, $\alpha_j|(F_i \cap F_j) = \alpha_j|Z + \alpha_j|Y + \alpha_j|X$. L'élément $a = \mathrm{Min}_{(\alpha_j)} V$ serait le $\sigma(1)$-ième élément de V pour la chaîne α_i, et la condition $a \in Z$ impliquerait la contradiction :

$$\sigma(1) \geqslant n - r - 1 > r.$$

L'ensemble Ψ^r est donc bien I_m^r-cohérent.

b) Comme $n \geqslant m + s_1(I_m^r)$, nous savons (d'après 9.2.4.) qu'il existe une chaîne θ de base E telle que $\Psi^r \cup \{\theta\}$ soit I_m^r-cohérent. Il est clair qu'une telle chaîne θ est J_m^r-compatible avec $\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_n$.

9.2.6. Considérons enfin le cas d'un groupe G non indicatif de degré m et de fiche Q. Prenons

$$n \geqslant \mathrm{Max}\ (m + 1 + s_0(G), \qquad m + s_1(Q_m)).$$

Puisque le support $\{F_0, F_1, \ldots, F_n\}$ de l'ensemble G-cohérent Φ vérifie (pour $0 \leqslant i < j \leqslant n$) : $\mathrm{Card}\ (F_i \cap F_j) \geqslant m + s_0(G)$, le théorème de réduction (8.1.) montre que l'ensemble Φ

est Q_m-cohérent. Puisque $n \geqslant m + s_1(Q_m)$, nous savons qu'il existe une chaîne θ de base E telle que $\Phi \cup \{\theta\}$ soit Q_m-cohérent. A plus forte raison, la chaîne θ est G-compatible avec les chaînes $\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_n$ de Φ.

Le lemme de recollement est ainsi démontré pour n'importe quel groupe de permutations $G \in \Sigma_m$.

9.3. *Théorème de* G-*recollement.*

Pour un groupe de permutations G et les ensembles G-cohérents Φ de chaînes dans E, le lemme 9.2. fournit, simultanément, une situation « minimale » (correspondant au seuil de validité $s_1(G)$) et un procédé récurrent sur Card (E) tant que ce cardinal est fini. Par récurrence ordinaire (de n à $n+1$), il permet d'associer à un ensemble Φ, de support convenable, une chaîne θ de base E qui soit G-compatible avec toute chaîne $\varphi \in \Phi$. Le théorème ainsi obtenu pour les ensembles finis se généralise ensuite, par ultrafiltration, aux ensembles E infinis (l'axiome des ultrafiltres apparaissant dans l'emploi du théorème de cohérence partielle 1.3.3., corollaire 2).

THÉORÈME. — *Etant donné un sous-groupe* G *de* S_m, *il existe des entiers* $s \geqslant 0$ *vérifiant la condition: « Tout* $(m+s)$-*recouvrement* Φ *d'un ensemble* E *par des chaînes* G-*compatibles admet un* G-*recollement* θ *de base* E ». *Le plus petit de ces entiers* s *est le seuil de recollement* $s_1(G)$.

Preuve. — Soit M l'ensemble des entiers $s \geqslant 0$ vérifiant la condition du théorème. Pour $s \in M$ et $n = m + s$, supposons qu'un $(n+1)$-ensemble E soit strictement recouvert par des chaînes G-compatibles $\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_n$. L'ensemble

$$\Phi = \{\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$$

est alors un n-recouvrement de E, et la condition $s \in M$ implique l'existence d'un G-recollement θ de base E pour Φ. D'après le lemme 9.2., il en résulte : $s \geqslant s_1(G)$.

Il reste à montrer que $s_1(G) \in M$.

Pour $k = m + s_1(G)$, Card (E) $\geqslant k$, introduisons un k-recouvrement Φ de E par des chaînes G-compatibles. Il s'agit de montrer l'existence d'une chaîne θ de base E telle que $\Phi \cup \{\theta\}$ soit G-cohérent, en distinguant nettement les deux cas : E fini (θ s'obtient par récurrence ordinaire), E infini (θ s'obtient par ultrafiltration).

9.3.1. Si Card (E) $= k$, Φ est un ensemble non vide de chaînes G-compatibles de base E : il suffit de prendre $\theta \in \Phi$.

Pour $n \geqslant k$, l'hypothèse de récurrence consiste à supposer qu'un G-recollement peut être obtenu dans tous les cas où Card (E) $= n$.

Pour Card (E) $= n + 1$, posons $\mathfrak{P}_n(\mathrm{E}) = \{\mathrm{F}_0, \mathrm{F}_1, \ldots, \mathrm{F}_n\}$. Lorsque φ (de base Y) parcourt Φ, notons Φ_i (pour $0 \leqslant i \leqslant n$) l'ensemble des restrictions $\varphi|(\mathrm{Y} \cap \mathrm{F}_i)$: cet ensemble de chaînes Φ_i est G-cohérent, et il constitue un k-recouvrement du n-ensemble F_i. L'hypothèse de récurrence implique alors l'existence d'une chaîne α_i de base F_i qui est G-compatible avec toute chaîne $\varphi \in \Phi$.

Pour $0 \leqslant i < j \leqslant n$ et toute m-partie X de $\mathrm{F}_i \cap \mathrm{F}_j$, il existe (puisque $k \geqslant m$) une chaîne $\varphi \in \Phi$ de base Y telle que $\mathrm{X} \subset \mathrm{Y}$. Dès lors : $\alpha_i|\mathrm{X} \equiv \varphi|\mathrm{X} \equiv \alpha_j|\mathrm{X}$ (mod. G) montre que l'ensemble de chaînes $\Psi = \{\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ est G-cohérent. Comme le support de Ψ est $\mathfrak{P}_n(\mathrm{E})$, le lemme 9.2. affirme l'existence d'une chaîne θ de base E qui est G-compatible avec

$$\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n.$$

Pour toute chaîne $\varphi \in \Phi$, de base Y, et toute m-partie X de Y, il existe une n-partie F_i de E telle que $\mathrm{X} \subset \mathrm{F}_i$. Puisque : $\varphi|\mathrm{X} \equiv \alpha_i|\mathrm{X} \equiv \theta|\mathrm{X}$ (mod. G), les chaînes θ et φ sont G-compatibles. La chaîne $\theta \in \mathbf{J}(\mathrm{E})$ est bien un G-recollement pour Φ.

9.3.2. Lorsque E est infini, notons $\mathcal{F}$ l'ensemble des parties finies F de E telles que Card (F) $\geqslant k$. Pour tout $\mathrm{F} \in \mathcal{F}$, introduisons l'ensemble Φ_{F} des chaînes $\varphi|(\mathrm{Y} \cap \mathrm{F})$ lorsque φ (de base Y) parcourt Φ, et désignons par Ψ_{F} l'ensemble des chaînes $\alpha \in \mathbf{J}(\mathrm{F})$ qui sont G-compatibles avec toute chaîne $\varphi \in \Phi$.

a) Pour deux ensembles $\mathrm{F} \in \mathcal{F}$, $\mathrm{F}' \in \mathcal{F}$ tels que $\mathrm{F} \subset \mathrm{F}'$, il est clair que : $\alpha \in \Psi_{\mathrm{F}'} \Longrightarrow \alpha|\mathrm{F} \in \Psi_{\mathrm{F}}$. L'ensemble de chaînes $\Psi = \bigcup_{\mathrm{F} \in \mathcal{F}} \Psi_{\mathrm{F}}$ est donc *saturé* (1.3.2.).

b) Tout ensemble Φ_{F} est G-cohérent, et constitue un k-recouvrement de l'ensemble F. Le cas fini du théorème (9.3.1.) montre alors que Ψ_{F} est non vide. Ainsi, le support de Ψ est l'ensemble *filtrant* $\mathcal{F}$.

D'après le corollaire 2 du théorème de cohérence partielle (1.3.3.), il existe une chaîne θ de base E telle que $\theta|F \in \Psi$ pour tout $F \in \mathcal{F}$. Pour toute chaîne $\varphi \in \Phi$ et toute m-partie X de la base de φ, il existe un ensemble $F \in \mathcal{F}$ tel que $X \subset F$. Dès lors :

$$\theta|X = (\theta|F)|X \equiv \varphi|X \quad (\text{mod. G})$$

montre que θ et φ sont G-compatibles.

La chaîne θ est donc un G-recollement de Φ.

Remarque. — Le théorème de G-recollement apparaît comme un notable renforcement de la proposition 1.3.1. concernant les 3-recouvrements de E par des chaînes compatibles. On sait que cette compatibilité coïncide avec la I_2^1-compatibilité, et que $s_1(I_2^1) = 1$.

10. Seuils de réduction et de recollement : résultats numériques.

A chaque groupe de permutations G d'un intervalle d'entiers $[1, m]$, nous avons associé deux entiers naturels $s_0(G)$ et $s_1(G)$ représentant (pour ce groupe G) les seuils de validité respectifs du théorème de réduction (8.1.) et du théorème de recollement (9.3.). Les résultats numériques concernant ces entiers laissent subsister quelques incertitudes, et suggèrent des conjectures relatives aux groupes G.

10.1. *Seuil de réduction: valeurs particulières, majoration.*

10.1.1. Notons $g_0(m)$ le plus grand des entiers $s_0(G)$ lorsque G parcourt Σ_m. Puisque $s_0(G) = 0$ caractérise G comme groupe indicatif, il est clair que $g_0(m) = 0$ pour $m = 1, 2, 3$, et que $g_0(m) \geqslant 1$ pour $m \geqslant 4$.

Lorsque $G \in \Sigma_m$ est un groupe non indicatif de fiche Q, le majorant $1 + (h - 1)^2$ de $m + s_0(G)$ envisagé en 8.1. dans la démonstration du théorème de réduction (afin d'utiliser le théorème des bichaînes de P. Erdös et G. Szekeres) dépend de cette fiche Q. Nous avons pris :

$$\begin{cases} h = 3m - 8 & \text{pour} \quad Q = T \text{ ou } D \\ h = 3m - p - q - 5 & \text{pour} \quad Q = I^{p,q} \\ h = 3m - 2r - 5 & \text{pour} \quad Q = J^r \end{cases}$$

de sorte que : $g_0(m) \leqslant (3m - 8)^2 - m + 1$ pour $m \geqslant 4$. Cette majoration est sans doute assez large : nous allons voir que $g_0(4) = 2$.

10.1.2. Pour le groupe $G = \{e_4, (2, 4)\}$ (de fiche I^1), le calcul effectué en 6.2.2. se traduit par $s_0(G) = 1$. De manière analogue, nous avons pu déterminer le seuil de réduction de tous les groupes non indicatifs de degré 4 (parmi lesquels figure le groupe alterné A_4). Voici le résultat de ces calculs :

$$\begin{cases} s_0(G) = 1 & \text{pour les 18 groupes } G \in \Sigma_4 - \Sigma'_4,\ G \neq A_4. \\ s_0(A_4) = 2 & \text{(conformément à la suite de réduction annoncée} \\ & \text{en 7.1.2.).} \end{cases}$$

Exemples. — Les groupes A_4 et $H = \{e_4, (1, 2, 4, 3), (1, 4)(2, 3), (1, 3, 4, 2)\}$ ont comme fiche J^1.

a) Pour montrer que $s_0(H) = 1$, on considère deux chaînes H-compatibles α, β de base $\{a, b, c, d, e\}$ telle que :

$$a < b < c < d < e \quad (\text{mod. } \alpha).$$

Dans les notations de 6.2.2., β appartient aux ensembles de chaînes :

$$V_1 = bcde \cup cebd \cup edcb \cup dbec, \quad V_2 = abde \cup bead \cup edba \cup daeb.$$

La J^1_4-compatibilité de α, β résulte de $V_1 \cap V_2 = abcde \cup edcba$.

b) Pour vérifier que $s_0(A_4) > 1$, introduisons la bichaîne (α, β) de base $E = [1, 5]$ définie par :

$$\begin{aligned} 1 < 2 < 3 < 4 < 5 \quad (\text{mod. } \alpha), \\ 1 < 4 < 5 < 2 < 3 \quad (\text{mod. } \beta). \end{aligned}$$

Pour les 4-parties $X = E - \{i\}$ de E, les permutations $\sigma_i = (X_\alpha)^{-1} \circ X_\beta$ sont respectivement : $\sigma_1 = (1, 3)(2, 4)$, $\sigma_2 = \sigma_3 = (2, 3, 4)$, $\sigma_4 = \sigma_5 = (2, 4, 3)$. Les chaînes α, β sont A_4-compatibles sans être J^1_4-compatibles.

10.2. *Index du groupe réduit.*

Si G est un sous-groupe d'ordre n de S_m, son *index* est l'entier : ind. $G = \dfrac{m!}{n}\cdot$ Nous lui associerons également le nombre : jnd. $G = (\text{ind. } G)^{1/m!}$.

10.2.1. Proposition. — *Les index d'un groupe de permutations* G *et de son groupe réduit* $G^{(1)}$ *vérifient:* ind. G $\leqslant$ ind. $G^{(1)}$, jnd. $G^{(1)} \leqslant$ jnd. G.

Preuve. — Pour un $(m+1)$-ensemble $E = \{x_0, x_1, \ldots, x_m\}$, les deux compatibilités relatives aux groupes $G \in \Sigma_m$ et $G^{(1)} \in \Sigma_{m+1}$ définissent (d'après 7.1.) une même équivalence ε de base J(E). Notons n, n' les ordres respectifs de G, $G^{(1)}$, et posons : $F_i = E - \{x_i\}$ $(0 \leqslant i \leqslant m)$.

a) Pour que deux chaînes θ, θ' de base E soient équivalentes (mod. ε), il faut et il suffit qu'il existe une permutation $\sigma' \in G^{(1)}$ telle que : $E_{\theta'} = E_\theta \circ \sigma'$. Chaque classe $\langle\theta\rangle_\varepsilon$ comprend donc n' chaînes, et l'indice de l'équivalence ε est :

$$\frac{(m+1)!}{n'} = \text{ind. } G^{(1)}.$$

De même, pour $x_0 < x_1 < \cdots < x_m$ (mod. θ), la G-compatibilité de $\theta|F_0$ et $\theta'|F_0$ revient à l'existence d'une permutation $\sigma \in G$ telle que :

$$x_{\sigma(1)} < x_{\sigma(2)} < \cdots < x_{\sigma(m)} \quad (\text{mod. } \theta').$$

Lorsque θ est donnée, il existe donc n cas possibles pour $\theta'|F_0$, et l'on en déduit θ' en intercalant x_0 parmi les m éléments de F_0. Le nombre des chaînes $\theta' \in \langle\theta\rangle_\varepsilon$ est alors :

$$n' \leqslant n \times (m+1),$$

de sorte que : ind. G $\leqslant$ ind. $G^{(1)}$.

Dans le cas particulier : ind. G = ind. $G^{(1)}$, les n possibilités sur $\theta'|F_0$ conviennent, ainsi que les $m+1$ intercalations de x_0. Posons, par exemple : $x_1 < x_2 < \cdots < x_m$ (mod. θ') et $X = F_m$. Pour les deux intercalations : $x_1 < x_0 < x_2$ (mod. θ'), $x_{m-1} < x_0 < x_m$ (mod. θ'), la permutation $(X_\theta)^{-1} \circ X_{\theta'}$ prend les valeurs $(1, 2)$, $(1, 2, \ldots, m)$. Il en résulte : $G = S_m$.

b) Soit $\mathscr{F}$ l'ensemble des m-recouvrements

$$\Phi = \{\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_m\}$$

de E par des chaînes $\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_m$ de bases respectives $F_0, F_1, \ldots, F_m$. Il est clair que Card $(\mathscr{F}) = (m!)^{m+1}$, et que tout ensemble de chaînes $\Phi \in \mathscr{F}$ est G-cohérent (puisque Card $(F_i \cap F_j) = m - 1$ pour $0 \leqslant i < j \leqslant m$). Pour toute chaîne θ de base E, notons $\mathscr{F}_\theta$ la partie de $\mathscr{F}$ formée des ensembles Φ pour lesquels $\Phi \cup \{\theta\}$ soit G-cohérent. Le nombre des chaînes $\varphi_i \in J(F_i)$ qui sont G-compatibles avec $\theta|F_i$ est $n = \mathrm{Card}\,(G)$, de sorte que : $\mathrm{Card}\,(\mathscr{F}_\theta) = n^{m+1}$.

Pour deux chaînes θ, θ' de base E et toute m-partie $X = F_i$ de E, l'égalité :

$$(X_\theta)^{-1} \circ X_{\theta'} = [(X_\theta)^{-1} \circ X_{\varphi_i}] \circ [(X_{\varphi_i})^{-1} \circ X_{\theta'}]$$

montre que :

$$\left\{\begin{array}{lll} \Phi \in \mathscr{F}_\theta & \text{et} & \theta \equiv \theta' \pmod{G} \Longrightarrow \Phi \in \mathscr{F}_{\theta'} \\ \mathscr{F}_\theta \cap \mathscr{F}_{\theta'} = \varnothing & & \Longleftrightarrow \theta \not\equiv \theta' \pmod{G} \\ \mathscr{F}_\theta = \mathscr{F}_{\theta'} & & \Longleftrightarrow \theta \equiv \theta' \pmod{G} \end{array}\right.$$

Posons : $\mathscr{F}' = \bigcup_{\theta \in J(E)} \mathscr{F}_\theta$. Comme l'indice de l'équivalence $\varepsilon(\theta, \theta')$ est $\mathrm{ind.}\ G = \dfrac{(m+1)!}{n'}$, on obtient :

$$\mathrm{Card}\,(\mathscr{F}') = \frac{(m+1)!}{n'} \times n^{m+1}.$$

De $\mathscr{F}' \subset \mathscr{F}$, il résulte alors : $\mathrm{ind.}\ G^{(1)} \leqslant (\mathrm{ind.}\ G)^{m+1}$ ou (d'une autre façon) : $\mathrm{jnd.}\ G^{(1)} \leqslant \mathrm{jnd.}\ G$.

10.2.2. Au cours de la démonstration précédente, nous avons vu que :

$\mathrm{ind.}\ G < \mathrm{ind.}\ G^{(1)}$ pour tout sous-groupe *strict* G de S_m.

Lorsque $\mathrm{jnd.}\ G^{(1)} < \mathrm{jnd.}\ G$, nous dirons que le groupe de permutations G est *strictement réductible.* Dans les notations de 10.2.1., l'ensemble $\mathscr{F}'$ est alors strictement contenu dans l'ensemble $\mathscr{F}$, et il existe un m-recouvrement $\Phi \in \mathscr{F} - \mathscr{F}'$ qui n'admet aucun G-recollement de base E. Ainsi :

Proposition. — *Si* G *est un groupe de permutations strictement réductible, il admet un seuil de recollement* $s_1(G) \geqslant 1$.

Voici deux cas où l'inégalité stricte : $\mathrm{ind.}\ G^{(1)} < (\mathrm{ind.}\ G)^{m+1}$ se vérifie :

a) Pour $m \leqslant 5$, *tout sous-groupe strict* G *de* S_m *est strictement réductible.*

Pour le groupe alterné $G = A_m$ (d'index 2), posons : $G^{(1)} = B_{m+1}$. La condition est bien vérifiée par $A_2 = I_2^1$ et $B_3 = I_3^1$, $A_3 = T_3$ et $B_4 = T_4$, A_4 et B_5 (puisque ind. $B_5 = 20$, d'après l'indication donnée en 7.1.2.). Comme les permutations $r_5 = (1, 5)(2, 4)$ et $t_5 = (1, 2, 3, 4, 5)$ sont paires, la fiche de A_5 est D. Il en résulte : $D_6 \subset B_6$ (8.2.2.) et

$$\text{ind. } B_6 \leqslant 60 < (\text{ind. } A_5)^6.$$

Par ailleurs, les sous-groupes stricts G de S_m autres que A_m ont un index $\geqslant 3$ et (puisque $m \leqslant 5$) :

$$\text{ind. } G^{(1)} \leqslant (m+1)\,! < 3^{m+1} \leqslant (\text{ind. } G)^{m+1}.$$

b) Tout groupe indicatif G *de degré* m, *autre que* S_m, *est strictement réductible.*

Lorsque $G = Q_m$ pour une fiche Q de rang $k \leqslant m$, on sait que $G^{(1)} = Q_{m+1}$ (proposition 7.2.). Les index des groupes T_m, D_m, $I_m^{p,q}$, J_m^r étant respectivement :

$$(m-1)\,!, \qquad \frac{(m-1)\,!}{2}, \qquad \frac{m\,!}{p\,!\,q\,!}, \qquad \frac{m\,!}{2(r\,!)^2},$$

il suffit (puisque les cas $m \leqslant 5$ sont traités) de vérifier :

$$\sqrt[m]{m+1} < \text{ind. } Q_m \qquad \text{pour} \qquad m \geqslant \text{Max}\,(6, k),$$

en tenant compte de :

$$\begin{cases} m \geqslant 4 \Longrightarrow \sqrt[m]{m+1} < \dfrac{3}{2} \\ p+q \geqslant 3, \qquad p \geqslant 1, \qquad q \geqslant 1 \Longrightarrow \dbinom{p+q}{p} \geqslant 3. \end{cases}$$

10.2.3. L'étude précédente rend plausibles les conjectures suivantes :

[A] : $s_1(G) \geqslant 1$ *pour tout sous-groupe strict* G *de* S_m.

[B] : *Tout sous-groupe strict* G *de* S_m *est strictement réductible.*

(L'hypothèse [B] est plus forte que l'hypothèse [A].)

Pour deux chaînes α, β basées sur un m-ensemble $\{x_1, x_2, \ldots, x_m\}$, notons $\langle \alpha, \beta \rangle$ la permutation $\sigma \in S_m$ définie par les inégalités :

$$x_1 < x_2 < \cdots < x_m \quad (\text{mod. } \alpha),$$
$$x_{\sigma(1)} < x_{\sigma(2)} < \cdots < x_{\sigma(m)} \quad (\text{mod. } \beta).$$

Pour Card (E) $= m + 1$, $\mathfrak{P}_m(E) = \{F_0, F_1, \ldots, F_m\}$ et des chaînes θ, φ_0, φ_1, $\ldots$, φ_m de bases respectives

$$E, F_0, F_1, \ldots, F_m,$$

désignons par $H_\theta(\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_m)$ le sous-groupe de S_m engendré par les $m + 1$ permutations $\langle \varphi_i, \theta | F_i \rangle$. On peut alors énoncer d'une autre façon la conjecture [B] :

[B′] : *Pour tout sous-groupe strict* G *de* S_m, *il existe des chaînes* φ_0, φ_1, $\ldots$, φ_m *de bases respectives* F_0, F_1, $\ldots$, F_m *telles que* $H_\theta(\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_m) \not\subset G$ *pour toute chaîne* θ *de base* E.

On peut encore se demander quels sont les entiers m vérifiant la condition suivante (plus forte que l'énoncé [B′]) :

[C] : *Il existe des chaînes* φ_0, φ_1, $\ldots$, φ_m *de bases respectives* F_0, F_1, $\ldots$, F_m *telles que* $H_\theta(\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_m) = S_m$ *pour toute chaîne* θ *de base* E.

Cette condition [C] est vérifiée pour $m \leqslant 3$. Pour $m = 3$, on peut prendre (par exemple) :
$E = \{0, 1, 2, 3\}$, $2 < 1 < 3$ (mod. φ_0), $3 < 0 < 2$ (mod. φ_1),

$$3 < 1 < 0 \text{ (mod. } \varphi_2), \qquad 0 < 1 < 2 \text{ (mod. } \varphi_3).$$

10.3. *Seuil de recollement: valeurs particulières, majoration.*
Nous noterons $g_1(m)$ (resp. $g_1'(m)$) le plus grand des entiers $s_1(G)$ lorsque G parcourt Σ_m (resp. Σ_m').

10.3.1. Pour toute fiche Q de rang $k \geqslant 2$, nous venons de voir (10.2.2.) que : $s_1(Q_m) \geqslant 1$ pour tout $m \geqslant k$. Cette minoration, et le choix de l'entier $n \geqslant m + s_1(Q_m)$ dans la démonstration 9.2., donnent :

a) Pour $Q = I^1, J^1, T, D$:

$$s_1(Q_m) = 1 \quad \text{pour tout} \quad m \geqslant k.$$

b) Pour $Q = I^{p,q}$ ou J^r $(pq > 1,\ r > 1)$:

$$\begin{cases} s_1(Q_m) = 1 & \text{pour tout} \quad m \geqslant k + 2, \\ 1 \leqslant s_1(Q_m) \leqslant 2 & \text{pour} \quad m = k + 1, \\ 1 \leqslant s_1(Q_m) \leqslant 3 & \text{pour} \quad m = k. \end{cases}$$

Ainsi, *la suite* $g_1'(m)$ *est bornée.* Par contre (c'est une question ouverte), nous ignorons si la suite $g_1(m)$ est bornée ou non.

La définition du groupe réduit (7.1.2.) et le lemme 9.2. donnent facilement : $s_1(G) \geqslant 1 \Longrightarrow s_1(G^{(1)}) \leqslant s_1(G)$. Puisque

$s_1(S_m) = 0$, la vérification de la conjecture [A] entraînerait donc : $s_1(G^{(1)}) \leqslant s_1(G)$ pour tout groupe $G \in \Sigma_m$. Plus particulièrement, pour toute fiche Q de rang $k \leqslant m$, l'utilisation de 7.2. donne :

$$s_1(Q_k) = 1 \Longrightarrow s_1(Q_m) = 1.$$

Proposition. — *Quels que soient $p \geqslant 1$, $m \geqslant p + 1$, le groupe $I_m^{1,p}$ admet pour seuil de recollement : $s_1(I_m^{1,p}) = 1$.*

Preuve. — D'après la remarque précédente, il suffit de montrer que $s_1(I_{p+1}^{1,p}) = 1$. Soit $E = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ un $(n+1)$-ensemble strictement recouvert par des chaînes $I_{p+1}^{1,p}$-compatibles $\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_n$ de bases respectives $F_0, F_1, \ldots, F_n$ (avec $F_i = E - \{x_i\}$). Pour tout $n \geqslant p + 2$, il s'agit de montrer que $\Phi = \{\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$ admet un $I_{p+1}^{1,p}$-recollement θ de base E. Puisque $s_1(I_{p+1}^{1,p}) \leqslant 3$, il suffit d'envisager : $n = p + 2$ et $n = p + 3$.

Pour $n = p + 2$, posons : $x_1 < x_2 < \cdots < x_n$ (mod. φ_0), $X_0 = \{x_1, x_2\}$, $a_1^i < a_2^i < \cdots < a_n^i$ (mod. φ_i), $X_i = \{a_1^i, a_2^i\}$ (pour $1 \leqslant i \leqslant n$). La $I_{p+1}^{1,p}$-compatibilité de $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ fait apparaître les seuls cas :

$$(a_1^1, a_2^1, a_1^2, a_2^2) = \begin{cases} (x_h, x_2, x_h, x_1) \quad \text{ou} \quad (x_h, x_2, x_1, x_h) \quad \text{pour} \quad h = 0, \\ (x_2, x_h, x_1, x_h) \quad \text{pour} \quad h = 0 \quad \text{ou} \quad h \geqslant 3. \end{cases}$$

(La considération de φ_3 est indispensable pour écarter (x_2, x_0, x_0, x_1).) On constate que $\varphi_0|X_0$, $\varphi_1|X_1$, $\varphi_2|X_2$ sont les 2-restrictions d'une chaîne α de base $V = \{x_1, x_2, x_h\}$. Pour $3 \leqslant i \leqslant n$, la $I_{p+1}^{1,p}$-compatibilité de φ_i avec $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2$ montre que X_i est formé des deux premiers éléments de V pour α. Dès lors, $\theta = \alpha + \varphi_1|(E - V)$ est un ${}_{p+1}^{1,p}$-recollement de Φ.

Pour $n = p + 3$, une étude analogue fait apparaître une chaîne α de base $V = \{x_1, x_2, x_3, x_h\}$ et un $I_{p+1}^{1,p}$-recollement $\theta = \alpha + \varphi_1|(E - V)$ pour Φ.

Finalement : $s_1(I_{p+1}^{1,p}) = 1$.

10.3.2. Les remarques précédentes montrent que $s_1(G) = 1$ pour la plupart des groupes indicatifs G de degré m. Pour $m \geqslant 4$ et $p, q, r \geqslant 2$, seuls sont possibles les dépassements : $s_1(G) = 2$ ou $s_1(G) = 3$ lorsque $G = Q_m$ pour l'une des $2(m-3)$

fiches $Q = I^{p,q}$ ou J^r, de rang $m - 1$ ou m. D'ailleurs :

$$s_1(J^r_m) \leqslant \mathrm{Max}(s_1(I^r_m),\ 2r + 2 - m),$$

d'après 9.2.5.

Par exemple, il est assez facile d'obtenir : $s_1(I^2_4) = 1$, et cette valeur permet de prévoir : $1 \leqslant s_1(J^2_4) \leqslant 2$.

Pour $E = [0, 5]$, considérons l'ensemble de chaînes

$$\Phi = \{\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_5\},$$

de support $\mathfrak{P}_5(E)$, défini par les inégalités suivantes :

$$\left\{\begin{array}{ll} 1 < 2 < 3 < 4 < 5 & (\text{mod. } \varphi_0), \\ 1 < 2 < 0 < 4 < 5 & (\text{mod. } \varphi_3), \\ 1 < 2 < 5 < 0 < 3 & (\text{mod. } \varphi_4), \\ 1 < 2 < 4 < 0 < 3 & (\text{mod. } \varphi_5), \\ 0 < 3 < 2 < 4 < 5 & (\text{mod. } \varphi_1), \\ 0 < 3 < 1 < 4 < 5 & (\text{mod. } \varphi_2). \end{array}\right.$$

Cet ensemble Φ est J^2_4-cohérent. Si une chaîne θ de base E était J^2_4-compatible avec φ_0 et φ_1, les conditions :

$$\varphi_0 \equiv \theta|F_0 \quad (\text{mod. } J^2_5), \qquad \varphi_1 \equiv \theta|F_1 \quad (\text{mod. } J^2_5)$$

mèneraient à la contradiction :

$$\varphi_0|V \equiv \theta|V \equiv \varphi_1|V \quad (\text{mod. } J^1_3) \qquad \text{pour} \qquad V = \{2, 3, 4\}.$$

L'ensemble Φ n'admettant aucun J^2_4-recollement de base E, il en résulte : $s_1(J^2_4) = 2$. Soulignons, par ailleurs, la singularité du contre-exemple $\Phi = \{\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_5\}$: pour $E = [0, 5]$, tout ensemble analogue $\Psi = \{\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_5\}$ (de même support, J^2_4-cohérent, non pourvu d'un J^2_4-recollement) se déduirait de Φ en remplaçant chaque chaîne φ_i par une chaîne J^2_5-compatible α_i.

Nous ignorons s'il existe, ou non, une fiche Q de rang $k \geqslant 5$ telle que : $s_1(Q_k) = 3$. La conjecture $s_1(I^{p,q}_{p+q}) = 1$ impliquerait : $s_1(I^{p,q}_m) = 1$ pour tout $m \geqslant p + q$, et $s_1(J^r_m) = 1$ pour tout $m > 2r$. On peut également conjecturer :

$$s_1(J^r_{2r}) = 2 \qquad \text{pour tout} \qquad r > 1.$$

10.3.3. Proposition. — *Tout sous-groupe non indicatif* G *de* S_m *vérifie :* $s_1(G) \leqslant 1 + s_0(G)$.

Preuve. — Si Q est la fiche du groupe G, la démonstration 9.2.6. donne : $s_1(G) \leqslant \text{Max}\,(1 + s_0(G),\ s_1(Q_m))$. D'après le corollaire de 6.4.2., le rang de Q est $k \leqslant m - 1$. L'inégalité : $s_1(G) \leqslant 1 + s_0(G)$ résulte alors de $s_0(G) \geqslant 1$ (G non indicatif) et de $s_1(Q_m) \leqslant 2$ (majoration indiquée en 10.3.1.).

Exemples. — Pour $m = 4$, nous avons obtenu :

$$\begin{cases} s_1(G) = s_0(G) = 1 & \text{pour le groupe} \quad G = \{e_4,\ (1,\ 4)\} \\ s_1(G) = 2,\ s_0(G) = 1 & \text{pour le groupe} \quad G = \{e_4,\ (2,\ 4)\} \\ s_1(A_4) = s_0(A_4) = 2 & \text{pour le groupe alterné.} \end{cases}$$

10.3.4. Après les premiers termes :

$$g_1(1) = 0, \qquad g_1(2) = g_1(3) = 1,$$

la proposition 10.3.3. et les majorations indiquées en 10.1.1., 10.3.1., fournissent :

$$1 \leqslant g_1(m) \leqslant \text{Max}\,(3,\ 1 + g_0(m)) \leqslant (3m - 8)^2 - m + 2$$

pour $m \geqslant 4$.

La dernière majoration de $g_1(m)$ est sans doute assez large : montrons, par exemple, que $g_1(4) = 2$.

Tout d'abord : $s_1(S_4) = 0$, $s_1(J_4^2) = 2$, et $s_1(G) = 1$ pour les 9 groupes indicatifs $G \in \Sigma_4'$ autres que S_4 et J_4^2. Puis : $s_1(A_4) = 2$, et la valeur $s_0(G) = 1$ implique $s_1(G) \leqslant 2$ (proposition 10.3.3.) pour les 18 groupes non indicatifs $G \in \Sigma_4 - \Sigma_4'$ autres que A_4.

CHAPITRE III

RELATION MONOMORPHE

11. Monomorphie. Relations monomorphes particulières.

La notion de *relation monomorphe* a été introduite par R. Fraïssé dans sa thèse [4] sous la forme suivante : une relation φ de base E est dite *monomorphe* si, pour tout couple (A, B) de parties *finies* de E ayant même nombre d'éléments, les restrictions $\varphi|A$ et $\varphi|B$ sont *isomorphes.*

Lorsqu'une relation φ est interprétable (1.2.3.) par une relation monomorphe, il est clair que φ est elle-même monomorphe. Ainsi, les chaînes et les relations interprétables par une chaîne sont des relations monomorphes. L'étude de cas particuliers (exemple : les relations monomorphes binaires) avait conduit R. Fraïssé à émettre l'hypothèse [F] suivante : « *Toute relation monomorphe φ ayant une base* E *de cardinal convenable (suffisamment grand) est interprétable par une chaîne* ». L'auteur pouvait même, peu après, annoncer la validité de son hypothèse pour une base E infinie.

Le cas d'une base E finie semblait plus difficile à élucider. En fait, c'est la théorie des chaînes G-compatibles (et, plus particulièrement, le théorème de recollement) qui nous permettra de vérifier la proposition [F] dans toute sa généralité.

11.1. *Relation n-monomorphe. Cas des relations unaires et binaires.*

Étant donné un entier $n \geqslant 0$, nous dirons qu'une relation φ de base E est *n-monomorphe* si Card (E) $\geqslant n$ et si, pour tout couple (A, B) de n-parties de E, les restrictions $\varphi|A$ et $\varphi|B$ sont isomorphes. Dans la terminologie introduite par R. Fraïssé [4], une relation *n-monotype* est une relation p-monomorphe pour tout $p \leqslant n$. Une relation de base E est *monomorphe* (ou *monotype*) dès qu'elle est p-monomorphe pour tout entier $p \leqslant$ Card (E).

Il est évident que toute relation φ est 0-monomorphe, et que la n-monomorphie de φ entraîne celle de $\neg\varphi$.

11.1.1. Une relation unaire 1-monomorphe est une constante (elle est donc interprétable par toute chaîne de même base). Plus généralement :

Proposition. — *Toute relation unaire n-monomorphe de base* E *telle que* Card (E) $\geqslant n + 1$ *est une constante.*

Preuve. — Soit F le graphe d'une relation unaire φ de base E telle que Card (E) $\geqslant n + 1$. Si φ est n-monomorphe, il existe un entier p tel que : Card (F $\cap$ X) $= p$ pour tout X $\in \mathfrak{P}_n$(E). Si φ n'était pas constante (autrement dit : si $1 \leqslant p \leqslant n - 1$), il existerait deux éléments $x \in$ X, $y \in$ E — X tels que

$$\varphi(x) \neq \varphi(y).$$

Pour la n-partie de E : Y $=$ (X — $\{x\}$) $\cup$ $\{y\}$, on aboutirait à la contradiction : Card (F $\cap$ Y) $= p \pm 1$.

11.1.2. Parmi les relations binaires monomorphes $\varphi(x, y)$ de base E figurent d'abord les relations binaires interprétables par une chaîne. Ce sont :

a) les quatre relations binaires interprétables par toute chaîne de base E (les deux constantes $\varphi_0 = 0$, $\varphi_1 = 1$, et les deux relations δ, $\neg\delta$ définies par les conditions $x = y$, $x \neq y$).

b) les chaînes θ de base E, et leurs négations $\neg\theta$ (pour que θ, $\neg\theta$ soient interprétables par $\theta' \in \mathbf{J}$(E), il faut et il suffit que θ, θ' soient identiques ou symétriques).

Si $p =$ Card (E) est fini $\geqslant 2$, le nombre des relations binaires de base E interprétables par une chaîne est $2\,(p\,! + 2)$.

11.1.3. Proposition. — *Pour* Card (E) $\geqslant 4$, *toute relation binaire* 3-*monotype de base* E *est interprétable par une chaîne.*

Preuve. — Comme la 3-monotypie d'une relation $\varphi \in \mathbf{R}_2$(E) implique celle de $\neg\varphi$, on peut se ramener au cas où φ

est réflexive. La 2-monotypie de φ entraîne l'existence d'un entier p $(2 \leqslant p \leqslant 4)$ tel que : « Pour toute paire $\{a, b\} \in \mathfrak{P}_2(\mathrm{E})$, le graphe de $\varphi|\{a, b\}$ comprend p couples ».

$$\begin{cases} \text{Si } p = 2, & \text{ce graphe est } \{(a, a), (b, b)\}, \quad \text{et} \quad \varphi = \delta. \\ \text{Si } p = 4, & \text{c'est que } \quad \varphi = \varphi_1. \\ \text{Si } p = 3, & \text{la relation } \varphi \text{ est totale et asymétrique.} \end{cases}$$

Lorsque $\mathrm{X} = \{a, b, c\}$ parcourt $\mathfrak{P}_3(\mathrm{E})$, la 3-monomorphie de φ entraîne que les restrictions $\varphi|\mathrm{X}$ sont toutes transitives ou toutes non transitives. Pour $p = 3$ et des 3-restrictions transitives, φ est une chaîne. Pour $p = 3$ et des 3-restrictions non transitives, le graphe de $\varphi|\mathrm{X}$ serait de la forme :

$$\mathrm{K} = \{(a, a), (b, b), (c, c), (a, b), (b, c), (c, a)\},$$

en contradiction avec Card $(\mathrm{E}) \geqslant 4$. Pour une 4-partie $\{a, b, c, d\}$ de E, les couples (b, d) et (d, b) appartiendraient en effet aux graphes de $\varphi|\{a, b, d\}$ et $\varphi|\{b, c, d\}$ (respectivement), alors que φ est asymétrique.

Finalement, φ est l'une des relations énumérées en 11.1.2.

Remarques. — *a*) Pour Card $(\mathrm{X}) = 3$, le précédent graphe K est celui d'une relation binaire 3-monotype de base X, non interprétable par une chaîne.

b) Si Card $(\mathrm{E}) \geqslant 4$, une relation $\varphi \in \mathbf{R}_2(\mathrm{E})$ peut être 2-monotype sans être 3-monotype. (Il suffit de prendre φ totale, asymétrique, telle que $\varphi|\{a, b, c\}$ soit transitive et $\varphi|\{a, b, d\}$ non transitive.)

11.1.4. Proposition. — *Pour* Card $(\mathrm{E}) \geqslant 5$, *toute relation binaire* 3-*monomorphe de base* E *est interprétable par une chaîne.*

Preuve. — Compte tenu de 11.1.3., il suffit de montrer qu'une telle relation $\varphi \in \mathbf{R}_2(\mathrm{E})$ est 2-monotype.

a) Puisque Card $(\mathrm{E}) \geqslant 5$, il existe une 3-partie $\{a, b, c\}$ de E telle que : $\varphi(a, a) = \varphi(b, b) = \varphi(c, c)$. Pour tout

$$x \in \mathrm{E} - \{a, b\},$$

la 3-monomorphie de φ implique : $\varphi|\{a, b, c\} \sim \varphi|\{a, b, x\}$, donc $\varphi(x, x) = \varphi(a, a)$, de sorte que φ est bien 1-monomorphe.

b) Lorsque X, Y parcourent $\mathfrak{P}_2(E)$, la condition : $\varphi|X \sim \varphi|Y$ définit une équivalence $\varepsilon(X, Y)$ de base $\mathfrak{P}_2(E)$, d'indice $h \leqslant 3$. Pour une 5-partie $F = \{a, b, c, d, e\}$ de E, il existe une classe V_1 de $\varepsilon|\mathfrak{P}_2(F)$ qui possède au moins deux paires $\{a, x\}$, par exemple : $\{a, b\} \in V_1$, $\{a, e\} \in V_1$. La 3-monomorphie de φ entraîne alors : $h \leqslant 2$.

Si $h = 2$, l'équivalence ε n'est pas 3-monochrome (3.4.). Pour tout $x \in F$, chacune des classes V_1, V_2 de $\varepsilon|\mathfrak{P}_2(F)$ doit posséder deux paires $\{x, y\}$: avec $\{b, a\} \in V_1$, on aura par exemple $\{b, c\} \in V_1$. La bipartition (V_1, V_2) de $\mathfrak{P}_2(F)$ comporte alors :

$$\begin{cases} 5 \text{ paires} \quad \{a, b\}, \{b, c\}, \{c, d\}, \{d, e\}, \{e, a\} \quad \text{dans } V_1 \\ 5 \text{ paires} \quad \{a, c\}, \{c, e\}, \{e, b\}, \{b, d\}, \{d, a\} \quad \text{dans } V_2 \end{cases}$$

en contradiction avec : $\varphi|\{a, b, c\} \sim \varphi|\{a, c, d\}$.

Ainsi, $h = 1$ et φ est bien 2-monomorphe.

Remarque. — Si Card (E) $= 4$, une relation $\varphi \in \mathbf{R}_2(E)$ peut être 3-monomorphe sans être 2-monomorphe. (Pour

$$E = \{a, b, c, d\},$$

il suffit de prendre $\{(a, b), (c, d)\}$ comme graphe de φ).

11.2. *Relation monomorphe de base infinie.*

La proposition qui va suivre est annoncée par R. Fraïssé au § 18 de sa thèse [4]. Elle nécessite le théorème de Ramsey, et un procédé d'ultrafiltration pour introduire la chaîne dont elle affirme l'existence. La méthode de R. Fraïssé se présente ici sous une forme abrégée, du fait que nous disposons déjà du théorème de cohérence partielle (1.3.3.) et du théorème d'interprétabilité restreinte (5.4.1.).

Proposition. — *Toute relation monomorphe de base infinie est interprétable par une chaîne.*

Preuve. — Soit φ une relation m-aire monomorphe de base infinie E, et soit $\mathcal{F}$ l'ensemble des parties finies de E.

a) Pour tout $X \in \mathcal{F}$, notons Φ_X l'ensemble des chaînes α de base X telles que $\varphi|X$ soit interprétable par α. Pour deux parties finies X, Y de E telles que $X \subset Y$, il est clair que : $\beta \in \Phi_Y \Longrightarrow \beta|X \in \Phi_X$. Autrement dit, l'ensemble $\Phi = \bigcup_{X \in \mathcal{F}} \Phi_X$ est *saturé*.

Par ailleurs, pour deux parties finies A, B de E ayant même nombre d'éléments, la monomorphie de φ implique l'existence d'une bijection f de A sur B telle que : $\varphi|B \overset{f}{\sim} \varphi|A$. A toute chaîne $\alpha \in \Phi_A$ correspond alors une chaîne $\beta \in \Phi_B$ telle que : $\beta \overset{f}{\sim} \alpha$. Ainsi : Card $(\Phi_A) =$ Card (Φ_B).

b) Étant donné une chaîne ω de base E et un entier $n \geqslant 1$, le théorème 5.4.1. indique l'existence d'une n-partie B de E telle que : $\omega|B \in \Phi_B$. Ainsi : $A \in \mathcal{F} \Longrightarrow \Phi_A \neq \varnothing$, et le support de Φ est l'ensemble *filtrant* $\mathcal{F}$.

D'après le corollaire 2 du théorème 1.3.2., il existe alors une chaîne θ de base E telle que $\theta|X \in \Phi$ pour tout $X \in \mathcal{F}$. Pour deux parties finies A, B de E ayant même nombre d'éléments, $\varphi|(A \cup B)$ est interprétable par $\theta|(A \cup B)$, de sorte que :

$$\theta|B \overset{f}{\sim} \theta|A \Longrightarrow \varphi|B \overset{f}{\sim} \varphi|A.$$

La relation φ est donc interprétable par la chaîne θ.

11.3. *Groupes d'automorphismes d'une relation monomorphe.*

11.3.1. Pour une relation φ de base E et une partie F de E, rappelons que $\mathbf{G}_F(\varphi)$ désigne le groupe des automorphismes de $\varphi|F$ (1.2.2.). Si φ est monomorphe et si A, B sont deux parties finies de E ayant même nombre d'éléments, toute application f de A sur B telle que : $\varphi|B \overset{f}{\sim} \varphi|A$ définit un isomorphisme : $g \to f \circ g \circ \overset{-1}{f}$ de $\mathbf{G}_A(\varphi)$ sur $\mathbf{G}_B(\varphi)$.

Pour tout entier n tel que $1 \leqslant n \leqslant$ Card (E) et toute application ν de $[1, n]$ sur une n-partie F de E, il existe un sous-groupe H de S_n tel que : $\mathbf{G}_F(\varphi) = \nu \circ H \circ \overset{-1}{\nu}$. Lorsque F et ν varient, ces groupes H constituent une classe de conjugaison $\mathcal{H}$ dans l'ensemble Σ_n des sous-groupes de S_n. Par abus de langage, nous pouvons dire que l'un quelconque des groupes $H \in \mathcal{H}$ est le *groupe des automorphismes de degré n* de la relation monomorphe φ, et noter : $H = \mathbf{G}_n(\varphi)$.

Exemples. — *a*) Si φ (ou $\neg\varphi$) est une chaîne : $\mathbf{G}_n(\varphi) = \mathbf{I}_n^1$. Si φ est l'une des quatre relations binaires interprétables par toute chaîne de base E : $\mathbf{G}_n(\varphi) = S_n$.

b) Si Card (E) $= 3$ et si φ est l'une des deux relations binaires monomorphes de base E non interprétables par une chaîne : $\mathbf{G}_2(\varphi) = \mathbf{I}_2^1$, $\mathbf{G}_3(\varphi) = T_3$.

c) Si φ est le cycle dérivé d'une chaîne θ de base E : $\mathbf{G}_n(\varphi) = \mathrm{T}_n$. Plus précisément, pour une n-partie

$$\mathrm{F} = \{\nu(1), \nu(2), \ldots, \nu(n)\}$$

de E telle que $\nu(1) < \nu(2) < \cdots < \nu(n)$ (mod. θ) :

$$\mathbf{G}_{\mathrm{F}}(\varphi) = \nu \circ \mathrm{T}_n \circ \overset{-1}{\nu}.$$

11.3.2. Pour une relation m-aire monomorphe φ de base E, supposons que les groupes $\mathbf{G}_n(\varphi)$ ne soient pas tous d'ordre 1. Il existe alors un entier minimum p tel que $\mathbf{G}_p(\varphi) \neq \mathrm{I}_p^1$.

Proposition. — *L'entier minimum p (ainsi associé à la relation monomorphe φ) est premier, et $\mathbf{G}_p(\varphi) = \mathrm{T}_p$.*

Preuve. — Soit F une p-partie de E.

a) Lorsqu'une permutation $\sigma \in \mathbf{G}_{\mathrm{F}}(\varphi)$ n'est pas circulaire, il existe une bipartition (A, B) de F, une permutation α de A et une permutation β de B telles que : $\sigma = \alpha \circ \beta$. Pour tout m-uple $(x_1, x_2, \ldots, x_m) \in \mathrm{A}^m$,

$$\begin{aligned}\varphi(\alpha(x_1), \alpha(x_2), \ldots, \alpha(x_m)) &= \varphi(\sigma(x_1), \sigma(x_2), \ldots, \sigma(x_m)) \\ &= \varphi(x_1, x_2, \ldots, x_m).\end{aligned}$$

Ainsi : $\alpha \in \mathbf{G}_{\mathrm{A}}(\varphi)$ et, de même : $\beta \in \mathbf{G}_{\mathrm{B}}(\varphi)$. Comme :

$$1 \leqslant n < p \Longrightarrow \mathbf{G}_n(\varphi) = \mathrm{I}_n^1,$$

on en déduit que σ est la permutation identique de F. Ainsi, le groupe $\mathbf{G}_{\mathrm{F}}(\varphi)$ ne comprend que la permutation identique et des permutations circulaires.

b) Soit $g = (\nu(1), \nu(2), \ldots, \nu(p))$ l'un des automorphismes circulaires de $\varphi|\mathrm{F}$. Pour toute factorisation $p = kq$, l'automorphisme g^k admet le cycle composant :

$$(\nu(1), \nu(1 + k), \nu(1 + 2k), \ldots, \nu(1 + (q - 1)k))$$

(de longueur q), ce qui implique $q = 1$ ou $q = p$. Ainsi, l'entier p est *premier.*

Comme tout élément σ du groupe $\mathbf{G}_{\mathrm{F}}(\varphi)$ est d'ordre 1 ou p, on sait que Card $(\mathbf{G}_{\mathrm{F}}(\varphi)) = p^r$ pour un entier $r \geqslant 1$. En outre, p^r divise l'ordre $p\,!$ de S_p, ce qui implique $r = 1$ (puisque p

est premier). Ainsi, le groupe $\mathbf{G}_F(\varphi)$ d'ordre p est engendré par $g = \nu \circ t_p \circ \overset{-1}{\nu}$, autrement dit :

$$\mathbf{G}_F(\varphi) = \nu \circ \mathrm{T}_p \circ \overset{-1}{\nu}, \qquad \text{et} \qquad \mathbf{G}_n(\varphi) = \mathrm{T}_p.$$

11.3.3. Dans une Note antérieure [5*e*], nous avions signalé que l'hypothèse d'interprétabilité [F] pouvait être vérifiée dans un nouveau cas particulier ne nécessitant pas la théorie des chaînes G-compatibles :

Proposition. — *Pour tout couple* (m, n) *d'entiers* $\geqslant 2$, *il existe un entier* $p \geqslant n$ *vérifiant la condition suivante:* « *Si* Card (E) $\geqslant p$, *toute relation m-aire monomorphe* φ *de base* E *telle que* $\mathbf{G}_n(\varphi) = \mathrm{I}_n^1$ *est interprétable par une chaîne* ».

La démonstration n'utilise que la fonction ξ_m du théorème d'interprétabilité restreinte (avec: $p \leqslant \xi_m(3)$ pour $n = 2$, $p \leqslant \xi_m(2n - 2)$ pour $n \geqslant 3$). Nous ne la développerons pas, la proposition [F] devant être vérifiée dans toute sa généralité au paragraphe suivant.

12. Théorème de monomorphie et d'interprétabilité.

12.1. *Degré optimum de monomorphie m-aire.*

12.1.1. Dans le sens de l'hypothèse d'interprétabilité [F], le théorème de recollement (9.3.) fait accomplir un pas décisif puisqu'il fournit d'emblée le renforcement suivant de [F] :

Théorème. — *Pour tout entier* $m \geqslant 1$, *il existe deux entiers* n, p $(m \leqslant n \leqslant p)$ *vérifiant la condition:* « *Si* Card (E) $\geqslant p$, *toute relation m-aire n-monomorphe de base* E *est interprétable par une chaîne* ».

Preuve. — Le cas $m = 1$ est trivial (avec $n = p = 1$). Pour le cas $m = 2$ (examiné directement en 11.1.), nous allons retrouver la possibilité de prendre $n = 3$.

Pour $m \geqslant 2$, posons :

$$\begin{cases} n \geqslant m + g_1(m) & \text{(entier défini en 10.3.)} \\ p = \xi_m(n) & \text{(entier défini en 5.4.1.)} \end{cases}$$

et considérons une relation m-aire φ de base E telle que Card (E) $\geqslant p$.

a) D'après le théorème d'interprétabilité restreinte (5.4.1.), il existe une n-partie A de E et une chaîne α de base A telle que $\varphi|A$ soit interprétable par α. Une m-partie F de A étant fixée, il est commode d'identifier F (ordonné par α) avec l'intervalle d'entiers $[1, m]$ (naturellement ordonné), de sorte que: $F = \{1, 2, \ldots, m\}$ pour: $1 < 2 < \cdots < m$ (mod. α).

Le groupe d'automorphismes $G = \mathbf{G}_F(\varphi)$ apparaît alors comme un sous-groupe de S_m : c'est à ce groupe de permutations G que nous appliquerons le théorème de recollement, sachant que $n \geqslant m + s_1(G)$.

b) Notons M l'ensemble des n-morphismes de φ appliquant A dans E. A toute fonction $\sigma \in M$, associons la chaîne ω_σ de base $\sigma(A)$ définie par: $\omega_\sigma \overset{\sigma}{\sim} \alpha$. Enfin, lorsque σ parcourt M, introduisons l'ensemble Φ des chaînes ω_σ.

Pour toute chaîne $\beta \in \Phi$ (de base B) et toute m-partie X de B, X_β désigne l'application croissante de F (ordonné par α) sur X (ordonné par β) : montrons que X_β est un m-morphisme de φ. En effet, puisqu'il existe un n-morphisme σ de φ (appliquant A sur B) tel que $\beta = \omega_\sigma$, on peut poser: $A_1 = \overset{-1}{\sigma}(X)$ et envisager la restriction σ_1 de σ à A_1. Les conditions : $\beta \overset{\sigma}{\sim} \alpha$, $\varphi|B \overset{\sigma}{\sim} \varphi|A$ impliquent respectivement :

$$\beta|X \overset{\sigma_1}{\sim} \alpha|A_1, \qquad \varphi|X \overset{\sigma_1}{\sim} \varphi|A_1.$$

Par ailleurs, si σ_2 désigne le m-morphisme de α appliquant F sur A_1 (autrement dit: $\alpha|A_1 \overset{\sigma_2}{\sim} \alpha|F$), l'interprétabilité de $\varphi|A$ par α implique: $\varphi|A_1 \overset{\sigma_2}{\sim} \varphi|F$. Ainsi, $X_\beta = \sigma_1 \circ \sigma_2$ vérifie bien : $\varphi|X \overset{X_\beta}{\sim} \varphi|F$.

Dès lors, si B et B′ sont les bases respectives de deux chaînes β et β' de Φ, toute m-partie X de $B \cap B'$ fournit deux m-morphismes X_β et $X_{\beta'}$ de φ (appliquant F sur X), de sorte que: $(X_\beta)^{-1} \circ X_{\beta'} \in \mathbf{G}_F(\varphi)$.

Ainsi, l'ensemble de chaînes Φ est G-*cohérent.*

c) Introduisons maintenant l'hypothèse: φ est n-monomorphe. Pour toute n-partie B de E, il existe alors un n-morphisme σ de φ appliquant A sur B, et B est la base de la chaîne $\omega_\sigma \in \Phi$. L'ensemble de chaînes Φ est donc un *n-recouvrement* de E (plus précisément: le support de Φ est $\mathfrak{P}_n(E)$).

Puisque $n \geqslant m + s_1(G)$, il existe (d'après le théorème 9.3.) une chaîne θ de base E qui est G-compatible avec toute chaîne $\beta \in \Phi$.

Pour deux m-parties X, Y de E (contenues respectivement dans les bases B_1, B_2 de deux chaînes β_1, β_2 de Φ), introduisons cinq isomorphismes de chaînes, à savoir : X_{β_1}, Y_{β_2}, X_θ, Y_θ et l'application croissante f de X sur Y (ordonnées par θ). Les conditions :

$$\begin{cases} X_{\beta_1} \text{ et } Y_{\beta_2} \quad \text{sont deux } m\text{-morphismes de } \varphi \\ (X_\theta)^{-1} \circ X_{\beta_1} \in \mathbf{G}_F(\varphi), \qquad (Y_\theta)^{-1} \circ Y_{\beta_2} \in \mathbf{G}_F(\varphi) \end{cases}$$

montrent que X_θ et Y_θ sont deux m-morphismes de φ. La fonction : $f = Y_\theta \circ (X_\theta)^{-1}$ vérifie donc :

$$\theta|Y \overset{f}{\sim} \theta|X \qquad \text{et} \qquad \varphi|Y \overset{f}{\sim} \varphi|X.$$

Autrement dit, la relation φ est m-interprétable par la chaîne θ. Comme :

$$\text{Card}\,(E) \geqslant n \geqslant m + g_1(m) \geqslant m + 1 \quad (\text{puisque } m \geqslant 2),$$

la proposition 5.1. montre que φ est *interprétable* par θ.

Remarque. — La proposition 5.3.3. montre que $\mathbf{G}_F(\varphi)$ peut être n'importe quel sous-groupe de S_m. La méthode précédente nécessitait donc que la théorie des chaînes G-compatibles soit effectuée dans toute sa généralité (et pas seulement pour des groupes G particuliers).

12.1.2. Pour tout entier $m \geqslant 1$, notons Δ_m l'ensemble des couples d'entiers (n, p) vérifiant la condition du théorème 12.1.1., et introduisons la première projection $D_0^0(m) = pr_1(\Delta_m)$ de cette partie non vide de N^2. Le plus petit d_m des entiers $n \in D_0^0(m)$ sera, par définition, le *degré optimum de monomorphie m-aire.*

En 12.2., nous montrerons (ce n'est pas évident) que $D_0^0(m)$ est l'ensemble $[d_m, \to[$ des entiers $\geqslant d_m$.

a) Pour les relations unaires, la valeur $d_1 = 1$ est triviale. La proposition 11.1.1. montre directement que :

$$D_0^0(1) = [1, \to[.$$

b) Pour les relations binaires, les remarques 11.1.3. et la proposition 11.1.4. se traduisent respectivement par :

$$\begin{cases} p \geqslant 3 \Longrightarrow (1, p) \notin \Delta_2 \quad \text{et} \quad (2, p) \notin \Delta_2. \\ (3, 5) \in \Delta_2. \end{cases}$$

Il en résulte donc (par une étude directe) : $d_2 = 3$.

c) Proposition. — *Pour tout entier $m \geqslant 2$, le degré optimum de monomorphie m-aire est $\geqslant m + 1$.*

Preuve. — Pour tout ensemble E de cardinal $\geqslant m + 1$, nous allons montrer (plus précisément) qu'il existe une relation m-monotype $\varphi \in \mathbf{R}_m(E)$ non interprétable par une chaîne. Soient α une chaîne de base E, et $F = \{a_0, a_1, \ldots, a_m\}$ une $(m + 1)$-partie de E telle que :

$$a_0 < a_1 < \cdots < a_m \quad (\text{mod. } \alpha).$$

Pour $1 \leqslant k \leqslant m$ et $X \in \mathfrak{P}_k(E)$, posons :

$$X = \{x_1, x_2, \ldots, x_k\},$$

$x_1 < x_2 < \cdots < x_k$ (mod. α), $a_h = \mathrm{Min}_{(\alpha)}\ (F - X)$. Nous définissons la relation $\varphi \in \mathbf{R}_m(E)$ en précisant la valeur

$$v = \varphi(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, \ldots, x_{\sigma(m)})$$

pour toute application σ de $[1, m]$ sur $[1, k]$. Posons :

$$\begin{cases} v = 0 & \text{si} \quad k < m. \\ v = 0 & \text{si} \quad k = m, \quad \sigma \neq (t_m)^h. \\ v = 1 & \text{si} \quad k = m, \quad \sigma = (t_m)^h. \end{cases}$$

Pour $n < m$, toute n-restriction de φ est constante de valeur 0. Pour toute m-partie X de E, le graphe de $\varphi|X$ comprend un seul m-uple. Il en résulte que φ est m-monotype.

Pour étudier la restriction $\varphi|F$, il est commode d'envisager le multiplet $(a_0, a_1, \ldots, a_m)$ comme indexé par le groupe additif Z_{m+1} des entiers modulo $m + 1$. Pour toute m-partie

$$X_i = F - \{a_i\}$$

de F, le graphe de $\varphi|X_i$ se réduit au seul m-uple

$$(a_{i+1}, a_{i+2}, \ldots, a_{i+m}).$$

Pour $p \neq i$, les valeurs du m-morphisme f de φ appliquant X_i sur X_j sont : $f(a_p) = a_{p+j-i}$. Lorsque $i \neq j$, une telle fonction ne laisse invariant aucun élément de X_i.

Si φ était interprétable par une chaîne θ, on aurait :

$$F = \{b_0, b_1, \ldots, b_m\}, \qquad b_0 < b_1 < \cdots < b_m \pmod{\theta},$$

et le m-morphisme g de φ appliquant $F - \{b_1\}$ sur $F - \{b_2\}$ vérifierait : $g(b_0) = b_0$, en contradiction avec la remarque précédente.

Remarque. — Pour $V = E - \{a_0\}$ et tout m-uple $(x_1, x_2, \ldots, x_m) \in V^m$:

$$\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_m) = 1 \Longleftrightarrow x_1 < x_2 < \cdots < x_m \pmod{\alpha}.$$

La relation $\varphi|V$ est donc interprétable par la chaîne $\alpha|V$.

Lorsque Card (E) $= m + 1$, la relation φ est monomorphe sans être interprétable par une chaîne. Lorsque

$$\text{Card (E)} \geqslant m + 2,$$

la relation φ est m-monotype sans être $(m + 1)$-monotype (puisque les $(m + 1)$-restrictions de $\varphi|V$ sont interprétables par une chaîne, alors que $\varphi|F$ ne l'est pas).

d) Pour $m \geqslant 2$, la proposition précédente et la méthode adoptée en 12.1.1. donnent l'encadrement :

$$m + 1 \leqslant d_m \leqslant m + g_1(m).$$

On retrouve ainsi : $d_2 = 3$, et l'on obtient : $d_3 = 4$, $d_4 = 5$ ou 6 (question ouverte). Pour $m \geqslant 5$, la majoration :

$$d_m \leqslant (3m - 8)^2 + 2 \quad \text{(résultant de 10.3.4)}$$

est sans doute assez large.

Il est possible (c'est une question ouverte) que l'égalité $d_m = m + 1$, valable pour $m = 2$, $m = 3$, subsiste pour $m \geqslant 4$.

12.2. *Variantes et applications du théorème de monomorphie et d'interprétabilité.*

12.2.1. La proposition [F] apparaît maintenant comme un simple corollaire du théorème 12.1.1. :

PROPOSITION [F]. — *Pour tout entier $m \geqslant 1$, il existe un entier $p \geqslant m$ vérifiant la condition suivante :* « *Si* Card (E) $\geqslant p$, *toute relation m-aire monomorphe de base* E *est interprétable par une chaîne.* »

Si l'on note $\pi(m)$ le plus petit des entiers p vérifiant la condition de [F], on sait que : $\pi(1) = 1$, $\pi(2) = 4$ (proposition 11.1.3.). Nous ne connaissons pas la valeur $\pi(3)$. Pour $m \geqslant 3$, la méthode adoptée en 12.1.1. et le contre-exemple de 12.1.2. donnent : $m + 2 \leqslant \pi(m) \leqslant \xi_m(m + g_1(m))$.

12.2.2. Pour un entier $n \geqslant 1$ et une relation $\varphi \in \mathbf{R}_m(\mathrm{E})$, envisageons les quatre conditions suivantes :

$$\left\{\begin{array}{ll} \mathrm{H}^0\{\varphi, n\} : & \varphi \text{ est } n\text{-monomorphe.} \\ \mathrm{H}^1\{\varphi, n\} : & \varphi \text{ est } n\text{-monotype.} \\ \mathrm{C}_0\{\varphi\} : & \varphi \text{ est interprétable par une chaîne.} \\ \mathrm{C}_1\{\varphi\} : & \varphi \text{ est monomorphe.} \end{array}\right.$$

Notons $\mathrm{D}^i_j(m)$ (en accord avec 12.1.2.) l'ensemble des entiers $n \geqslant m$ vérifiant la condition suivante : « Il existe un entier $p \geqslant n$ tel que : Card (E) $\geqslant p$ et $\mathrm{H}^i\{\varphi, n\} \Longrightarrow \mathrm{C}_j\{\varphi\}$ (pour tout φ). »

PROPOSITION. — *Pour tout $m \geqslant 1$, les quatre ensembles $\mathrm{D}^i_j(m)$ coïncident avec la section $[d_m, \rightarrow[$ de* N.

Preuve. — Le théorème 12.1.1. montrait que $\mathrm{D}^0_0(m) \neq \varnothing$ et permettait d'introduire un entier minimum $d_m \in \mathrm{D}^0_0(m)$. De [F], il résulte : $\mathrm{D}^0_0(m) = \mathrm{D}^0_1(m)$, $\mathrm{D}^1_0(m) = \mathrm{D}^1_1(m)$. Par ailleurs, il est clair que : $\mathrm{D}^0_0(m) \subset \mathrm{D}^1_0(m)$, $\mathrm{D}^0_1(m) \subset \mathrm{D}^1_1(m)$, et que $\mathrm{D}^1_0(m)$, $\mathrm{D}^1_1(m)$ sont des sections de N. Il reste donc à montrer que : $\mathrm{D}^1_1(m) \subset \mathrm{D}^0_1(m)$.

Pour $n \in \mathrm{D}^1_1(m)$, introduisons un entier $p \geqslant n$ vérifiant la condition : toute relation m-aire n-monotype basée sur un ensemble de cardinal $\geqslant p$ est monomorphe. Posons :

$$q = \mathrm{Max}\,(p, \xi_m(n)).$$

Pour toute relation m-aire n-monomorphe φ de base E telle que Card (E) $\geqslant q$, il existe (5.4.1.) une n-partie A de E et une chaîne α de base A telles que $\varphi|\mathrm{A}$ soit interprétable par α. Étant donné deux k-parties quelconques X_1 et X_2 de E telles que $1 \leqslant k \leqslant n$, il existe deux n-parties F_1, F_2 de

E et deux n-morphismes σ_1, σ_2 de φ tels que :

$$X_i \subset F_i, \qquad \varphi|A \overset{\sigma_i}{\sim} \varphi|F_i.$$

Si l'on pose : $Y_1 = \sigma_1(X_1)$, $Y_2 = \sigma_2(X_2)$, l'interprétabilité de $\varphi|A$ par une chaîne implique : $\varphi|Y_1 \sim \varphi|Y_2$. Comme les restrictions de σ_1, σ_2 respectivement à X_1, X_2 sont des k-morphismes de φ, on obtient bien :

$$\varphi|X_1 \sim \varphi|Y_1 \sim \varphi|Y_2 \sim \varphi|X_2.$$

Ainsi, la relation φ est n-monotype, et la condition $q \geqslant p$ implique sa monomorphie. Finalement : $n \in D_1^0(m)$.

12.2.3. Reprenant la condition sur n qui définit l'ensemble $D_j^i(m)$, nous noterons $\pi_j^i(m)$ le plus petit des entiers p correspondant à $n = d_m$, de sorte que :

Proposition $[F_0]$. — *Toute relation m-aire d_m-monomorphe (resp. d_m-monotype) basée sur un ensemble de cardinal $q \geqslant \pi_0^0(m)$* (resp. $q \geqslant \pi_0^1(m)$) *est interprétable par une chaîne.*

Proposition $[F_1]$. — *Toute relation m-aire d_m-monomorphe* (resp. *d_m-monotype*) *basée sur un ensemble de cardinal $q \geqslant \pi_1^0(m)$* (resp. $q \geqslant \pi_1^1(m)$) *est monomorphe.*

La comparaison de [F], $[F_0]$, $[F_1]$ donne facilement :

$$\begin{cases} d_m \leqslant \pi_1^1(m) \leqslant \pi_j^i(m) \leqslant \pi_0^0(m) \qquad \text{pour} \qquad i \neq j. \\ \pi_0^0(m) = \operatorname{Max}\,(\pi_1^0(m), \pi(m)). \\ \pi_0^1(m) = \operatorname{Max}\,(\pi_1^1(m), \pi(m)). \end{cases}$$

Par exemple : $\pi_1^1(2) = 3$, $\pi(2) = \pi_0^1(2) = 4$, $\pi_1^0(2) = \pi_0^0(2) = 5$.

Le théorème 12.1.1., le corollaire [F] et la proposition $[F_0]$ affirment l'interprétabilité d'une relation convenable $\varphi \in \mathbf{R}_m(E)$ par une chaîne θ de base E. Lorsque E est infini, l'existence de θ s'établit par *ultrafiltration* (preuve du théorème de cohérence partielle).

Par contre, comme une relation infinie est monomorphe dès que ses restrictions finies le sont, la preuve de la proposition $[F_1]$ se ramène au cas fini, et à des récurrences ordinaires.

Le cadre axiomatique de [F], $[F_0]$, $[F_1]$ étant ainsi précisé, on retiendra surtout (pour une relation m-aire φ basée sur un q-ensemble) :

a) la *condition d'interprétabilité* [F] lorsque $q \geqslant \pi(m)$.

b) la *condition de monomorphie* $[F_1]$ lorsque $q \geqslant \pi_1^0(m)$: « Si l'isomorphie des n-restrictions de φ est supposée pour la *seule* valeur $n = d_m$, elle est alors assurée pour *toutes* les valeurs de l'entier n $(1 \leqslant n \leqslant q)$. »

12.2.4. Étant donné l'entier $m \geqslant 1$ et un cardinal quelconque $q \geqslant \pi_1^1(m)$, considérons les entiers $h \in [m, d_m]$ qui vérifient la condition : « Toute relation m-aire h-monotype basée sur un q-ensemble est monomorphe ». Ces entiers h constituent un intervalle $[\delta_m(q), d_m]$. La constante $\delta_1(q) = 1$ est triviale.

Pour $m \geqslant 2$ et $p = \text{Max}\ (2d_m, \pi_1^1(m))$, le caractère minimal de d_m dans $D_1^1(m)$ montre que : $p \leqslant q < \aleph_0 \Longrightarrow \delta_m(q) = d_m$. Le contre-exemple utilisé en 12.1.2. donne : $\delta_m(q) \geqslant m + 1$ pour tout cardinal $q \geqslant p$. Enfin, on voit facilement que : $p \leqslant q_1 \leqslant q_2 \Longrightarrow \delta_m(q_1) \geqslant \delta_m(q_2)$. (Il suffit de considérer les q_1-restrictions d'une relation m-aire $\delta_m(q_1)$-monotype φ basée sur un q_2-ensemble, puis d'appliquer $[F_1]$ aux k-restrictions de φ telles que $1 \leqslant k \leqslant d_m$.) Le plus petit d'_m des entiers $\delta_m(q)$ (q infini quelconque) vérifie donc : $m + 1 \leqslant d'_m \leqslant d_m$. L'égalité $d'_m = d_m$ est banale lorsque $d_m = m + 1$ (en particulier pour $m = 2$, $m = 3$).

On peut se demander (c'est une question ouverte, plus faible que la conjecture : $d_m = m + 1$) si l'égalité $d'_m = d_m$ subsiste pour $m \geqslant 4$.

12.2.5. La proposition suivante ne nécessite, en fait, qu'un cas particulier du théorème d'interprétabilité 12.1.1. (cas particulier signalé en 11.3.3.) :

Proposition. — *Etant donné un couple* (m, n) *d'entiers* $\geqslant 2$, *il existe un entier* $p \geqslant n$ *vérifiant la condition :* « *Si* $\varphi \in \mathbf{R}_m(E)$ *est une relation monomorphe telle que* $\text{Card}\ (E) \geqslant p$ *et* $\mathbf{G}_n(\varphi) = I_n^1$, *alors* $\mathbf{G}_q(\varphi) = I_q^1$ *pour tout entier* q *tel que* $n \leqslant q \leqslant \text{Card}\ (E)$. »

Preuve. — En choisissant l'entier p conformément à la proposition 11.3.3., les hypothèses $\text{Card}\ (E) \geqslant p$ et $\mathbf{G}_n(\varphi) = I_n^1$ permettent d'affirmer que la relation monomorphe $\varphi \in \mathbf{R}_m(E)$ est interprétable par une chaîne θ de base E.

Pour $q \geqslant n$, soient : $F \in \mathfrak{P}_q(E)$ et $f \in \mathbf{G}_F(\varphi)$. Pour $a \in F$, $b \in F$ tels que $a < b$ (mod. θ), soit X une n-partie de F contenant $\{a, b\}$: la restriction g de f à X est un n-morphisme de φ. Comme φ est interprétable par θ, le n-morphisme h de θ

appliquant X sur $f(X)$ est aussi un n-morphisme de φ, de sorte que : $\overset{-1}{h} \circ g \in \mathbf{G}_X(\varphi)$. Il en résulte :

$$g = h \qquad \text{et} \qquad f(a) < f(b) \quad (\text{mod. } \theta).$$

La permutation croissante f ne peut être que la permutation identique de F, autrement dit : $\mathbf{G}_q(\varphi) = \mathrm{I}_q^1$.

12.2.6. Proposition. — *Etant donné l'entier $m \geqslant 1$, $\pi(m)$ est le plus petit des entiers p vérifiant la condition suivante : « Pour* $E \subset E'$ *et* Card $(E) \geqslant p$, *toute relation monomorphe* $\varphi \in \mathbf{R}_m(E)$ *admet une extension monomorphe* $\varphi' \in \mathbf{R}_m(E')$ ».

Preuve. — *a*) Si un entier p vérifie la condition précédente, toute relation monomorphe $\varphi \in \mathbf{R}_m(E)$ telle que Card $(E) \geqslant p$ admet (par exemple) une extension monomorphe φ' de base E′ infinie. D'après 11.2., la relation φ' et sa restriction φ sont interprétables par une chaîne. Le caractère minimal de $\pi(m)$ pour la proposition [F] implique donc : $p \geqslant \pi(m)$.

b) D'après [F], toute relation monomorphe $\varphi \in \mathbf{R}_m(E)$ telle que Card $(E) \geqslant \pi(m)$ est interprétable par une chaîne θ de base E. Dans les notations de 3.2. (introduisant une application $\hat{\theta}$ de E^m dans A_m), il existe alors une relation $\psi \in \mathbf{R}_1(A_m)$ telle que : $\varphi = \psi \circ \hat{\theta}$ (proposition 5.2.1.). Si θ' est une chaîne de base $E' \supset E$ telle que $\theta = \theta'|E$, on voit facilement que $\hat{\theta}$ est la restriction de $\hat{\theta}'$ à E^m. La relation $\varphi' \in \mathbf{R}_m(E')$ définie par : $\varphi' = \psi \circ \hat{\theta}'$ (relation interprétable par θ') est bien une extension monomorphe de φ.

Remarque. — L'existence d'un entier p vérifiant la condition précédente n'avait rien de triviale pour $m \geqslant 2$. Si l'on avait pu en disposer par une étude directe (comme pour $m = 2$), la proposition [F] concernant l'interprétabilité par une chaîne se serait ramenée au cas particulier d'une base infinie (11.2.) sans qu'il soit utile de faire intervenir la théorie des chaînes G-compatibles.

13. Condition d'isomorphie avec une relation finie monomorphe.

Étant donné deux relations m-aires α, β de base E telle que Card $(E) \geqslant n$, nous noterons $\beta \underset{n}{\prec} \alpha$ la condition : « Toute

n-restriction de β est isomorphe à une n-restriction de α. » (Dans la terminologie de [4], α est dite alors une *relation n-aînée* de β.)

13.1. *Borne d'une relation finie monomorphe.*

13.1.1. Pour deux entiers $m \geqslant 1$, $n \geqslant 0$, soit α une relation m-aire basée sur un $(n+1)$-ensemble E. Supposons qu'il existe une relation $\beta \in \mathbf{R}_m(\mathrm{E})$, vérifiant : $\beta \underset{n}{\prec} \alpha$, sans que α et β soient isomorphes. Dans ces conditions, nous dirons que la relation α est *bornée* et, plus précisément, que β est une *borne* de α.

Si β est une borne d'une relation monomorphe α, il est clair que β est monomorphe et que α est une borne de β (*réciprocité* entre deux bornes monomorphes associées).

Exemples. — *a*) Pour Card (E) $= n + 1$, les bornes $\beta \in \mathbf{R}_1(\mathrm{E})$ sont les deux constantes 0, 1. Le graphe K d'une relation bornée $\alpha \in \mathbf{R}_1(\mathrm{E})$ vérifie : Card (K) $= 1$ ou n.

b) Pour $m \geqslant 2$, soit $\mathrm{E} = \mathrm{Z}_{m+1} = \{0, 1, 2, \ldots, m\}$ le groupe additif des entiers modulo $m + 1$. Pour une chaîne θ de base E, soit $\beta(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ la relation m-aire de base E (interprétable par θ) définie par la condition :

$$x_1 < x_2 < \cdots < x_m \quad (\text{mod. } \theta).$$

Par ailleurs, soit $\alpha(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ la relation m-aire monomorphe de base E ayant comme graphe (quand a parcourt E) l'ensemble des m-uples $(a + 1, a + 2, \ldots, a + m)$. Comme α n'est pas interprétable par une chaîne (c'est un cas particulier du contre-exemple 12.1.2.), α et β ne sont pas isomorphes. Cependant, le graphe d'une m-restriction quelconque de α ou de β se réduit à un seul m-uple. Ainsi, les deux relations m-aires monomorphes α et β sont bornées l'une par l'autre.

13.1.2. Si $\alpha \in \mathbf{R}_1(\mathrm{E})$ est monomorphe et bornée, alors Card (E) $= 1$. Nous allons étendre cette remarque, en utilisant le lemme de recollement (9.2.) et l'entier remarquable $g_1(m)$:

PROPOSITION. — *Si une relation m-aire bornée de base* E *est interprétable par une chaîne, alors :* Card (E) $\leqslant m + g_1(m)$.

Preuve. — Pour deux entiers

$$m \geqslant 2, \qquad n \geqslant m + g_1(m) \geqslant m + 1, \qquad \mathrm{E} = [0, n],$$

il suffit d'envisager une relation $\alpha \in \mathbf{R}_m(\mathrm{E})$ interprétable par la chaîne naturelle θ de base E, et de montrer que α ne peut être bornée. Posons : $\mathrm{A} = [1, m]$, $\mathrm{F}_i = \mathrm{E} - \{i\} (0 \leqslant i \leqslant n)$, et introduisons le groupe $\mathrm{H} = \mathbf{G}_\mathrm{A}(\alpha)$ des automorphismes de $\alpha|\mathrm{A}$.

a) Si une relation $\beta \in \mathbf{R}_m(\mathrm{E})$ vérifie : $\beta \underset{n}{\prec} \alpha$, la n-monomorphie de α implique l'existence de $n + 1$ bijections σ_i appliquant F_0 sur F_i $(0 \leqslant i \leqslant n)$ et telles que : $\beta|\mathrm{F}_i \overset{\sigma_i}{\sim} \alpha|\mathrm{F}_0$. Dès lors, soit $\Phi = \{\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$ l'ensemble de chaînes, de support $\mathfrak{P}_n(\mathrm{E}) = \{\mathrm{F}_0, \mathrm{F}_1, \ldots, \mathrm{F}_n\}$, défini par : $\varphi_i \overset{\sigma_i}{\sim} \theta|\mathrm{F}_0$. Pour le sous-groupe H de S_m, montrons que cet ensemble Φ est H-cohérent.

En effet, pour $0 \leqslant i < j \leqslant n$ et tout $\mathrm{X} \in \mathfrak{P}_m(\mathrm{F}_i \cap \mathrm{F}_j)$, il existe deux m-parties Y, Z de F_0 telles que $\mathrm{X} = \sigma_i(\mathrm{Y}) = \sigma_j(\mathrm{Z})$. Si φ est la restriction de σ_i à Y, les conditions :

$$\begin{cases} \theta|\mathrm{Y} \overset{\mathrm{Y}_\theta}{\sim} \theta|\mathrm{A} \text{ et } \alpha|\mathrm{Y} \overset{\mathrm{Y}_\theta}{\sim} \alpha|\mathrm{A} & \text{(interprétabilité de } \alpha \text{ par } \theta) \\ \varphi_i|\mathrm{X} \overset{v}{\sim} \theta|\mathrm{Y} \text{ et } \beta|\mathrm{X} \overset{v}{\sim} \alpha|\mathrm{Y} & \text{(définition des chaînes } \varphi_i). \end{cases}$$

portant sur Y, σ_i, φ_i, et les conditions analogues sur Z, σ_j, φ_j, montrent que $\mathrm{X}_{\varphi_i} = \sigma_i \circ \mathrm{Y}_\theta$ et $\mathrm{X}_{\varphi_j} = \sigma_j \circ \mathrm{Z}_\theta$ sont deux isomorphismes entre $\alpha|\mathrm{A}$ et $\beta|\mathrm{X}$. Il en résulte un automorphisme de $\alpha|\mathrm{A}$: $(\mathrm{X}_{\varphi_i})^{-1} \circ \mathrm{X}_{\varphi_j} \in \mathrm{H}$, et les chaînes φ_i, φ_j sont bien H-compatibles.

b) Comme $n \geqslant m + g_1(m) \geqslant m + s_1(\mathrm{H})$, le lemme de recollement (9.2.) permet d'introduire une chaîne ω de base E qui est H-compatible avec chacune des chaînes φ_i. Montrons que la permutation σ de E définie par : $\omega \overset{\sigma}{\sim} \theta$ vérifie également : $\beta \overset{\sigma}{\sim} \alpha$.

Pour un m-uple $(x_1, x_2, \ldots, x_m) \in \mathrm{E}^m$, soit B une m-partie de E telle que $x_h \in \mathrm{B}$ (pour $1 \leqslant h \leqslant m$), et soit $\mathrm{X} = \sigma(\mathrm{B})$. Il existe une n-partie F_i de E $(0 \leqslant i \leqslant n)$ et une m-partie Y de F_0 telles que : $\mathrm{X} \subset \mathrm{F}_i$, $\mathrm{X} = \sigma_i(\mathrm{Y})$. Comme précédemment, $\mathrm{X}_{\varphi_i} = \sigma_i \circ \mathrm{Y}_\theta$ est un isomorphisme entre $\alpha|\mathrm{A}$ et $\beta|\mathrm{X}$. Puisque : $\mathrm{X}_\omega = \sigma \circ \mathrm{B}_\theta$ vérifie : $(\mathrm{X}_{\varphi_i})^{-1} \circ \mathrm{X}_\omega \in \mathrm{H}$ (H-compatibilité des chaînes φ_i et ω), on obtient : $\beta|\mathrm{X} \overset{\mathrm{X}_\omega}{\sim} \alpha|\mathrm{A}$. La restriction φ

de σ à B est : $\nu = X_\omega \circ (B_\theta)^{-1}$. L'interprétabilité de α par θ implique alors : $\alpha|B \overset{B_\theta}{\sim} \alpha|A$, d'où : $\beta|X \overset{\nu}{\sim} \alpha|A$. Autrement dit :

$$\beta(\sigma(x_1), \sigma(x_2), \ldots, \sigma(x_m)) = \alpha(x_1, x_2, \ldots, x_m),$$

et σ est bien un isomorphisme entre α et β.

Ainsi, aucune relation $\beta \in \mathbf{R}_m(E)$ ne peut être une borne de α.

Corollaire. — *Pour chaque entier $m \geqslant 1$, les bases des relations m-aires monomorphes bornées ont un cardinal maximum fini.*

(Par la suite, nous noterons $\lambda(m)$ ce cardinal maximum.)

Si E est un ensemble fini tel que :

$$\text{Card (E)} > \text{Max}\,(\pi(m) - 1,\ m + g_1(m))$$

et si $\alpha \in \mathbf{R}_m(E)$ est monomorphe, la condition : Card (E) $\geqslant \pi(m)$ montre que α est interprétable par une chaîne (proposition [F]). Comme Card (E) $> m + g_1(m)$, α ne peut donc être bornée.

Remarque. — Directement, nous avions obtenu : $\lambda(1) = 1$. Pour $m \geqslant 2$, la preuve précédente et l'exemple 13.1.1. donnent l'encadrement :

$$m + 1 \leqslant \lambda(m) \leqslant \text{Max}\,(\pi(m) - 1,\ m + g_1(m)).$$

En particulier : $\lambda(2) = 3$ (mais nous ne connaissons par la valeur $\lambda(3)$).

13.2. *Un théorème d'isomorphie.*

13.2.1. Le rôle de l'entier $\lambda(m)$ peut encore se traduire d'une autre façon :

Théorème. — *Etant donné l'entier $m \geqslant 1$, $\lambda(m)$ est le plus petit des entiers $n \geqslant 0$ vérifiant la condition : « Pour tout couple (φ, φ') de relations m-aires de même base finie :*

$$\varphi \underset{n}{\prec} \varphi' \text{ et } \varphi' \text{monomorphe} \Longrightarrow \varphi \sim \varphi' \text{ »}.$$

Preuve. — *a*) Si un entier n vérifie la condition précédente, tout entier $p \geqslant n$ la vérifie également. Si Card (E) $= p + 1$, les relations monomorphes $\varphi' \in \mathbf{R}_m(E)$ ne sont donc pas bornées. Il en résulte : $n \geqslant \lambda(m)$.

b) Pour montrer que $\lambda(m)$ vérifie la condition indiquée, envisageons deux relations m-aires φ, φ' de même base finie E telles que :

$$\begin{cases} \mathrm{Card}\,(\mathrm{E}) = p, & p \geqslant \lambda(m), \\ \varphi \underset{\lambda(m)}{\prec} \varphi', & \varphi' \text{ étant monomorphe.} \end{cases}$$

Notons V l'ensemble des entiers h vérifiant : $\lambda(m) \leqslant h \leqslant p$ et $\varphi \underset{h}{\prec} \varphi'$. Il est clair que : $\lambda(m) \in \mathrm{V}$. Posons $n = \mathrm{Max}\ \mathrm{V}$.

Si $n < p$, il existerait (compte tenu de la monomorphie de φ') une $(n+1)$-partie X de E telle que $\alpha = \varphi'|\mathrm{X}$ et $\beta = \varphi|\mathrm{X}$ soient non isomorphes. De la condition : $\beta \underset{n}{\prec} \alpha$, il résulterait que β est une borne de la relation monomorphe α, d'où la contradiction : $n < \lambda(m)$.

Ainsi : $n = p$ et $\varphi \underset{p}{\prec} \varphi'$ (ce qui revient à : $\varphi \sim \varphi'$).

13.2.2. Pour Card (E) $= n$ (entier $\geqslant 1$), les relations m-aires monomorphes de base E se répartissent en $\tau_m(n)$ classes d'isomorphie.

Pour $\lambda(m) \leqslant h \leqslant n$, soit F une h-partie de E. Si φ, φ' sont deux relations m-aires monomorphes de base E, le théorème 13.2.1. montre que : $\varphi|\mathrm{F} \sim \varphi'|\mathrm{F} \Longrightarrow \varphi \sim \varphi'$. Il en résulte : $\tau_m(h) \geqslant \tau_m(n)$. Pour m fixé, la suite $(\tau_m(n))_{n\geqslant 1}$ est donc *stationnaire*.

La vérification est facile pour $m = 1$ et $m = 2$:

$$\begin{cases} \tau_1(n) = 2 \quad \text{pour tout} \quad n \geqslant 1. \\ \tau_2(1) = 2,\ \tau_2(2) = 6,\ \tau_2(3) = 8,\ \tau_2(n) = 6 \quad \text{pour tout} \quad n \geqslant 4. \end{cases}$$

BIBLIOGRAPHIE

[1] P. Erdös, Some remarks on the theory of graphs, *Bull. Am. Math. Soc.*, t. 53, 1947, 292-294.

[2] P. Erdös et R. Rado, A partition calculus in set theory, *Bull. Am. Math. Soc.*, t. 62, 1956, 427-489.

[3] P. Erdös et G. Szekeres, A combinatorial problem in geometry, *Compos. Math.*, t. 2, 1935, 463-470.

[4] R. Fraïssé, Sur quelques classifications des systèmes de relations, *Alger-Math.*, t. 1, 1954, 35-182 (Thèse, Paris, 1953).

[5] C. Frasnay, Notes aux *C.R. Acad. Sci.*, 1962-63-64 : *a*) t. 255, 2878-2879; *b*) t. 256, 2507-2510; *c*) t. 257, 1825-1828; *d*) t. 257, 2944-2947; *e*) t. 258, 1373-1376; *f*) t. 259, 3910-3913.

[6] R. E. Greenwood et A. M. Gleason, Combinatorial relations and chromatic graphs, *Can. Journ. Math.*, t. 7, 1955, 1-7.
[7] F. P. Ramsey, On a problem in formal logic, *Proc. London Math. Soc.*, t. 30, 1930, 264-286.
[8] J. Riguet, Fondements de la théorie des relations binaires (Thèse, Paris, 1951).
[9] E. Szpilrajn, Sur l'extension de l'ordre partiel, *Fund. Math.*, t. 16, 1930, 386-389.

(*Thèse, Fac. Sciences*, Paris, 1965).

C. Frasnay,
Maître-Assistant à la Faculté des Sciences de Grenoble.
7, avenue du Vercors, Montfleury (Isère)

INDEX DES NOTATIONS

(Une référence telle que 6.0. se rapporte au préambule du § 6.)

INDEX TERMINOLOGIQUE