ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

JEAN VAILLANT

Caractéristiques multiples et bicaractéristiques des systèmes d'équations aux dérivées partielles linéaires et à coefficients constants

Annales de l'institut Fourier, tome 15, nº 2 (1965), p. 225-311

<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1965__15_2_225_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
15, 2 (1965), 225-311.

CARACTÉRISTIQUES MULTIPLES ET BICARACTÉRISTIQUES DES SYSTÈMES D'ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES LINÉAIRES ET A COEFFICIENTS CONSTANTS

par Jean VAILLANT

Introduction.

La recherche des fronts d'onde ou caractéristiques d'un système d'équations aux dérivées partielles et l'étude de la propagation des discontinuités d'une solution discontinue le long de rayons ou bicaractéristiques éventuels appartenant au front d'onde sont des problèmes classiques en physique mathématique depuis Hadamard. On les rencontre couramment en mécanique classique des milieux continus comme dans les théories inspirées par la relativité générale. Ces problèmes ont été résolus de façon générale par Hadamard pour les systèmes « carrés » dans les cas que nous appellerons « simples », c'est-à-dire ceux où la propagation est décrite par des équations différentielles du 1er ordre. Cependant, on trouve en physique des cas où, les caractéristiques étant multiples, l'on ne peut appliquer les résultats précédents. C'est ce qui se produit, par exemple, pour les équations de la théorie unitaire d'Einstein-Schrödinger que nous étudions dans la 2^{e} partie de ce travail. Il reste alors à voir s'il est possible de généraliser les résultats classiques dans ces circonstances plus larges.

D'autre part, dans les travaux de mathématiques, on est conduit pour pouvoir utiliser les résultats de Hadamard à se restreindre aux cas de caractéristiques simples, (cf. la thèse de M. Zerner). Il paraît donc nécessaire encore de généraliser aux cas de caractéristiques multiples les théorèmes de Hadamard, Goursat et Beudon concernant la construction de solutions, discontinues en particulier, (analytiques par morceaux), au voisinage d'une caractéristique.

Nous avons étudié le problème le plus élémentaire, c'est-à-dire celui des « systèmes carrés » d'équations aux dérivées partielles linéaires et à coefficients constants. Nous donnons une définition des bicaractéristiques valable même pour des plans caractéristiques multiples et nous montrons que ces bicaractéristiques jouent un rôle analogue à celui des bicaractéristiques classiques; la différence la plus notable provient du fait que les équations différentielles de propagation ne sont plus forcément du 1^{er} ordre et que leur ordre dépend d'un système de nombres entiers associés à la matrice caractéristique. On peut encore préciser la construction de solutions analytiques au voisinage d'un hyperplan caractéristique et utiliser les calculs précédents pour mettre le système différentiel initial sous une forme remarquable.

Dans le 1^{er} chapitre, nous nous bornons aux cas où les polynômes de dérivation sont homogènes et de mêmes degrés t. On suppose alors que le déterminant H de la matrice caractéristique n'est pas identiquement nul. H se décompose donc de façon unique en un produit de puissances de polynômes homogènes irréductibles sur $\mathbf{R}$; soit H' l'un d'eux. Considérant la matrice caractéristique comme une matrice sur l'anneau localisé de l'anneau des polynômes à $(n+1)$ indéterminées par rapport à l'idéal premier défini par H', anneau qui est principal, on donne un calcul explicite des facteurs invariants de cette matrice à l'aide d'une suite finie de nombres entiers que nous appellerons les corangs et multiplicités de H'. On interprète $H' = 0$ comme l'équation tangentielle d'un cône. Un hyperplan est caractéristique s'il satisfait à $H' = 0$. On suppose que ce plan est non singulier dans un sens naturel que l'on précisera. On appelle alors bicaractéristiques les génératrices de contact du cône (H') et des cônes déduits par translation avec l'hyperplan caractéristique.

On cherche alors les solutions séries formelles du système correspondant à des données de Cauchy sur un hyperplan caractéristique non singulier relatif à H'. La résolution de ce problème est équivalente à celle du problème de la propagation des discontinuités à travers l'hyperplan caractéristique des dérivées d'ordre supérieur à t des solutions de classe C_{t-1} du système. Tous calculs faits, on trouve que les discontinuités se propagent le long des bicaractéristiques et sont déterminées par des « valeurs initiales » sur l'intersection de l'hyperplan caractéristique et d'un hyperplan coupant les bicaractéristiques. Plus précisément chaque discontinuité s'exprime sous la forme d'un polynôme où la variable repère un point de la bicaractéristique envisagée; les coefficients de ce polynôme sont des combinaisons linéaires différentielles déterminées de fonctions arbitraires sur l'hyperplan non caractéristique. Les degrés des différents polynômes sont exprimés en fonction des nombres entiers, corangs et multiplicités, qu'on a trouvés précédemment et qui déterminent les facteurs invariants de la matrice caractéristique; les coefficients de ces polynômes sont déterminés en fonction des conditions initiales et des éléments de la matrice caractéristique. En termes de séries formelles, on donne un théorème d'existence et d'unicité d'une solution série formelle du système correspondant à des données de Cauchy sur l'hyperplan caractéristique et à des « pseudo-données » de Cauchy sur un hyperplan coupant les bicaractéristiques; ces pseudo-données de Cauchy sont définies à l'aide des corangs et multiplicités précédents.

Au 2e chapitre, les polynômes de dérivation étant toujours homogènes et de même degré, nous déterminons les solutions analytiques au voisinage d'un hyperplan caractéristique. On peut ainsi construire des solutions dont les dérivées sont analytiques « par morceaux ». Au cours de cette étude, nous donnons, après un changement de repère de l'espace ponctuel affine considéré, une forme canonique du système différentiel où apparaissent les rôles des facteurs invariants, des corangs et des multiplicités. Ensuite, on emploie systématiquement la méthode des fonctions majorantes.

Au 3e chapitre, nous étendons ces résultats aux systèmes « carrés » d'équations linéaires et à coefficients constants dont les polynômes de dérivation ne sont plus homogènes. On utilise pour cela une méthode de « montée »: nous démontrons que l'étude d'un tel système se ramène à celle d'un système où les polynômes de dérivation sont homogènes mais où il y a une variable de plus. Dans des conditions naturelles géométriquement, on définit, à l'aide de la matrice des parties principales, les corangs et leurs multiplicités, les hyperplans caractéristiques non singuliers et les bicaractéristiques. La propagation des discontinuités a lieu encore le long des bicaractéristiques; chaque discontinuité s'exprime sous forme du produit d'une exponentielle et d'un polynôme, où la variable repère un point de la bicaractéristique. On détermine encore les solutions analytiques au voisinage d'un hyperplan caractéristique.

La 2e partie consiste en une étude de la propagation des ondes en théorie unitaire d'Einstein-Schrödinger. Du point de vue mathématique, on a à considérer un système d'équations aux dérivées partielles du 2e ordre où les inconnues sont les potentiels non symétriques $g_{\alpha\beta}$ et la forme S_α. Les variétés caractéristiques ont été mises en évidence par M. Lichnerowicz et Mme Maurer-Tison. Le problème de Cauchy analytique au voisinage d'une hypersurface non caractéristique a été résolu par M. Lichnerowicz.

Il était naturel alors, et c'est l'objet de cette partie, de déterminer les propriétés algébriques des discontinuités des dérivées des grandeurs inconnues et leur propagation, s'il y a lieu, le long de bicaractéristiques ou rayons.

Au 1er chapitre, nous indiquons de façon générale les équations aux discontinuités des dérivées des grandeurs de champ.

Au 2e chapitre, une étude géométrique des éléments définis en chaque point par le tenseur non symétrique $g_{\alpha\beta}$ nous permet de construire des repères adaptés à chaque caractéristique. Notre étude est basée sur l'existence de faisceaux de cônes et de « complexes linéaires » en chaque point.

Dans le dernier chapitre, on étudie d'abord les caractéristiques correspondant aux cônes (γ), (avec les notations de Mme Maurer-Tison); après avoir donné les propriétés algébriques des discontinuités du tenseur de courbure de la connexion linéaire associée à $g_{\alpha\beta}$ par l'équation de liaison, nous démontrons que ces discontinuités se propagent simplement par ondes le long des géodésiques de longueur nulle de la métrique $\gamma_{\alpha\beta}$. Ensuite, nous faisons une étude analogue pour le cône (h); mais ici la propagation des discontinuités du tenseur de courbure n'est plus simple; c'est une équation différentielle du 2e ordre qui régit cette propagation le long des géodésiques de longueur nulle de la métrique $h_{\alpha\beta}$; cependant les discontinuités du tenseur de Ricci se propagent par ondes de façon simple; ces caractéristiques sont d'ailleurs les seules où le tenseur de Ricci puisse présenter des discontinuités. L'étude des caractéristiques (l) est la plus compliquée; nous donnons en fait les propriétés algébriques des discontinuités sur ces caractéristiques et nous indiquons que la propagation des discontinuités n'est pas simple.

Nous ne nous sommes pas préoccupés dans la suite de l'interprétation physique dont nous dirons un mot seulement ici. Il semble bien, en comparant ces résultats à ceux de la relativité générale, que l'interprétation physique soit malaisée; les propriétés des discontinuités du tenseur de courbure de la relativité générale imaginé comme représentant la gravitation et celles des discontinuités des dérivées du tenseur électromagnétique $F_{\alpha\beta}$ ne se trouvent séparées sur aucune des caractéristiques précédentes; sur les caractéristiques (γ) où la propagation est simple, les propriétés algébriques analogues à celles des éléments de la relativité générale sont les moins nombreuses.

Je suis profondément reconnaissant à M. Lichnerowicz pour son aide et sa bienveillance; c'est grâce à lui que j'ai pu entreprendre ce travail et le mener à bien. Je remercie vivement M^me^ Y. Choquet-Bruhat et M. Leray qui m'ont toujours aimablement conseillé et encouragé. M. Dieudonné et M. Samuel m'ont donné des indications très précieuses en ce qui concerne la partie algébrique de ce travail; je les remercie bien sincèrement. Je prie M. Deheuvels de trouver ici mes remerciements en ce qui concerne ma seconde thèse.

TABLE DES MATIÈRES

Notations.

1° Pour les formules, une indication telle que :

(3) signifiera : se référer à la formule (3) du même paragraphe;

(4-2) signifiera : se référer à la formule (2) du paragraphe 4 du même chapitre;

(1-5-3) signifiera : se référer à la formule (3) du paragraphe 5 du chapitre I de la même partie.

2° Les références bibliographiques seront indiquées par un nombre entre crochets : [3].

3° Les notations pourront différer quelque peu de celles que j'ai utilisées dans des Notes ou des séminaires précédents.

4° On emploiera la convention de sommation d'Einstein, sauf indication spéciale.

Ainsi, si α varie de 0 à n, on aura :

$$l^\alpha u_\alpha = \sum_{\alpha=0}^{\alpha=n} l^\alpha u_\alpha$$

si A varie de 1 à m :

$$z^{A} y_{A} = \sum_{A=1}^{A=m} z^{A} y_{A}.$$

5° Un chiffre (1) renvoie à une note en bas de la page.

PREMIÈRE PARTIE

CARACTÉRISTIQUES MULTIPLES DES SYSTÈMES D'ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES LINÉAIRES ET A COEFFICIENTS CONSTANTS

CHAPITRE PREMIER

SOLUTIONS SÉRIES FORMELLES DES SYSTÈMES D'ÉQUATIONS DONT LES POLYNOMES DE DÉRIVATION SONT HOMOGÈNES ET DE MEMES DEGRÉS. DISCONTINUITÉS ET PROPAGATION DES ONDES

1. Facteurs invariants et matrices carrées de polynômes homogènes.

a) On considère l'anneau $\mathbf{R}[l_0, \ldots, l_n]$ des polynômes sur $\mathbf{R}$, à $(n+1)$ indéterminés l_α, $(0 \leqslant \alpha \leqslant n)$. Soit H′ un polynôme irréductible de l'anneau précédent.

Comme nous serons amenés à étudier des questions de divisibilité par H′, nous introduirons l'anneau de fractions Φ formé des fractions $\dfrac{Q}{Q'}$ où Q et Q′ appartiennent à $\mathbf{R}[l_0, \ldots l_n]$ et où Q′ est premier avec H′. Cet anneau est principal; ses seuls idéaux sont de la forme (H'^{χ}), (H′) étant l'idéal défini par le polynôme H′.

Soit maintenant une matrice carrée d'ordre m dont les éléments sont des polynômes homogènes de degré t de $\mathbf{R}[l_0, \ldots l_n]$

notés P_B^A. Nous appellerons cette matrice, matrice caractéristique, compte tenu de l'interprétation que nous en donnerons dans la suite.

La matrice (P_B^A) peut être considérée comme la matrice d'un endomorphisme du Φ-module Φ^m. Nous nous proposons de déterminer les facteurs invariants de cet endomorphisme, [1].

b) Nous indiquerons d'abord des notations et une identité concernant les mineurs de la matrice (P_B^A).

Le déterminant de la matrice sera noté H. Le cofacteur de l'élément P_B^A sera noté A_A^B. De même le cofacteur de l'élément P_D^C dans A_A^B sera noté A_{AC}^{BD}; D et C ne peuvent prendre respectivement les valeurs B et A. De la définition de H, on déduit que :

$$A_{AC}^{BD} = - A_{AC}^{DB} = - A_{CA}^{BD} = A_{CA}^{DB}.$$

On désignera de même par A_{ACE}^{BDF} le cofacteur de P_F^E dans A_{AC}^{BD} et ce cofacteur aura des propriétés d'antisymétrie analogues. Ainsi de suite, on aura des cofacteurs d'ordres de plus en plus petits, dont les indices supérieurs (ou inférieurs) seront tous distincts et qui possèderont des propriétés d'antisymétrie analogues.

k étant un nombre positif donné inférieur ou égal à *m*, nous surbarrerons les indices qui varient de 1 à k : $1 \leqslant \overline{A} \leqslant k$ et nous mettrons un chapeau sur ceux qui varient de $(k+1)$ à m : $k < \hat{C} \leqslant m$, (et $1 \leqslant B \leqslant m$). Indiquons une identité (cf. [2]) qui nous sera utile :

$$\text{(1)} \qquad H.(A_{12\ldots k}^{12\ldots k})^{k-1} = \text{dét}\left(A_{12\ldots(\overline{A}-1)(\overline{A}+1)\ldots k}^{12\ldots(\overline{D}-1)(\overline{D}+1)\ldots k}\right).$$

Le second membre est le déterminant de la matrice d'ordre k formé par les cofacteurs $A_{12\ldots(\overline{A}-1)(\overline{A}+1)\ldots k}^{12\ldots(\overline{D}-1)(\overline{D}+1)\ldots k}$, le cofacteur précédent étant l'élément commun à la $\overline{A}^{\text{ième}}$ ligne et à la $\overline{D}^{\text{ième}}$ colonne.

c) Nous construirons maintenant des matrices et des entiers qui nous permettront de calculer explicitement les facteurs invariants et qui nous serviront aussi par la suite.

Le déterminant H sera supposé non identiquement nul; c'est donc un polynôme homogène de degré *mt*.

H peut être décomposé de façon unique, à un facteur réel près, qu'on choisira une fois pour toutes, en un produit de puissances de polynômes homogènes distincts irréductibles sur **R**. *Nous supposerons que* H′ *est l'un d'eux*; on a :

$$H = (H')^{\nu}.H'',$$

où le polynôme H″ n'est pas divisible par H′; ν sera appelé la multiplicité totale de H′.

Nous allons maintenant nous intéresser à la divisibilité par H′ des cofacteurs de la matrice (P^{A}_{B}) définis au *b*). Soit $A^{12\dots k_1}_{12\dots k_1}$ un cofacteur tel que tous les cofacteurs ayant un nombre plus petit d'indices soient divisibles par H′ ou identiquement nuls et tel que lui-même ne soit pas divisible par H′ ni identiquement nul; (le choix de 1,2, ... k_1 comme indices de ce cofacteur pourra toujours être fait, en remplaçant convenablement au début la matrice (P^{A}_{B}) par une matrice déduite par permutation de lignes et de colonnes, ce que nous supposerons fait). Le nombre $k_1 (0 < k_1 \leqslant m)$ sera appelé le corang principal de la matrice (P^{A}_{B}) pour le polynôme H′; on dira encore pour abréger le corang principal de H′; si $k_1 = m$, on posera $A^{12\dots m}_{12\dots m} = 1$.

Les cofacteurs $A^{12\dots(\bar{D}-1)(\bar{D}+1)\dots k_1}_{12\dots(\bar{A}-1)(\bar{A}+1)\dots k_1}$ obtenus en bordant la matrice correspondant à $A^{12\dots k_1}_{12\dots k_1}$ ne sont pas tous identiquement nuls, en effet, on a

$$(2) \qquad H.(A^{12\dots k_1}_{12\dots k_1})^{k_1-1} = \det\left(A^{12\dots(\bar{D}-1)(\bar{D}+1)\dots k_1}_{12\dots(\bar{A}-1)(\bar{A}+1)\dots k_1}\right)$$

et le premier membre n'est pas identiquement nul. On désignera alors par χ_1 la plus grande puissance de H′, telle que $(H')^{\chi_1}$ divise ces $(k_1)^2$ cofacteurs $(\chi_1 \geqslant 1)$ et χ_1 sera appelée la multiplicité associée au corang k_1 : remarquons que *a priori* χ_1 peut dépendre du choix du déterminant $A^{12\dots k_1}_{12\dots k_1}$: on verra bientôt qu'il n'en est rien. Définissons alors les polynômes $\mathcal{A}^{\bar{A}}_{\bar{D}}$ par la formule :

$$\mathcal{A}^{\bar{A}}_{\bar{D}} = (-1)^{(\bar{A}+\bar{D})} \frac{A^{12\dots(\bar{D}-1)(\bar{D}+1)\dots k_1}_{12\dots(\bar{A}-1)(\bar{A}+1)\dots k_1}}{(H')^{\chi_1}},$$

(on ne somme pas $\bar{A}$ et $\bar{D}$ ici).

Ces polynômes ne sont pas tous divisibles par H′ ou identiquement nuls. Utilisant à nouveau la formule (1), on a :

$$(3) \qquad \mathrm{H}.(\mathrm{A}_{12\ldots k_1}^{12\ldots k_1})^{k_1-1} = \mathcal{A}(\mathrm{H}')^{k_1\chi_1}$$

où $\mathcal{A}$ est le déterminant de la matrice $\left(\mathcal{A}_{\overline{\mathrm{D}}}^{\overline{\mathrm{A}}}\right)$, qui n'est donc pas identiquement nul.

Regardons maintenant les cofacteurs de la matrice $\left(\mathcal{A}_{\overline{\mathrm{D}}}^{\overline{\mathrm{A}}}\right)$, qu'on désignera par des B. Soit $\mathrm{B}_{12\ldots k_2}^{12\ldots k_2}$ un cofacteur tel que tous les cofacteurs ayant un nombre plus petit d'indices soient divisibles par H′ ou identiquement nuls et que lui-même ne soit pas divisible par H′ ni identiquement nul. (On supposera encore la matrice $(\mathrm{P}_{\mathrm{B}}^{\mathrm{A}})$ écrite de façon à pouvoir prendre 1, 2, ... k_2 comme indices du B choisi). Le nombre k_2, $(0 \leqslant k_2 < k_1)$ sera appelé le 2^e^ corang de H′ : le cas $k_2 = 0$ correspond au fait que $\mathcal{A}$ ne soit pas divisible par H′ ; remarquons encore une fois que k_2 peut *a priori* dépendre du choix de $\mathrm{A}_{12\ldots k_1}^{12\ldots k_1}$.

Si $k_2 \neq 0$, convenons que des indices 2 fois surbarrés varient entre 1 et k_2 : $1 \leqslant \overline{\overline{\mathrm{A}}} \leqslant k_2$. Les coefficients $\mathrm{B}_{12\ldots(\overline{\overline{\mathrm{A}}}-1)(\overline{\overline{\mathrm{A}}}+1)\ldots k_2}^{12\ldots(\overline{\overline{\mathrm{D}}}-1)(\overline{\overline{\mathrm{D}}}+1)\ldots k_2}$ obtenus en bordant $\mathrm{B}_{12\ldots k_2}^{12\ldots k_2}$ ne sont pas tous identiquement nuls; en effet, on a, comme tout à l'heure :

$$(4) \qquad \mathcal{A}.(\mathrm{B}_{12\ldots k_2}^{12\ldots k_2})^{k_2-1} = \text{dét}\left(\mathrm{B}_{12\ldots(\overline{\overline{\mathrm{A}}}-1)(\overline{\overline{\mathrm{A}}}+1)\ldots k_2}^{12\ldots(\overline{\overline{\mathrm{D}}}-1)(\overline{\overline{\mathrm{D}}}+1)\ldots k_2}\right),$$

ou le premier membre n'est pas identiquement nul. On désignera par χ_2 la plus grande puissance de H′ telle que $(\mathrm{H}')^{\chi_2}$ divise ces $(k_2)^2$ coefficients $(\chi_2 \geqslant 1)$ et χ_2 sera la multiplicité associée au 2^e^ corang; elle peut dépendre *a priori* du choix de $\mathrm{B}_{12\ldots k_2}^{12\ldots k_2}$.

Si $k_2 = 0$, on ne définira pas de multiplicité associée à k_2. Remarquons que dans ce cas, d'après (3), on a :

$$\nu = k_1\chi_1.$$

Revenons à $k_2 \neq 0$. On définit alors les polynômes $\mathcal{B}_{\overline{\overline{\mathrm{D}}}}^{\overline{\overline{\mathrm{A}}}}$ par la formule :

$$\mathcal{B}_{\overline{\overline{\mathrm{D}}}}^{\overline{\overline{\mathrm{A}}}} = (-1)^{(\overline{\overline{\mathrm{A}}}+\overline{\overline{\mathrm{D}}})} \frac{\mathrm{B}_{12\ldots(\overline{\overline{\mathrm{A}}}-1)(\overline{\overline{\mathrm{A}}}+1)\ldots k_2}^{12\ldots(\overline{\overline{\mathrm{D}}}-1)(\overline{\overline{\mathrm{D}}}+1)\ldots k_2}}{(\mathrm{H}')^{\chi_2}},$$

(on ne somme pas en $\overline{\overline{\mathrm{A}}}$ et $\overline{\overline{\mathrm{D}}}$).

Ces polynômes ne sont pas tous divisibles par H′ où identiquement nuls. Utilisant (4), on a :

$$\mathcal{A}.(B^{12\ldots k_2}_{12\ldots k_2})^{k_2-1} = \mathcal{B}.(H')^{k_2\chi_2} \tag{5}$$

où $\mathcal{B}$ est le déterminant de la matrice $\left(\mathcal{B}^{\bar{\bar{A}}}_{\bar{\bar{D}}}\right)$; $\mathcal{B}$ n'est donc pas identiquement nul.

En reportant dans (3), on a :

$$H.(A^{12\ldots k_1}_{12\ldots k_1})^{k_1-1}.(B^{12\ldots k_2}_{12\ldots k_2})^{k_2-1} = \mathcal{B}.(H')^{k_1\chi_1+k_2\chi_2}. \tag{6}$$

On considère alors de même $\left(\mathcal{B}^{\bar{\bar{A}}}_{\bar{\bar{D}}}\right)$; on définit de même k_3. Si $k_3 = 0$, on déduit de (6) que : $\nu = k_1\chi_1 + k_2\chi_2$. Sinon on définit χ_3.

Ainsi de suite on définira les corangs successifs k_i et leurs multiplicités χ_i jusqu'à ce qu'on rencontre un corang nul; pour ce dernier on ne définira pas de multiplicité; on est sûr que le processus est limité puisque chaque corang est strictement inférieur au précédent.

Nous retiendrons le résultat suivant.

La multiplicité totale de H′ est égale à la somme des produits de ses corangs par les multiplicités associées :

$$\nu = \sum_{i=1}^{i=I} \chi_i k_i.$$

I étant le dernier indice i pour lequel k_i ne soit pas nul.

Nous retrouverons et interprèterons cette formule en considérant les facteurs invariants de (P^A_B).

d) Pour le calcul des facteurs invariants et pour les autres calculs, on aura besoin de quelques formules concernant les mineurs de (P^A_B), que nous indiquerons ici :

E étant différent de B, on a la formule connue :

$$A^B_A.\delta^D_E = P^C_E A^{BD}_{AC} \tag{7}$$

où δ^D_E est le symbole de Kronecker.

On aura de même plus généralement :

$$A^{12\ldots k}_{12\ldots k}.\delta^{\hat{C}}_{\hat{B}} = A^{12\ldots k\hat{C}}_{12\ldots k\hat{A}}.P^{\hat{A}}_{\hat{B}}. \tag{8}$$

Et de même :

$$A^{12\dots(\overline{D}-1)(\overline{D}+1)\dots k}_{12\dots(\overline{A}-1)(\overline{A}+1)\dots k}\cdot\delta^{E}_{\overline{A}} = P^{E}_{B}\cdot A^{12\dots(\overline{D}-1)(\overline{D}+1)\dots kB}_{12\dots(\overline{A}-1)(\overline{A}+1)\dots k\overline{A}}$$

où E peut prendre les valeurs : $\overline{A}$ ou n'importe quel $\hat{C}$, et B peut prendre les valeurs : $\overline{D}$ ou n'importe quel $\hat{C}$.

Ainsi si $E = \overline{A}$, on aura, (le crochet indique qu'on ne somme pas la lettre considérée) :

$$A^{12\dots(\overline{D}-1)(\overline{D}+1)\dots k}_{12\dots(\overline{A}-1)(\overline{A}+1)\dots k} = P^{[\overline{A}]}_{B}A^{12\dots(\overline{D}-1)(\overline{D}+1)\dots kB}_{12\dots(\overline{A}-1)(\overline{A}+1)\dots k\overline{A}}.$$

Soit à l'aide des antisymétriques :

$$(9)\qquad A^{12\dots(\overline{D}-1)(\overline{D}+1)\dots k}_{12\dots(\overline{A}-1)(\overline{A}+1)\dots k} = (-1)^{(\overline{A}+\overline{D})}P^{\overline{A}}_{B}A^{12\dots(\overline{D}-1)B(\overline{D}+1)\dots k}_{12\dots\dots\dots\dots\dots\dots k}$$

formule où l'on ne somme pas évidemment dans le 2e membre en $\overline{A}$ et $\overline{D}$. Si $E = \hat{C}$, on aura de même :

$$(10)\qquad P^{\hat{C}}_{B}A^{12\dots(\overline{D}-1)B(\overline{D}+1)\dots k}_{12\dots\dots\dots\dots\dots\dots k} = 0.$$

Nous aurons aussi la formule :

$$A^{12\dots(\overline{D}-1)\hat{C}(\overline{D}+1)\dots k}_{12\dots\dots\dots\dots\dots\dots k} = P^{B}_{[\overline{D}]}A^{12\dots(\overline{D}-1)\hat{C}(\overline{D}+1)\dots k[\overline{D}]}_{12\dots\dots\dots\dots\dots\dots kB}$$

qu'on peut encore écrire :

$$(11)\qquad A^{12\dots(\overline{D}-1)\hat{C}(\overline{D}+1)\dots k}_{12\dots\dots\dots\dots\dots\dots k} = -\,P^{\hat{B}}_{\overline{D}}A^{12\dots k\hat{C}}_{12\dots k\hat{B}}.$$

On a aussi, s'il y a lieu, les formules obtenues en échangeant le rôle des lignes et des colonnes.

e) Nous calculerons alors les facteurs invariants de l'endomorphisme de Φ^m défini par (P^A_B) en remplaçant successivement la matrice (P^A_B) par des matrices équivalentes obtenues à l'aide des opérations élémentaires décrites, par exemple dans [3].

Ce calcul facile utilise les formules du *d*). Nous donnerons les principales étapes, en nous bornant, pour simplifier les notations, au cas $k_3 = 0$. On trouve ainsi que :

$$(12)\qquad (P^{A}_{B}) = (\pi'^{A}_{C})\cdot(S^{C}_{B})$$

où :

$$
(\pi'^{A}_{C}) = \begin{array}{l}
\\
k_2 \text{ lignes} \\
k_1 - k_2 \text{ lignes} \\
m - k_1 \text{ lignes}
\end{array}
\begin{array}{ccc}
\overbrace{\qquad\qquad}^{k_2 \text{ colonnes}} & \overbrace{\qquad\qquad\qquad}^{k_1 - k_2 \text{ colonnes}} & \overbrace{\qquad\qquad\qquad}^{m - k_1 \text{ colonnes}} \\
\dfrac{(H')^{\chi_1+\chi_2}\delta^{\bar{\bar{A}}}_{\bar{\bar{C}}}}{A^{12\dots k_1}_{12\dots k_1}\cdot B^{12\dots k_2}_{12\dots k_2}} & -\dfrac{(H')^{\chi_1} B^{12\dots\dots\dots k_2}_{12\dots(\bar{\bar{A}}-1)\hat{C}(\bar{\bar{A}}+1)\dots k_2}}{A^{12\dots k_1}_{12\dots k_1}\cdot B^{12\dots k_2}_{12\dots k_2}} & -\dfrac{A^{12\dots\dots\dots k_1}_{12\dots(\bar{\bar{A}}-1)\hat{C}(\bar{\bar{A}}+1)\dots k_1}}{A^{12\dots k_1}_{12\dots k_1}} \\
0 & \dfrac{(H')^{\chi_1}\delta^{\hat{\hat{A}}}_{\hat{\hat{C}}}}{A^{12\dots k_1}_{12\dots k_1}} & -\dfrac{A^{12\dots\dots\dots k_1}_{12\dots(\hat{\hat{A}}-1)\hat{C}(\hat{\hat{A}}+1)\dots k_1}}{A^{12\dots k_1}_{12\dots k_1}} \\
0 & 0 & \delta^{\hat{A}}_{\hat{C}}
\end{array}
$$

$(\pi'^{\mathrm{A}}_{\mathrm{C}})$ est ici écrite à l'aide de sous-matrices; un élément tel que $\mathrm{B}^{12\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots k_2}_{12\ldots(\bar{\bar{\mathrm{A}}}-1)\hat{\hat{\mathrm{C}}}(\bar{\bar{\mathrm{A}}}+1)\ldots k_2}$ par exemple est commun à la $\bar{\bar{\mathrm{A}}}^{\text{ième}}$ ligne et à la $\hat{\hat{\mathrm{C}}}^{\text{ième}}$ colonne, (un indice tel que $\hat{\hat{\mathrm{C}}}$ peut prendre des valeurs telles que : $k_2 < \hat{\hat{\mathrm{C}}} \leqslant k_1$). Les sous-matrices « diagonales » sont-elles mêmes diagonales; les sous-matrices au-dessous de la diagonale sont nulles. On a aussi :

$$
(\mathrm{S}^{\mathrm{C}}_{\mathrm{B}}) = \begin{array}{r|ccc|}
 & \overbrace{}^{\substack{k_2\\ \text{colonnes}}} & \overbrace{}^{\substack{k_1-k_2\\ \text{colonnes}}} & \overbrace{}^{\substack{m-k_1\\ \text{colonnes}}} \\
k_2 \text{ lignes } \{ & \mathcal{B}^{\bar{\bar{\mathrm{C}}}}_{\bar{\bar{\mathrm{B}}}} & 0 & 0 \\
k_1-k_2 \text{ lignes } \{ & \mathcal{A}^{\hat{\hat{\mathrm{C}}}}_{\bar{\bar{\mathrm{B}}}} & \mathcal{A}^{\hat{\hat{\mathrm{C}}}}_{\hat{\hat{\mathrm{B}}}} & 0 \\
m-k_1 \text{ lignes } \{ & \mathrm{P}^{\hat{\mathrm{C}}}_{\bar{\bar{\mathrm{B}}}} & \mathrm{P}^{\hat{\mathrm{C}}}_{\hat{\hat{\mathrm{B}}}} & \mathrm{P}^{\hat{\mathrm{C}}}_{\hat{\mathrm{B}}}
\end{array}
$$

Le déterminant de $(\mathrm{S}^{\mathrm{C}}_{\mathrm{B}})$ est égal à $\mathrm{A}^{12\ldots k_1}_{12\ldots k_1}.\mathrm{B}^{12\ldots k_2}_{12\ldots k_2}.\mathcal{B}$ et, par suite est bien un élément inversible de Φ; $(\mathrm{S}^{\mathrm{C}}_{\mathrm{B}})$ est donc elle-même inversible et par suite les matrices (P) et (π') sont équivalentes.

On peut alors remplacer (π') par une matrice diagonale équivalente (π) en retranchant d'abord de chacune des k_2 premières lignes des multiples convenables des $(m-k_2)$ dernières, puis de chacune des k_1 premières lignes des multiples convenables des $(m-k_1)$ dernières.

On obtient finalement la matrice (π) équivalente à (P) et diagonale :

$$
(\pi^{\mathrm{A}}_{\mathrm{B}}) = \begin{array}{r|ccc|}
 & \overbrace{}^{\substack{k_2\\ \text{colonnes}}} & \overbrace{}^{\substack{k_1-k_2\\ \text{colonnes}}} & \overbrace{}^{\substack{m-k_1\\ \text{colonnes}}} \\
k_2 \text{ lignes } \{ & (\mathrm{H}')^{\chi_1+\chi_2}\delta^{\bar{\bar{\mathrm{A}}}}_{\bar{\bar{\mathrm{B}}}} & 0 & 0 \\
k_1-k_2 \text{ lignes } \{ & 0 & (\mathrm{H}')^{\chi_1}\delta^{\hat{\hat{\mathrm{A}}}}_{\hat{\hat{\mathrm{B}}}} & 0 \\
m-k_1 \text{ lignes } \{ & 0 & 0 & \delta^{\hat{\mathrm{A}}}_{\hat{\mathrm{B}}}
\end{array}
$$

Sous cette forme les facteurs invariants sont en évidence. Ce sont les idéaux définis par les éléments de la diagonale principale.

Les facteurs invariants étant déterminés de façon unique, [1] (p. 95), on en déduit immédiatement que, k_1, χ_1, k_2, χ_2, ... sont déterminés de façon unique.

La formule finale du c) exprime simplement que le produit des facteurs invariants détermine la plus haute puissance de H′ qui divise H, (cf. [1], p. 95).

On peut résumer ce qui précède par la *proposition* suivante :

Proposition. — Les *m facteurs invariants de la matrice* (P^{A}_{B}) *considérée comme une matrice sur l'anneau* Φ *localisé* [4] *de l'anneau des polynômes en les* l_α *par rapport à l'idéal premier défini par* H′ *sont déterminés de la façon suivante :*

$m - k_1$ *d'entre eux sont égaux à l'idéal unité de* Φ.
$k_1 - k_2$ *d'entre eux sont égaux à l'idéal* (H'^{χ_1}) *de* Φ.
. . . .
$k_j - k_{j+1}$ *d'entre eux sont égaux à l'idéal* $(H'^{\chi_1+\chi_2+\cdots+\chi_j})$ *de* Φ.
. . . .
k_l *d'entre eux sont égaux à l'idéal* $(H'^{\chi_1+\chi_2+\cdots+\chi_l})$ *de* Φ.
Les k_j *sont les corangs et les* χ_j *les multiplicités définis au* c).

f) Il sera commode d'introduire des fractions rationnelles construites avec les polynômes précédents et qui nous serviront d'intermédiaires dans les calculs. Ainsi on posera :

$$\mathcal{A}'^{\bar{A}}_{\bar{D}} = \frac{\mathcal{A}^{\bar{A}}_{\bar{D}}}{A^{12\ldots k_1}_{12\ldots k_1}}.$$

On formera la matrice $\left(\mathcal{A}'^{\bar{A}}_{\bar{D}}\right)$; ses déterminants cofacteurs seront notés par des B′. On voit immédiatement qu'on aura par exemple :

$$\frac{B'^{12\ldots(\bar{\bar{D}}-1)(\bar{\bar{D}}+1)\ldots k_2}_{12\ldots(\bar{\bar{A}}-1)(\bar{\bar{A}}+1)\ldots k_2}}{B'^{12\ldots k_2}_{12\ldots k_2}} = \frac{B^{12\ldots(\bar{\bar{D}}-1)(\bar{\bar{D}}+1)\ldots k_2}_{12\ldots(\bar{\bar{A}}-1)(\bar{\bar{A}}+1)\ldots k_2}}{B^{12\ldots k_2}_{12\ldots k_2}} \cdot \frac{1}{A^{12\ldots k_1}_{12\ldots k_1}}.$$

d'où en divisant par $[(H')^{\chi_2}(-1)^{(\bar{\bar{A}}+\bar{\bar{D}})}]$, ce qui définit $\mathcal{B}'^{\bar{\bar{A}}}_{\bar{\bar{D}}}$, on obtiendra :

$$\mathcal{B}'^{\bar{\bar{\mathrm{A}}}}_{\bar{\bar{\mathrm{D}}}} = \frac{\mathcal{B}^{\bar{\bar{\mathrm{A}}}}_{\bar{\bar{\mathrm{D}}}}}{\mathrm{A}^{12\ldots k_1}_{12\ldots k_1}.\mathrm{B}^{12\ldots k_2}_{12\ldots k_2}}.$$

On aura aussi :

$$\frac{\mathrm{B}'^{12\ldots(\bar{\bar{\mathrm{D}}}-1)\hat{\mathrm{C}}(\bar{\bar{\mathrm{D}}}+1)\ldots k_2}_{12\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots k_2}}{\mathrm{B}'^{12\ldots k_2}_{12\ldots k_2}} = \frac{\mathrm{B}^{12\ldots(\bar{\bar{\mathrm{D}}}-1)\hat{\mathrm{C}}(\bar{\bar{\mathrm{D}}}+1)\ldots k_2}_{12\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots k_2}}{\mathrm{B}^{12\ldots k_2}_{12\ldots k_2}}.$$

On formera la matrice $\left(\mathcal{B}'^{\bar{\bar{\mathrm{A}}}}_{\bar{\bar{\mathrm{D}}}}\right)$; on verra de même que :

$$\mathcal{C}'^{\bar{\bar{\bar{\mathrm{A}}}}}_{\bar{\bar{\bar{\mathrm{D}}}}} = \frac{\mathcal{C}^{\bar{\bar{\bar{\mathrm{A}}}}}_{\bar{\bar{\bar{\mathrm{D}}}}}}{\mathrm{A}^{12\ldots k_1}_{12\ldots k_1}.\mathrm{B}^{12\ldots k_2}_{12\ldots k_2}.\mathrm{C}^{12\ldots k_3}_{12\ldots k_3}}, \quad (1 \leqslant \bar{\bar{\bar{\mathrm{A}}}} \leqslant k_3)$$

et ainsi de suite.

2. Hyperplans caractéristiques.

a) Soit E un espace vectoriel sur **R** à $(n+1)$ dimensions. L'espace vectoriel des tenseurs contravariants symétriques d'ordre t sur E est isomorphe à l'espace vectoriel des polynômes homogènes de degré t par rapport aux $(n+1)$ indéterminées l_α. Au tenseur de composantes $\mathrm{P}^{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_t}$ dans une base donnée correspond le polynôme $\mathrm{P}^{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_t}l_{\alpha_1}l_{\alpha_2}\ldots l_{\alpha_t}$. Nous substituerons alors aux indéterminées l_α les composantes l_α d'une forme de l'espace dual E* dans la base duale; on obtient ainsi une fonction sur E* et à valeurs scalaires. La matrice caractéristique s'écrit donc $(\mathrm{P}^{\mathrm{A}}_{\mathrm{B}}) = (\mathrm{P}^{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_t,\mathrm{A}}_{\mathrm{B}}l_{\alpha_1}l_{\alpha_2}\ldots l_{\alpha_t})$.

La classification du § 1 et les nombres ν, k_i, χ_i introduits ne dépendent pas du choix de la base de E. En résumé, les expressions précédentes sont invariantes dans les changements de base du groupe linéaire de E.

b) On désignera par P l'hyperplan d'équation $l_\alpha x^\alpha = 0$, dans une base donnée, (l_α non tous nuls). Si H, par exemple, est une des fonctions polynômes précédentes, on notera, (sans inconvénients), H(P) sa valeur pour la forme l_α.

On dira qu'un plan P est caractéristique s'il satisfait à la condition

$$\mathrm{H}(\mathrm{P}) = 0$$

P étant caractéristique, on dira que P n'est pas singulier s'il satisfait aux conditions suivantes.

I) H étant décomposé en facteurs irréductibles comme au § 1, P annule un des facteurs H' et n'annule aucun autre facteur, en résumé :

$$\mathrm{H} = (\mathrm{H}')^{\nu} . \mathrm{H}'',$$
$$\mathrm{H}'(\mathrm{P}) = 0, \qquad \mathrm{H}''(\mathrm{P}) \neq 0.$$

II) H' étant maintenant choisi, P n'est pas un plan tangent singulier au cône de sommet l'origine défini tangentiellement par $\mathrm{H}' = 0$, c'est-à-dire que le « vecteur conjugué de P » par rapport au cône (H') n'est pas nul :

$$\vec{l} : l^{\alpha} = \frac{\partial \mathrm{H}'}{\partial l_{\alpha}}(\mathrm{P}), \qquad \vec{l} \neq 0.$$

III) P n'est pas exceptionnel pour l'une des classifications du § 1 *c*). Plus précisément, si on a, par exemple k_1 et k_2 associés aux multiplicités χ_1 et χ_2, k_3 étant nul, on a, par exemple :

$$\mathrm{A}^{12\ldots k_1}_{12\ldots k_1}(\mathrm{P}) \neq 0, \qquad \mathrm{B}^{12\ldots k_2}_{12\ldots k_2}(\mathrm{P}) \neq 0).$$

P étant un hyperplan caractéristique non singulier, la droite définie par le vecteur $\vec{l}$ sera appelée bicaractéristique de P. P est tangent le long de cette bicaractéristique au cône (H') considéré.

3. Système différentiel et solutions séries formelles.

a) L'espace vectoriel sur **R** des suites de tenseurs covariants symétriques d'ordre croissant sur E est isomorphe à l'espace vectoriel des séries formelles par rapport aux $(n + 1)$ indéterminées x^{α}. A la suite de tenseurs de composantes Y, Y_{α_1}, ..., $\mathrm{Y}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_p}$, ..., dans une base donnée de E correspond la série formelle $y(x^{\alpha})$ par rapport aux indéterminées x^{α} :

$$y(x^{\alpha}) = \mathrm{Y} + \mathrm{Y}_{\alpha_1} x^{\alpha_1} + \cdots + \mathrm{Y}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_p} x^{\alpha_1} x^{\alpha_2} \ldots x^{\alpha_p} + \cdots.$$

Si on effectue un changement de base dans E, on obtient de nouvelles composantes pour les tenseurs, soit : Y, $\mathrm{Y}_{\alpha'_1}$, ..., $\mathrm{Y}_{\alpha'_1\alpha'_2\ldots\alpha'_p}$, ... convenons alors de substituer aux indéterminées

x^α dans $y(x^\alpha)$, les indéterminées $x^{\alpha'}$ déduites par la transformation linéaire correspondant au changement de base; la série obtenue $y(x^{\alpha'})$ est égale à la série obtenue en faisant correspondre aux nouvelles composantes Y l'expression :

$$Y + Y_{\alpha'_1} x^{\alpha'_1} + \cdots + Y_{\alpha'_1\alpha'_2\ldots\alpha'_p} x^{\alpha'_1} x^{\alpha'_2} \ldots x^{\alpha'_p} + \cdots.$$

On peut considérer qu'une quelconque de ces séries $y(x^\alpha)$, $y(x^{\alpha'})$, ..., repsésente de façon équivalente, par rapport à une base de E, ce que nous appellerons, un peu abusivement, une série formelle sur E, soit $y(x)$.

Soit F un module à m dimensions sur l'anneau commutatif de ces séries formelles. Nous noterons dans une base donnée d'éléments f_B, $(1 \leqslant B \leqslant m)$, par y^B les composantes d'un élément quelconque de F; les y^B sont donc des séries formelles.

F peut être doué d'une structure d'espace vectoriel sur $\mathbf{R}$, on désignera par F′ l'espace vectoriel sur $\mathbf{R}$ engendré par les f_B. Un tenseur fixe symétrique en α, élément du produit tensoriel $(E\otimes)^t \otimes F' \otimes F'^*$ a pour composantes les nombres :

$$P_B^{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_t,\, A}.$$

Nous étudierons le système différentiel aux inconnues y^B défini par :

$$(1) \qquad P_B^{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_t,\, A} \partial_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_t} y^B = 0, \qquad \text{où l'on a posé} \qquad \partial_\alpha = \frac{\partial}{\partial x^\alpha}.$$

La matrice caractéristique (P_B^A) déjà considérée sera bien la matrice de ce système.

b) Effectuons un changement de coordonnées linéaires tel que P ait pour équation $x^0 = 0$. La série y^B peut s'écrire sous la forme :

$$(2) \qquad y^B = Y_0^B + Y_1^B x^0 + \cdots + Y_p^B \frac{(x^0)^p}{p\,!} + \cdots$$

où les Y_p^B sont des séries formelles en $x^1, x^2, \ldots x^n$.

On notera désormais par une petite lettre latine un indice qui varie de 1 à n; ainsi : $1 \leqslant i \leqslant n$.

On appellera données de Cauchy sur P les mt séries Y_0^B, Y_1^B, ..., Y_{t-1}^B. Nous nous posons le problème de déterminer toutes les solutions Y^B correspondant à des données de Cauchy déterminées, essentiellement lorsque le plan P est caractéristique et non singulier.

On verra par la suite qu'il n'y a pas grande restriction à prendre ces données de Cauchy nulles; c'est ce que nous ferons jusqu'à indication contraire.

c) On déduit de (1) et (2) que les séries Y^B_r inconnues ($r \geqslant t$) satisfont au système :

$$\sum_{q=0}^{q=t} C^q_t P^{00\ldots 0 i_1 i_2 \ldots i_q,\, A} . \partial_{i_1 i_2 \ldots i_q} Y^B_{t+p-q} = 0$$

où C^q_t représente un coefficient de la formule du binôme.

A l'aide de la formule de Taylor pour les polynômes, on a encore :

$$(3) \quad \sum_{q=0}^{q=p} \frac{1}{q\,!} [\partial^{i_1 i_2 \ldots i_q}(P^{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_t,\, A}_B l_{\alpha_1} l_{\alpha_2} \ldots l_{\alpha_t})](P) \partial_{i_1 i_2 \ldots i_q} Y^B_{t+p-q} = 0$$

où on a posé : $\partial^i = \dfrac{\partial}{\partial l_i}$ et où p prend toutes les valeurs entières positives ou nulles.

4. Transformation du système d'équations (3-3) sur un hyperplan caractéristique.

a) Indiquons d'abord une formule qui nous servira dans les calculs suivants. Soient A et B deux fonctions des variables l_i, continûment différentiables autant de fois qu'il sera nécessaire pour que les dérivées introduites soient échangeables. Soit d'autre part Y une série formelle en x^1, x^2, ... x^n. On démontre par récurrence la formule suivante qui généralise la formule de Leibnitz :

$$\partial^{i_1 i_2 \ldots i_q}(A . B) . \partial_{i_1 i_2 \ldots i_q} Y = \sum_{r=0}^{r=q} C^r_q \partial^{i_1 i_2 \ldots i_r} A . \partial^{i_{r+1} i_{r+2} \ldots i_q} B . \partial_{i_1 i_2 \ldots i_q} Y.$$

b) Supposons donc que P soit un hyperplan caractéristique non singulier satisfaisant à $H'(P) = 0$ et d'équation $x^0 = 0$. H' a pour corang principal k_1.

Nous allons dans ce paragraphe transformer le système d'équations aux dérivées partielles (3-3) en s'efforçant de séparer les inconnues. Le résultat remarquable de ce calcul sera que les Y^B_p satisfont en réalité simplement à des équations différentielles le long de la bicaractéristique dans un sens que l'on précisera.

On a d'abord pour $p = 0$

$$P_{B}^{00\ldots 0,\,A} Y_t^B = 0.$$

Soit en utilisant les notations du § 1 et en mettant en évidence les équations principales et les inconnues principales :

$$P_{\hat{B}}^{00\ldots 0,\,\hat{A}} Y_t^{\hat{B}} = - P_{\overline{D}}^{00\ldots 0,\,\hat{A}} Y_t^{\overline{D}}.$$

Multiplions par $A_{12\ldots k_1\hat{A}}^{12\ldots k_1\hat{C}}(P)$ et sommons en utilisant (1-8) et (1-11), on obtient :

$$A_{12\ldots k_1}^{12\ldots k_1}(P) \,.\, Y_t^{\hat{C}} = A_{12\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots k_1}^{12\ldots(\overline{D}-1)\,\hat{C}\,(\overline{D}+1)\ldots k_1}(P) \,.\, Y_t^{\overline{D}};$$

dans le second membre, on somme en $\overline{D}$, c'est-à-dire qu'on fait la somme des produits de chaque $Y_t^{\overline{D}}$ par le coefficient

$$A_{12\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots k_1}^{12\ldots(\overline{D}-1)\,\hat{C}\,(\overline{D}+1)\ldots k_1}$$

correspondant. On a donc trouvé :

$$Y_t^{\hat{C}} = \frac{A_{12\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots k_1}^{12\ldots(\overline{D}-1)\,\hat{C}\,(\overline{D}+1)\ldots k_1}}{A_{12\ldots k_1}^{12\ldots k_1}}(P) \,.\, Y_t^{\overline{D}}. \tag{1}$$

On rappelle que le (P) signifie qu'on prend les valeurs pour le plan P.

Nous allons remplacer $Y_t^{\hat{C}}$ par cette valeur dans l'équation (3-3) correspondant à $p = 1$, soit :

$$P_{B}^{00\ldots 0,\,A} Y_{t+1}^B + [\partial^i(P_{B}^{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_t,\,A} l_{\alpha_1} l_{\alpha_2} \ldots l_{\alpha_t})]\,(P) \,.\, \partial_i Y_t^B = 0.$$

On a donc :

$$\begin{aligned} &P_{B}^{00\ldots 0,\,A} Y_{t+1}^B \\ &\quad + \left[\partial^i(P_{\hat{C}}^{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_t,\,A} l_{\alpha_1} l_{\alpha_2} \ldots l_{\alpha_t}) \,.\, \frac{A_{12\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots k_1}^{12\ldots(\overline{D}-1)\,\hat{C}\,(\overline{D}+1)\ldots k_1}}{A_{12\ldots k_1}^{12\ldots k_1}}\right](P) \,.\, \partial_i Y_t^{\overline{D}} \\ &\quad + [\partial^i(P_{\overline{D}}^{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_t,\,A} l_{\alpha_1} l_{\alpha_2} \ldots l_{\alpha_t})]\,(P) \,.\, \partial_i Y_t^{\overline{D}} = 0. \end{aligned}$$

Soit en réunissant les termes en $Y_t^{\overline{D}}$:

$$\begin{aligned} &P_{B}^{00\ldots 0,\,A} Y_{t+1}^B \\ &+ \left[\partial^i(P_{B}^{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_t,\,A} l_{\alpha_1} l_{\alpha_2} \ldots l_{\alpha_t}) \,.\, \frac{A_{12\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots k_1}^{12\ldots(\overline{D}-1)\,B\,(\overline{D}+1)\ldots k_1}}{A_{12\ldots k_1}^{12\ldots k_1}}\right](P) \,.\, \partial_i Y_t^{\overline{D}} = 0 \end{aligned}$$

Intégrons par parties le 2^e^ terme, on a :

$$P_{B}^{00\dots 0,\,A}Y_{t+1}^{B}+\left[\partial^{i}\left(P_{B}^{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_t,\,A}l_{\alpha_1}l_{\alpha_2}\dots l_{\alpha_t}.\frac{A_{12\dots\dots\dots\dots k_1}^{12\dots(\overline{D}-1)B(\overline{D}+1)\dots k_1}}{A_{12\dots k_1}^{12\dots k_1}}\right)\right.$$
$$\left.-P^{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_t,\,A}l_{\alpha_1}l_{\alpha_2}\dots l_{\alpha_t}.\partial^{i}\left(\frac{A_{12\dots\dots\dots\dots k_1}^{12\dots(\overline{D}-1)B(\overline{D}+1)\dots k_1}}{A_{12\dots k_1}^{12\dots k_1}}\right)\right](P).\partial_i Y_t^{\overline{D}}=0.$$

Les déterminants caractéristiques de ce système en Y_{t+1}^{B} sont nuls; celui relatif à la $\overline{A}^{\text{ième}}$ équation non principale donnera la condition :

$$\left\{A_{12\dots(\overline{A}-1)F(\overline{A}+1)\dots k_1}^{12\dots\dots\dots\dots k_1}.\left[\partial^{i}\left(P_{B}^{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_t,\,F}l_{\alpha_1}l_{\alpha_2}\dots l_{\alpha_t}.\frac{A_{12\dots\dots\dots\dots k_1}^{12\dots(\overline{D}-1)B(\overline{D}+1)\dots k_1}}{A_{12\dots k_1}^{12\dots k_1}}\right)\right.\right.$$
$$\left.\left.-P_{B}^{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_t,\,F}l_{\alpha_1}l_{\alpha_2}\dots l_{\alpha_t}.\partial^{i}\left(\frac{A_{12\dots\dots\dots\dots k_1}^{12\dots(\overline{D}-1)B(\overline{D}+1)\dots k_1}}{A_{12\dots k_1}^{12\dots k_1}}\right)\right]\right\}(P).\partial_i Y_t^{\overline{D}}=0.$$

Cette équation se simplifie en utilisant (1-9) et (1-10); on a, en divisant par $A_{12\dots k_1}^{12\dots k_1}(P)$:

$$(2)\quad (-1)^{(\overline{A}+\overline{D})}\left[\partial^{i}\left(\frac{A_{12\dots(\overline{A}-1)(\overline{A}+1)\dots k_1}^{12\dots(\overline{D}-1)(\overline{D}+1)\dots k_1}}{A_{12\dots k_1}^{12\dots k_1}}\right)\right](P).\partial_i Y_t^{\overline{D}}=0.$$

Le système des équations principales s'écrit en utilisant (1-10) transposée :

$$P_{\hat{B}}^{00\dots 0,\,\hat{A}}Y_{t+1}^{\hat{B}}=-P_{\overline{D}}^{00\dots 0,\,\hat{A}}Y_{t+1}^{\overline{D}}$$
$$+P_{\hat{F}}^{00\dots 0,\,\hat{A}}\left[\partial^{i}\left(\frac{A_{12\dots\dots\dots\dots k_1}^{12\dots(\overline{D}-1)\hat{F}(\overline{D}+1)\dots k_1}}{A_{12\dots k_1}^{12\dots k_1}}\right)\right](P).\partial_i Y_t^{\overline{D}}.$$

Résolvons en multipliant par $A_{12\dots k_1\hat{A}}^{12\dots k_1\hat{C}}(P)$, utilisant (1-8) et 1-11) :

$$(3)\quad Y_{t+1}^{\hat{C}}=\left(\frac{A_{12\dots\dots\dots\dots k_1}^{12\dots(\overline{D}-1)\hat{C}(\overline{D}+1)\dots k_1}}{A_{12\dots k_1}^{12\dots k_1}}\right)(P).\,Y_{t+1}^{\overline{D}}$$
$$+\left[\partial^{i}\left(\frac{A_{12\dots\dots\dots\dots k_1}^{12\dots(\overline{D}-1)\hat{C}(\overline{D}+1)\dots k_1}}{A_{12\dots k_1}^{12\dots k_1}}\right)\right](P).\partial_i Y_t^{\overline{D}}.$$

D'après cette démonstration, on remarque que l'ensemble des formules (4-1), (4-2), (4-3) est équivalent au système des équations du système (3-3), correspondant à

$$p = 0 \qquad \text{et} \qquad p = 1.$$

Pour simplifier les notations, on posera dans la suite :

$$(P_B^{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_t,\,A} l_{\alpha_1} l_{\alpha_2} \ldots l_{\alpha_t})\,(P) = P_B^A$$

et on supprimera (P) dans les formules en se souvenant que les valeurs des polynômes en l_α et de leurs dérivées sont prises pour le plan P.

Nous allons maintenant, par récurrence, démontrer des formules qui généralisent (4-1), (4-2), (4-3). Rappelons d'abord (3-3) sous la forme :

$$(4) \qquad P_B^A Y_{t+l}^B + \sum_{q=1}^{q=l} \frac{1}{q\,!}\, \partial^{i_1 i_2 \ldots i_q}(P_B^A)\,.\,\partial_{i_1 i_2 \ldots i_q} Y_{t+l-q}^B = 0$$

valable pour tout $l \geqslant 0$, en convenant que pour $l = 0$ la somme est nulle.

p étant un entier supérieur à 1, admettons que le système formé par les équations (4) correspondant à : $0 \leqslant l \leqslant p - 1$ soit équivalent au système ci-dessous :

1°

(5)

$$(-1)^{(\bar{A}+\bar{D})}\,.\sum_{s=1}^{s=p-u} \frac{1}{s\,!}\,\partial^{i_1 i_2 \ldots i_s}\left(\frac{A_{12\ldots(\bar{A}-1)(\bar{A}+1)\ldots k_1}^{12\ldots(\bar{D}-1)(\bar{D}+1)\ldots k_1}}{A_{12\ldots k_1}^{12\ldots k_1}}\right).\,\partial_{i_1 i_2 \ldots i_s} Y_{t+p-u-s}^{\bar{D}} = 0$$

où u prend toutes les valeurs : $1 \leqslant u \leqslant p - 1$.

2°

(6)

$$Y_{t+p-u}^{\hat{C}} = \sum_{s=1}^{s=p-u} \frac{1}{s\,!}\,\partial^{i_1 i_2 \ldots i_s}\left(\frac{A_{12\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots k_1}^{12\ldots(\bar{D}-1)\hat{C}(\bar{D}+1)\ldots k_1}}{A_{12\ldots k_1}^{12\ldots k_1}}\right).\,\partial_{i_1 i_2 \ldots i_s} Y_{t+p-u-s}^{\bar{D}}.$$

où u prend toutes les valeurs : $1 \leqslant u \leqslant p$.

Nous allons démontrer que le système des équations (4-4) correspondant à : $0 \leqslant l \leqslant p$ est équivalent au système formé par (4-5) et (4-6) où l'on a remplacé $p - 1$ par p.

Pour $l = p$, l'équation (4-4) s'écrit :

$$(7) \qquad P_B^A Y_{t+p}^B + \sum_{q=1}^{q=p} \frac{1}{q\,!}\, \partial^{i_1 i_2 \ldots i_q}(P_B^A)\,.\,\partial_{i_1 i_2 \ldots i_q} Y_{t+p-q}^B = 0.$$

Remplaçons le 2e terme de (4-7) en utilisant (4-6), il vient :

$$\mathrm{P}^{\mathrm{A}}_{\mathrm{B}}\mathrm{Y}^{\mathrm{B}}_{t+p} + \sum_{q=1}^{q=p} \frac{1}{q!}\,\partial^{i_1 i_2 \ldots i_q}\big(\mathrm{P}^{\mathrm{A}}_{\hat{\mathrm{C}}}\big)$$
$$\left[\sum_{s=0}^{s=p-q} \frac{1}{s!}\,\partial^{i_{q+1} i_{q+2} \ldots i_{q+s}}\left(\frac{\mathrm{A}^{12\ldots(\bar{\mathrm{D}}-1)\,\hat{\mathrm{C}}\,(\bar{\mathrm{D}}+1)\ldots k_1}_{12\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots k_1}}{\mathrm{A}^{12\ldots k_1}_{12\ldots k_1}}\right)\partial_{i_1 i_2 \ldots i_{q+s}}\mathrm{Y}^{\bar{\mathrm{D}}}_{t+p-q-s}\right]$$
$$+\sum_{q=1}^{q=p}\frac{1}{q!}\,\partial^{i_1 i_2 \ldots i_q}\big(\mathrm{P}^{\mathrm{A}}_{\bar{\mathrm{D}}}\big)\,.\,\partial_{i_1 i_2 \ldots i_q}\mathrm{Y}^{\bar{\mathrm{D}}}_{t+p-q} = 0.$$

Soit :

$$\mathrm{P}^{\mathrm{A}}_{\mathrm{B}}\mathrm{Y}^{\mathrm{B}}_{t+p} + \sum_{q=1}^{q=p} \frac{1}{q!}\,\partial^{i_1 i_2 \ldots i_q}\big(\mathrm{P}^{\mathrm{A}}_{\mathrm{B}}\big)$$
$$\left[\sum_{s=0}^{s=p-q} \frac{1}{s!}\,\partial^{i_{q+1} i_{q+2} \ldots i_{q+s}}\left(\frac{\mathrm{A}^{12\ldots(\bar{\mathrm{D}}-1)\,\mathrm{B}\,(\bar{\mathrm{D}}+1)\ldots k_1}_{12\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots k_1}}{\mathrm{A}^{12\ldots k_1}_{12\ldots k_1}}\right)\partial_{i_1 i_2 \ldots i_{q+s}}\mathrm{Y}^{\bar{\mathrm{D}}}_{t+p-q-s}\right] = 0$$

p et t sont fixes dans chaque formule, les indices q et s prennent les valeurs indiquées; on va récrire la formule en rassemblant les termes tels que : $q + s = r$, où : $1 \leqslant r \leqslant p$ et en faisant la somme des termes obtenus pour les différentes valeurs de r. Pour avoir les termes correspondant à un r donné, on associera à chaque q, $(1 \leqslant q \leqslant r)$, la valeur de $s = r - q$. On a donc :

$$\mathrm{P}^{\mathrm{A}}_{\mathrm{B}}\mathrm{Y}^{\mathrm{B}}_{t+p} + \sum_{r=1}^{r=p}\sum_{q=1}^{q=r} \frac{1}{q!}\,\partial^{i_1 i_2 \ldots i_q}\big(\mathrm{P}^{\mathrm{A}}_{\mathrm{B}}\big)\,.\,\frac{1}{(r-q)!}$$
$$.\,\partial^{i_{q+1} i_{q+2} \ldots i_r}\left(\frac{\mathrm{A}^{12\ldots(\bar{\mathrm{D}}-1)\,\mathrm{B}\,(\bar{\mathrm{D}}+1)\ldots k_1}_{12\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots k_1}}{\mathrm{A}^{12\ldots k_1}_{12\ldots k_1}}\right)\partial_{i_1 i_2 \ldots i_r}\mathrm{Y}^{\bar{\mathrm{D}}}_{t+p-r} = 0.$$

Utilisons la formule de Leibnitz généralisée du § 4 *a*); on a :

$$(8)\quad \mathrm{P}^{\mathrm{A}}_{\mathrm{B}}\mathrm{Y}^{\mathrm{B}}_{t+p} + \sum_{r=1}^{r=p}\frac{1}{r!}\left[\partial^{i_1 i_2 \ldots i_r}\left(\mathrm{P}^{\mathrm{A}}_{\mathrm{B}}\,\frac{\mathrm{A}^{12\ldots(\bar{\mathrm{D}}-1)\,\mathrm{B}\,(\bar{\mathrm{D}}+1)\ldots k_1}_{12\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots k_1}}{\mathrm{A}^{12\ldots k_1}_{12\ldots k_1}}\right)\right.$$
$$\left. - \mathrm{P}^{\mathrm{A}}_{\mathrm{B}}\partial^{i_1 i_2 \ldots i_r}\left(\frac{\mathrm{A}^{12\ldots(\bar{\mathrm{D}}-1)\,\mathrm{B}\,(\bar{\mathrm{D}}+1)\ldots k_1}_{12\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots k_1}}{\mathrm{A}^{12\ldots k_1}_{12\ldots k_1}}\right)\right].\,\partial_{i_1 i_2 \ldots i_r}\mathrm{Y}^{\bar{\mathrm{D}}}_{t+p-r} = 0.$$

Les déterminants caractéristiques de ce système aux inconnues $\mathrm{Y}^{\mathrm{B}}_{t+p}$ doivent être nuls. Pour la $\bar{\mathrm{A}}^{\text{ième}}$ équation non principale, on obtient le déterminant caractéristique en multipliant par $\mathrm{A}^{12\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots k_1}_{12\ldots(\bar{\mathrm{A}}-1)\,\mathrm{F}\,(\bar{\mathrm{A}}+1)\ldots k_1}$ la $\mathrm{F}^{\text{ième}}$ équation (4-8) et en sommant en F. En utilisant (1-9) et (1-10) il reste seulement :

$$(9)\quad \left\{ \sum_{r=1}^{r=p} \frac{(-1)^{(\bar{A}+\bar{D})}}{r\,!} \partial^{i_1 i_2 \dots i_r} \left(\frac{A^{12\dots(\bar{D}-1)(\bar{D}+1)\dots k_1}_{12\dots(\bar{A}-1)(\bar{A}+1)\dots k_1}}{A^{12\dots k_1}_{12\dots k_1}} \right) \partial_{i_1 i_2 \dots i_r} Y^{\bar{D}}_{t+p-r} = 0. \right.$$

Le système des équations principales s'écrit compte tenu de (1-10) transposée :

$$P^{\hat{A}}_{\hat{B}} Y^{\hat{B}}_{t+p} = - P^{\hat{A}}_{\bar{D}} Y^{\bar{D}}_{t+p} + \sum_{r=1}^{r=p} \frac{1}{r\,!} P^{\hat{A}}_{B} . \partial^{i_1 i_2 \dots i_r} \left(\frac{A^{12\dots(\bar{D}-1)\,B\,(\bar{D}+1)\dots k_1}_{12\dots\dots\dots\dots\dots k_1}}{A^{12\dots k_1}_{12\dots k_1}} \right) \partial_{i_1 i_2 \dots i_r} Y^{\bar{D}}_{t+p-r}.$$

On le résout en multipliant et sommant par $A^{12\dots k_1 \hat{C}}_{12\dots k_1 \hat{A}}$ et utilisant (1-8) et (1-11) :

$$(10)\quad \left\{ Y^{\hat{C}}_{t+p} = \sum_{r=0}^{r=p} \frac{1}{r\,!} \partial^{i_1 i_2 \dots i_r} \left(\frac{A^{12\dots(\bar{D}-1)\,\hat{C}\,(\bar{D}+1)\dots k_1}_{12\dots\dots\dots\dots\dots k_1}}{A^{12\dots k_1}_{12\dots k_1}} \right) . \partial_{i_1 i_2 \dots i_r} Y^{\bar{D}}_{t+p-r}. \right.$$

On déduit bien de (4-9) et (4-10) que le système (4-4) où : $0 \leqslant l \leqslant p$ est équivalent au système :

$$(11)\quad \left\{ \begin{array}{l} (-1)^{(\bar{A}+\bar{D})} \displaystyle\sum_{s=1}^{s=p+1-u} \frac{1}{s\,!} \partial^{i_1 i_2 \dots i_s} \left(\frac{A^{12\dots(\bar{D}-1)(\bar{D}+1)\dots k_1}_{12\dots(\bar{A}-1)(\bar{A}+1)\dots k_1}}{A^{12\dots k_1}_{12\dots k_1}} \right) \\ \qquad\qquad\qquad\qquad . \partial_{i_1 i_2 \dots i_s} Y^{\bar{D}}_{t+p+1-u-s} = 0 \\ \text{où : } 1 \leqslant u \leqslant p \end{array} \right.$$

et :

$$(12)\quad \left\{ \begin{array}{l} Y^{\hat{C}}_{t+p+1-u} = \displaystyle\sum_{s=0}^{s=p+1-u} \frac{1}{s\,!} \partial^{i_1 i_2 \dots i_s} \\ \qquad\qquad \left(\dfrac{A^{12\dots(\bar{D}-1)\,\hat{C}\,(\bar{D}+1)\dots k_1}_{12\dots\dots\dots\dots\dots k_1}}{A^{12\dots k_1}_{12\dots k_1}} \right) \partial_{i_1 i_2 \dots i_s} Y^{\bar{D}}_{t+p+1-u-s} \\ \text{où : } 1 \leqslant u \leqslant p+1. \end{array} \right.$$

On a vu au début du § 4 *b*) que cette équivalence est valable pour $p = 1$; le raisonnement par récurrence est donc terminé et l'on a démontré, que quelque soit : $p \geqslant 1$, le système (4-4) où : $0 \leqslant l \leqslant p$ est équivalent au système formé par (4-11) et (4-12).

En posant $p' = p - u + 1$, on peut aussi bien écrire (4-11) et (4-12) sous les formes :

$$(13)\quad \begin{cases} (-1)^{(\bar{A}+\bar{D})} \sum\limits_{s=1}^{s=p'} \dfrac{1}{s\,!}\, \partial^{i_1 i_2 \ldots i_s} \\ \qquad\qquad \left(\dfrac{A^{12\ldots(\bar{D}-1)(\bar{D}+1)\ldots k_1}_{12\ldots(\bar{A}-1)(\bar{A}+1)\ldots k_1}}{A^{12\ldots k_1}_{12\ldots k_1}}\right) \partial_{i_1 i_2 \ldots i_s} Y^{\bar{D}}_{t+p'-s} = 0 \\ \text{où : } 1 \leqslant p' \leqslant p \end{cases}$$

et :

$$(14)\quad \begin{cases} Y^{\hat{C}}_{t+p'} = \sum\limits_{s=0}^{s=p'} \dfrac{1}{s\,!}\, \partial^{i_1 i_2 \ldots i_s} \\ \qquad\qquad \left(\dfrac{A^{12\ldots(\bar{D}-1)\,\hat{C}(\bar{D}+1)\ldots k_1}_{12\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots k_1}}{A^{12\ldots k_1}_{12\ldots k_1}}\right) \partial_{i_1 i_2 \ldots i_s} Y^{\bar{D}}_{t+p'-s}, \\ \text{où : } 0 \leqslant p' \leqslant p. \end{cases}$$

c) Avant de poursuivre la transformation des équations (3-3), nous allons indiquer des résultats qui nous seront utiles.

I. — χ étant un nombre entier supérieur ou égal à un et τ étant positif ou nul, on démontre facilement par récurrence que :

$$(15)\qquad [\partial^{i_1 i_2 \ldots i_\tau}(H')^{\chi}](P) = 0,$$

pour tout $\tau < \chi$.

II. — χ étant toujours supérieur ou égal à 1, en utilisant la formule de Leibnitz généralisée du § 4 *a*), on obtient :

$$[\partial^{i_1 i_2 \ldots i_\chi}(H')^{\chi}](P)\,.\,\partial_{i_1 i_2 \ldots i_\chi} = \chi\,.\,[\partial^{i_1 i_2 \ldots i_{\chi-1}}(H')^{\chi-1}\,.\,\partial^{i_\chi}(H')](P)\,.\,\partial_{i_1 i_2 \ldots i_\chi}.$$

Raisonnant alors par récurrence, on obtient, avec des notations du § 2 :

$$(16)\qquad [\partial^{i_1 i_2 \ldots i_\chi}(H')\chi](P) = \chi\,!\, l^{i_1} l^{i_2} \ldots l^{i_\chi}.$$

d) Utilisons maintenant la multiplicité χ_1 associée à k_1. Avec les notations du § 1 *f*), le système (13) s'écrit :

$$(17)\qquad \sum_{s=1}^{s=p'} \frac{1}{s\,!}\, \partial^{i_1 i_2 \ldots i_s}\left[\mathcal{A}'^{\bar{A}}_{\bar{D}}(H')^{\chi_1}\right] \partial_{i_1 i_2 \ldots i_s} Y^{\bar{D}}_{t+p'-s} = 0$$

où $1 \leqslant p' \leqslant p$.

Si $s < \chi_1$, on déduit de l'application de la formule de Leibnitz et de (15) que :

$$\partial^{i_1 i_2 \ldots i_s}\left[\mathcal{A}'^{\bar{A}}_{\bar{D}}(H')^{\chi_1}\right] = 0.$$

Il en résulte que si $p < \chi_1$, le système (17) est identiquement vérifié. Si $p \geqslant \chi_1$, les premières équations sont identiquement vérifiées et le système se réduit à :

$$\sum_{s=\chi_1}^{s=p'} \frac{1}{s\,!}\, \partial^{i_1 i_2 \ldots i_s}\left[\mathcal{A}'^{\bar{A}}_{\bar{D}}(H')^{\chi_1}\right].\partial_{i_1 i_2 \ldots i_s} Y^{\bar{D}}_{t+p'-s} = 0 \tag{18}$$

où $\chi_1 \leqslant p' \leqslant p$.

On peut remarquer que pour $p' = \chi_1$, l'équation s'écrit, d'après (4-16) :

$$\mathcal{A}'^{\bar{A}}_{\bar{D}} l^{i_1} l^{i_2} \ldots l^{i_{\chi_1}}.\partial_{i_1 i_2 \ldots i_{\chi_1}} Y^{\bar{D}}_t = 0$$

où, d'après (§ 1 f))

$$\mathcal{A}^{\bar{A}}_{\bar{D}} l^{i_1} l^{i_2} \ldots l^{i_{\chi_1}} \partial_{i_1 i_2 \ldots i_{\chi_1}} Y^{\bar{D}}_t = 0. \tag{19}$$

D'après le § 1, c) et le § 2, les $\mathcal{A}^{\bar{A}}_{\bar{D}}$ ne sont pas tous nuls. D'après le § 2, les l^α ne sont pas tous nuls ; or d'après l'identité d'Euler :

$$h'H' = l_\alpha . \frac{\partial H'}{\partial l_\alpha}, \quad h' \text{ étant le degré de } H'$$

soit sur P :

$$l_\alpha l^\alpha = 0$$

et :

$$l^0 = 0.$$

Les l^i ne sont donc pas tous nuls. Par suite (19) n'est pas identiquement vérifiée.

Revenons au système (18). Il sera commode de l'écrire en posant :

$$p - \chi_1 = \bar{p}, \qquad p' - \chi_1 = \bar{p}' \qquad \text{et} \qquad s - \chi_1 = q$$

$$\left\{\begin{aligned} &\sum_{q=0}^{q=\bar{p}'} \frac{1}{(\chi_1 + q)\,!}\, \partial^{i_1 i_2 \ldots i_{\chi_1+q}}\left[\mathcal{A}'^{\bar{A}}_{\bar{D}}(H')^{\chi_1}\right].\partial_{i_1 i_2 \ldots i_{\chi_1+q}} Y^{\bar{D}}_{t+\bar{p}'-q} = 0, \\ &\text{où } 0 \leqslant \bar{p}' \leqslant \bar{p}. \end{aligned}\right. \tag{20}$$

Sous cette forme, il apparaît très analogue à (3-3). Nous allons aussi le transformer de façon analogue.

e) Nous venons de voir que pour $\bar{p}' = 0$, les équations s'écrivent :

$$\mathcal{A}'^{\bar{A}}_{\bar{D}} . \partial^{i_1 i_2 \ldots i_{\chi_1}} (H')^{\chi_1} . \partial_{i_1 i_2 \ldots i_{\chi_1}} Y^{\bar{D}}_t = 0. \tag{21}$$

Utilisons désormais le fait que H' a pour 2ᵉ corang k_2. Utilisant les notations du § 1, mettons en évidence les équations principales de (21) considéré comme système aux inconnues $\partial^{i_1 i_2 \ldots i_{\chi_1}} (H')^{\chi_1} \partial_{i_1 i_2 \ldots i_{\chi_1}} Y^{\bar{D}}_t$. On a :

$$\mathcal{A}'^{\hat{A}}_{\hat{B}} \partial^{i_1 i_2 \ldots i_{\chi_1}} (H')^{\chi_1} . \partial_{i_1 i_2 \ldots i_{\chi_1}} Y^{\hat{B}}_t = - \mathcal{A}'^{\hat{A}}_{\bar{\bar{D}}} . \partial^{i_1 i_2 \ldots i_{\chi_1}} (H')^{\chi_1} . \partial_{i_1 i_2 \ldots i_{\chi_1}} Y^{\bar{\bar{D}}}_t .$$

Multiplions par $B'^{12 \ldots k_2 \hat{C}}_{12 \ldots k_2 \hat{A}}$ et utilisons (1-8) et (1-11), il vient :

$$\left\{ \begin{aligned} & \partial^{i_1 i_2 \ldots i_{\chi_1}} (H')^{\chi_1} \partial_{i_1 i_2 \ldots i_{\chi_1}} Y^{\hat{C}}_t \\ & \qquad = \frac{B'^{12 \ldots (\bar{\bar{D}}-1) \hat{C} (\bar{\bar{D}}+1) \ldots k_2}_{12 \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots k_2}}{B'^{12 \ldots k_2}_{12 \ldots k_2}} \partial^{i_1 i_2 \ldots i_{\chi_1}} (H')^{\chi_1} \partial_{i_1 i_2 \ldots i_{\chi_1}} Y^{\bar{\bar{D}}}_t . \end{aligned} \right. \tag{22}$$

Pour $\bar{p}' = 1$, le système (20) donne :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\chi_1 !} \partial^{i_1 i_2 \ldots i_{\chi_1}} \left[\mathcal{A}'^{\bar{A}}_{\bar{D}} (H')^{\chi_1} \right] . \partial_{i_1 i_2 \ldots i_{\chi_1}} Y^{\bar{D}}_{t+1} \\ & \qquad + \frac{1}{(\chi_1 + 1) !} \partial^{i_1 i_2 \ldots i_{\chi_1+1}} \left[\mathcal{A}'^{\bar{A}}_{\bar{D}} (H')^{\chi_1} \right] . \partial_{i_1 i_2 \ldots i_{\chi_1+1}} Y^{\bar{D}}_t = 0. \end{aligned}$$

Soit :

$$\begin{aligned} & \mathcal{A}'^{\bar{A}}_{\bar{D}} . \partial^{i_1 i_2 \ldots i_{\chi_1}} (H')^{\chi_1} . \partial_{i_1 i_2 \ldots i_{\chi_1}} Y^{\bar{D}}_{t+1} \\ & \qquad + \frac{1}{\chi_1 + 1} \mathcal{A}'^{\bar{A}}_{\bar{D}} . \partial^{i_1 i_2 \ldots i_{\chi_1+1}} (H')^{\chi_1} . \partial_{i_1 i_2 \ldots i_{\chi_1+1}} Y^{\bar{D}}_t \\ & \qquad + \partial^{i_{\chi_1+1}} \mathcal{A}'^{\bar{A}}_{\bar{\bar{D}}} . \partial^{i_1 i_2 \ldots i_{\chi_1}} (H')^{\chi_1} . \partial_{i_1 i_2 \ldots i_{\chi_1+1}} Y^{\bar{\bar{D}}}_t \\ & \qquad + \partial^{i_{\chi_1+1}} \mathcal{A}'^{\bar{A}}_{\hat{C}} . \partial^{i_1 i_2 \ldots i_{\chi_1}} (H')^{\chi_1} . \partial_{i_1 i_2 \ldots i_{\chi_1+1}} Y^{\hat{C}}_t = 0. \end{aligned}$$

Remplaçons le dernier terme à l'aide de (22) et réunissons-le avec l'avant-dernier :

$$\begin{aligned} & \mathcal{A}'^{\bar{A}}_{\bar{D}} . \partial^{i_1 i_2 \ldots i_{\chi_1}} (H')^{\chi_1} . \partial_{i_1 i_2 \ldots i_{\chi_1}} Y^{\bar{D}}_{t+1} \\ & \qquad + \frac{1}{\chi_1 + 1} \mathcal{A}'^{\bar{A}}_{\bar{D}} . \partial^{i_1 i_2 \ldots i_{\chi_1+1}} (H')^{\chi_1} . \partial_{i_1 i_2 \ldots i_{\chi_1+1}} Y^{\bar{D}}_t \\ & + \partial^{i_{\chi_1+1}} \mathcal{A}'^{\bar{A}}_{\bar{B}} . \partial^{i_1 i_2 \ldots i_{\chi_1}} \left[(H')^{\chi_1} \frac{B'^{12 \ldots (\bar{\bar{D}}-1) \bar{B} (\bar{\bar{D}}+1) \ldots k_2}_{12 \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots k_2}}{B'^{12 \ldots k_2}_{12 \ldots k_2}} \right] . \partial_{i_1 i_2 \ldots i_{\chi_1+1}} Y^{\bar{\bar{D}}}_t = 0. \end{aligned}$$

Intégrons par parties le dernier terme; il vient en tenant compte de l'avant-dernier :

$$
\begin{aligned}
&\mathcal{A}'^{\bar{A}}_{\bar{D}}\cdot\partial^{i_1i_2\ldots i_{\chi_1}}(H')^{\chi_1}\cdot\partial_{i_1i_2\ldots i_{\chi_1}}Y^{\bar{D}}_{t+1}\\
&\qquad\qquad+\frac{1}{\chi_1+1}\mathcal{A}'^{\bar{A}}_{\hat{E}}\cdot\partial^{i_1i_2\ldots i_{\chi_1+1}}(H')^{\chi_1}\cdot\partial_{i_1i_2\ldots i_{\chi_1+1}}Y^{\hat{E}}_{t}\\
&+\frac{1}{\chi_1+1}\partial^{i_1i_2\ldots i_{\chi_1+1}}\left[\mathcal{A}'^{\bar{A}}_{\bar{B}}\cdot\frac{B'^{12\ldots(\bar{D}-1)\bar{B}(\bar{D}+1)\ldots k_2}_{12\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots k_2}}{B'^{12\ldots k_2}_{12\ldots k_2}}(H')^{\chi_1}\right]\partial_{i_1i_2\ldots i_{\chi_1+1}}Y^{\bar{\bar{D}}}_{t}\\
&-\frac{1}{\chi_1+1}\mathcal{A}'^{\bar{A}}_{\hat{E}}\cdot\partial^{i_1i_2\ldots i_{\chi_1+1}}\left[\frac{B'^{12\ldots(\bar{D}-1)\hat{E}(\bar{D}+1)\ldots k_2}_{12\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots k_2}}{B'^{12\ldots k_2}_{12\ldots k_2}}(H')^{\chi_1}\right]\cdot\partial_{i_1i_2\ldots i_{\chi_1+1}}Y^{\bar{\bar{D}}}_{t}=0.
\end{aligned}
$$

Considérant que les inconnues sont les

$$\partial^{i_1i_2\ldots i_{\chi_1}}(H')^{\chi_1}\cdot\partial_{i_1i_2\ldots i_{\chi_1}}Y^{\bar{D}}_{t+1},$$

nous écrirons que ce système est formé d'équations compatibles en multipliant par $B'^{12\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots k_2}_{12\ldots(\bar{A}-1)\bar{F}(\bar{A}-1)\ldots k_2}$ la $\bar{F}^{\text{ième}}$ équation et en sommant en $\bar{F}$. En utilisant (1-9) et (1-10), il reste seulement :

(23)

$$(-1)^{(\bar{A}+\bar{D})}\cdot\partial^{i_1i_2\ldots i_{\chi_1+1}}\left[\frac{B'^{12\ldots(\bar{D}-1)(\bar{D}+1)\ldots k_2}_{12\ldots(\bar{A}-1)(\bar{A}+1)\ldots k_2}}{B'^{12\ldots k_2}_{12\ldots k_2}}(H')^{\chi_1}\right]\cdot\partial_{i_1i_2\ldots i_{\chi_1+1}}Y^{\bar{\bar{D}}}_{t}=0.$$

Le système des équations principales s'écrit :

$$
\begin{aligned}
&\mathcal{A}'^{\hat{A}}_{\bar{D}}\cdot\partial^{i_1i_2\ldots i_{\chi_1}}(H')^{\chi_1}\cdot\partial_{i_1i_2\ldots i_{\chi_1}}Y^{\bar{D}}_{t+1}\\
&\qquad\qquad+\frac{1}{\chi_1+1}\mathcal{A}'^{\hat{A}}_{\hat{E}}\cdot\partial^{i_1i_2\ldots i_{\chi_1+1}}(H')^{\chi_1}\cdot\partial_{i_1i_2\ldots i_{\chi_1+1}}Y^{\hat{E}}_{t}\\
&\frac{1}{\chi_1+1}\mathcal{A}'^{\hat{A}}_{\hat{E}}\cdot\partial^{i_1i_2\ldots i_{\chi_1+1}}\left[\frac{B'^{12\ldots(\bar{D}-1)\hat{E}(\bar{D}+1)\ldots k_2}_{12\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots k_2}}{B'^{12\ldots k_2}_{12\ldots k_2}}(H')^{\chi_1}\right]\cdot\partial_{i_1i_2\ldots i_{\chi_1+1}}Y^{\bar{\bar{D}}}_{t}=0.
\end{aligned}
$$

On résout en multipliant par $B'^{12\ldots k_2\hat{C}}_{12\ldots k_2\hat{A}}$ et sommant en $\hat{A}$; il reste :

(24)

$$
\left\{
\begin{aligned}
&\partial^{i_1i_2\ldots i_{\chi_1}}(H')^{\chi_1}\cdot\partial_{i_1i_2\ldots i_{\chi_1}}Y^{\hat{C}}_{t+1}\\
&\quad=\partial^{i_1i_2\ldots i_{\chi_1}}\left[(H')^{\chi_1}\frac{B'^{12\ldots(\bar{D}-1)\hat{C}(\bar{D}+1)\ldots k_2}_{12\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots k_2}}{B'^{12\ldots k_2}_{12\ldots k_2}}\right]\cdot\partial_{i_1i_2\ldots i_{\chi_1}}Y^{\bar{D}}_{t+1}\\
&\quad+\frac{1}{\chi_1+1}\partial^{i_1i_2\ldots i_{\chi_1+1}}\left[(H')^{\chi_1}\cdot\frac{B'^{12\ldots(\bar{D}-1)\hat{C}(\bar{D}+1)\ldots k_2}_{12\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots k_2}}{B'^{12\ldots k_2}_{12\ldots k_2}}\right]\partial_{i_1i_2\ldots i_{\chi_1+1}}Y^{\bar{\bar{D}}}_{t}\\
&\quad-\frac{1}{\chi_1+1}\partial^{i_1i_2\ldots i_{\chi_1+1}}(H')^{\chi_1}\cdot\partial_{i_1i_2\ldots i_{\chi_1+1}}Y^{\hat{C}}_{t}.
\end{aligned}
\right.
$$

Dans le seul but de simplifier les notations, nous poserons maintenant : $\partial^{i_1 i_2 \ldots i_p} = \partial^p$ en n'indiquant ainsi que le nombre de dérivations ; on posera aussi : $B'^{12\ldots k_2}_{12\ldots k_2} = B'$.

Nous allons maintenant, par récurrence, chercher des formules qui généralisent (4-22), (4-23), (4-24). Rappelons d'abord les équations d'un système (4-20) sous la forme :

$$(25)\quad \mathcal{A}'^{\bar{A}}_{\bar{D}} . \partial^{\chi_1}(H')^{\chi_1} . \partial_{\chi_1} Y^{\bar{D}}_{t+\bar{p}'} + \sum_{q=1}^{q=\bar{p}'} \frac{\chi_1 !}{(\chi_1 + q)!} \partial^{\chi_1+q}\left[\mathcal{A}'^{\bar{A}}_{\bar{D}}(H')^{\chi_1}\right] . \partial_{\chi_1+q} Y^{\bar{D}}_{t+\bar{p}'-q} = 0,$$

valable pour tout $\bar{p}' \geqslant 0$, en convenant que pour $\bar{p}' = 0$, la somme est nulle.

$\bar{p}$ étant un entier supérieur à 1, admettons que le système formé par les équations (25) correspondant à $0 \leqslant \bar{p}' \leqslant \bar{p} - 1$ soit équivalent au système ci-dessous :

1°

(26)

$$(-1)^{(\bar{A}+\bar{D})} \sum_{s=1}^{s=\bar{p}-u} \frac{1}{(\chi_1 + s)!} \partial^{\chi_1+s}\left[\frac{B'^{12\ldots(\bar{D}-1)(\bar{D}+1)\ldots k_2}_{12\ldots(\bar{A}-1)(\bar{A}+1)\ldots k_2}}{B'} . (H')^{\chi_1}\right] . \partial_{\chi_1+s} Y^{\bar{D}}_{t+\bar{p}-u-s} = 0.$$

où u prend toutes les valeurs : $1 \leqslant u \leqslant \bar{p} - 1$.

2°

(27)

$$\partial^{\chi_1}(H')^{\chi_1} . \partial_{\chi_1} Y^{\hat{C}}_{t+\bar{p}-u} = \sum_{s=0}^{s=\bar{p}-u} \frac{\chi_1 !}{(\chi_1 + s)!} \partial^{\chi_1+s}\left[\frac{B'^{12\ldots(\bar{D}-1)\hat{C}(\bar{D}+1)\ldots k_2}_{12\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots k_2}}{B'}(H')^{\chi_1}\right] . \partial_{\chi_1+s} Y^{\bar{D}}_{t+\bar{p}-u-s}$$
$$- {}^{*}\sum_{s=1}^{s=\bar{p}-u} \frac{\chi_1 !}{(\chi_1 + s)!} \partial^{\chi_1+s}(H')^{\chi_1} . \partial_{\chi_1+s} Y^{\hat{C}}_{t+\bar{p}-u-s},$$

où u prend toutes les valeurs : $1 \leqslant u \leqslant \bar{p}$.

La somme précédée d'une astérisque sera prise nulle pour $u = \bar{p}$.

Nous allons démontrer que le système des équations (4-25) correspondant à : $0 \leqslant \bar{p}' \leqslant \bar{p}$ est équivalent au système formé par (4-26) et (4-27), où l'on a remplacé $\bar{p} - 1$ par $\bar{p}$.

Pour $\bar{p}' = \bar{p}$, (4-25) s'écrit :

$$(28)\quad \left\{\begin{aligned} & \mathcal{A}'^{\bar{\mathrm{A}}}_{\bar{\mathrm{D}}}\,.\,\partial^{\chi_1}(\mathrm{H}')\,.\,\partial_{\chi_1}\mathrm{Y}^{\bar{\mathrm{D}}}_{t+\bar{p}} \\ & \qquad + \sum_{q=1}^{q=\bar{p}} \frac{\chi_1\,!}{(\chi_1+q)\,!}\,\partial^{\chi_1+q}\left[\mathcal{A}'^{\bar{\mathrm{A}}}_{\bar{\mathrm{D}}}(\mathrm{H}')^{\chi_1}\right].\,\partial_{\chi_1+q}\mathrm{Y}^{\bar{\mathrm{D}}}_{t+\bar{p}-q} = 0. \end{aligned}\right.$$

Considérons ce système comme un système aux inconnues $\partial^{\chi_1}(\mathrm{H}')^{\chi_1}.\partial_{\chi_1}\mathrm{Y}^{\bar{\mathrm{D}}}_{t+\bar{p}}$ et mettons en évidence dans le 2e terme du 1er membre de (28) les expressions que l'on modifiera à l'aide de (27); on a :

$$(29)\quad \left\{\begin{aligned} & \sum_{q=1}^{q=\bar{p}} \frac{\chi_1\,!}{(\chi_1+q)\,!}\,\partial^{\chi_1+q}\left[\mathcal{A}'^{\bar{\mathrm{A}}}_{\bar{\mathrm{D}}}(\mathrm{H}')^{\chi_1}\right].\,\partial_{\chi_1+q}\mathrm{Y}^{\bar{\mathrm{D}}}_{t+\bar{p}-q} \\ & \qquad = \sum_{q=1}^{q=\bar{p}} \frac{\chi_1\,!}{(\chi_1+q)\,!}\Big\{\mathcal{A}'^{\bar{\mathrm{A}}}_{\bar{\mathrm{D}}}\,.\,\partial^{\chi_1+q}(\mathrm{H}')^{\chi_1}.\,\partial_{\chi_1+q}\mathrm{Y}^{\bar{\mathrm{D}}}_{t+\bar{p}-q} \\ & \qquad + \sum_{s=1}^{s=q} \mathrm{C}^{s}_{\chi_1+q}\,.\,\partial^{\chi_1+q-s}(\mathrm{H}')^{\chi_1}.\,\partial^{s}\mathcal{A}'^{\bar{\mathrm{A}}}_{\bar{\bar{\mathrm{D}}}}\,.\,\partial_{\chi_1+q}\mathrm{Y}^{\bar{\bar{\mathrm{D}}}}_{t+\bar{p}-q} \\ & \qquad + {}^{**}\sum_{s=1}^{s=q-1} \mathrm{C}^{s}_{\chi_1+q}\,.\,\partial^{\chi_1+q-s}(\mathrm{H}')^{\chi_1}.\,\partial^{s}\mathcal{A}'^{\bar{\mathrm{A}}}_{\hat{\mathrm{E}}}\,.\,\partial_{\chi_1+q}\mathrm{Y}^{\hat{\mathrm{E}}}_{t+\bar{p}-q} \\ & \qquad + \mathrm{C}^{q}_{\chi_1+q}\,.\,\partial^{\chi_1}(\mathrm{H}')^{\chi_1}.\,\partial^{q}\mathcal{A}'^{\bar{\mathrm{A}}}_{\hat{\mathrm{E}}}\,.\,\partial_{\chi_1+q}\mathrm{Y}^{\hat{\mathrm{E}}}_{t+\bar{p}-q}\Big\}. \end{aligned}\right.$$

La double astérisque devant l'avant-dernier terme signifie qu'on le prendra nul pour $q = 1$.

Calculons le dernier terme du second membre à l'aide de (27), on a :

$$(30)\quad \left\{\begin{aligned} & \sum_{q=1}^{q=\bar{p}} \frac{\chi_1\,!}{(\chi_1+q)\,!}\,\mathrm{C}^{q}_{\chi_1+q}\,.\,\partial^{\chi_1}(\mathrm{H}')^{\chi_1}.\,\partial^{q}\mathcal{A}'^{\bar{\mathrm{A}}}_{\hat{\mathrm{E}}}\,.\,\partial_{\chi_1+q}\mathrm{Y}^{\hat{\mathrm{E}}}_{t+\bar{p}-q} \\ & = \sum_{q=1}^{\bar{p}} \frac{\chi_1\,!}{(\chi_1+q)\,!}\,\mathrm{C}^{q}_{\chi_1+q}\,.\,\partial^{q}\mathcal{A}'^{\bar{\mathrm{A}}}_{\hat{\mathrm{E}}} \\ & \quad .\sum_{s=0}^{s=\bar{p}-q} \frac{\chi_1\,!}{(\chi_1+s)\,!}\,\partial^{\chi_1+s}\left[\frac{\mathrm{B}'^{12\ldots(\bar{\mathrm{D}}-1)\hat{\mathrm{E}}(\bar{\mathrm{D}}+1)\ldots k_2}_{12\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots k_2}}{\mathrm{B}'}(\mathrm{H}')^{\chi_1}\right]\partial_{\chi_1+q+s}\mathrm{Y}^{\bar{\bar{\mathrm{D}}}}_{t+\bar{p}-q-s} \\ & - \sum_{q=1}^{q=\bar{p}} \frac{\chi_1\,!}{(\chi_1+q)\,!}\,\mathrm{C}^{q}_{\chi_1+q}\,.\,\partial^{q}\mathcal{A}'^{\bar{\mathrm{A}}}_{\hat{\mathrm{E}}}\,.\,{}^{*}\sum_{s=1}^{s=\bar{p}-q} \frac{\chi_1\,!}{(\chi_1+s)\,!}\,\partial^{\chi_1+s}(\mathrm{H}')^{\chi_1} \\ & \qquad\qquad .\,\partial_{\chi_1+q+s}\mathrm{Y}^{\hat{\hat{\mathrm{E}}}}_{t+\bar{p}-q-s}. \end{aligned}\right.$$

Considérons le dernier terme du second membre de (30).

On va le récrire en rassemblant les termes tels que : $q + s = r$, où : $2 \leqslant r \leqslant \bar{p}$ et en faisant la somme des termes obtenus pour les différentes valeurs de r. Pour avoir les termes correspondant à un r donné, on associera à chaque q, $(1 \leqslant q \leqslant r - 1)$, la valeur de $s = r - q$. On a donc :

$$-\,(^1)\sum_{r=2}^{r=\bar{p}}\sum_{q=1}^{q=r-1}\frac{\chi_1\,!}{q\,!}\,\delta^q \mathcal{A}'^{\bar{A}}_{\hat{\hat{E}}}\cdot\frac{1}{(\chi_1 + r - q)\,!}\cdot\delta^{\chi_1+r-q}(H')^{\chi_1}\cdot\delta_{\chi_1+r}Y^{\hat{\hat{E}}}_{t+\bar{p}-r},$$

On trouve donc, aux notations près, l'opposé de l'avant-dernier terme du second membre de (29),

Considérons de même l'avant-dernier terme du second membre de (30). On trouve qu'il est égal à :

$$\sum_{r=1}^{r=\bar{p}}\sum_{q=1}^{q=r}\frac{\chi_1\,!}{q\,!}\cdot\delta^q\mathcal{A}'^{\bar{A}}_{\hat{\hat{E}}}\,\frac{1}{(\chi_1 + r - q)\,!}$$
$$\cdot\,\delta^{\chi_1+r-q}\left[\frac{B'^{12\ldots(\bar{D}-1)\hat{\hat{E}}(\bar{D}+1)\ldots k_2}_{12\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots k_2}}{B'}(H')^{\chi_1}\right]\cdot\delta_{\chi_1+r}Y^{\bar{\bar{D}}}_{t+\bar{p}-r}.$$

Ce terme et le 2^e^ terme du second membre de (29) se rassembleront sous la forme :

$$\sum_{q=1}^{q=\bar{p}}\frac{\chi_1\,!}{(\chi_1 + q)\,!}\sum_{s=1}^{s=q}C^s_{\chi_1+q}\,\delta^s\mathcal{A}'^{\bar{A}}_{\bar{B}}$$
$$\cdot\,\delta^{\chi_1+q-s}\left[\frac{B'^{12\ldots(\bar{D}-1)\bar{B}(\bar{D}+1)\ldots k_2}_{12\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots k_2}}{B'}(H')^{\chi_1}\right]\cdot\delta_{\chi_1+q}Y^{\bar{\bar{D}}}_{t+\bar{p}-q}.$$

Compte tenu des calculs précédents, le second membre de (29) s'écrit :

(31)
$$\left\{\begin{aligned}&\sum_{q=1}^{q=\bar{p}}\frac{\chi_1\,!}{(\chi_1 + q)\,!}\Big\{\mathcal{A}'^{\bar{A}}_{\hat{\hat{E}}}\,\delta^{\chi_1+q}(H')^{\chi_1}\cdot\delta_{\chi_1+q}Y^{\hat{\hat{E}}}_{t+\bar{p}-q}\\&\qquad\qquad+\mathcal{A}'^{\bar{A}}_{\bar{\bar{D}}}\cdot\delta^{\chi_1+q}(H')^{\chi_1}\cdot\delta_{\chi_1+q}Y^{\bar{\bar{D}}}_{t+\bar{p}-q}\\&+\sum_{s=1}^{s=q}C^s_{\chi_1+q}\,\delta^s\mathcal{A}'^{\bar{A}}_{\bar{B}}\cdot\delta^{\chi_1+q-s}\left[\frac{B'^{12\ldots(\bar{D}-1)\bar{B}(\bar{D}+1)\ldots k_2}_{12\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots k_2}}{B'}(H')^{\chi_1}\right]\delta_{\chi_1+q}Y^{\bar{\bar{D}}}_{t+\bar{p}-q}\Big\}.\end{aligned}\right.$$

La somme des deux derniers termes de l'accolade dans (31)

(¹) Si $\bar{p} = 1$, ce terme est nul.

peut aussi s'écrire :

$$(32)\quad \left\{\begin{aligned} &\sum_{s=0}^{s=q} C^{s}_{\chi_1+q}\,\partial^{s}\mathcal{A}'^{\bar{A}}_{\bar{B}}\,.\,\partial^{\chi_1+q-s}\left[\frac{B'^{12\ldots(\bar{D}-1)\,\bar{B}(\bar{D}+1)\ldots k_2}_{12\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots k_2}}{B'}(H')^{\chi_1}\right]\partial_{\chi_1+q}Y^{\bar{D}}_{t+\bar{p}-q} \\ &\qquad -\mathcal{A}'^{\bar{A}}_{\hat{\bar{E}}}\,.\,\partial^{\chi_1+q}\left[\frac{B'^{12\ldots(\bar{D}-1)\,\hat{\bar{E}}(\bar{D}+1)\ldots k_2}_{12\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots k_2}}{B'}(H')^{\chi_1}\right].\,\partial_{\chi_1+q}Y^{\bar{\bar{D}}}_{t+\bar{p}-q}. \end{aligned}\right.$$

Le premier terme de (32) se calcule à l'aide de la formule de Leibnitz; en reportant dans (28), le système (28) s'écrit finalement :

$$(33)\quad \left\{\begin{aligned} &\mathcal{A}'^{\bar{A}}_{\bar{D}}\partial^{\chi_1}(H')^{\chi_1}.\,\partial_{\chi_1}Y^{\bar{D}}_{t+\bar{p}} + \sum_{q=1}^{q=\bar{p}}\frac{\chi_1\,!}{(\chi_1+q)\,!}\Big\{\mathcal{A}'^{\bar{A}}_{\hat{\bar{E}}}\partial^{\chi_1+q}(H')^{\chi_1}\partial_{\chi_1+q}Y^{\hat{\bar{E}}}_{t+\bar{p}-q} \\ &\quad + \partial^{\chi_1+q}\left[\mathcal{A}'^{\bar{A}}_{\bar{B}}\,.\,\frac{B'^{12\ldots(\bar{D}-1)\,\bar{B}(\bar{D}+1)\ldots k_2}_{12\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots k_2}}{B'}(H')^{\chi_1}\right].\,\partial_{\chi_1+q}Y^{\bar{\bar{D}}}_{t+\bar{p}-q} \\ &\quad -\mathcal{A}'^{\bar{A}}_{\hat{\bar{E}}}\,\partial^{\chi_1+q}\left[\frac{B'^{12\ldots(\bar{D}-1)\,\hat{\bar{E}}(\bar{D}+1)\ldots k_2}_{12\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots k_2}}{B'}(H')^{\chi_1}\right].\,\partial_{\chi_1+q}Y^{\bar{\bar{D}}}_{t+\bar{p}-q}\Big\} = 0. \end{aligned}\right.$$

Écrivons que les déterminants caractéristiques sont nuls : pour la $\bar{\bar{A}}^{\text{ième}}$ équation non principale, on obtient le déterminant caractéristique en multipliant par $B'^{12\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots k_2}_{12\ldots(\bar{\bar{A}}-1)\bar{F}(\bar{\bar{A}}+1)\ldots k_2}$ la $\bar{F}^{\text{ième}}$ équation et en sommant en $\bar{F}$. En utilisant (1-9) et (1-10), il reste :

$$(34)\quad \sum_{q=1}^{q=\bar{p}}\frac{1}{(\chi_1+q)\,!}(-1)^{(\bar{\bar{A}}+\bar{D})} .\,\partial^{\chi_1+q}\left[\frac{B'^{12\ldots(\bar{D}-1)(\bar{D}+1)\ldots k_2}_{12\ldots(\bar{\bar{A}}-1)(\bar{\bar{A}}+1)\ldots k_2}}{B'}(H')^{\chi_1}\right].\,\partial_{\chi_1+q}Y^{\bar{\bar{D}}}_{t+\bar{p}-q} = 0.$$

Le système des équations principales s'écrit compte tenu de (1-10) transposée :

$$(35)\quad \left\{\begin{aligned} &\mathcal{A}'^{\hat{\bar{A}}}_{\bar{D}}\,.\,\partial^{\chi_1}(H')^{\chi_1}.\,\partial_{\chi_1}Y^{\bar{D}}_{t+\bar{p}} \\ &\quad +\sum_{q=1}^{q=\bar{p}}\frac{\chi_1\,!}{(\chi_1+q)\,!}\,\mathcal{A}'^{\hat{\bar{A}}}_{\hat{\bar{E}}}\Big\{\partial^{\chi_1+q}(H')^{\chi_1}\,\partial_{\chi_1+q}Y^{\hat{\bar{E}}}_{t+\bar{p}-q} \\ &\quad -\partial^{\chi_1+q}\left[\frac{B'^{12\ldots(\bar{D}-1)\,\hat{\bar{E}}(\bar{D}+1)\ldots k_2}_{12\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots k_2}}{B'}(H')^{\chi_1}\right].\,\partial_{\chi_1+q}Y^{\bar{\bar{D}}}_{t+\bar{p}-q}\Big\} = 0. \end{aligned}\right.$$

On résout en multipliant par $B'^{12\ldots k_2\hat{C}}_{12\ldots k_2\hat{A}}$ et sommant en $\hat{A}$, il vient :

(36)

$$\left\{\begin{aligned} &\partial^{\chi_1}(H')^{\chi_1}.\partial_{\chi_1}Y_{t+\bar{p}} \\ &= \sum_{q=0}^{q=\bar{p}} \frac{\chi_1\,!}{(\chi_1+q)\,!}\,\partial^{\chi_1+q}\left[\frac{B'^{12\ldots(\bar{D}-1)\hat{C}(\bar{D}+1)\ldots k_2}_{12\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots k_2}}{B'}(H')^{\chi_1}\right].\partial_{\chi_1+q}Y^{\bar{D}}_{t+\bar{p}-q} \\ &-\sum_{q=1}^{q=\bar{p}} \frac{\chi_1\,!}{(\chi_1+q)\,!}\,\partial^{\chi_1+q}(H')^{\chi_1}\partial_{\chi_1+q}Y^{\hat{C}}_{t+\bar{p}-q}. \end{aligned}\right.$$

On déduit bien de (34) et (36) que le système (4-20) est équivalent au système :

$$(37)\quad (-1)^{(\bar{A}+\bar{D})}\sum_{s=1}^{s=\bar{p}+1-u}\frac{1}{(\chi_1+s)\,!}$$
$$\partial^{\chi_1+s}\left[\frac{B'^{12\ldots(\bar{D}-1)(\bar{D}+1)\ldots k_2}_{12\ldots(\bar{A}-1)(\bar{A}+1)\ldots k_2}}{B'}(H')^{\chi_1}\right]\partial_{\chi_1+s}Y^{\bar{D}}_{t+\bar{p}+1-u-s}=0,$$

où u prend toutes les valeurs : $1 \leqslant u \leqslant \bar{p}$ et :

(38)

$$\left\{\begin{aligned} &\partial^{\chi_1}(H')^{\chi_1}.\partial_{\chi_1}Y^{\hat{C}}_{t+\bar{p}+1-u} \\ &= \sum_{s=0}^{s=\bar{p}+1-u} \frac{\chi_1\,!}{(\chi_1+s)\,!}.\partial^{\chi_1+s}\left[\frac{B'^{12\ldots(\bar{D}-1)\hat{C}(\bar{D}+1)\ldots k_2}_{12\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots k_2}}{B'}.(H')^{\chi_1}\right] \\ &\qquad\qquad .\partial_{\chi_1+s}Y^{\bar{D}}_{t+\bar{p}+1-u-s} \\ &-\sideset{^*}{}\sum_{s=1}^{s=\bar{p}+1-u} \frac{\chi_1\,!}{(\chi_1+s)\,!}.\partial^{\chi_1+s}(H')^{\chi_1}.\partial_{\chi_1+s}Y^{\hat{C}}_{t+\bar{p}+1-u-s}. \end{aligned}\right.$$

où u prend toutes les valeurs $1 \leqslant u \leqslant \bar{p}+1$. La somme précédée d'une astérisque vaut 0 pour $u = \bar{p}+1$.

On a vu que cette équivalence est valable pour $\bar{p} = 1$; le raisonnement par récurrence est donc terminé et l'on a démontré que quelque soit $\bar{p} \geqslant 1$, le système (4-20) est équivalent au système formé par (4-37) et (4-38).

En posant $\bar{p}' = \bar{p} - u + 1$, on peut aussi bien écrire (37) et (38) sous les formes :

$$(39)\quad (-1)^{(\bar{A}+\bar{D})}.\sum_{s=1}^{s=\bar{p}'}\frac{1}{(\chi_1+s)\,!}$$
$$.\partial^{\chi_1+s}\left[\frac{B'^{12\ldots(\bar{D}-1)(\bar{D}+1)\ldots k_2}_{12\ldots(\bar{A}-1)(\bar{A}+1)\ldots k_2}}{B'}.(H')^{\chi_1}\right].\partial_{\chi_1+s}Y^{\bar{D}}_{t+\bar{p}'-s}=0.$$

où $\bar{p}'$ prend toutes les valeurs : $1 \leqslant \bar{p}' \leqslant \bar{p}$

(40)

$$\left\{\begin{aligned}&\partial^{\chi_1}(\mathrm{H}')^{\chi_1}.\partial_{\chi_1}\mathrm{Y}^{\hat{\bar{\mathrm{C}}}}_{t+\bar{p}'}\\&=\sum_{s=0}^{s=\bar{p}'}\frac{\chi_1\,!}{(\chi_1+s)\,!}\partial^{\chi_1+s}\left[\frac{\mathrm{B}'^{12\ldots(\bar{\mathrm{D}}-1)\hat{\mathrm{C}}(\bar{\mathrm{D}}+1)\ldots k_2}_{12\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots k_2}}{\mathrm{B}'}(\mathrm{H}')^{\chi_1}\right].\partial_{\chi_1+s}\mathrm{Y}^{\bar{\bar{\mathrm{D}}}}_{t+\bar{p}'-s}.\\&-\sum_{s=1}^{s=\bar{p}'}\frac{\chi_1\,!}{(\chi_1+s)\,!}.\partial^{\chi_1+s}(\mathrm{H}')^{\chi_1}.\partial_{\chi_1+s}\mathrm{Y}^{\hat{\bar{\mathrm{C}}}}_{t+\bar{p}'-s}\end{aligned}\right.$$

où : $0 \leqslant \bar{p}' \leqslant \bar{p}$; la somme précédée d'une astérisque est nulle pour $\bar{p}' = 0$.

f) Utilisons la multiplicité χ_2 associée à k_2. Avec les notations du § 1 *f*) le système (39) s'écrit :

$$(41)\quad \sum_{s=1}^{s=\bar{p}'}\frac{1}{(\chi_1+s)\,!}.\partial^{\chi_1+s}\left[\mathcal{B}'^{\bar{\bar{\mathrm{A}}}}_{\bar{\bar{\mathrm{D}}}}.(\mathrm{H}')^{\chi_1+\chi_2}\right].\partial_{\chi_1+s}\mathrm{Y}^{\bar{\bar{\mathrm{D}}}}_{t+\bar{p}'-s}=0$$

où $1 \leqslant \bar{p}' \leqslant \bar{p}$.

Si $s < \chi_2$, on déduit de la formule de Leibnitz et de (15), que :

$$\partial^{\chi_1+s}\left[\mathcal{B}'^{\bar{\bar{\mathrm{A}}}}_{\bar{\bar{\mathrm{D}}}}.(\mathrm{H}')^{\chi_1+\chi_2}\right]=0.$$

Il en résulte que si $\bar{p} < \chi_2$, le système est identiquement vérifié. Si $\bar{p} \geqslant \chi_2$, les premières équations sont identiquement vérifiées et le système se réduit à :

$$(42)\quad \sum_{s=\chi_2}^{s=\bar{p}'}\frac{1}{(\chi_1+s)\,!}.\partial^{\chi_1+s}\left[\mathcal{B}'^{\bar{\bar{\mathrm{A}}}}_{\bar{\bar{\mathrm{D}}}}.(\mathrm{H}')^{\chi_1+\chi_2}\right].\partial_{\chi_1+s}\mathrm{Y}^{\bar{\bar{\mathrm{D}}}}_{t+\bar{p}'-s}=0$$

où $\chi_2 \leqslant \bar{p}' \leqslant \bar{p}$.

Pour $\bar{p}' = \chi_2$, on a :

$$(43)\qquad \mathcal{B}^{\bar{\bar{\mathrm{A}}}}_{\bar{\bar{\mathrm{D}}}}l^{i_1}l^{i_2}\ldots l^{i_{\chi_1+\chi_2}}.\partial_{i_1i_2\ldots i_{\chi_1+\chi_2}}\mathrm{Y}^{\bar{\bar{\mathrm{D}}}}_t=0.$$

On pourra écrire (42) commodément en posant :

$$\bar{p}-\chi_2=\bar{\bar{p}},\qquad \bar{p}'-\chi_2=\bar{\bar{p}}'$$

et $s - \chi_2 = q$; il vient :

$$(44)\quad \sum_{q=0}^{q=\bar{\bar{p}}'}\frac{1}{(\chi_1+\chi_2+q)\,!}.\partial^{i_1i_2\ldots i_{\chi_1+\chi_2+q}}\left[\mathcal{B}'^{\bar{\bar{\mathrm{A}}}}_{\bar{\bar{\mathrm{D}}}}.(\mathrm{H}')^{\chi_1+\chi_2}\right].\partial_{i_1i_2\ldots i_{\chi_1+\chi_2+q}}\mathrm{Y}^{\bar{\bar{\mathrm{D}}}}_{t+\bar{\bar{p}}'-q}=0$$

où $0 \leqslant \bar{\bar{p}}' \leqslant \bar{\bar{p}}$.

Ce système se déduit de (4-20) en remplaçant χ_1 par $\chi_1 + \chi_2$ et $\mathcal{A}'$ par $\mathcal{B}'$.

On pourra donc lui appliquer les mêmes calculs et ainsi de suite jusqu'à ce que l'on rencontre un corang nul.

g) Regardons ce qu'on obtient lorsqu'on arrive à ce corang nul. Pour simplifier les notations, nous supposerons que c'est k_3 qui est nul.

L'équation (43) devient simplement :

$$(45) \qquad l^{i_1} l^{i_2} \ldots l^{i_{\chi_1+\chi_2}} . \partial_{i_1 i_2 \ldots i_{\chi_1+\chi_2}} Y_t^{\overline{\overline{D}}} = 0.$$

De façon générale, en appliquant les calculs précédents, le système (44) se résout pour les inconnues

$$\partial^{\chi_1+\chi_2}(H')^{\chi_1+\chi_2} . \partial_{\chi_1+\chi_2} . Y_{t+\overline{\overline{p}}'}^{\overline{\overline{D}}}$$

et équivaut à :

$$\partial^{\chi_1+\chi_2}(H')^{\chi_1+\chi_2} . \partial_{\chi_1+\chi_2} Y_{t+\overline{\overline{p}}'}^{\overline{\overline{D}}} = -{}^{*}\sum_{s=1}^{s=\overline{\overline{p}}'} \frac{(\chi_1+\chi_2)\,!}{(\chi_1+\chi_2+s)\,!} . \partial^{\chi_1+\chi_2+s}(H')^{\chi_1+\chi_2} . \partial_{\chi_1+\chi_2+s} Y_{t+\overline{\overline{p}}'-s}^{\overline{\overline{D}}},$$

où $0 \leqslant \overline{\overline{p}}' \leqslant \overline{\overline{p}}$, la somme précédée d'une astérisque étant nulle pour $\overline{\overline{p}}' = 0$.

On peut encore l'écrire sous forme plus explicite :

$$(46) \quad l^{i_1} l^{i_2} \ldots l^{i_{\chi_1+\chi_2}} . \partial_{i_1 i_2 \ldots i_{\chi_1+\chi_2}} Y_{t+\overline{\overline{p}}'}^{\overline{\overline{D}}} = -{}^{*}\sum_{s=1}^{s=\overline{\overline{p}}'} \frac{1}{(\chi_1+\chi_2+s)\,!} . \partial^{i_1 i_2 \ldots i_{\chi_1+\chi_2+s}}(H')^{\chi_1+\chi_2} . \partial_{i_1 i_2 \ldots i_{\chi_1+\chi_2+s}} Y_{t+\overline{\overline{p}}'-s}^{\overline{\overline{D}}}.$$

où $0 \leqslant \overline{\overline{p}}' \leqslant \overline{\overline{p}}$.

5. Résumé.

Nous donnerons ici un résumé des résultats obtenus au § 4; pour simplifier les notations, nous le donnerons dans le cas $k_3 = 0$.

Les résultats proviennent des formules (4-14), (4-40) et (4-46). On a obtenu la *proposition* suivante :

Quelque soit $p \geqslant 0$, le système (3-3) est équivalent au système formé par :

1°

$$(1)\quad \left\{ \begin{aligned} & l^{i_1} l^{i_2} \ldots l^{i_{\chi_1+\chi_2}} . \partial_{i_1 i_2 \ldots i_{\chi_1+\chi_2}} Y^{\overline{\overline{D}}}_{t+q-\chi_1-\chi_2} \\ & \qquad = - \sum_{s=1}^{s=q-\chi_1-\chi_2} \frac{1}{(\chi_1+\chi_2+s)\,!} \\ & \qquad\qquad . \partial^{i_1 i_2 \ldots i_{\chi_1+\chi_2+s}} (H')^{\chi_1+\chi_2} \partial_{i_1 i_2 \ldots i_{\chi_1+\chi_2+s}} Y^{\overline{\overline{D}}}_{t+q-\chi_1-\chi_2-s}. \end{aligned} \right.$$

2°

$$(2)\quad \left\{ \begin{aligned} & l^{i_1} l^{i_2} \ldots l^{i_{\chi_1}} . \partial_{i_1 i_2 \ldots i_{\chi_1}} Y^{\hat{C}}_{t+r-\chi_1} \\ & = \sum_{s=0}^{s=r-\chi_1} \frac{1}{(\chi_1+s)\,!} . \partial^{i_1 i_2 \ldots i_{\chi_1+s}} \left[\frac{B^{12\ldots(\overline{D}-1)\hat{C}(\overline{D}+1)\ldots k_2}_{12\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots k_2}}{B^{12\ldots k_2}_{12\ldots k_2}} (H')^{\chi_1} \right] \\ & \qquad\qquad . \partial_{i_1 i_2 \ldots i_{\chi_1+s}} Y^{\overline{\overline{D}}}_{t+r-\chi_1-s} \\ & - \sum_{s=1}^{s=r-\chi_1} \frac{1}{(\chi_1+s)\,!} \partial^{i_1 i_2 \ldots i_{\chi_1+s}} (H')^{\chi_1} . \partial_{i_1 i_2 \ldots i_{\chi_1+s}} Y^{\hat{C}}_{t+r-\chi_1-s}. \end{aligned} \right.$$

3°

$$(3)\quad Y^{\hat{C}}_{t+u} = \sum_{s=0}^{s=u} \frac{1}{s\,!} \partial^{i_1 i_2 \ldots i_s} \left(\frac{A^{12\ldots(\overline{D}-1)\hat{C}(\overline{D}+1)\ldots k_1}_{12\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots k_1}}{A^{12\ldots k_1}_{12\ldots k_1}} \right) \partial_{i_1 i_2 \ldots i_s} Y^{\overline{D}}_{t+u-s}$$

où q, r, u, prennent toutes les valeurs : $0 \leqslant q, r, u \leqslant p$, en convenant qu'une somme Σ où l'indice supérieur est inférieur à l'indice inférieur est nulle et en remarquant une nouvelle fois que Y^{B}_{l} est nul si $l < t$.

6. Intégration du système différentiel. Interprétation.

a) Considérons d'abord les équations qui ne comportent comme inconnues que les Y^{B}_{t}, soit :

$$(1)\quad \left\{ \begin{aligned} & l^{i_1} l^{i_2} \ldots l^{i_{\chi_1+\chi_2}} . \partial_{i_1 i_2 \ldots i_{\chi_1+\chi_2}} Y^{\overline{\overline{D}}}_{t} = 0 \\ & l^{i_1} l^{i_2} \ldots l^{i_{\chi_1}} . \partial_{i_1 i_2 \ldots i_{\chi_1}} Y^{\hat{C}}_{t} \\ & \qquad - \frac{B^{12\ldots(\overline{D}-1)\hat{C}(\overline{D}+1)\ldots k_2}_{12\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots k_2}}{B^{12\ldots k_2}_{12\ldots k_2}} l^{i_1} l^{i_2} \ldots l^{i_{\chi_1}} . \partial_{i_1 i_2 \ldots i_{\chi_1}} Y^{\overline{\overline{D}}}_{t} = 0 \\ & Y^{\hat{C}}_{t} - \frac{A^{12\ldots(\overline{D}-1)\hat{C}(\overline{D}+1)\ldots k_1}_{12\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots k_1}}{A^{12\ldots k_1}_{12\ldots k_1}} Y^{\overline{D}}_{t} = 0. \end{aligned} \right.$$

Par un changement de coordonnées linéaires dans P, on peut prendre pour équations de la bicaractéristique déjà définie, les équations :

$$x^0 = 0, \qquad x^2 = 0, \ldots, x^n = 0;$$

x^1 variera seul sur la bicaractéristique.

Le système (6-1) est donc simplement un système d'équations différentielles pour l'indéterminée x^1, que l'on peut écrire, en posant :

$$\underbrace{\partial_{11\ldots 1}}_{\chi \text{ fois}} = \partial_{(1)\chi},$$

$$(2) \qquad \left\{ \begin{aligned} &\partial_{(1)\chi+\chi_2} \mathrm{Y}_t^{\bar{\bar{\mathrm{D}}}} = 0 \\ &\partial_{(1)\chi_1} \mathrm{Y}_t^{\hat{\hat{\mathrm{C}}}} - \frac{\mathrm{B}^{12\ldots(\bar{\bar{\mathrm{D}}}-1)\hat{\hat{\mathrm{C}}}(\bar{\bar{\mathrm{D}}}+1)\ldots k_2}_{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots k_2}}{\mathrm{B}^{12\ldots k_2}_{12\ldots k_2}} \partial_{(1)\chi_1} \mathrm{Y}_t^{\bar{\bar{\mathrm{D}}}} = 0 \\ &\mathrm{Y}_t^{\hat{\mathrm{C}}} - \frac{\mathrm{A}^{12\ldots(\bar{\mathrm{D}}-1)\hat{\mathrm{C}}(\bar{\mathrm{D}}+1)\ldots k_1}_{12\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots k_1}}{\mathrm{A}^{12\ldots k_1}_{12\ldots k_1}} \mathrm{Y}_t^{\bar{\mathrm{D}}} = 0. \end{aligned} \right.$$

Rappelons maintenant la forme de la matrice $(\pi^{\mathrm{A}}_{\mathrm{B}})$ équivalente à $(\mathrm{P}^{\mathrm{A}}_{\mathrm{B}})$ et dont les éléments de la diagonale principale sont les puissances de H′ qui déterminent les facteurs invariants. On avait trouvé (§ 1 *e*) :

$$(\pi^{\mathrm{A}}_{\mathrm{B}}) = \left[\begin{array}{r|c|c|c} & \overbrace{\begin{matrix} k_2 \\ \text{colonnes} \end{matrix}} & \overbrace{\begin{matrix} (k_1 - k_2) \\ \text{colonnes} \end{matrix}} & \overbrace{\begin{matrix} (m - k_1) \\ \text{colonnes} \end{matrix}} \\ k_2 \text{ lignes} & \left\{ (\mathrm{H}')^{\chi_1+\chi_2} \delta^{\bar{\bar{\mathrm{A}}}}_{\bar{\bar{\mathrm{B}}}} \right. & \mathrm{O} & \mathrm{O} \\ \hline (k_1 - k_2) \text{ lignes} & \left\{ \quad \mathrm{O} \right. & (\mathrm{H}')^{\chi_1} \delta^{\hat{\hat{\mathrm{A}}}}_{\hat{\hat{\mathrm{B}}}} & \mathrm{O} \\ \hline (m - k_1) \text{ lignes} & \left\{ \quad \mathrm{O} \right. & \mathrm{O} & \delta^{\hat{\mathrm{A}}}_{\hat{\mathrm{B}}} \end{array} \right]$$

L'ordre des équations différentielles du système (2) et le nombre d'équations de chaque ordre sont donc reliés simplement aux facteurs invariants.

Nous énoncerons le résultat correspondant dans le cas général (k_{I} quelconque).

Proposition. — *Les $\mathrm{Y}_t^{\mathrm{B}}$ satisfont à un système d'équations différentielles linéaires à coefficients constants sans second membre, où la variable repère un point de la bicaractéristique.*

Convenons d'ordonner ces équations en appelant d'indice 0 celles qui se réduisent à des équations algébriques, d'indice 1 celles de plus bas ordre, d'indice 2 celles d'ordre immédiatement supérieur et ainsi de suite. Convenons d'ordonner les sous-matrices de (π) non nulles en appelant sous-matrice d'indice 0 la sous-matrice formée des $\delta^{\hat{A}}_{\hat{B}}$, d'indice 1 la sous-matrice formée des $(H')^{\chi_1}.\delta^{\hat{\hat{A}}}_{\hat{\hat{B}}}$, d'indice 2 la sous-matrice formée des $(H')^{\chi_1+\chi_2}.\delta^{\hat{\hat{A}}}_{\hat{\hat{B}}}$, et ainsi de suite.

Le système différentiel est composé de la façon suivante :

a) Le nombre total d'équations ou d'inconnues est m. Le nombre d'équations d'indice i est égal à l'ordre de la sous-matrice d'indice i.

b) L'ordre des équations d'indice i, $(i > 0)$ est égal à la puissance de H' qui affecte chaque élément non nul de la sous-matrice d'indice i.

b) Le système (6-2) s'intègre facilement. On obtient pour les Y^B_t des polynômes en x^1 dont les coefficients sont des combinaisons linéaires déterminées de séries formelles arbitraires en $x^2, \dots x^n$.

Supposons à nouveau pour simplifier les notations $k_3 = 0$, $(k_2 = k_1)$, on a, en fait :

(4)
$$\begin{cases} Y^{\bar{\bar{D}}}_t = Y^{\bar{\bar{D}}}_{t,0} + \cdots + Y^{\bar{\bar{D}}}_{t,\chi_1-1}(x^1)^{\chi_1-1} + \cdots + Y^{\bar{\bar{D}}}_{t,\chi_1+\chi_2-1}(x^1)^{\chi_1+\chi_2-1} \\ Y^{\hat{\hat{C}}}_t = Y^{\hat{\hat{C}}}_{t,0} + \cdots + Y^{\hat{\hat{C}}}_{t,\chi_1-1}(x^1)^{\chi_1-1} \\ \qquad\qquad + \left(B^{\hat{\hat{C}}}_{\bar{\bar{D}}}\right).\left[Y^{\bar{\bar{D}}}_{t,\chi_1}(x^1)^{\chi_1} + \cdots + Y^{\bar{\bar{D}}}_{t,\chi_1+\chi_2-1}(x^1)^{\chi_1+\chi_2-1}\right]. \\ Y^{\hat{E}}_t = \left(A^{\hat{E}}_{\bar{\bar{D}}}\right).\left[Y^{\bar{\bar{D}}}_{t,0} + \cdots + Y^{\bar{\bar{D}}}_{t,\chi_1-1}(x^1)^{\chi_1-1}\right] \\ + \left[\left(A^{\hat{E}}_{\bar{\bar{D}}}\right) + \left(A^{\hat{E}}_{\hat{\hat{C}}}\right)\left(B^{\hat{\hat{C}}}_{\bar{\bar{D}}}\right)\right].\left[Y^{\bar{\bar{D}}}_{t,\chi_1}(x^1)^{\chi_1} + \cdots + Y^{\bar{\bar{D}}}_{t,\chi_1+\chi_2-1}(x^1)^{\chi_1+\chi_2-1}\right] \end{cases}$$

où les $Y^B_{t,\chi}$ sont des séries formelles arbitraires en $x^2, \dots x^n$ et où les (A) et (B) s'expriment facilement en fonction des coefficients constants connus.

Plus précisément, les $Y^B_{t,\chi}$ arbitraires sont : I) les $\chi_1 + \chi_2$ premiers coefficients du polynôme $Y^{\bar{\bar{D}}}_t$ en x^1 ordonné selon les puissances croissantes. II) les χ_1 premiers coefficients du polynôme $Y^{\hat{\hat{C}}}_t$ en x^1 ordonné selon les puissances croissantes.

Le système des équations aux Y^{B}_{t+1} est aussi un système d'équations différentielles en x^1 dont les premiers membres sont les mêmes que ceux de (6-1), après avoir remplacé Y^{B}_{t} par Y^{B}_{t+1}; les seconds membres ne sont plus nuls mais sont des combinaisons linéaires différentielles des Y^{B}_{t}. On trouve en fait le système :

(5)

$$\left\{\begin{aligned}
& l^{i_1}l^{i_2}\ldots l^{i_{\chi_1+\chi_2}}\partial_{i_1 i_2\ldots i_{\chi_1+\chi_2}}Y^{\bar{\bar{D}}}_{t+1} \\
& \qquad = -\frac{1}{(\chi_1+\chi_2+1)\,!}\,\partial^{i_1 i_2\ldots i_{\chi_1+\chi_2+1}}(H')^{\chi_1+\chi_2}\partial_{i_1 i_2\ldots i_{\chi_1+\chi_2+1}}Y^{\bar{\bar{D}}}_{t} \\
& l^{i_1 i_2}\ldots l^{i_{\chi_1}}\partial_{i_1 i_2\ldots i_{\chi_1}}Y^{\hat{\hat{C}}}_{t+1} \\
& \qquad\qquad - \frac{B^{12\ldots(\bar{\bar{D}}-1)\hat{\hat{C}}(\bar{\bar{D}}+1)\ldots k_2}_{12\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots k_2}}{B^{12\ldots k_2}_{12\ldots k_2}}\,l^{i_1 i_2}\ldots l^{i_{\chi_1}}.\partial_{i_1 i_2\ldots i_{\chi_1}}Y^{\bar{\bar{D}}}_{t+1} \\
& = \frac{1}{(\chi_1+1)\,!}\cdot\partial^{i_1 i_2\ldots i_{\chi_1+1}}\left[\frac{B^{12\ldots(\bar{\bar{D}}-1)\hat{\hat{C}}(\bar{\bar{D}}+1)\ldots k_2}_{12\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots k_2}}{B^{12\ldots k_2}_{12\ldots k_2}}(H')^{\chi_1}\right]\partial_{i_1 i_2\ldots i_{\chi_1+1}}Y^{\bar{\bar{D}}}_{t} \\
& - \frac{1}{(\chi_1+1)\,!}\,\partial^{i_1 i_2\ldots i_{\chi_1+1}}(H')^{\chi_1}.\partial_{i_1 i_2\ldots i_{\chi_1+1}}Y^{\hat{\hat{C}}}_{t} \\
& Y^{\hat{C}}_{t+1} - \frac{A^{12\ldots(\bar{D}-1)\hat{C}(\bar{D}+1)\ldots k_1}_{12\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots k_1}}{A^{12\ldots k_1}_{12\ldots k_1}}\,Y^{\bar{D}}_{t+1} = \partial^{i}\left(\frac{A^{12\ldots(\bar{D}-1)\hat{C}(\bar{D}+1)\ldots k_1}_{12\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots k_1}}{A^{12\ldots k_1}_{12\ldots k_1}}\right)\partial_i Y^{\bar{D}}_{t}.
\end{aligned}\right.$$

On remplace les Y^{B}_{t} à l'aide du système (4) et on intègre sans difficulté le système (5), en utilisant par exemple la forme de Lagrange de la formule de Taylor. On obtient pour les Y^{B}_{t+1} des polynômes en x^1 dont les coefficients sont des combinaisons linéaires différentielles déterminées de séries formelles arbitraires de $x^2, \ldots x^n$.

Plus précisément, ces séries formelles arbitraires sont : 1° les $Y^{B}_{t,\chi}$ déjà indiquées ci-dessus. 2° des séries en $x^2, \ldots x^n$ notées $Y^{B}_{t+1,\chi}$ qui représentent : I) les $\chi_1 + \chi_2$ premiers coefficients du polynôme $Y^{\bar{\bar{D}}}_{t+1}$ en x^1 ordonné selon les puissances croissantes.

II) Les χ_1 premiers coefficients du polynôme $Y^{\hat{\hat{C}}}_{t+1}$ en x^1 ordonné selon les puissances croissantes.

On détermine ainsi de suite tous les Y^{B}_{p}. Pour les obtenir, il faut et il suffit donc que l'on connaisse : I) les $\chi_1 + \chi_2$ premiers coefficients de chaque polynôme $Y^{\bar{\bar{D}}}_{p}$ ordonné en x^1 selon les puissances croissantes. II) Les χ_1 premiers coefficients de chaque polynôme $Y_p^{\hat{\bar{C}}}$ ordonné en x^1 selon les puissances croissantes.

Autrement dit, il faut et il suffit, les inconnues y^B étant ordonnées cette fois en x^1 que l'on connaisse. I) Les $(\chi_1 + \chi_2)$ premières séries formelles en $x^0, x^2, \dots x^n$ formant les $(\chi_1 + \chi_2)$ premiers coefficients du « développement » en x^1 de $y^{\bar{\bar{D}}}$. II) Les χ_1 premières séries formelles en $x^0, x^2, \dots x^n$ formant les χ_1 premiers coefficients du développement en x^1 de $y^{\hat{\bar{C}}}$, toutes ces données étant supposées compatibles avec les données de Cauchy sur P.

De façon générale, une fois les déterminants tels que $A^{12\dots k_1}_{12\dots k_1}, B^{12\dots k_2}_{12\dots k_2}, \dots$ choisis, on fait une partition dans l'ensemble des inconnues; on a $(I + 1)$ sous-ensembles qu'on peut ordonner; le premier contient $m - k_1$ éléments, soit avec le choix précédent les $y^{\hat{C}}$, le second $k_1 - k_2$ éléments, soit les $y^{\hat{\bar{C}}}$, ... le $(j + 1)^{\text{ième}}$ contient $k_j - k_{j+1}$ éléments, soit les $y^{j\ \text{barres, 1 chapeau}}$, ($y^B$ tels que $k_{j+1} < B \leqslant k_j$), ..., le $(I + 1)^{\text{ième}}$ contient k_I éléments, soit les $y^{I\ \text{barres}}$. Il faut donc et il suffit que l'on connaisse les χ_1 premiers coefficients des développements en x^1 des inconnues $y^{\hat{\bar{C}}}$, les $\chi_1 + \chi_2$ premiers coefficients des développements en x^1 des inconnues $y^{\hat{\bar{\bar{C}}}}$, ..., les $\chi_1 + \chi_2 + \cdots + \chi_j$ premiers coefficients des développements en x^1 des inconnues $y^{j\ \text{barres, 1 chapeau}}$, ..., les $\chi_1 + \chi_2 + \cdots + \chi_I$ premiers coefficients des développements en x^1 des inconnues $y^{I\ \text{barres}}$. Ces coefficients arbitraires sont ν séries formelles en $x^0, x^2, \dots x^n$, que nous appellerons, par exemple, pseudo-données de Cauchy sur le plan $Q : x^1 = 0$, pour les distinguer des données de Cauchy habituelles.

On remarque que ces pseudo-données de Cauchy ne sont pas déterminées de façon unique : il y a autant de choix possibles que de choix possibles de systèmes de déterminants tels que $A^{12\dots k_1}_{12\dots k_1}$, $B^{12\dots k_2}_{12\dots k_2}$, etc.; on rappelle cependant que les nombres $k_j - k_{j+1}$ et les nombres $\chi_1 + \chi_2 + \cdots + \chi_j$ sont déterminés de façon unique pour tout j.

Tout se passe comme pour les équations linéaires ordinaires, où le choix des inconnues non principales n'est pas unique, mais où le rang est unique.

Lorsque le système (3-1) admet des seconds membres séries formelles et que les données de Cauchy sur P ne sont plus nulles mais sont des séries formelles quelconques de x^1, x^2, ... x^n, la détermination des y^B se fait aussi bien : on a des équations différentielles en Y_p^B qui ont les mêmes premiers membres que les précédentes mais qui possèdent un second membre déterminé en fonction de ces nouvelles données ; li faut toutefois que les données de Cauchy et les seconds membres vérifient ν « équations aux conditions initiales » que nous préciserons au chapitre II § 3 et que les pseudo-données de Cauchy soient encore compatibles avec les données de Cauchy, (nous reviendrons aussi sur ce point au chapitre II § 6 *a*)).

Nous énoncerons pour conclure le *théorème* suivant :

THÉORÈME. — *Soit le système à coefficients constants*

$$P_B^{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_t, A}.\partial_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_t}y^B = g^A.$$

Soit P *un hyperplan caractéristique non singulier et* Q *un hyperplan quelconque coupant la bicaractéristique de* P.

Il existe une solution séries formelles du système et une seule correspondant aux données suivantes :

1° *sur* P, *mt séries formelles, données de Cauchy, supposées satisfaisant à un système de ν équations aux dérivées partielles exprimant leur compatibilité* ($\nu \leqslant mt$).

2° *sur* Q, ν *séries formelles, pseudo-données de Cauchy, ces données étant supposées compatibles avec les données de Cauchy.*

7. Propagation des discontinuités.

Les calculs précédents peuvent recevoir une autre interprétation en imaginant, grosso-modo, que les coefficients Y_p^B représentent les discontinuités des dérivées d'une solution non nulle d'un côté du plan caractéristique et nulle (dans le cas d'équations homogènes), de l'autre.

C'est cette interprétation que nous allons maintenant donner de façon plus précise.

a) Nous donnerons d'abord des définitions relatives aux discontinuités des dérivées d'une fonction.

On notera ε un espace ponctuel affine à $(n+1)$ dimensions sur les corps des réels. Un point x de ε a pour coordonnées dans un repère les nombres x^ρ; On désignera par P l'hyperplan d'équation $l_\alpha x^\alpha = h$ (l_α non tous nuls). Une $(n+1)$ — forme quelconque fixe non nulle η nous servira d'élément de volume de ε; elle induit sur P une n-forme élément de volume et une seule σ telle que $\eta = l \wedge \sigma$.

Soit y une fonction à valeurs réelles sur ε. On suppose que y est de classe C_{t-1} dans ε (t donné $\geqslant 1$) et de classe $C_{t'}$ dans le complémentaire de P, $(t' \geqslant t)$.

On fera de plus les hypothèses suivantes. Effectuons un changement de coordonnées tel que P ait pour équation $x^0 = 0$; nous supposerons que les dérivées transversales usuelles $[\partial_{\underbrace{00\ldots0}_{q \text{ indices}}} y$ $(t' \geqslant q \geqslant t)$, ont toutes des limites quand x^0 tend vers 0 de chaque côté de P et en chaque point de P et que ces dérivées sont des fonctions localement sommables. Les discontinuités $[\partial_{\underbrace{00\ldots0}_{q \text{ indices}}} y]$, $(t \leqslant q < t')$ (différence des limites du côté $x^0 > 0$ et de l'autre côté) sont alors des fonctions localement sommables sur P et définissent des distributions sur P (on utilise [5], [6]).

Ceci étant, nous définirons sur P des tenseurs-distributions symétriques notés $[\partial_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_q} y]$ par leurs composantes dans le repère précédent.

$[\partial_{00\ldots0} y]$ sera la distribution discontinuité déjà introduite et déjà notée de cette façon. Par définition, on posera :

$$[\partial_{i_1i_2\ldots i_r\underbrace{00\ldots0}_{q-r \text{ indices}}} y] = \partial_{i_1i_2\ldots i_r}[\partial_{\underbrace{00\ldots0}_{q-r \text{ indices}}} y],$$

Les dérivées sur P étant prises au sens des distributions.

Regardons ainsi l'expression de $[\partial_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_t} y]$. Dans un repère où P a pour équation $x^0 = 0$, en posant $Y_t = [\partial_{\underbrace{00\ldots0}_{t \text{ indices}}} y]$, on aura :

$$(1) \qquad [\partial_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_t} y] = Y_t . l_{\alpha_1} l_{\alpha_2} \ldots l_{\alpha_t}.$$

Cette égalité est donc valable en tout repère et Y_t est un scalaire à support dans P.

Ainsi à chaque dérivée usuelle $\partial_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_q}$ définie sauf sur l'ensemble de mesure nulle P, on fera correspondre un tenseur-distribution à support dans P, symétrique, $[\partial_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_q}y]$. On conviendra de plus que cette correspondance soit linéaire :

$$[\lambda\partial_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_q}y + \mu\partial_{\beta_1\beta_2\ldots\beta_{q'}}z] = \lambda[\partial_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_q}y] + \mu[\partial_{\beta_1\beta_2\ldots\beta_{q'}}z].$$

Dans le cas où toutes les dérivées ont des limites sur P, les tenseurs [ ] introduits coïncident avec les discontinuités usuelles et ont les propriétés classiques données par Hadamard [7] et Schwartz [5], [6].

b) Soit maintenant F′ un espace vectoriel sur **R** de dimension m. Une distribution vectorielle, [5], [8], sur ε à valeurs dans F′ sera notée y; elle admet pour composantes des scalaires distributions qu'on notera y^{B}. Soit d'autre part, un tenseur symétrique en α élément du produit tensoriel :

$$(\mathrm{E}\otimes)^t\otimes\mathrm{F}\otimes\mathrm{F}^*$$

(E désigne l'espace vectoriel associé à ε).

Ce tenseur a pour composantes les nombres :

$$\mathrm{P}_{\mathrm{B}}^{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_t,\mathrm{A}}.$$

Nous étudierons le système différentiel aux inconnues y^{B}.

$$\mathrm{P}_{\mathrm{B}}^{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_t,\mathrm{A}}.\partial_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_t}y^{\mathrm{B}} = 0. \tag{2}$$

où les dérivées sont prises au sens des distributions.

c) Supposons maintenant que les y^{B} sont définies par des fonctions de classe C_{t-1} dans ε, de classe C_t, dans le complémentaire de P, dans les conditions du *a*) de ce paragraphe. Dans ces conditions, on aura :

$$\partial_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_t}y^{\mathrm{B}} = \{\partial_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_t}y^{\mathrm{B}}\},$$

où $\{\partial_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_t}y^{\mathrm{B}}\}$ est la distribution définie par la dérivée usuelle qui existe presque partout. Par suite, le système (2) s'écrira aussi bien :

$$\mathrm{P}_{\mathrm{B}}^{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_t,\mathrm{A}}\{\partial_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_t}y^{\mathrm{B}}\} = 0.$$

Il en résulte que dans le complémentaire de P, l'expression $\mathrm{P}_{\mathrm{B}}^{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_t,\mathrm{A}}.\partial_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_t}y^{\mathrm{B}}$, où on dérive au sens usuel, sera nulle; ainsi par conséquent que toutes ses dérivées usuelles (2).

(2) On supposera jusqu'au *g*) que t' est infini; au *g*) on indiquera l'influence du choix de t'.

On aura donc, d'après le a), quels que soient $\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_p$:

$$(3) \qquad P_B^{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_t,A}.[\partial_{\beta_1\beta_2\ldots\beta_p\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_t}y^B] = 0.$$

Cette égalité nous donnera toutes les conditions sur les discontinuités qu'on peut obtenir en dérivant (7-2).

Les calculs précédents sont invariants dans ε. Faisons un changement de coordonnées tel que P ait pour équation: $x^0 = 0$ et posons:

$$[\partial_{\underbrace{00\ldots0}_{q \text{ indices}}}y] = Y_q.$$

Reprenons la formule (3) et explicitons-là. On a d'abord:

$$(4) \qquad P_B^{00\ldots0,A}Y_t^B = 0.$$

Avec un seul indice β qu'on prendra nul, car sinon on ne ferait que dériver l'équation (4), on a:

$$P_B^{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_t,A}.[\partial_{0\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_t}y^B] = 0.$$

Soit:

$$(5) \qquad P_B^{00\ldots0,A}Y_{t+1}^B + C_t^1P_B^{i0\ldots0,A}.\partial_iY_t^B = 0.$$

Avec p indices β nuls, on a:

$$P_B^{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_t,A}.[\partial_{\underbrace{00\ldots0}_{p \text{ indices}}\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_t}y^B] = 0.$$

Soit:

$$(6) \qquad \sum_{q=0}^{q=t} C_t^q.P_B^{00\ldots0i_1i_2\ldots i_q,A}.\partial_{i_1i_2\ldots i_q}Y_{t+p-q}^B = 0.$$

Les Y_p^B satisfont donc au système (3) du § 3 et ce système représente toutes les conditions auxquelles sont assujetties les discontinuités.

d) Si P n'est pas un hyperplan caractéristique [3], on vérifie facilement que toutes les distributions Y_p^B sont nulles, ce qui est naturel.

On supposera donc désormais P caractéristique non singulier.

[3] On dira que P est caractéristique si le plan $l_\alpha x^\alpha = 0$ de l'espace vectoriel E associé à ε est caractéristique; on dira que P est caractéristique non singulier si ce plan est caractéristique non singulier.

On appellera bicaractéristiques du plan P les droites de direction $\vec{l}$ du plan P; en chaque point x de P, P est tangent le long de la bicaractéristique issue de ce point au cône de sommet x et d'équation tangentielle $H' = 0$.

Les calculs du § 4 sont encore valables et on obtient finalement les formules du § 5 pour les discontinuités.

e) En ce qui concerne les premières discontinuités Y_t^B, on a ainsi les formules (6-1) 6-2); on remarque que, comme $l^0 = 0$, les formules (6-1) sont invariantes dans les changements de coordonnées affines de ε. En intégrant, cf. [5], on obtient les formules (6-4) où les $Y_{t,\chi}^B$ sont maintenant des distributions indépendantes de x^1 définies par des fonctions localement sommables arbitraires de $x^2, \ldots x^n$.

Le support de $\vec{Y}_t$ est le produit ordinaire de la réunion des supports des $Y_{t,\chi}^B$ par une bicaractéristique. Autrement dit interprétons les $Y_{t,\chi}^B$ arbitraires comme des conditions initiales dans le plan $x^0 = x^1 = 0$ et les bicaractéristiques comme des rayons, le support de $\vec{Y}_t$ peut alors être interprété comme un « pinceau » de rayons ayant pour base dans le plan $x^1 = 0$ le support des conditions initiales et la propagation des $\vec{Y}_t$ ne dépend que de ces conditions initiales.

Supposons maintenant que la convergence des y^B et de leurs dérivées sur P soit uniforme, les Y_t^B sont alors simplement dérivables usuellemenr en x^i. Les conditions initiales sont les valeurs, sur $x^1 = x^0 = 0$, des $(\chi_1 + \chi_2 - 1)$ premières dérivées des $Y^{\bar{\bar{D}}}$ et des $Y_t^{\bar{\bar{D}}}$ eux-mêmes et des $(\chi_1 - 1)$ premières dérivées des $Y_t^{\hat{\hat{C}}}$ et des $Y_t^{\hat{\hat{C}}}$ eux-mêmes par rapport à x^1, (si $k_3 = 0$).

En particulier, si ces données sont nulles en un point du plan $x^1 = x^0 = 0$, Y_t^B est nul sur tout le rayon issu de ce point.

Dans le cas où $k_2 = 0$, $\chi_1 = 1$, k_1 quelconque, on remarque que le système (6-1) se réduit à un système d'équations du 1^{er} ordre et d'équations algébriques.

$$l^\alpha \partial_\alpha Y_t^{\bar{D}} = 0,$$
$$Y_t^{\hat{C}} = \frac{A_{12 \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots k_1}^{12 \ldots (\bar{D}-1)\hat{C}(\bar{D}+1) \ldots k_1}}{A_{12 \ldots k_1}^{12 \ldots k_1}} Y_t^{\bar{D}}.$$

On l'intègre aussi bien et on voit que $\vec{Y}_t$ conserve sur tout le rayon sa valeur initiale; on pourra dire dans ce cas que la propagation est simple. C'est le cas qui correspond aux cas étudiés pour les systèmes d'équations aux dérivées partielles à coefficients variables par Hadamard [7].

On aura de même pour les Y_{t+l}^B et les discontinuités précédentes des polynômes en x^1 dont les coefficients seront des combinaisons linéaires déterminées de fonctions localement sommables arbitraires de $x^2, \ldots x^n$ et de leurs dérivées au sens des distributions.

Interprétant encore ces fonctions arbitraires et leurs dérivées comme des conditions initiales dans le plan $x^1 = x^0 = 0$, on voit que la réunion des supports des Y^B_{t+l} et des discontinuités antérieures est un cylindre, « pinceau », ayant pour base dans le plan $x^1 = x^0 = 0$ la réunion des supports des conditions initiales et pour génératrices, « rayons », les bicaractéristiques. C'est vrai évidemment en particulier si la réunion des supports est compacte dans $x^1 = x^0 = 0$. On voit aussi que la propagation des discontinuités ne dépend que des conditions initiales.

g) Indiquons brièvement ce qui se passe si t' est fini. Si on suppose $t' = t + l + \chi_1 + \chi_2$, en formant les équations du § 5 jusqu'à $p = l + \chi_1 + \chi_2$ on peut déterminer comme précédemment toutes les discontinuités jusqu'aux Y^B_{t+l} en fonction de conditions initiales.

Toutes les équations du § 5 ne sont pas utilisées mais celles qui restent donnent des conditions sur les discontinuités d'ordre supérieur et ne suffisent pas d'ailleurs à les déterminer. Si on suppose $t' < t + l + \chi_1 + \chi_2$ les équations du § 5 que l'on peut former ne suffisent pas à déterminer les Y^B_{t+l} en fonction de conditions initiales analogues à celles du cas de $t' = \infty$; elles donnent seulement des conditions plus faibles reliant entre elles les discontinuités possibles.

h) Les résultats de ce paragraphe restent valables si l'on remplace le système (7-2) par un système non homogène ayant les mêmes premiers membres et des seconds membres qui soient des fonctions de classe C_∞.

Si on suppose seulement que ces seconds membres sont des fonctions de classe supérieure ou égale à $\sum_{i=1}^{i=I} \chi_i$, le système (6-1) reste valable.

Si les seconds membres ont des dérivées non continues à la traversée de P dans des conditions analogues à celles du *a*), les équations de propagation (6-1) sont remplacées par des équations non homogènes ayant les mêmes premiers membres que (6-1) et des seconds membres connus.

CHAPITRE II

SOLUTIONS ANALYTIQUES, AU VOISINAGE D'UN HYPERPLAN CARACTÉRISTIQUE, DES SYSTÈMES D'ÉQUATIONS DONT LES POLYNOMES DE DÉRIVATION SONT HOMOGÈNES ET DE MÊMES DEGRÉS

1. Transformation du système différentiel.

a) On considère le système :

$$\text{(1)} \qquad P_B^{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_t, A}\partial_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_t}y^B = g^A.$$

Au § 1-2-3 de ce chapitre, l'inconnue est une fonction vectorielle y à valeurs dans F', définie sur l'espace ε, continûment différentiable de classe $C_{t'}$, $\left(t' \geqslant t + \sum_{i=1}^{i=I} \chi_i\right)$; g est une fonction vectorielle donnée de classe $C_{t''}$, $\left(t'' > \sum_{i=1}^{i=I} \chi_i\right)$. (Les considérations de ces trois paragraphes étant essentiellement algébriques, on aurait d'ailleurs des résultats analogues en prenant des distributions.)

On utilisera les notations et les définitions du chapitre I. On supposera, pour H', que $k_3 = 0$, ce qui simplifiera les notations et ne changera pas le caractère des raisonnements et des résultats.

On choisira des coordonnées de ε où le plan P caractéristique envisagé a pour équation $x^0 = 0$ et où les bicaractéristiques correspondent à x^1 seul variable; on appellera encore Q le plan $x^1 = 0$.

On appellera données de Cauchy sur P un ensemble de fonctions définissant les y^B et leurs $(t - 1)$ premières dérivées transversales au plan P sur le plan P. On appellera pseudo-données de Cauchy sur Q un ensemble de fonctions définissant les $y^{\hat{C}}$ et leurs dérivées en x^1 d'ordre inférieur ou égal à $\chi_1 - 1$ et les $y^{\bar{\bar{D}}}$ et leurs dérivées en x^1 d'ordre inférieur ou égal à $\chi_1 + \chi_2 - 1$ sur le plan Q (cf. chapitre I, § 6 *b*)).

Enfin on posera dans le cours de ce chapitre :

$$\partial_{\underbrace{00\ldots0}_{q \text{ indices}}\ \underbrace{11\ldots1}_{\chi \text{ indices}}} = \partial_{(0)^q(1)^\chi}.$$

b) On remplacera le système (1) par un système équivalent obtenu par des dérivations en x^0, avec des conditions initiales sur P, et par des combinaisons linéaires des équations.

Pour cela, on remarquera essentiellement que les calculs conduisant à relier les $\partial_{(0)^q}y^{\mathrm{B}}$ et leurs dérivées par rapport aux x^i, $(q \geqslant t)$, aux $\partial_{(0)^{q'}}y^{\mathrm{B}}$ et leurs dérivées par rapport aux x^i, $(0 \leqslant q' < t)$, (c'est-à-dire aux expressions qui se réduiront aux données de Cauchy sur P), sont identiques aux calculs du chapitre I, §§ 7 et 4, qui conduisent à chercher les relations entre les $\mathrm{Y}_q^{\mathrm{B}}$; les résultats relatifs aux discontinuités se traduisent par des résultats relatifs aux dérivées $\partial_{(0)^q}y^{\mathrm{B}}$ en remplaçant les égalités par des congruences modulo les expressions se réduisant aux données de Cauchy sur P et les fonctions données des seconds membres.

On utilisera donc les calculs du chapitre I, §§ 7 et 4; on modifiera toutefois l'ordre des opérations, en ce sens qu'ici nous dériverons par rapport à x^0 les équations résolues par rapport aux inconnues principales et les conditions de compatibilité, alors qu'au chapitre I, §§ 7 et 4, on dérivait successivement le système non résolu en écrivant chaque fois les formules de résolution et les conditions de compatibilité; l'interversion de l'ordre des opérations est sans importance, les coefficients étant constants.

Indiquons de façon plus précise, la suite des calculs, en donnant la correspondance avec ceux du chapitre I.

Le système (1) s'écrit :

$$(2) \quad \mathrm{P}_{\mathrm{B}}^{00\ldots0,\mathrm{A}}\partial_{(0)^t}y^{\mathrm{B}} + \mathrm{C}_t^1\mathrm{P}_{\mathrm{B}}^{i\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{t-1},\mathrm{A}}\partial_{i\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{t-1}}y^{\mathrm{B}} - g^{\mathrm{A}} = 0.$$

Il équivaut au système :

$$(3) \quad \partial_{(0)^t}y^{\hat{\mathrm{C}}} = \frac{\mathrm{A}_{12\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots k_1}^{12\ldots(\overline{\mathrm{D}}-1)\hat{\mathrm{C}}(\overline{\mathrm{D}}+1)\ldots k_1}}{\mathrm{A}_{12\ldots k_1}^{12\ldots k_1}}\,.\,\partial_{(0)^t}y^{\overline{\mathrm{D}}}$$

$$- \frac{\mathrm{A}_{12\ldots k_1\hat{\mathrm{A}}}^{12\ldots k_1\hat{\mathrm{C}}}}{\mathrm{A}_{12\ldots k_1}^{12\ldots k_1}}\left[\mathrm{C}_t^1\mathrm{P}_{\mathrm{B}}^{i\alpha_1\ldots\alpha_{t-1},\hat{\mathrm{A}}}\,.\,\partial_{i\alpha_1\ldots\alpha_{t-1}}y^{\mathrm{B}} - g^{\mathrm{A}}\right]$$

$$(4) \quad \mathrm{A}_{12\ldots(\overline{\mathrm{A}}-1)\mathrm{F}(\overline{\mathrm{A}}+1)\ldots k_1}^{12\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots k_1}\,.\left[\mathrm{P}_{\mathrm{B}}^{i\alpha_1\ldots\alpha_{t-1},\mathrm{F}}\partial_{i\alpha_1\ldots\alpha_{t-1}}y^{\mathrm{B}} - g^{\mathrm{F}}\right] \equiv \mathrm{T}^{\overline{\mathrm{A}}} = 0.$$

L'équation (2) correspond à l'équation (7-4) du chapitre I et l'équation (3) à l'équation (I-4-1).

L'équation (4) est équivalente aux équations :

$$(5) \qquad (\partial_{(0)^p} T^{\bar A} \text{ sur } P) = 0, \qquad \text{avec} \qquad 0 \leqslant p < \chi_1.$$

$$(6) \qquad \partial_{(0)^{\chi_1}} T^{\bar A} = 0,$$

puisque les T sont suffisamment continûment différentiables.

On remplacera dans (5) et (6) les $\partial_{(0)^q} y^{\hat C}$, $(q \geqslant t)$, en fonction des $\partial_{(0)^q} y^{\bar D}$ à l'aide de (3) et des formules dérivées en x^0. Les calculs sont ceux du chapitre I, § 4. D'après le chapitre I, § 4 *d*), les équations (5) sont des relations entre les données de Cauchy sur P et l'équation (6) s'écrira :

$$\mathcal{A}^{\bar A}_{\bar D} \cdot \partial_{(1)^{\chi_1}(0)^t} y^{\bar D} \sim 0.$$

Le système (3) et (4) équivaut donc au système :

$$\left\{\begin{array}{ll} (3) & \partial_{(0)^t} y^{\hat C} \sim \dfrac{A^{12\ldots(\bar D-1)\hat C(\bar D+1)\ldots k_1}_{12\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots k_1}}{A^{12\ldots k_1}_{12\ldots k_1}} \cdot \partial_{(0)^t} y^{\bar D}. \\ (7) & \text{Système aux données de Cauchy sur P.} \\ (8) & \mathcal{A}^{\bar A}_{\bar D} \cdot \partial_{(1)^{\chi_1}(0)^t} y^{\bar D} \sim 0. \end{array}\right.$$

L'équation (8) équivaut au système :

$$\left\{\begin{array}{ll} (9) & \partial_{(1)^{\chi_1}(0)^t} y^{\hat{\hat C}} \sim \dfrac{B^{12\ldots(\bar{\bar D}-1)\hat{\hat C}(\bar{\bar D}+1)\ldots k_2}_{12\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots k_2}}{B^{12\ldots k_2}_{12\ldots k_2}} \partial_{(1)^{\chi_1}(0)^t} y^{\bar{\bar D}} \\ (10) & k_2 \text{ conditions de compatibilité du système (8) notées} \\ & T'^{\bar{\bar A}} = 0. \end{array}\right.$$

On remplacera (10) par le système équivalent, obtenu en dérivant χ_2 fois :

$$\left\{\begin{array}{lll} (11) & \left(\partial_{(0)^{p'}} T'^{\bar{\bar A}} \text{ sur P}\right) = 0, & \text{avec} \quad 0 \leqslant p' < \chi_2. \\ (12) & \partial_{(0)_{\chi_2}} T'^{\bar{\bar A}} = 0. & \end{array}\right.$$

On remplace dans (11) et (12) les dérivées en x^0 d'ordre supérieur à t de $y^{\hat{\hat C}}$ et de $y^{\hat C}$ en fonction des dérivées des $y^{\bar{\bar D}}$ à l'aide de (9) et de (3) et des formules dérivées en x^0. Ce sont les calculs du chapitre I, § 4 *e*). D'après le chapitre I, § 4 *f*), les équations (11) seront des relations entre les données de

Cauchy sur P et l'équation (12) s'écrira :

$$(13) \qquad \mathcal{B}^{\bar{\bar{A}}}_{\bar{\bar{D}}} \cdot \partial_{(1)^{\chi_1+\chi_2}(0)^t} y^{\bar{\bar{D}}} \sim 0.$$

Le système (1) équivaut donc au système :

$$\begin{array}{ll}
(3) & \left\{ \begin{array}{l}
\partial_{(0)^t} y^{\hat{C}} \sim \dfrac{A^{12\ldots(\bar{D}-1)\hat{C}(\bar{D}+1)\ldots k_1}_{12\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots k_1}}{A^{12\ldots k_1}_{12\ldots k_1}} \partial_{(0)^t} y^{\bar{D}} \\
\text{Système aux données de Cauchy sur P.} \\
\partial_{(1)^{\chi_1}(0)^t} y^{\hat{\hat{C}}} \sim \dfrac{B^{12\ldots(\bar{\bar{D}}-1)\hat{\hat{C}}(\bar{\bar{D}}+1)\ldots k_2}_{12\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots k_2}}{B^{12\ldots k_2}_{12\ldots k_2}} \cdot \partial_{(1)^{\chi_1}(0)^t} y^{\bar{\bar{D}}} \\
\text{Système aux données de Cauchy obtenu à partir} \\
\text{de (11).} \\
\partial_{(1)^{\chi_1+\chi_2}(0)^t} y^{\bar{\bar{D}}} \sim 0, \qquad \text{(puisque } k_3 = 0\text{).}
\end{array} \right. \\
(7) & \\
(9) & \\
(14) & \\
(15) &
\end{array}$$

On précisera les résultats en remarquant que l'ordre total des dérivations est le même dans les deux membres de chaque égalité et que toutes les expressions écrites sont linéaires et à coefficients constants par rapport aux dérivées.

Le système (1) équivaut donc au système (16) :

$$(16) \left\{ \begin{array}{l}
\mathrm{I} \begin{cases}
\partial_{(0)^t} y^{\hat{C}} - \dfrac{A^{12\ldots(\bar{D}-1)\hat{C}(\bar{D}+1)\ldots k_1}_{12\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots k_1}}{A^{12\ldots k_1}_{12\ldots k_1}} \partial_{(0)^t} y^{\bar{D}} \\
\qquad\qquad = Q^{i\alpha_1\ldots\alpha_{t-1},\hat{C}}_{B} \partial_{i\alpha_1\ldots\alpha_{t-1}} y^{B} + g'^{\hat{C}} \\
\partial_{(1)^{\chi_1}(0)^t} y^{\hat{\hat{C}}} - \dfrac{B^{12\ldots(\bar{\bar{D}}-1)\hat{\hat{C}}(\bar{\bar{D}}+1)\ldots k_2}_{12\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots k_2}}{B^{12\ldots k_2}_{12\ldots k_2}} \partial_{(1)^{\chi_2}(0)^t} y^{\bar{\bar{D}}} \\
\qquad = Q^{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{t-1}i_t i_{t+1}\ldots i_{t+\chi_1},\hat{\hat{C}}}_{B} \partial_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{t-1}i_t i_{t+1}\ldots i_{t+\chi_1}} y^{B} + g'^{\hat{\hat{C}}} \\
\partial_{(1)^{\chi_1+\chi_2}(0)^t} y^{\bar{\bar{D}}} \\
\qquad = Q^{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{t-1}i_t\ldots i_{t+\chi_1+\chi_2},\bar{\bar{D}}}_{B} \cdot \partial_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{t-1}i_t\ldots i_{t+\chi_1+\chi_2}} y^{B} + g'^{\bar{\bar{D}}}, \\
\text{où les Q sont des coefficients constants connus et} \\
\text{les } g' \text{ des fonctions connues.}
\end{cases} \\
\mathrm{II} \begin{cases}
\text{Système d'équations aux dérivées partielles} \\
\text{linéaires et à coefficients constants ayant pour} \\
\text{inconnues les données de Cauchy, qui sont des} \\
\text{fonctions des } x^i \text{ seuls, devant être donc vérifié} \\
\text{sur P.}
\end{cases}
\end{array} \right.$$

Le système (16-1) correspond au système (6-2) du chapitre I.

2. Changement de fonctions inconnues et forme « canonique » du système relative à un hyperplan caractéristique.

Nous allons remplacer le vecteur inconnu y de l'espace F′ par un vecteur u du même espace déduit de y par un automorphisme.

On définira les composantes de u dans la base f_{B} de F′ par les formules :

$$(1) \qquad \begin{cases} u^{\hat{\mathrm{A}}} = \mathrm{P}_{\mathrm{B}}^{00\ldots0,\hat{\mathrm{A}}} y^{\mathrm{B}} \\ u^{\hat{\hat{\mathrm{A}}}} = \mathcal{A}_{\bar{\mathrm{D}}}^{\hat{\hat{\mathrm{A}}}} y^{\bar{\mathrm{D}}} \\ u^{\bar{\bar{\mathrm{D}}}} = y^{\bar{\bar{\mathrm{D}}}}. \end{cases}$$

L'examen de la matrice de l'application $y \to u$ nous montre facilement que son déterminant est égal à :

$$\mathrm{A}_{12\ldots k_1}^{12\ldots k_1} . \mathrm{B}_{12\ldots k_2}^{12\ldots k_2} \neq 0.$$

Par suite, cette application est bien un automorphisme.

Nous allons d'ailleurs le vérifier autrement car nous aurons besoin de construire la matrice inverse.

Les formules (1) s'écrivent aussi :

$$\begin{cases} u^{\hat{\mathrm{A}}} = \mathrm{P}_{\bar{\mathrm{D}}}^{00\ldots0,\hat{\mathrm{A}}} y^{\bar{\mathrm{D}}} + \mathrm{P}_{\hat{\mathrm{C}}}^{00\ldots0,\hat{\mathrm{A}}} y^{\hat{\mathrm{C}}} \\ u^{\hat{\hat{\mathrm{A}}}} = \mathcal{A}_{\bar{\bar{\mathrm{D}}}}^{\hat{\hat{\mathrm{A}}}} y^{\bar{\bar{\mathrm{D}}}} + \mathcal{A}_{\hat{\hat{\mathrm{C}}}}^{\hat{\hat{\mathrm{A}}}} y^{\hat{\hat{\mathrm{C}}}} \\ u^{\bar{\bar{\mathrm{D}}}} = y^{\bar{\bar{\mathrm{D}}}}. \end{cases}$$

Soit, en multipliant et sommant la première par $\dfrac{\mathrm{A}_{12\ldots k_1\hat{\mathrm{A}}}^{12\ldots k_1\hat{\mathrm{C}}}}{\mathrm{A}_{12\ldots k_1}^{12\ldots k_1}}$ et la deuxième par $\dfrac{\mathrm{B}_{12\ldots k_2\hat{\hat{\mathrm{A}}}}^{12\ldots k_2\hat{\hat{\mathrm{C}}}}}{\mathrm{B}_{12\ldots k_1}^{12\ldots k_1}}$:

$$(2) \qquad \begin{cases} \dfrac{\mathrm{A}_{12\ldots k_1\hat{\mathrm{A}}}^{12\ldots k_1\hat{\mathrm{C}}}}{\mathrm{A}_{12\ldots k_1}^{12\ldots k_1}} u^{\hat{\mathrm{A}}} = -\dfrac{\mathrm{A}_{12\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots k_1}^{12\ldots(\bar{\mathrm{D}}-1)\hat{\mathrm{C}}(\bar{\mathrm{D}}+1)\ldots k_1}}{\mathrm{A}_{12\ldots k_1}^{12\ldots k_1}} y^{\bar{\mathrm{D}}} + y^{\hat{\mathrm{C}}}. \\ \dfrac{\mathrm{B}_{12\ldots k_2\hat{\hat{\mathrm{A}}}}^{12\ldots k_2\hat{\hat{\mathrm{C}}}}}{\mathrm{B}_{12\ldots k_2}^{12\ldots k_2}} u^{\hat{\hat{\mathrm{A}}}} = -\dfrac{\mathrm{B}_{12\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots k_1}^{12\ldots(\bar{\mathrm{D}}-1)\hat{\hat{\mathrm{C}}}(\bar{\bar{\mathrm{D}}}+1)\ldots k_1}}{\mathrm{B}_{12\ldots k_2}^{12\ldots k_2}} y^{\bar{\bar{\mathrm{D}}}} + y^{\hat{\hat{\mathrm{C}}}}. \\ u^{\bar{\bar{\mathrm{D}}}} = y^{\bar{\bar{\mathrm{D}}}}. \end{cases}$$

Il suffit de remplacer $y^{\bar{\bar{\mathrm{D}}}}$ par $u^{\bar{\bar{\mathrm{D}}}}$ dans la 2e équation et ensuite $y^{\bar{\mathrm{D}}}$ en fonction de $u^{\hat{\hat{\mathrm{A}}}}$ et $u^{\bar{\bar{\mathrm{D}}}}$ pour avoir les éléments de la matrice inverse.

En fait, nous allons utiliser les formules (2) sous la forme ci-dessus pour transformer le système (1-16). On remplace les y en fonction des u et on obtient le système équivalent :

$$
(3)\quad \begin{cases}
\mathrm{I}\begin{cases}
\partial_{(0)^t} u^{\hat{\mathrm{C}}} = \mathrm{R}_{\mathrm{B}}^{i\alpha_1\ldots\alpha_{t-1},\hat{\mathrm{C}}} . \partial_{i\alpha_1\ldots\alpha_{t-1}} u^{\mathrm{B}} + g''^{\hat{\mathrm{C}}} \\
\partial_{(1)^{\chi_1}(0)^t} u^{\hat{\hat{\mathrm{C}}}} \\
\qquad = \mathrm{R}_{\mathrm{B}}^{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{t-1}i_t\ldots i_{t+\chi_1},\hat{\hat{\mathrm{C}}}} . \partial_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{t-1}i_t\ldots i_{t+\chi_1}} u^{\mathrm{B}} + g''^{\hat{\hat{\mathrm{C}}}} \\
\partial_{(1)^{\chi_1+\chi_2}(0)^t} u^{\bar{\bar{\mathrm{D}}}} \\
\qquad = \mathrm{R}_{\mathrm{B}}^{\alpha_1\ldots\alpha_{t-1}i_t\ldots i_{t+\chi_1+\chi_2},\bar{\bar{\mathrm{D}}}} . \partial_{\alpha_1\ldots\alpha_{t-1}i_t\ldots i_{t+\chi_1+\chi_2}} u^{\mathrm{B}} + g''^{\bar{\bar{\mathrm{D}}}} \\
\text{où les } \mathbf{R} \text{ sont des coefficients constants connus et} \\
\text{les } g'' \text{ des fonctions connues.}
\end{cases} \\
\mathrm{II}\begin{cases}
\text{Système du même type que (1-16-II) ayant pour} \\
\text{inconnues des fonctions de } x^i \text{ seul.}
\end{cases}
\end{cases}
$$

Le système (2-3) est une forme remarquable du système initial adaptée à l'étude de ce système relative à un plan caractéristique P et aux bicaractéristiques de ce plan.

L'unicité des facteurs invariants (cf. chap. I, § 1) nous montre que cette forme canonique (2-3-1) est unique.

3. Remarque sur le système de conditions sur les données de Cauchy.

Cherchons le nombre d'équations du système (1-16-II) ou du système (2-3-II). Pour cela, il suffit de considérer (1-5) et (1-11). On voit qu'il y en a :

$$k_1\chi_1 + k_2\chi_2 = \nu.$$

Le nombre de fonctions inconnues, données de Cauchy, est égal à mt, c'est-à-dire au degré du polynôme.

Or, on a de façon évidente :

$$\nu \leqslant mt.$$

Le système de conditions sur les données de Cauchy a donc au moins autant d'inconnues que d'équations.

4. Solutions analytiques au voisinage de l'intersection d'un hyperplan caractéristique et d'un hyperplan coupant les bicaractéristiques.

a) On supposera désormais que les fonctions g^A des seconds membres de (II-1-1) sont analytiques dans un voisinage de l' « arête », (plan intersection de P et de Q).

Dans ces conditions, on se propose de démontrer le *théorème* suivant :

Il existe une solution analytique du système, et une seule dans un voisinage de l'intersection de P et de Q, correspondant aux données suivantes :

1° dans P, dans un voisinage de l'arête, *mt* fonctions données de Cauchy, supposées analytiques et satisfaisant au système (1-16-II) exprimant leur compatibilité.

2° Dans Q, dans un voisinage de l'arête, ν fonctions pseudo-données de Cauchy ([4]) supposées analytiques et compatibles avec les données de Cauchy sur l'arête.

b) En remplaçant y par u, il est équivalent de démontrer le théorème analogue concernant le système (2-3). Les pseudo-données du 2°) sont les valeurs des $u^{\hat{B}}$ et de leurs dérivées en x^1 d'ordre inférieur à χ_1 et les valeurs des $u^{\bar{\bar{B}}}$ et de leurs dérivées en x^1 d'ordre inférieur à $\chi_1 + \chi_2$.

Comme nous supposons que les données de Cauchy sur P satisfont à (2-3-II), nous n'étudierons plus désormais que (2-3-I).

5. Théorème d'unicité.

Il résulte immédiatement du théorème du chapitre I § 6 *b*) exprimant l'existence et l'unicité dans les conditions du § 4 *a*) d'une solution séries formelles.

Autrement dit, on a démontré, pour chaque point de l'arête, que s'il y a une solution analytique dans un voisinage de ce point, il n'y en a qu'une et que son développement est celui trouvé au chapitre I.

([4]) Définition, au chapitre I, § 6 *b*) et au chapitre II, § 1 *a*).

6. Théorème d'existence.

a) Avant de démontrer la convergence des développements en série trouvés au chapitre I, nous allons nous ramener par des changements de fonctions inconnues à des données nulles sur P et sur Q.

Plus précisément, on posera :

$$z^{\hat{C}} = u^{\hat{C}} - (u^{\hat{C}})_0 - x^0(\partial_0 u^{\hat{C}})_0 - \cdots - \frac{(x^0)^{t-1}}{(t-1)\,!}(\partial_{(0)^{t-1}} u^{\hat{C}})_0,$$

les quantités entre parenthèses affectées de l'indice 0 n'étant autres que les données de Cauchy sur $x^0 = 0$;

$$\begin{aligned} z^{\hat{\hat{C}}} = {} & u^{\hat{\hat{C}}} - (u^{\hat{\hat{C}}})_0 - x^0(\partial_0 u^{\hat{\hat{C}}})_0 \cdots - \frac{(x^0)^{t-1}}{(t-1)\,!}(\partial_{(0)^{t-1}} u^{\hat{\hat{C}}})_0 \\ & - (u^{\hat{\hat{C}}})_1 - x^1(\partial_1 u^{\hat{\hat{C}}})_1 \cdots - \frac{(x^1)^{\chi_1-1}}{(\chi_1-1)\,!}(\partial_{(1)^{\chi_1-1}} u^{\hat{\hat{C}}})_1 \\ & + \pi^{\hat{\hat{C}}} + x^1\pi_1^{\hat{\hat{C}}} + \cdots + \frac{(x^1)^{\chi_1-1}}{(\chi_1-1)\,!}\pi^{\hat{\hat{C}}}_{(1)^{\chi_1-1}} \\ & + x^0\left(\pi_0^{\hat{\hat{C}}} + x^1\pi_{10}^{\hat{\hat{C}}} + \cdots + \frac{(x^1)^{\chi_1-1}}{(\chi_1-1)\,!}\pi^{\hat{\hat{C}}}_{(1)^{\chi_1-1}0}\right) \\ & + \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ & + \frac{(x^0)^{t-1}}{(t-1)\,!}\left(\pi^{\hat{\hat{C}}}_{(0)^{t-1}} + x^1\pi^{\hat{\hat{C}}}_{1(0)^{t-1}} + \cdots + \frac{(x^1)^{\chi_1-1}}{(\chi_1-1)\,!}\pi^{\hat{\hat{C}}}_{(1)^{\chi_1-1}(0)^{t-1}}\right), \end{aligned}$$

les dérivées entre parenthèses affectées de l'indice 1 de la 2[e] ligne étant données sur $x^1 = 0$ et les π étant des fonctions de $x^2, \ldots, x^n$ ainsi définies :

$$\begin{aligned} \pi^{\hat{\hat{C}}}_{(0)^q(1)^{q'}} &= \text{valeur de } (\partial_{(0)^q(1)^{q'}} u^{\hat{\hat{C}}})_0 \qquad \text{pour} \qquad x^1 = 0. \\ &= \text{valeur de } (\partial_{(0)^q(1)^{q'}} u^{\hat{\hat{C}}})^1 \qquad \text{pour} \qquad x^0 = 0. \end{aligned}$$

On posera de même : $z^{\bar{\bar{D}}} = u^{\bar{\bar{D}}} - \ldots$, l'expression de $z^{\bar{\bar{D}}}$ étant obtenue en remplaçant $\hat{\hat{C}}$ par $\bar{\bar{D}}$ et χ_1 par $\chi_1 + \chi_2$ dans celle de $z^{\hat{\hat{C}}}$.

On vérifie que les z^{B} répondent aux conditions désirées sur les données. On est ramené à montrer la convergence des séries du § 5 pour le système :

(1)
$$\left\{\begin{aligned}
\partial_{(0)^t} z^{\hat{\mathrm{C}}} &= \mathrm{R}_{\mathrm{B}}^{i\alpha_1\ldots\alpha_{t-1},\hat{\mathrm{C}}} . \partial_{i\alpha_1\ldots\alpha_{t-1}} z^{\mathrm{B}} + g'''^{\hat{\mathrm{C}}} \\
\partial_{(1)^{\chi_1}(0)^t} z^{\hat{\hat{\mathrm{C}}}} &= \mathrm{R}_{\mathrm{B}}^{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{t-1}i_t\ldots i_{t+\chi_1},\hat{\hat{\mathrm{C}}}} . \partial_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{t-1}i_t\ldots i_{t+\chi_1}} u^{\mathrm{B}} + g'''^{\hat{\hat{\mathrm{C}}}} \\
\partial_{(1)^{\chi_1+\chi_2}(0)^t} z^{\bar{\bar{\mathrm{D}}}} &= \mathrm{R}_{\mathrm{B}}^{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{t-1}i_t\ldots i_{t+\chi_1+\chi_2},\bar{\bar{\mathrm{D}}}} . \partial_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{t-1}i_t\ldots i_{t+\chi_1+\chi_2}} u^{\mathrm{B}} + g'''^{\bar{\bar{\mathrm{D}}}}
\end{aligned}\right.$$

où les $g'''^{\mathrm{B}}(x^\alpha)$ sont des fonctions analytiques connues des x^α, les données étant donc nulles sur P et Q.

b) Le calcul des dérivées successives des z en un point de l'arête ne comporte que des additions, des multiplications et des différentiations; nous emploierons la méthode des fonctions majorantes. Nous démontrerons la convergence des développements au voisinage de l'origine; on peut amener un point quelconque à l'origine par une translation sans changer la forme des équations (6-1).

Désignons d'abord par M un majorant de l'ensemble des nombres suivants :

1° les valeurs absolues des coefficients $\mathrm{R}_{\cdots}^{\cdots}$ intervenant dans les seconds membres de (6-1).

2° Les nombres K intervenant quand on remplace les fonctions analytiques $g'''^{\mathrm{B}}(x^\alpha)$ par des majorantes :

$$\frac{\mathrm{K}}{1 - \dfrac{\sum_{i=1}^{i=n} x^i + x^0/\lambda}{\rho}}, \qquad (\mathrm{K} > 0,\ \rho > 0,\ 0 < \lambda < 1).$$

Puis, considérons le système :

$$(2) \quad \partial_{(0)^t} z^{\hat{\mathrm{C}}} = \mathrm{M}\ \Bigl(\text{Somme de toutes les dérivées } \partial_{i\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{t-1}} z^{\mathrm{B}} \text{ pour tout B} + \frac{1}{1 - \dfrac{\Sigma x^i + x^0/\lambda}{\rho}}\Bigr).$$

$$(3) \quad \partial_{(1)^{\chi_1}(0)^t} z^{\hat{\hat{\mathrm{C}}}} = \mathrm{M}\ \Bigl(\text{Somme des } \partial_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{t-1}i_t i_{t+1}\ldots i_{t+\chi_1}} z^{\mathrm{B}} + \frac{1}{1 - \dfrac{\Sigma x^i + x^0/\lambda}{\rho}}\Bigr).$$

$$(4)\quad \partial_{(1)^{\chi_1+\chi_2}(0)^t} z^{\bar{\bar{D}}} = \mathrm{M}\left(\text{Somme des } \partial_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{t-1}i_t i_{t+1}\ldots i_{t+\chi_1+\chi_2}} z^{\mathrm{B}} + \frac{1}{1-\dfrac{\Sigma x^i + x^0/\lambda}{\rho}}\right).$$

Nous aurons démontré que le système (6-1) a une solution analytique correspondant aux données choisies, (nulles), si nous démontrons que

(A) le système (6-2) (6-3) (6-4) admet une solution analytique au voisinage de l'origine telle que les $z^{\hat{C}}$ et leurs dérivées d'ordre inférieur à t, les $z^{\hat{\hat{C}}}$ et leurs dérivées d'ordre inférieur à $t+\chi_1$, les $z^{\bar{\bar{D}}}$ et leurs dérivées d'ordre inférieur à $t+\chi_1+\chi_2$ soient nulles sur l'arête et telle que ces mêmes expressions se réduisent sur $x^0 = 0$ et sur $x^1 = 0$ à des fonctions dont les développements aient tous leurs coefficients positifs ou nuls.

En effet, les données de (6-1) nulles seront majorées par les nouvelles données correspondantes qui seront à coefficients positifs ou nuls.

Nous chercherons donc une solution de (6-2) (6-3) (6-4) satisfaisant à (A).

Nous la chercherons fonction des deux variables :

$$\mathrm{X} = x^2 + \ldots + x^n, \qquad \mathrm{Y} = \lambda x^1 + x_0.$$

Elle devra donc satisfaire au système :

$$(5)\quad \left\{ \frac{\partial_t z^{\hat{C}}}{\partial \mathrm{Y}^t} = \mathrm{M}.\left[\mathrm{P}''(\lambda).\ \text{Somme des dérivées } \frac{\partial_t z^{\mathrm{B}}}{\partial \mathrm{Y}^t} + \text{combinaison linéaire à coefficients positifs des dérivées } t^{\text{ièmes}} \text{ des } z^{\mathrm{B}} \text{ d'ordre inférieur à } t \text{ par rapport à } \mathrm{Y} + \frac{1}{1-\dfrac{\mathrm{X}+\mathrm{Y}/\lambda}{\rho}}\right],\right.$$

où $\mathrm{P}''(\lambda)$ est un polynôme en λ sans terme constant, à coefficients positifs.

$$
(6)\quad \left\{
\begin{array}{l}
\lambda^{\chi_1} \dfrac{\partial_{t+\chi_1} z^{\hat{\hat{C}}}}{\partial Y^{t+\chi_1}} = M \cdot \Bigg[P'(\lambda) \cdot \left(\text{Somme des dérivées } \dfrac{\partial_{t+\chi_1} z^{B}}{\partial Y^{t+\chi_1}} \right) \\
+ \text{ combinaison linéaire à coefficients positifs des} \\
\quad \text{dérivées } (t+\chi_1)^{\text{ièmes}} \text{ des } z^{B} \text{ d'ordre inférieur à } t+\chi_1 \\
\quad \text{pour la variable } Y. \\
+ \dfrac{1}{1 - \dfrac{X + Y/\lambda}{\rho}} \Bigg],
\end{array}
\right.
$$

où $P'(\lambda)$ est un polynôme en λ sans termes de degrés inférieurs à $\chi_1 + 1$ et à coefficients positifs.

$$
(7)\quad \left\{
\begin{array}{l}
\lambda^{\chi_1+\chi_2} \dfrac{\partial_{t+\chi_1+\chi_2} z^{\bar{\bar{D}}}}{\partial Y^{t+\chi_1+\chi_2}} = M \Bigg[P(\lambda) \cdot \left(\begin{array}{c}\text{Somme} \\ \text{des dérivées } \dfrac{\partial_{t+\chi_1+\chi_2} z^{B}}{\partial Y^{t+\chi_1\chi_2}}\end{array} \right) \\
+ \text{ combinaison linéaire à coefficients positifs des} \\
\text{dérivées } (t+\chi_1+\chi_2)^{\text{ièmes}} \text{ des } z^{B} \text{ d'ordre inférieur à} \\
\quad t+\chi_1+\chi_2 \text{ pour la variable } Y. \\
+ \dfrac{1}{1 - \dfrac{X + Y/\lambda}{\rho}} \Bigg].
\end{array}
\right.
$$

où $P(\lambda)$ est un polynôme en λ sans termes de degrés inférieurs à $\chi_1 + \chi_2 + 1$ et à coefficients positifs ([5]).

On cherchera maintenant une solution telle que :

1° Tous les $z^{\hat{C}}$ soient égaux entre eux, soit :

$$z^{\hat{C}} = z^{k_1+1}, \qquad \forall \hat{C}, \quad \big(\text{on posera : } z^{\hat{C}} = z\big).$$

2° Tous les $z^{\hat{\hat{C}}}$ soient égaux entre eux, soit :

$$z^{\hat{\hat{C}}} = z^{k_2+1}, \quad \forall \hat{\hat{C}}, \quad \big(\text{on posera : } z^{\hat{\hat{C}}} = z'\big).$$

3° Tous les $z^{\bar{\bar{D}}}$ soient égaux entre eux, soit :

$$z^{\bar{\bar{D}}} = z^{1}, \quad \forall \bar{\bar{D}}, \quad \big(\text{on posera : } z^{\bar{\bar{D}}} = z\big).$$

([5]) Y n'a évidemment aucun rapport avec la notation des discontinuités du chapitre I. La notation $\dfrac{\partial_p z}{\partial Y^p}$ est la notation usuelle de la dérivée par rapport à Y.

Récrivons le système (6-5), (5-6), (6-7) dans ces conditions :

$$(8)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{\partial_t z''}{\partial Y^t} = M\Big\{ & P''(\lambda)\Big[k_2 \frac{\partial_t z}{\partial Y^t} + (k_1 - k_2)\frac{\partial_t z'}{\partial Y^t} + (m - k_1)\frac{\partial_t z''}{\partial Y^t}\Big] \\ & + \text{combinaison linéaire à coefficients positifs des dérivées } t^{\text{ièmes}} \text{ des } z, z', z'' \text{ qui sont d'ordre inférieur à } t \text{ par rapport à Y.} \\ & + \frac{1}{1 - \dfrac{X + Y/\lambda}{\rho}}\Big\}. \end{aligned}\right.$$

$$(9)\quad \left\{\begin{aligned} \lambda^{\chi_1}\cdot\frac{\partial_{t+\chi_1} z'}{\partial Y^{t+\chi_1}} = M\Big\{ & P'(\lambda).\Big[k_2 \frac{\partial_{t+\chi_1} z}{\partial Y^{t+\chi_1}} + (k_1 - k_2)\frac{\partial_{t+\chi_1} z'}{\partial Y^{t+\chi_1}} \\ & + (m - k_1)\frac{\partial_{t+\chi_1}}{\partial Y^{t+\chi_1}} z''\Big] \\ & + \text{combinaison linéaire à coefficients positifs des dérivées } (t+\chi_1)^{\text{ièmes}} \text{ des } z, z', z'' \text{ d'ordre inférieur à } (t+\chi_1) \text{ en Y.} \\ & + \frac{1}{1 - \dfrac{X + Y/\lambda}{\rho}}\Big\}. \end{aligned}\right.$$

$$(10)\quad \left\{\begin{aligned} \lambda^{\chi_1+\chi_2}.\frac{\partial_{t+\chi_1+\chi_2} z}{\partial Y^{t+\chi_1+\chi_2}} = M\Big\{ & P(\lambda)\Big[k_2 \cdot\frac{\partial_{t+\chi_1+\chi_2} z}{\partial Y^{t+\chi_1+\chi_2}} + (k_1 - k_2) \\ & \frac{\partial_{t+\chi_1+\chi_2} z'}{\partial Y^{t+\chi_1+\chi_2}} + (m - k_1)\frac{\partial_{t+\chi_1+\chi_2} z''}{\partial Y^{t+\chi_1+\chi_2}}\Big] \\ & + \text{combinaison linéaire à coefficients positifs des dérivées } (t+\chi_1+\chi_2)^{\text{ièmes}} \text{ des } z, z', z'' \text{ d'ordre inférieur à } (t+\chi_1+\chi_2) \text{ en Y.} \\ & + \frac{1}{1 - \dfrac{X + Y/\lambda}{\rho}}\Big\}. \end{aligned}\right.$$

Comme $P''(\lambda)$ est sans terme constant, on pourra, en prenant λ dans un certain voisinage de 0, soit $\lambda < \lambda_0$, déterminer λ de façon que le coefficient $M.P''(\lambda).(m - k_1)$ de $\frac{\partial_t z''}{\partial Y^t}$ dans le

2^e membre de (6-8) soit inférieur à 1; ceci fait on réunira les $\frac{\partial_t z''}{\partial Y^t}$ dans le 1^{er} membre et on simplifiera par le coefficient positif obtenu; il restera à la place de (6-8).

$$(11) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial_t z''}{\partial Y^t} = M \Big\{ Q''(\lambda) \left[k_2 \frac{\partial_t z}{\partial Y^t} + (k_1 - k_2) \frac{\partial_t z'}{\partial Y^t} \right] \\ + \text{combinaison linéaire... (cf. (6-8);} \\ + \text{une fonction analytique de X, Y dans un voisinage} \\ \quad \text{de 0, dont le développement en X, Y a ses coef-} \\ \quad \text{ficients tous positifs ou nuls} \Big\}, \end{array} \right.$$

où $Q''(\lambda)$ est une fraction rationnelle en λ, admettant un développement en série entière de λ, à coefficients tous positifs ou nuls, sans terme constant.

Remplaçons ensuite dans (6-9), $\frac{\partial_{t+\chi_1} z''}{\partial Y^{t+\chi_1}}$ à l'aide de (6-11) en utilisant cette dernière formule autant de fois qu'il sera nécessaire pour ne plus avoir dans le 2^e membre de (6-9) de dérivées de z'' d'ordre supérieur ou égal à t par rapport à Y; il vient à la place de (6-9) :

$$(12) \quad \left\{ \begin{array}{l} \lambda^{\chi_1} \cdot \frac{\partial_{t+\chi_1} z'}{\partial Y^{t+\chi_1}} = M \cdot \left[Q_1'(\lambda) \frac{\partial_{t+\chi_1} z'}{\partial Y^{t+\chi_1}} + Q_2'(\lambda) \frac{\partial_{t+\chi_1} z}{\partial Y^{t+\chi_1}} \right. \\ + \text{combinaison linéaire à coefficients positifs ou} \\ \quad \text{nuls des dérivées d'ordre } t + \chi_1 \text{ de } z,\ z',\ z'' \text{ qui} \\ \quad \text{sont d'ordre inférieur à } t + \chi_1 \text{ par rapport à Y} \\ \quad \text{pour } z \text{ et } z' \text{ et qui sont d'ordre inférieur à } t \text{ par} \\ \quad \text{rapport à Y pour } z''. \\ + \text{une fonction analytique de X, Y dont le dévelop-} \\ \quad \left. \text{pement a ses coefficients positifs ou nuls} \right], \end{array} \right.$$

où $Q_1'(\lambda)$ et $Q_2'(\lambda)$ sont des fractions rationnelles en λ, admettant des développements en λ à coefficients positifs ou nuls sans termes de degré inférieur à $\chi_1 + 1$.

On pourra donc en prenant λ dans un certain voisinage de 0, soit $\lambda < \lambda_1 \leqslant \lambda_0$, déterminer λ de façon que le coefficient de $\lambda^{\chi_1} \cdot \frac{\partial_{t+\chi_1} z'}{\partial Y^{t+\chi_1}}$ dans le second membre de (6-12), $\left(\text{soit } M \frac{Q_1'(\lambda)}{\lambda^{\chi_1}} \right)$, soit inférieur à 1; ceci fait, on réunira les termes en $\lambda^{\chi_1} \frac{\partial_{t+\chi_1} z'}{\partial Y^{t+\chi_1}}$

dans le 1^{er} membre et on simplifiera par le coefficient positif obtenu; il restera à la place de (6-12) :

$$(13) \quad \left\{ \begin{aligned} &\lambda^{\chi_1} \cdot \frac{\partial_{t+\chi_1} z'}{\partial Y^{t+\chi_1}} = M \Big[Q_2'(\lambda) \cdot \frac{\partial_{t+\chi_1} z}{\partial Y^{t+\chi_1}} \\ &+ \text{combinaison linéaire (cf. (6-12)).} \\ &+ \text{fonction analytique de X, Y... (cf. (6-12))]} \end{aligned} \right.$$

Enfin remplaçons dans (6-10), $\dfrac{\partial_{t+\chi_1+\chi_2} z''}{\partial Y^{t+\chi_1+\chi_2}}$ et $\dfrac{\partial_{t+\chi_1+\chi_2} z'}{\partial Y^{t+\chi_1+\chi_2}}$ à l'aide de (6-11) et (6-13); il vient à la place de (6-10) :

$$(14) \quad \left\{ \begin{aligned} &\lambda^{\chi_1+\chi_2} \cdot \frac{\partial_{t+\chi_1+\chi_2} z}{\partial Y^{t+\chi_1+\chi_2}} = M \Big[Q(\lambda) \cdot \frac{\partial_{t+\chi_1+\chi_2} z}{\partial Y^{t+\chi_1+\chi_2}} \\ &+ \text{combinaison linéaire à coefficients positifs ou nuls} \\ &\quad \text{des dérivées d'ordre } t + \chi_1 + \chi_2 \text{ de } z, z', z'' \text{ qui sont} \\ &\quad \text{d'ordre inférieur à } t + \chi_1 + \chi_2 \text{ par rapport à Y} \\ &\quad \text{pour } z, \text{ d'ordre inférieur à } t + \chi_2 \text{ en Y pour } z', \\ &\quad \text{d'ordre inférieur à } t \text{ en Y pour } z''. \\ &+ \text{une fonction analytique de X, Y dont le dévelop-} \\ &\quad \text{pement a ses coefficients positifs ou nuls],} \\ &\text{où } Q''(\lambda) \text{ est une fraction rationnelle en } \lambda, \text{ admettant} \\ &\text{un développement à coefficients positifs ou nuls sans} \\ &\text{termes de degrés inférieurs à } \chi_1 + \chi_2 + 1. \end{aligned} \right.$$

On pourra donc encore, en choisissant λ dans un certain voisinage de 0, soit : $\lambda < \lambda_2 \leqslant \lambda_1 \leqslant \lambda_0$, déterminer λ de façon que le coefficient de $\lambda^{\chi_1+\chi_2} \cdot \dfrac{\partial_{t+\chi_1+\chi_2} z}{\partial Y^{t+\chi_1+\chi_2}}$ dans le 2^e membre de (6-14) soit inférieur à 1; ceci fait, on réunira les termes en $\lambda^{\chi_1+\chi_2} \dfrac{\partial_{t+\chi_1+\chi_2} z}{\partial Y^{t+\chi_1+\chi_2}}$ dans le 1^{er} membre et on simplifiera par le coefficient positif obtenu; il restera à la place de (6-14) :

$$(15) \quad \lambda^{\chi_1+\chi_2} \frac{\partial_{t+\chi_1+\chi_2} z}{\partial Y^{t+\chi_1+\chi_2}} = \text{combinaison linéaire... (cf. (6-14))} \\ + \text{fonction analytique... (cf. (6-14)).}$$

λ étant fixe désormais dans les conditions indiquées et a, b, c étant des constantes numériques positives, on écrira

(6-11), (6-13), (6-15) sous la forme :

(16) $\left\{\begin{array}{l} \dfrac{\partial_t z''}{\partial Y^t} = a\dfrac{\partial_t z}{\partial Y^t} + b\dfrac{\partial_t z'}{\partial Y^t} \\ + \text{ combinaison linéaire à coefficients positifs ou nuls} \\ \quad \text{des dérivées } t^{\text{ièmes}} \text{ des } z, z', z'', \text{ d'ordre inférieur à } t \\ \quad \text{par rapport à Y.} \\ + \text{ fonction analytique de X, Y dont le développement} \\ \quad \text{a ses coefficients positifs ou nuls.} \end{array}\right.$

(17) $\left\{\begin{array}{l} \dfrac{\partial_{t+\chi_1} z'}{\partial Y^{t+\chi_1}} = c\,\dfrac{\partial_{t+\chi_1} z}{\partial Y^{t+\chi_1}} \\ + \text{ combinaison linéaire à coefficients positifs des} \\ \quad \text{dérivées d'ordre } (t+\chi_1) \text{ de } z, z', z'' \text{ qui sont} \\ \quad \text{d'ordre inférieur à } (t+\chi_1) \text{ par rapport à Y pour} \\ \quad z \text{ et } z' \text{ et qui sont d'ordre inférieur à } t \text{ par rapport} \\ \quad \text{à Y pour } z''. \\ + \text{ fonction analytique dont le développement a ses} \\ \quad \text{coefficients positifs ou nuls.} \end{array}\right.$

(18) $\left\{\begin{array}{l} \dfrac{\partial_{t+\chi_1+\chi_2} z}{\partial Y^{t+\chi_1+\chi_2}} \\ = \text{ combinaison linéaire à coefficients positifs des} \\ \quad \text{dérivées d'ordre } (t+\chi_1+\chi_2) \text{ de } z, z', z'' \text{ qui sont} \\ \quad \text{d'ordre inférieur à } t+\chi_1+\chi_2 \text{ par rapport à Y} \\ \quad \text{pour } z, \text{ d'ordre inférieur à } (t+\chi_1) \text{ en Y pour } z', \\ \quad \text{d'ordre inférieur à } t \text{ en Y pour } z''. \\ + \text{ fonction analytique dont le développement a ses} \\ \quad \text{coefficients positifs ou nuls.} \end{array}\right.$

Le résultat annoncé en (A) concernant le système (6-2) (6-3) (6-4) sera démontré si nous montrons que

(B) le système (6-16) (6-17) (6-18) admet une solution analytique au voisinage de $X = Y = 0$ telle que, pour $Y = 0$, z'' et ses dérivées d'ordre inférieur à t en Y, z' et ses dérivées d'ordre inférieur à $(t + \chi_1)$ en Y, z et ses dérivées d'ordre inférieur à $(t + \chi_1 + \chi_2)$ en Y soient nulles et telle que, au voisinage de $Y = 0$, ces mêmes expressions aient des développements en X, Y à coefficients tous positifs ou nuls.

En effet, il suffit de remplacer X, Y en fonction de x^α et de faire

$$x^0 = 0 \qquad \text{et} \qquad x^1 = 0,$$

ou bien

$$x^0 = 0, \qquad \text{ou} \qquad x^1 = 0$$

pour obtenir des fonctions qui vérifient (A).

Nous allons reprendre un raisonnement analogue au précédent. Les équations (6-16), (6-17), (6-18) permettent d'abord d'avoir les valeurs de toutes les dérivées des z, z', z'' pour $Y = 0$. On obtient ainsi, au voisinage de tout point de $Y = 0$, pour z, z', z'' des développements en X, Y uniques qui vérifient certainement (6-16), (6-17), (6-18), s'ils convergent et qui sont à coefficients tous positifs ou nuls vérifiant ainsi (B).

Pour montrer la convergence de ces développements dans un voisinage de l'origine, nous emploierons à nouveau la méthode des fonctions majorantes.

Désignons par M' un majorant de l'ensemble des nombres suivants :

1° Les coefficients a, b, c et les coefficients des combinaisons linéaires intervenant dans les seconds membres de (6-16), (6-17), (6-18).

2° Les nombresK' intervenant quand on remplace les fonctions analytiques intervenant dans les seconds membres de (6-16), (6-17), (6-18) par des majorantes de la forme :

$$\frac{K'}{1 - \dfrac{X + Y/\mu}{\rho'}}, \quad (K' > 0,\ \rho' > 0,\ 0 < \mu < 1).$$

Puis considérons le système :

$$(19)\quad \left\{ \begin{aligned} &\frac{\partial_t z''}{\partial Y^t} = M\Bigg(\frac{\partial_t z}{\partial Y^t} + \frac{\partial_t z'}{\partial Y^t} \\ &+ \text{Somme des dérivées d'ordre } t \text{ de } z, z', z'' \text{ qui sont d'ordre inférieur à } t \text{ par rapport à } Y. \\ &+ \frac{1}{1 - \dfrac{X + Y/\mu}{\rho'}}\Bigg). \end{aligned} \right.$$

$$(20)\quad \left\{\begin{array}{l} \dfrac{\partial_{t+\chi_1} z'}{\partial Y^{t+\chi_1}} = M' \Bigg(\dfrac{\partial_{t+\chi_1} z}{\partial Y^{t+\chi_1}} \\ + \text{Somme des dérivées d'ordre } (t+\chi_1) \text{ de } z,\ z',\ z'' \\ \quad \text{d'ordre inférieur à } t+\chi_1 \text{ par rapport à Y pour} \\ \quad z \text{ et } z', \text{ d'ordre inférieur à } t \text{ par rapport à Y pour } z''. \\ + \dfrac{1}{1 - \dfrac{X + Y/\mu}{\rho'}} \Bigg). \end{array}\right.$$

$$(21)\quad \left\{\begin{array}{l} \dfrac{\partial_{t+\chi_1+\chi_2} z}{\partial Y^{t+\chi_1+\chi_2}} = M'. \\ \text{(Somme des dérivées d'ordre } (t+\chi_1+\chi_2) \text{ de } z,\ z',\ z'' \\ \text{qui sont d'ordre inférieur à } (t+\chi_1+\chi_2) \text{ par rapport} \\ \text{à Y pour } z, \text{ d'ordre inférieur à } (t+\chi_1) \text{ en Y pour} \\ z', \text{ d'ordre inférieur à } t \text{ en Y pour } z''. \\ + \dfrac{1}{1 - \dfrac{X + Y/\mu}{\rho'}} \Bigg). \end{array}\right.$$

Nous aurons démontré que le système (6-16), (6-17), (6-18) admet une solution analytique correspondant aux conditions (B), si nous montrons que

(C) le système (6-19), (6-20), (6-21) admet une solution analytique au voisinage de l'origine, telle que z'' et ses dérivées d'ordre inférieur à t, z' et ses dérivées d'ordre inférieur à $(t+\chi_1)$, z et ses dérivées d'ordre inférieur à $(t+\chi_1+\chi_2)$ soient nulles pour $X = Y = 0$ et telle que ces mêmes expressions se réduisent sur $Y = 0$ à des fonctions dont les développements aient tous leurs coefficients positifs ou nuls.

En effet, les données de (B) seront majorées par ces nouvelles données.

On cherchera une solution de (6-19), (6-20), (6-21) qui soit fonction de la seule variable :

$$Z = Y + \mu X.$$

Les équations (6-19), (6-20), (6-21) deviennent :

$$(22)\quad \frac{\partial_t z''}{\partial Z^t} = M'\left[\frac{\partial_t z}{\partial Z^t} + \frac{\partial_t z'}{\partial Z^t} + S''(\mu)\cdot\left(\frac{\partial_t z}{\partial Z^t} + \frac{\partial_t z'}{\partial Z^t} + \frac{\partial_t z''}{\partial Z^t}\right) + \frac{1}{1-\dfrac{Z}{\mu\rho'}}\right]$$

où $S''(\mu)$ est un polynôme en μ à coefficients positifs sans terme constant :

$$(23)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{\partial_{t+\chi_1} z'}{\partial Z^{t+\chi_1}} = M'\Bigg[&\frac{\partial_{t+\chi_1} z}{\partial Z^{t+\chi_1}} + S_1'(\mu)\cdot\left(\frac{\partial_{t+\chi_1} z}{\partial Z^{t+\chi_1}} + \frac{\partial_{t+\chi_1} z'}{\partial Z^{t+\chi_1}}\right) \\ &+ S_2'(\mu)\cdot\frac{\partial_{t+\chi_1} z''}{\partial Z^{t+\chi_1}} + \frac{1}{1-\dfrac{Z}{\mu\rho'}}\Bigg], \end{aligned}\right.$$

où $S_1'(\mu)$ est un polynôme en μ à coefficients positifs sans terme constant et $S_2'(\mu)$ un polynôme à coefficients positifs sans termes de degrés inférieurs à $(\chi_1 + 1)$;

$$(24)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{\partial_{t+\chi_1+\chi_2} z}{\partial Z^{t+\chi_1+\chi_2}} = M'\Bigg[&S_1(\mu)\cdot\frac{\partial_{t+\chi_1+\chi_2} z}{\partial Z^{t+\chi_1+\chi_2}} + S_2(\mu)\cdot\frac{\partial_{t+\chi_1+\chi_2} z'}{\partial Z^{t+\chi_1+\chi_2}} \\ &+ S_3(\mu)\cdot\frac{\partial_{t+\chi_1+\chi_2} z''}{\partial Z^{t+\chi_1+\chi_2}} + \frac{1}{1-\dfrac{Z}{\mu\rho'}}\Bigg], \end{aligned}\right.$$

où $S_1(\mu)$ est un polynôme en μ à coefficients positifs sans terme constant,

où $S_2(\mu)$ est un polynôme en μ à coefficients positifs sans terme de degrés inférieurs à $(\chi_1 + 1)$,

où $S_3(\mu)$ est un polynôme en μ à coefficients positifs sans terme de degrés inférieurs à $(\chi_1 + \chi_2 + 1)$.

Comme $S''(\mu)$ est un polynôme sans terme constant, on pourra, en prenant μ dans un certain voisinage de 0, soit $\mu < \mu_0$, déterminer μ de façon que le coefficient : $M'.\ S''(\mu)$ de $\dfrac{\partial_t z''}{\partial Z^t}$ dans le second membre de (6-22) soit inférieur à 1 ; ceci fait, on réunira les $\dfrac{\partial_t z''}{\partial Z^t}$ dans le 1^er^ membre et on simplifiera par le coefficient positif obtenu; il restera à la place de (6-22) :

$$(25) \qquad \frac{\partial_t z''}{\partial Z^t} = T''(\mu) \cdot \left(\frac{\partial_t z'}{\partial Z^t} + \frac{\partial_t z}{\partial Z^t}\right) + l''(Z).$$

où $T''(\mu)$ est une fraction rationnelle en μ, admettant un développement en μ à coefficients tous positifs ou nuls et $l''(Z)$ une fonction analytique admettant un développement en Z à coefficients tous positifs ou nuls.

Remplaçons ensuite dans (6-23), $\frac{\partial_{t+\chi_1} z''}{\partial Z^{t+\chi_1}}$ à l'aide de (6-25); il vient :

$$(26) \quad \frac{\partial_{t+\chi_1} z'}{\partial Z^{t+\chi_1}} = M' \left[T'_1(\mu) \cdot \frac{\partial_{t+\chi_1} z}{\partial Z^{t+\chi_1}} + T'_2(\mu) \frac{\partial_{t+\chi_1} z'}{\partial Z^{t+\chi_1}} + l'_1(Z)\right],$$

où $T'_1(\mu)$ admet un développement à coefficients positifs ou nuls, où $T'_2(\mu)$ admet un développement à coefficients tous positifs ou nuls sans terme constant et où $l'_1(z)$ est une fonction analytique admettant un développement à coefficients tous positifs ou nuls.

On pourra, en prenant μ dans un certain voisinage de 0, soit $\mu < \mu_1 \leqslant \mu_0$, déterminer μ de façon que le coefficient $M' . T'_2(\mu)$ de $\frac{\partial_{t+\chi_1} z'}{\partial Z^{t+\chi_1}}$ dans le second membre de (6-26) soit inférieur à 1; ceci fait, on réunira les termes en $\frac{\partial_{t+\chi_1} z'}{\partial Z^{t+\chi_1}}$ dans le 1^er^ membre et on simplifiera par le coefficient positif obtenu; il restera à la place de (6-26) :

$$(27) \qquad \frac{\partial_{t+\chi_1} z'}{\partial Z^{t+\chi_1}} = T'_3(\mu) \cdot \frac{\partial_{t+\chi_1} z}{\partial Z^{t+\chi_1}} + l'(Z),$$

où $T'_3(\mu)$ et $l'(Z)$ admettent respectivement des développements en μ ou en Z à coefficients tous positifs ou nuls.

Enfin, remplaçons dans (6-24), $\frac{\partial_{t+\chi_1+\chi_2} z}{\partial Z^{t+\chi_1+\chi_2}}$ et $\frac{\partial_{t+\chi_1+\chi_2} z'}{\partial Z^{t+\chi_1+\chi_2}}$ à l'aide de (6-25) et de (6-27), il vient à la place de (6-24)

$$(28) \qquad \frac{\partial_{t+\chi_1+\chi_2} z}{\partial Z^{t+\chi_1+\chi_2}} = T_1(\mu) \cdot \frac{\partial_{t+\chi_1+\chi_2} z}{\partial Z^{t+\chi_1+\chi_2}} + l_1(Z),$$

où $T_1(\mu)$ admet un développement à coefficients tous positifs ou nuls sans terme constant et où $l_1(Z)$ est une fonction analytique admettant un développement à coefficients tous positifs ou nuls.

On pourra encore en prenant μ dans un voisinage $\mu < \mu_2 \leqslant \mu_1$, déterminer μ de façon que le coefficient $T_1(\mu)$ soit inférieur à 1 et réunir les termes en $\dfrac{\partial_{t+\chi_1+\chi_2} z}{\partial Z^{t+\chi_1+\chi_2}}$ dans le 1er membre; on aura :

$$\frac{\partial_{t+\chi_1+\chi_2} z}{\partial Z^{t+\chi_1+\chi_2}} = l(Z), \tag{29}$$

où $l(Z)$ est une fonction analytique admettant un développement à coefficients tous positifs ou nuls.

Fixant alors μ dans les conditions indiquées, on pourra écrire (6-25), (6-27) et (6-29) sous la forme :

$$\frac{\partial_t z''}{\partial Z^t} = d\left(\frac{\partial_t z'}{\partial Z^t} + \frac{\partial_t z}{\partial Z^t}\right) + l''(Z). \tag{30}$$

$$\frac{\partial_{t+\chi_1} z'}{\partial Z^{t+\chi_1}} = e\,\frac{\partial_{t+\chi_1} z}{\partial Z^{t+\chi_1}} + l'(Z), \tag{31}$$

$$\frac{\partial_{t+\chi_1+\chi_2} z}{\partial Z^{t+\chi_1+\chi_2}} = l(Z), \tag{32}$$

où d, e, f sont des constantes numériques positives ou nulles et l, l', l'' des fonctions analytiques admettant des développements à coefficients tous positifs ou nuls.

Ces équations s'intègrent facilement. En imposant aux premières dérivées de z', z', z'' d'être nulles à l'origine et en remplaçant Z par $Y + \mu X$ on obtient une solution analytique qui répond à toutes les conditions de (C).

On a donc démontré, qu'au voisinage de chaque point de l'intersection de P et de Q il existe une solution et une seule répondant aux conditions du § 4. On en déduit immédiatement l'existence et l'unicité d'une solution au voisinage de cette intersection dans les conditions du § 4 et le théorème annoncé au § 4 est démontré.

7. Construction d'une solution de classe C_{t-1}, de classe C_ω « par morceaux ».

Considérons des données sur $x^0 = 0$ et sur le demi-hyperplan $x^1 = 0, x^0 \geqslant 0$ correspondant au théorème du § 4; à ces données correspond une solution analytique unique dans un voisinage de l'arête de la région $x^0 \geqslant 0$, soit y'^{B}. On construira de même une solution analytique dans un voisinage de l'arête de la région $x^0 \leqslant 0$, soit y''^{B}, correspondant aux mêmes données sur $x^0 = 0$. Désignons par y^B la fonction égale à y'^{B} pour $x^0 \geqslant 0$ et à y''^{B} pour $x^0 < 0$.

Cette fonction est continue ainsi que ses $(t - 1)$ premières dérivées à la traversée de P, elle est analytique dans le complémentaire de P et vérifie le système (1-1) dans le complémentaire de P (toujours dans un voisinage de l'arête). C'est la seule solution que l'on peut construire dans les conditions ci-dessus.

Les discontinuités de cette solution, d'après le chapitre I, ne dépendent que des discontinuités initiales sur l'arête des dérivées des données sur $x^1 = 0$ et se propagent le long des bicaractéristiques.

On remarque que la distribution définie par y vérifie le système (1-1) au sens des distributions.

CHAPITRE III

SYSTÈMES D'ÉQUATIONS DONT LES POLYNOMES DE DÉRIVATION NE SONT PAS HOMOGÈNES

1. Matrices de polynômes. Hyperplans caractéristiques.

a) On rappelle que ε est un espace ponctuel affine à $(n+1)$ dimensions, sur le corps des réels. On plongera ε dans l'espace ponctuel affine à $(n+2)$ dimensions $\dot{\varepsilon}$ en identifiant ε avec un hyperplan de $\dot{\varepsilon}$.

On notera $x^{\dot{\rho}}$ les coordonnées d'un point de $\dot{\varepsilon}$ dans un repère; les indices grecs pointés varient de 0 à $n+1 : 0 \leqslant \dot{\rho} \leqslant n+1$; on posera souvent : $n+1 = *$. L'espace ε sera identifié à l'hyperplan de $\dot{\varepsilon}$: $x^* = 0$.

b) Considérons une suite de tenseurs symétriques de ε, respectivement d'ordres t, $t-1$, $t-2$, ..., $t-q$, ... 1, 0, que nous noterons :

$$\mathrm{P}^{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_t},\ \mathrm{P}^{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{t-1}*},\ \mathrm{P}^{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{t-2}**},\ \ldots,\ \mathrm{P}^{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{t-q}\overbrace{**\ldots*}^{}_{q \text{ étoiles}}},$$
$$\ldots,\ \mathrm{P}^{\alpha_1 \overbrace{**\ldots*}_{(t-1)\text{étoiles}}},\ \mathrm{P}^{\overbrace{**\ldots*}_{t \text{ étoiles}}},$$

le nombre d'étoiles servant pour l'instant à distinguer ces tenseurs. Il lui correspond un tenseur unique de $\dot{\varepsilon}$ symétrique : $\dot{\mathrm{P}}^{\dot{\alpha}_1\dot{\alpha}_1\ldots\dot{\alpha}_t}$, ayant pour composantes les composantes des tenseurs précédents; ainsi :

$$\dot{\mathrm{P}}^{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{t-q}**\ldots*} = \mathrm{P}^{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{t-q}**\ldots*}.$$

Réciproquement à un tenseur symétrique d'ordre t de $\dot{\varepsilon}$ correspond une suite de tenseurs de ε du type indiqué et une seule. Nous supprimerons donc dans la suite le point sur les composantes d'un tenseur de $\dot{\varepsilon}$ du type considéré.

c) Considérons maintenant une matrice de tenseurs symétriques : $(P_{\mathrm{B}}^{\dot{\alpha}_1\dot{\alpha}_2\ldots\alpha_t,\mathrm{A}})$ et, comme au chapitre I, § 1-2, la matrice de polynômes homogènes qui lui correspond :

$$(P^{\dot{\alpha}_1\dot{\alpha}_2\ldots\dot{\alpha}_t}\dot{l}_{\dot{\alpha}_1}\dot{l}_{\dot{\alpha}_2}\ \ldots\ \dot{l}_{\dot{\alpha}_t}),$$

où $\dot{l}_{\dot{\alpha}}$ sont les composantes d'une forme $\dot{l}$ de $\dot{\varepsilon}$.

Les définitions du chapitre I, § 1, s'appliquent à cette matrice et nous les rappellerons avec les notations de $\dot{\varepsilon}$.

$\dot{\mathrm{H}}$ sera le déterminant de la matrice; nous supposerons que $\dot{\mathrm{H}}$ n'est pas identiquement nul. $\dot{\mathrm{H}}'$ et $\dot{\mathrm{H}}''$ satisfont à l'identité :

$$(1) \qquad \dot{\mathrm{H}} \equiv (\dot{\mathrm{H}}')^{\nu}.\dot{\mathrm{H}}''$$

$\dot{\mathrm{H}}'$ est irréductible et $\dot{\mathrm{H}}''$ non divisible par $\dot{\mathrm{H}}'$; ν est la multiplicité totale de $\dot{\mathrm{H}}'$. On définit encore les corangs et multiplicités de $\dot{\mathrm{H}}'$; on a toujours : $\nu = \sum_{i=1}^{i=\mathrm{I}} k_i\chi_i$. On a à considérer les $\dot{\mathcal{A}}_{\overline{\mathrm{D}}}^{\overline{\mathrm{A}}}$, $\dot{\mathcal{B}}_{\overline{\overline{\mathrm{D}}}}^{\overline{\overline{\mathrm{A}}}}$ ... définis par les formules :

$$(2) \qquad \dot{\mathcal{A}}_{\overline{\mathrm{D}}}^{\overline{\mathrm{A}}} = (-1)^{(\overline{\mathrm{A}}+\overline{\mathrm{D}})}\,\frac{\dot{\mathrm{A}}_{12(\overline{\mathrm{A}}-1)(\overline{\mathrm{A}}+1)\ldots k_1}^{12(\overline{\mathrm{D}}-1)(\overline{\mathrm{D}}+1)\ldots k_1}}{(\dot{\mathrm{H}}')^{\chi_2}}$$

$$(3) \qquad \dot{\mathcal{B}}_{\overline{\overline{\mathrm{D}}}}^{\overline{\overline{\mathrm{A}}}} = (-1)^{\overline{\overline{\mathrm{A}}}+\overline{\overline{\mathrm{D}}}}.\frac{\dot{\mathrm{B}}_{12\ldots(\overline{\overline{\mathrm{A}}}-1)(\overline{\overline{\mathrm{A}}}+1)\ldots k_2}^{12\ldots(\overline{\overline{\mathrm{D}}}-1)(\overline{\overline{\mathrm{D}}}+1)\ldots k_2}}{(\dot{\mathrm{H}}')^{\chi_2}}$$

.........................,

avec des notations évidentes dans $\dot{\varepsilon}$.

d) Considérons alors une matrice de suites de tenseurs symétriques de ε du type indiqué ci-dessus :

$$(4) \qquad (P_{\mathrm{B}}^{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_t,\mathrm{A}},\ P_{\mathrm{B}}^{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{t-1}*,\mathrm{A}},\ \ldots,\ P_{\mathrm{B}}^{\alpha_1**\ldots*,\mathrm{A}},\ P_{\mathrm{B}}^{**\ldots*,\mathrm{A}}).$$

Entre parenthèses nous avons noté l'élément de la A$^{\text{ième}}$ ligne et de la B$^{\text{ième}}$ colonne.

A cette matrice correspond de façon bijective, la matrice :

$$(P_{\mathrm{B}}^{\dot{\alpha}_1\dot{\alpha}_2\ldots\dot{\alpha}_t,\,\mathrm{A}})$$

et par suite la matrice :

$$(P_{\mathrm{B}}^{\dot{\alpha}_1\dot{\alpha}_2\ldots\dot{\alpha}_t,\,\mathrm{A}}\dot{l}_{\dot{\alpha}_1}\dot{l}_{\dot{\alpha}_2}\ \ldots\ \dot{l}_{\dot{\alpha}_t}),$$

e) D'autre part, à une forme de $\dot{\varepsilon}$ de composantes $\dot{l}_\alpha = l_\alpha$ et $\dot{l}_* = 0$, nous associerons « canoniquement » la forme l_α de ε et réciproquement. Autrement dit au plan P de ε représenté par l_α (non nulle) correspondra le plan $\dot{\mathrm{P}}$ de $\dot{\varepsilon}$ représenté par $\dot{l}_{\dot{\alpha}}$ telle que : $\dot{l}_\alpha = l_\alpha$ et $\dot{l}_* = 0$.

f) Ceci fait, nous allons donner les définitions relatives à la matrice (4). Par définition, on notera H le polynôme à $(n+1)$ variables l_α, tel que :

$$\mathrm{H}(l_\alpha) = \dot{\mathrm{H}}(\dot{l}_\alpha, \dot{l}_* = 0), \qquad \text{soit en abrégé} \quad \mathrm{H}(\mathrm{P}) = \dot{\mathrm{H}}(\dot{\mathrm{P}}).$$

On notera H′ le polynôme défini par :

$$\mathrm{H}' = \dot{\mathrm{H}}'(\dot{l}_* = 0); \qquad \text{soit} \qquad \mathrm{H}'(\mathrm{P}) = \dot{\mathrm{H}}'(\dot{\mathrm{P}}).$$

De même :

$$\mathrm{H}'' = \dot{\mathrm{H}}''(\dot{l}_* = 0); \qquad \text{soit} \qquad \mathrm{H}''(\mathrm{P}) = \dot{\mathrm{H}}''(\dot{\mathrm{P}})$$

Par définition, le nombre ν défini pour $\dot{\mathrm{H}}'$ sera la multiplicité totale de H′ relative à la matrice (4) ; les corangs et multiplicités définis pour $\dot{\mathrm{H}}'$ seront les corangs et multiplicités de H′ relatifs à la matrice (4).

Enfin avec des notations évidentes, on posera :

$$\mathcal{A}_{\bar{\mathrm{D}}}^{\bar{\mathrm{A}}} = \dot{\mathcal{A}}_{\bar{\mathrm{D}}}^{\bar{\mathrm{A}}}(\dot{l}_* = 0), \qquad \mathcal{B}_{\bar{\bar{\mathrm{D}}}}^{\bar{\bar{\mathrm{A}}}} = \dot{\mathcal{B}}_{\bar{\bar{\mathrm{D}}}}^{\bar{\bar{\mathrm{A}}}}(\dot{l}_* = 0), \text{ etc...}$$

et ces polynômes satisferont aux identités :

$$\mathrm{H} = (\mathrm{H}')^\nu \mathrm{H}''$$

$$\mathcal{A}_{\bar{\mathrm{D}}}^{\bar{\mathrm{A}}} = (-1)^{(\bar{\mathrm{A}} + \bar{\mathrm{D}}} \frac{\mathrm{A}^{12\ldots(\bar{\mathrm{D}}-1)(\bar{\mathrm{D}}+1)\ldots k_1}_{12\ldots(\bar{\mathrm{A}}-1)(\bar{\mathrm{A}}+1)\ldots k_1}}{(\mathrm{H}')^{\chi_1}}$$

$$\mathcal{B}_{\bar{\bar{\mathrm{D}}}}^{\bar{\bar{\mathrm{A}}}} = (-1)^{(\bar{\bar{\mathrm{A}}} + \bar{\bar{\mathrm{D}}}} \frac{\mathrm{B}^{12\ldots(\bar{\bar{\mathrm{D}}}-1)(\bar{\bar{\mathrm{D}}}+1)\ldots k_2}_{12\ldots(\bar{\bar{\mathrm{A}}}-1)(\bar{\bar{\mathrm{A}}}+1)\ldots k_2}}{(\mathrm{H}')^{\chi_2}}$$

. . . .

g) Nous aurons besoin de l'hypothèse suivante : il existe au moins un plan caractéristique $\dot{\pi}$ relatif à $\dot{\mathrm{H}}'$ qui soit du type $\dot{\mathrm{P}}$ (c'est-à-dire $\dot{l}_* = 0$), non singulier et tel que : $\dfrac{\partial \dot{\mathrm{H}}'}{\partial \dot{l}_{\dot{\alpha}}}(\dot{\pi}) \neq 0$.

h) Dans ces conditions, les définitions données en *f*) entraîneront des propriétés pour H, H′, etc., que nous allons étudier.

On voit d'abord que :

$$\mathrm{H} = \text{dét}\,(\mathrm{P}_{\mathrm{B}}^{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_t,\mathrm{A}} l_{\alpha_1} l_{\alpha_2} \ldots l_{\alpha_t}).$$

H n'est donc autre que le déterminant des parties principales des suites de polynômes définies par *d*), en appelant partie principale d'une telle suite le 1er terme. H n'est pas identiquement nul; en effet si H était identiquement nul, on aurait soit $\mathrm{H}'' \equiv 0$ et par suite :

$$\mathrm{H}''(\pi) = \dot{\mathrm{H}}''(\dot{\pi}) = 0,$$

ce qui est exclu par *g*), soit $\mathrm{H}' \equiv 0$ et par suite :

$$\frac{\partial \mathrm{H}'}{\partial l_\alpha}(\pi) = \frac{\partial \dot{\mathrm{H}}'}{\partial \dot{l}_\alpha}(\dot{\pi}) = 0,$$

ce qui est aussi exclu par *g*).

H' ne dépend aussi que des parties principales. Démontrons d'abord que H'' n'est pas divisible par H' : en effet on aurait alors $\mathrm{H}'' \equiv \mathrm{H}'\mathrm{K}$ et par suite $\mathrm{H}''(\pi) = \mathrm{H}''(\dot{\pi}) = 0$ ce qui est exclu par *g*). Considérons maintenant ce qui se passerait si H' était décomposable en un produit de puissances de facteurs irréductibles distincts, par exemple $\mathrm{H}' = (\mathrm{K}')^{\nu_1}(\mathrm{K}'')^{\nu_2}$; on aurait $\mathrm{H}'(\pi) = 0$ et par suite soit $\mathrm{K}'(\pi) = 0$, soit $\mathrm{K}''(\pi) = 0$, (on ne peut avoir $\mathrm{K}'(\pi) = \mathrm{K}''(\pi) = 0$ car cela entraînerait que $\frac{\partial \dot{\mathrm{H}}'}{\partial l_\alpha}(\dot{\pi}) = \frac{\partial \mathrm{H}'}{\partial \dot{l}_\alpha}(\pi) = 0$, ce qui est exclu par *g*); dans ces conditions, par exemple si $\mathrm{K}''(\pi) \neq 0$, on aurait :

$$\frac{\partial \mathrm{H}'}{\partial \dot{l}_\alpha}(\pi) = \frac{\partial \dot{\mathrm{H}}'}{\partial l_\alpha}(\dot{\pi}) = \frac{\partial (\mathrm{K}')^{\nu_1}}{\partial l_\alpha}(\pi).[\mathrm{K}''(\pi)]^{\nu};$$

cette expression est nulle, si $\nu_1 \neq 1$, cas qu'on doit donc exclure; par suite $\mathrm{H}' \equiv \mathrm{K}'(\mathrm{K}'')^{\nu_2}$ et $\mathrm{H} \equiv (\mathrm{K}')^{\nu}.\mathrm{L}$ où L n'est pas divisible par K' et où K' est irréductible. Donc si H' est réductible, on peut choisir un de ses facteurs irréductibles K' par la condition $\mathrm{K}'(\pi) = 0$ et ce facteur divise H avec la même puissance que H'. La multiplicité totale de H' définie en *f*) est donc égale à la multiplicité totale de H' ou de K pour la matrice des parties principales.

On démontrera de même que les corangs et multiplicités de H' définis en f) sont les mêmes que ceux qu'on obtiendrait à partir de la matrice des parties principales pour H' (ou pour K' si H' est réductible).

i) Par définition, on appellera hyperplan caractéristique dans ε un hyperplan P tel que l'hyperplan $\dot{P}$ associé soit caractéristique dans $\dot{\varepsilon}$. On aura donc :

$$\dot{H}(\dot{P}) = H(P) = 0.$$

Par suite pour qu'un plan soit caractéristique dans ε, il faut et il suffit que $H(P) = 0$, où H ne dépend que des parties principales.

Un plan caractéristique P sera dit non singulier si :

1° le plan associé $\dot{P}$ est non singulier,

2° $\dfrac{\partial \dot{H}'}{\partial \dot{l}_\alpha}(\dot{P}) \neq 0$, [c'est-à-dire n'est pas nul pour tout α], autrement dit, s'il remplit l'hypothèse *g*).

On vérifie qu'un tel plan P est aussi non singulier pour la matrice des parties principales.

j) En résumé, on a la *proposition* suivante.

PROPOSITION. — *S'il existe au moins un plan caractéristique relatif à* H' *non singulier, on obtiendra les corangs et les multiplicités de* H' *à l'aide de la matrice des parties principales.*

k) Enfin on posera : $\dot{l}^{\dot{\alpha}} = \dfrac{\partial \dot{H}'}{\partial \dot{l}_{\dot{\alpha}}}(\dot{P})$; ce vecteur, pour un plan caractéristique non singulier, définit les bicaractéristiques de $\dot{P}$ dans $\dot{\varepsilon}$, comme on l'a déjà vu.

Or on a :

$$\dot{l}^\alpha = \frac{\partial \dot{H}'}{\partial \dot{l}_\alpha}(\dot{P}) = \frac{\partial H'}{\partial l_\alpha}(P)$$

on posera donc pour simplifier $\dot{l}^\alpha = l^\alpha$. P étant caractéristique non singulier, le vecteur l^α de P définit la direction des bicaractéristiques de P ; c'est encore le long d'une bicaractéristique qu'un cône H' est tangent à P dans ε.

On remarque que les bicaractéristiques de P sont les projections sur ε des bicaractéristiques de $\dot{P}$.

2. Systèmes d'équations dont les polynômes de dérivation sont homogènes et de mêmes degrés et systèmes d'équations dont les polynômes de dérivation sont de degrés quelconques.

On écrira un système carré quelconque d'équations aux dérivées partielles, linéaires et à coefficients constants, d'ordre maximum t, homogènes, dans ε sous la forme :

$$(1)\quad \begin{cases} P_B^{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_t,A}\partial_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_t}y^B + \cdots \\ + C_t^q P^{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{t-q}\overbrace{**\!*\ldots*}^{q\text{ étoiles}}.A} . \partial_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{t-q}}y^B + \cdots + P_B^{\overbrace{**\ldots*}^{t\text{ étoiles}},A}y^B = 0. \end{cases}$$

Les y^B sont, par exemple, des distributions sur ε.

On associera à (1) le système d'équations aux dérivées partielles, linéaires et à coefficients constants, d'ordre t, ne contenant que des dérivées d'ordre t, homogène, dans $\dot{\varepsilon}$, défini par les équations :

$$(2)\qquad P_B^{\dot{\alpha}_1\dot{\alpha}_2\ldots\dot{\alpha}_t,A}\partial_{\dot{\alpha}_1\dot{\alpha}_2\ldots\dot{\alpha}_t}\dot{y}^B = 0,$$

où les $\dot{y}^B$ sont des distributions sur $\dot{\varepsilon}$.

A chaque y^B on associera la distribution $\dot{y}^B$ définie par :

$$(3)\qquad \dot{y}^B = e^{x^*}.y^B.$$

On vérifie facilement la *proposition* suivante.

PROPOSITION. — *Si y^B est une solution de* (1), *$\dot{y}^B$ défini par* (3) *est une solution de* (2) ; *réciproquement si $\dot{y}^B$ est une solution de* (2) *de la forme* (3), *y^B est une solution de* (1).

La recherche des solutions de (1) est donc équivalente à la recherche des solutions de (2) qui sont du type (3).

3. Propagation des discontinuités.

a) Nous étudierons dans ce paragraphe les solutions de (2-1) dont les dérivées ont des discontinuités dans les conditions du chapitre I, § 7 *a*). Plus précisément nous chercherons les conditions auxquelles sont soumises les discontinuités des dérivées de ce type.

Soit y^B une telle solution, P le plan de discontinuité, Y_t^B les discontinuités des dérivées $t^{\text{ièmes}}$. D'après le § 2, à cette solution correspond une solution du système (2), soit $\dot{y}^B = e^{x^*}y^B$;

on voit facilement que $\dot{y}^{\mathrm{B}}$ est du type défini au chapitre I, § 7 *a*), avec des discontinuités à travers le plan P associé à P, qui vérifient :

$$\dot{\mathrm{Y}}^{\mathrm{B}}_t = e^{x^*} . \mathrm{Y}^{\mathrm{B}}_t. \tag{1}$$

Pour qu'il y ait effectivement des discontinuités à la traversée de P, il faut donc que $\dot{\mathrm{P}}$ soit caractéristique et par suite que P soit caractéristique. Nous supposerons donc P caractéristique.

Nous supposerons de plus P caractéristique non singulier au sens du § 1; cela entraîne en particulier que $\dot{\mathrm{P}}$ soit caractéristique non singulier.

Les formules (1-6-1) nous donnent les conditions auxquelles sont soumises les $\dot{\mathrm{Y}}^{\mathrm{B}}_t$, dans le cas $k_3 = 0$. Dans le cas général, il n'y aurait pas d'autres difficultés que de notations.

$$\tag{2} \left\{ \begin{aligned} & \dot{l}^{\dot{\alpha}_1} \dot{l}^{\dot{\alpha}_2} \ldots \dot{l}^{\dot{\alpha}_{\chi_1+\chi_2}} \partial_{\dot{\alpha}_1 \dot{\alpha}_2 \ldots \dot{\alpha}_{\chi_1+\chi_2}} \dot{\mathrm{Y}}^{\overline{\overline{\mathrm{D}}}}_t = 0 \\ & \dot{l}^{\dot{\alpha}_1} \dot{l}^{\dot{\alpha}_2} \ldots \dot{l}^{\dot{\alpha}_{\chi_1}} \partial_{\dot{\alpha}_1 \dot{\alpha}_2 \ldots \dot{\alpha}_{\chi_1}} \mathrm{Y}^{\hat{\hat{\mathrm{C}}}}_t \\ & \qquad\qquad = \frac{\dot{\mathrm{B}}^{12 \ldots (\overline{\overline{\mathrm{D}}}-1) \hat{\hat{\mathrm{C}}} (\overline{\overline{\mathrm{D}}}+1) \ldots k_2}_{12 \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots k_2}}{\dot{\mathrm{B}}^{12 \ldots k_2}_{12 \ldots k_2}} \dot{l}^{\dot{\alpha}_1} \dot{l}^{\dot{\alpha}_2} \ldots \dot{l}^{\dot{\alpha}_{\chi_1}} \partial_{\dot{\alpha}_1 \dot{\alpha}_2 \ldots \dot{\alpha}_{\chi_1}} \dot{\mathrm{Y}}^{\overline{\overline{\mathrm{D}}}}_t \\ & \dot{\mathrm{Y}}^{\hat{\mathrm{C}}}_t = \frac{\dot{\mathrm{A}}^{12 (\overline{\mathrm{D}}-1) \hat{\mathrm{C}} (\overline{\mathrm{D}}+1) \ldots k_1}_{12 \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots k_1}}{\dot{\mathrm{A}}^{12 \ldots k_1}_{12 \ldots k_1}} \dot{\mathrm{Y}}^{\overline{\mathrm{D}}}_t . \end{aligned} \right.$$

Soit, en remplaçant $\dot{\mathrm{Y}}^{\mathrm{B}}_t$ à l'aide de (1) et en divisant par e^{x^*}, on obtient :

$$\tag{3} \left\{ \begin{aligned} & l^{\alpha_1} l^{\alpha_2} \ldots l^{\alpha_{\chi_1+\chi_2}} . \partial_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_{\chi_1+\chi_2}} \mathrm{Y}^{\overline{\overline{\mathrm{D}}}}_t + \cdots \\ & \qquad + \mathrm{C}^q_{\chi_1+\chi_2} l^{\alpha_1} l^{\alpha_2} \ldots l^{\alpha_{\chi_1+\chi_2-q}} (l^*)^q \partial_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_{\chi_1+\chi_2-q}} \mathrm{Y}^{\overline{\overline{\mathrm{D}}}}_t \\ & \qquad + \cdots + (l^*)^{\chi_1+\chi_2} \mathrm{Y}^{\overline{\overline{\mathrm{D}}}}_t = 0 \\ & l^{\alpha_1} l^{\alpha_2} \ldots l^{\alpha_{\chi_1}} \partial_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_{\chi_1}} \mathrm{Y}^{\hat{\hat{\mathrm{C}}}}_t + \cdots \\ & \quad + \mathrm{C}^q_{\chi_1} l^{\alpha_1} l^{\alpha_2} \ldots l^{\alpha_{\chi_1-q}} (l^*)^q \partial_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_{\chi_1-q}} \mathrm{Y}^{\hat{\hat{\mathrm{C}}}}_t + \cdots + (l^*)^{\chi_1} \mathrm{Y}^{\hat{\hat{\mathrm{C}}}}_t \\ & \quad = \frac{\mathrm{B}^{12 \ldots (\overline{\overline{\mathrm{D}}}-1) \hat{\hat{\mathrm{C}}} (\overline{\overline{\mathrm{D}}}+1) \ldots k_2}_{12 \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots k_2}}{\mathrm{B}^{12 \ldots k_2}_{12 \ldots k_2}} \left[l^{\alpha_1} l^{\alpha_2} \ldots l^{\alpha_{\chi_1}} \partial_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_{\chi_1}} \mathrm{Y}^{\overline{\overline{\mathrm{D}}}}_t + \cdots \right. \\ & \left. + \mathrm{C}^q_{\chi_1} l^{\alpha_1} l^{\alpha_2} \ldots l^{\alpha_{\chi_1-q}} (l^*)^q . \partial_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_{\chi_1-q}} \mathrm{Y}^{\overline{\overline{\mathrm{D}}}}_t + \cdots + (l^{\alpha})^{\chi_1} \mathrm{Y}^{\overline{\overline{\mathrm{D}}}}_t \right] \\ & \mathrm{Y}^{\hat{\mathrm{C}}}_t = \frac{\mathrm{A}^{12 \ldots (\overline{\mathrm{D}}-1) \hat{\mathrm{C}} (+1) \ldots k_1}_{12 \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots k_1}}{\mathrm{A}^{12 \ldots k_1}_{12 \ldots k_1}} \mathrm{Y}^{\overline{\mathrm{D}}}_t . \end{aligned} \right.$$

où l'on a posé $l^* = \dot{l}^*$ et utilisé les définitions et les résultats du § 1. Les équations (3) sont les conditions cherchées sur les Y_t^B.

On remarque qu'elles sont invariantes dans les changements de coordonnées affines de ε.

On remarque aussi que les coefficients « non principaux » du système (1-1) n'interviennent que par l'intermédiaire de $l^* = \dfrac{\partial \dot{H}'}{\partial \dot{l}^*}(\dot{P})$.

Comme nous avons supposé P non singulier, le vecteur l^α n'est pas nul; on fera comme au chapitre I, § 6 *a*) un changement de coordonnées affine tel que P ait pour équation : $x^0 = 0$ et que les bicaractéristiques de P aient des équations de la forme :

$$x^0 = 0, \quad x^2 = \text{constante}, \quad x^3 = \text{constante}, \ \ldots, \quad x^n = \text{constante};$$

x^1 variant seul sur la bicaractéristique; de sorte qu'on aura aussi :

$$l^1 \neq 0; \quad l^0 = l^2 = l^3 = \cdots = l^n = 0 \ (^6).$$

Le système (3) s'écrira alors, en posant encore $\partial_{\underbrace{11\ldots1}_{\chi \text{ fois}}} = \partial_{(1)\chi}$, et en utilisant, en général, les notations du chapitre I, § 6, sous la forme :

$$(4) \quad \left\{ \begin{aligned} &\partial_{(1)^{\chi_1+\chi_2}} Y_t^{\bar{\bar{D}}} + \cdots + C^q_{\chi_1+\chi_2} (l^*)^q \, \partial_{(1)^{\chi_1+\chi_2-q}} Y_t^{\bar{\bar{D}}} + \cdots \\ &\qquad\qquad + (l^*)^{\chi_1+\chi_2} Y_t^{\bar{\bar{D}}} = 0 \\ &\partial_{(1)^{\chi_1}} Y_t^{\hat{C}} + \cdots + C^q_{\chi_1} (l^*)^q \partial_{(1)^{\chi_1-q}} Y_t^{\hat{C}} + \cdots + (l^*)^{\chi_1} Y_t^{\hat{C}} \\ &\qquad = \left(B^{\hat{\bar{C}}}_{\bar{\bar{D}}}\right) . \left[\partial_{(1)^{\chi_1}} Y_t^{\bar{\bar{D}}} + \cdots + C^q_{\chi_1} (l^*)^q \partial_{(1)^{\chi_1-q}} Y_t^{\bar{\bar{D}}} + \cdots \right. \\ &\qquad\qquad \left. + (l^*)^{\chi_1} Y_t^{\bar{\bar{D}}}\right] \\ &Y_t^{\hat{C}} = \left(A^{\hat{C}}_{\bar{D}}\right) Y^{\bar{D}}. \end{aligned} \right.$$

Il sera commode pour intégrer ce système de faire le changement d'inconnues défini par :

$$Z_t^B = e^{l^* x^1} Y_t^B.$$

(6) En fait, on prendra ici $\vec{l}$ comme vecteur de base et on aura $l^1 = 1$.

Le système (4) est remplacé par le système :

$$
(5) \qquad \begin{cases} \partial_{(1)^{\chi_1+\chi_2}} Z_t^{\bar{\bar{D}}} = 0 \\ \partial_{(1)^{\chi_1}} Z_t^{\hat{\bar{C}}} - \left(B_{\bar{\bar{D}}}^{\hat{\bar{C}}}\right) \partial_{(1)^{\chi_1}} Z_t^{\bar{\bar{D}}} = 0 \\ Z_t^{\hat{C}} - \left(A_{\bar{D}}^{\hat{C}}\right) Z_t^{\bar{D}} = 0. \end{cases}
$$

Le système (5) n'est autre que le système (1-6-2) qui a été intégré en (1-6-4). En revenant aux Y_t^B, on a donc les solutions :

$$
(6) \qquad \begin{cases} Y_t^{\bar{\bar{D}}} = e^{-l^* x^1} \Big[Y_{t,0}^{\bar{\bar{D}}} + \cdots + Y_{t,\chi_1-1}^{\bar{\bar{D}}} (x^1)^{\chi_1-1} + \cdots \\ \qquad\qquad\qquad + Y_{t,\chi_1+\chi_2-1}^{\bar{\bar{D}}} (x^1)^{\chi_1+\chi_2-1} \Big] \\ Y_t^{\hat{\bar{C}}} = e^{-l^* x^1} \Big\{ Y_{t,0}^{\hat{\bar{C}}} + \cdots + Y_{t,\chi_1-1}^{\hat{\bar{C}}} (x^1)^{\chi_1-1} + \cdots \\ \qquad + \left(B_{\bar{\bar{D}}}^{\hat{\bar{C}}}\right) \Big[Y_{t,\chi_1}^{\bar{\bar{D}}} (x^1)^{\chi_1} + \cdots + Y_{t,\chi_1+\chi_2-1}^{\bar{\bar{D}}} (x^1)^{\chi_1+\chi_2-1} \Big] \Big\} \\ Y_t^{\hat{E}} = e^{-l^* x^1} \Big\{ \left(A_{\bar{D}}^{\hat{E}}\right) \Big[Y_{t,0}^{\bar{D}} + \cdots + Y_{t,\chi_1-1}^{\bar{D}} (x^1)^{\chi_1-1} \Big] \\ \qquad + \Big[\left(A_{\bar{\bar{D}}}^{\hat{E}}\right) + \left(A_{\hat{\bar{C}}}^{\hat{E}}\right) \left(B_{\bar{\bar{D}}}^{\hat{\bar{C}}}\right) \Big] \Big[Y_{t,\chi_1}^{\bar{\bar{D}}} (x^1)^{\chi_1} + \cdots \\ \qquad + Y_{t,\chi_1+\chi_2-1}^{\bar{\bar{D}}} (x^1)^{\chi_1+{}_2\chi-1} \Big] \Big\}. \end{cases}
$$

Les $Y_{t,\chi}^B$ introduits sont des distributions indépendantes de x^1 définies par des fonctions localement sommables arbitraires de $x^2, \ldots x^n$.

Les remarques de la fin du § 7 *e*) du chapitre I s'adaptent facilement aux résultats précédents.

On pourrait de même déterminer les discontinuités des dérivées suivantes. Comme au chapitre I, § 7 *h*) on peut adapter les résultats précédents au cas d'un système non homogène ayant les mêmes premiers membres que (2-1).

b) Nous résumerons les résultats de ce paragraphe par la *proposition* suivante.

Proposition. — On considère le système différentiel à coefficient constant :

$$
P_B^{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_t, A} \partial_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_t} y^B + \cdots + C_t^q P_B^{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{t-q}\overbrace{**\ldots*}^{q \text{ étoiles}}, A} \partial_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{t-q}} y^B + \cdots + P_B^{\overbrace{**\ldots*}^{t \text{ étoiles}}, A} y^B = 0.
$$

On forme la matrice d'éléments :

$$
\begin{aligned} & P_B^{\dot{\alpha}_1\dot{\alpha}_2\ldots\dot{\alpha}_t, A} \dot{l}_{\dot{\alpha}_1} \dot{l}_{\dot{\alpha}_2} \ldots \dot{l}_{\dot{\alpha}_t} \\ & \quad = P_B^{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_t, A} \dot{l}_{\alpha_1} \dot{l}_{\alpha_2} \ldots \dot{l}_{\alpha_t} + \cdots \\ & \quad + C_t^q P_B^{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{t-q}**\ldots*, A} \dot{l}_{\alpha_1} \dot{l}_{\alpha_2} \ldots \dot{l}_{\alpha_{t-q}} (l_*)^q + \cdots + P_B^{**\ldots*, A} (\dot{l}_*)^t \end{aligned}
$$

et la matrice d'éléments :

$$P_{B}^{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_t,\,A} l_{\alpha_1} l_{\alpha_2} \ldots l_{\alpha_t}$$

qu'on appellera matrice des parties principales.

On pose :

$$H = \text{dét}\,(P_{B}^{\dot\alpha_1\dot\alpha_2\ldots\dot\alpha_t,\,A} \dot l_{\dot\alpha_1} \dot l_{\dot\alpha_2} \ldots \dot l_{\dot\alpha_t}) = (\dot H')^{\nu}\dot H'',$$

où $\dot H'$ est irréductible sur **R** et $\dot H''$ non divisible par $\dot H'$.

On définit H' :

$$H'(l_\alpha) \equiv \dot H'(\dot l_\alpha = l_\alpha,\, l_* = 0).$$

On suppose qu'il existe relativement à H' un plan caractéristique non singulier (cf. § 1). On peut résumer « grosso modo » cette condition en langage dual : elle exprime que l'intersection de $l_* = 0$ et de $\dot H'$ n'est pas « singulière sur $\dot H'$ » et n'est pas « multiple ».

H' ne dépend que de la matrice des parties principales ; on calcule, à l'aide de cette matrice, sa multiplicité totale et comme au chapitre I ses corangs et ses multiplicités. Pour les mêmes raisons qu'au chapitre I, on a :

$$\nu = \sum_{i=1}^{i=\mathrm{I}} k_i \chi_i.$$

$H' = 0$ s'interprète encore comme l'équation tangentielle d'un cône. Soit P (défini par la forme l_α) un plan caractéristique non singulier. On appelle encore bicaractéristique les génératrices de contact de (H') et des cônes déduits par translation avec P.

Les distributions inconnues sont encore des fonctions de classe C_{t-1} partout, de classe $C_{t'}$, $(t' \geqslant t)$ dans le complémentaire de P dans les conditions du chapitre I, § 7. Les discontinuités sont encore notées par des Y_p^B.

On obtient les résultats suivants concernant ces discontinuités Y_t^B.

Soit des coordonnées où P a pour équation $x^0 = 0$ et où le vecteur bicaractéristique est un vecteur de base, les bicaractéristiques correspondant à x^1 seul variable. Les discontinuités Y_t^B sont des produits d'une exponentielle déterminée de x^1 par des polynômes en x^1 dont les coefficients sont des combinaisons linéaires déterminées de distributions définies par des fonctions localement sommables arbitraires de $x^2, \dots x^n$, jouant le rôle de conditions initiales. Plus précisément, les coefficients pour ces polynômes des termes de degrés

$$(\chi_1 + \chi_2 \cdots + \chi_i - s), \quad (1 \leqslant i \leqslant \mathrm{I}), \quad (1 \leqslant s \leqslant \chi_i),$$

sont des combinaisons linéaires de k_j fonctions localement sommables arbitraires : les coefficients de ces combinaisons linéaires sont déterminés à partir des valeurs pour P des éléments de matrice $\mathrm{P}^{\mathrm{A}}_{\mathrm{B}}$, $\mathcal{A}^{\bar{\mathrm{A}}}_{\bar{\mathrm{B}}}$, $\mathcal{B}^{\bar{\bar{\mathrm{A}}}}_{\bar{\bar{\mathrm{B}}}}$ cités précédemment et construits à partir de la matrice des parties principales; l'exponentielle est $e^{-l^* x^1}$, avec $l^* = \dfrac{\partial \dot{\mathrm{H}}'}{\partial \dot{l}_*} (\dot{l}_\alpha = l_\alpha, \ \dot{l}_* = 0)$; les termes non principaux n'interviennent donc que par l'intermédiaire de l^*, qui est un scalaire de ε. On a des résultats analogues pour les discontinuités d'ordre supérieur. Le support des discontinuités est encore un « pinceau » ayant pour base le support des conditions initiales et pour « rayons » les bicaractéristiques.

En résumé, lorsqu'on a une solution du type indiqué, les discontinuités se propagent le long des bicaractéristiques et sont déterminées de façon simple en fonction de « valeurs initiales » sur l'intersection de l'hyperplan caractéristique et d'un hyperplan coupant les bicaractéristiques.

c) Remarque.

Les calculs du § 3 *a*) restent valables même si P est caractéristique singulier pourvu que $\dot{\mathrm{P}}$ soit caractéristique non singulier, c'est-à-dire qu'ils restent valables même si $l^\alpha = 0$, pourvu que $\dot{\mathrm{P}}$ ne soit pas singulier. Par suite, les équations (3-3) sont encore valables dans ce cas et l'on voit immédiatement qu'elles entraînent que : $\mathrm{Y}^{\mathrm{B}}_t = 0$; de même les discontinuités d'ordre supérieur sont aussi nulles. On a donc la *proposition* suivante.

Proposition. — *A travers un plan caractéristique singulier* P *correspondant à un plan caractéristique non singulier* $\dot{\mathrm{P}}$, *il ne peut y avoir de discontinuités.*

Ces circonstances se présentent pour toute droite caractéristique P dans le cas de l'équation parabolique à deux variables. Lorsque $\dot{\mathrm{H}}'$ étant irréductible, H' est une puissance supérieure à 1 d'un polynôme irréductible K'; (cf. § 1 *h*)), tous les plans caractéristiques P, (correspondant à $\dot{\mathrm{P}}$ non singulier), de K′ sont singuliers : $l^\alpha = \dot{l}^\alpha = 0$, $l^* \neq 0$ et d'après la remarque précédente, il ne peut y avoir de discontinuités à travers ces plans. On peut penser à dire ici que K′ a le caractère parabolique.

4. Solutions analytiques au voisinage d'un hyperplan caractéristique.

On donnera d'abord en *a*) et *b*) quelques rappels et compléments.

a) On considérera encore un plan caractéristique non singulier P, relatif à (H′); son équation dans ε sera $x^0 = 0$. On prendra un repère dont un vecteur de base sera porté par une bicaractéristique, de sorte que les bicaractéristiques correspondront à x^1 seul variable; on désignera par Q le plan d'équation $x^1 = 0$, qui coupe donc les bicaractéristiques.

A P est associé le plan $\dot{\mathrm{P}}$ dans $\dot{\varepsilon}$, d'équation $x^0 = 0$ dans $\dot{\varepsilon}$; on sait que ce plan est caractéristique non singulier pour le cône $(\dot{\mathrm{H}}')$. A Q est associé dans $\dot{\varepsilon}$, le plan $\dot{\mathrm{Q}}$ d'équation $x^1 = 0$ dans $\dot{\varepsilon}$; $\dot{\mathrm{Q}}$ coupe les bicaractéristiques de $\dot{\mathrm{P}}$, qui correspondent à la direction du vecteur de composantes ($\dot{l}^0 = 0$, $\dot{l}^1 \neq 0$, $\dot{l}^2 = 0, \ldots, \dot{l}^n = 0, \dot{l}^*$).

b) Un système d'équations aux dérivées partielles linéaires et à coefficients constants s'écrira dans ε :

$$(1) \quad \left\{ \begin{aligned} & \mathrm{P}_{\mathrm{B}}^{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_t,\mathrm{A}} \partial_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_t} y^{\mathrm{B}} + \cdots + \mathrm{C}_i^q \mathrm{P}_{\mathrm{B}}^{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{t-q}**\ldots*,\mathrm{A}} . \partial_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{t-q}} y^{\mathrm{B}} \\ & \qquad + \cdots + \mathrm{P}_{\mathrm{B}}^{**\ldots*,\mathrm{A}} y^{\mathrm{B}} = g^{\mathrm{A}}. \end{aligned} \right.$$

Les y^{B} sont ici des fonctions analytiques, ainsi que les g^{A}.

On associera à (1) le système, dans $\dot{\varepsilon}$:

$$(2) \qquad \mathrm{P}_{\mathrm{B}}^{\dot{\alpha}_1\dot{\alpha}_2\ldots\dot{\alpha}_t,\mathrm{A}} \partial_{\dot{\alpha}_1\dot{\alpha}_2\ldots\dot{\alpha}_t} \dot{y}^{\mathrm{B}} = g^{\mathrm{A}} e^{x^*}.$$

Les y^{B} sont des fonctions analytiques.

A chaque y^{B} on associera la fonction $\dot{y}^{\mathrm{B}}$ définie par :

$$(3) \qquad \dot{y}^{\mathrm{B}} = e^{x^*} . y^{\mathrm{B}}.$$

Comme au § 2, on vérifie facilement qu'à toute solution y^{B} de (1) correspond une solution de (2) définie par (3) et réciproquement.

On se propose maintenant de démontrer pour le système (1) un théorème analogue au théorème du chapitre II, § 4 *a*).

c) On supposera désormais que les g^A sont analytiques dans un voisinage de l'intersection de P et de Q; on supposera que P correspond aux corangs et multiplicités k_1, χ_1, k_2, χ_2, $k_3 = 0$.

Le *théorème* à démontrer est le suivant :

THÉORÈME. — *Il existe une solution analytique du système* (1) *et une seule, dans un voisinage de l'intersection de* P *et de* Q, *correspondant aux données suivantes :*

1° *Dans* P, *dans un voisinage de l'arête, les données de Cauchy supposées analytiques et satisfaisant à un système exprimant leur compatibilité (système* (4) *indiqué ci-après).*

2° *Dans* Q, *dans un voisinage de l'arête,* ν *fonctions pseudo-données de Cauchy, c'est-à-dire les valeurs des* $y^{\hat{\hat{B}}}$ *et de leurs dérivées en* x^1 *d'ordre inférieur à* χ_1, *et les valeurs des* $y^{\bar{\bar{B}}}$ *et de leurs dérivées en* x^1 *d'ordre inférieur à* $\chi_1 + \chi_2$, *ces données étant supposées analytiques et compatibles avec les données de Cauchy sur l'arête.*

d) Démontrons d'abord l'existence d'une telle solution.

On considérera le système (2). Le plan $\dot{\mathrm{P}}$ est un plan caractéristique de ce système; le plan $\dot{\mathrm{Q}}$ coupe les bicaractéristiques Donnons-nous comme données de Cauchy sur $\dot{\mathrm{P}}$ les produits des données de Cauchy correspondantes sur P, qui sont des fonctions de la forme $\mathrm{F}(x^i)$, par e^{x^*} et imposons à ces données dans $\dot{\mathrm{P}}$ de satisfaire au système (1-16-II) du chapitre II dans $\dot{\mathrm{P}}$; ce système étant composé d'équations linéaires à coefficients constants, ayant pour inconnues des fonctions de la forme :

$$e^{x^*}.\mathrm{F}(x^i)$$

se réduit, en fait, en simplifiant par e^{x^*} à :

(4) $\left\{\begin{array}{l}\text{un système d'équations aux dérivées partielles, liné-}\\\text{aires à coefficients constants ayant pour inconnues}\\\text{les données de Cauchy } \mathrm{F}(x^i) \text{ dans P.}\end{array}\right.$

Comme par hypothèse (4) est satisfait, les données sur $\dot{\mathrm{P}}$ satisfont bien dans $\dot{\mathrm{P}}$ à des conditions du type (II-1-16-II).

Comme données sur $\dot{\mathrm{Q}}$, on se donnera les produits des données correspondantes sur Q par e^{x^*}; on vérifie immédiatement que ces données sont compatibles avec les données de Cauchy de $\dot{P}$, sur l'arête.

Ces données dans $\dot{P}$ et $\dot{Q}$ déterminent d'après le théorème du chapitre II, § 4 *a*) une solution analytique et une seule du système (2) dans un voisinage de l'intersection de $\dot{P}$ et de $\dot{Q}$, soit $\dot{y}^B$.

Cette solution est donc représentée par des développements en séries de x^0, x^1, convergents, en un point quelconque ($x^0 = 0$, $x^1 = 0$, x^2, ... x^n, x^*) de l'intersection de $\dot{P}$ et de $\dot{Q}$. Les coefficients des séries sont des fonctions analytiques de x^2, ... x^n, x^*; ce sont les valeurs sur l'intersection de $\dot{P}$ et $\dot{Q}$ des dérivées en x^0 et x^1 des $\dot{y}^B$; d'après le chapitre I, § 5 et 6, les valeurs de ces dérivées sont des combinaisons affines à coefficients connus (constants pour la partie linéaire) des valeurs sur l'arête, ($\dot{P} \cap \dot{Q}$), des dérivées des données sur $\dot{P}$ et $\dot{Q}$. D'après le choix des données sur $\dot{P}$ et $\dot{Q}$ et la forme des seconds membres de (2), ces coefficients contiennent tous e^{x^*} en facteur; par suite, la solution trouvée de (2) est de la forme :

$$\dot{y}^B = e^{x^*} y^B, \tag{5}$$

où y^B est une fonction analytique de x^α dans un voisinage de l'intersection de P et de Q. D'après *b*) la fonction y^B ainsi définie est solution de (1); d'après (5) les valeurs de ces premières dérivées sur P et sur Q sont justement les valeurs données sur P et sur Q.

On a ainsi démontré le théorème d'existence indiqué en *c*).

e) Démontrons ensuite le théorème d'unicité indiqué en *c*).

Procédons par l'absurde. Supposons qu'aux données sur P et sur Q correspondent 2 solutions analytiques distinctes de (1) dans un voisinage de l'intersection de P et de Q, soit y'^B et y''^B. A ces solutions correspondraient d'après le *b*), deux solutions distinctes de (2) soit $\dot{y}'^B = e^{x^*} . y'^B$ et $\dot{y}''^B = e^{x^*} y''^B . \dot{y}'^B$ et $\dot{y}''^B$ correspondraient sur $\dot{P}$ et $\dot{Q}$ aux mêmes données, ce qui est impossible d'après le théorème d'unicité du chapitre II, § 4 *a*).

Le théorème du *c*) est donc démontré.

On en déduit comme au chapitre II, § 7 la construction de solutions ayant des dérivées discontinues.

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

[1] Bourbaki, Groupes et corps ordonnés. Modules sur les anneaux principaux, 1952, Hermann, 94-95.
[2] Bourbaki, Algèbre multilinéaire, 1958, Hermann, Paris, 115.
[3] Bourbaki, Algèbre linéaire, 1955, Hermann, 91-92.
[4] Bourbaki, Modules plats. Localisation, 1961, Hermann, 102-104.
[5] Schwartz, Théorie des distributions, 1957, Hermann, Paris, Tome I, 43-44, 133, 30, 51-58.
[6] Schwartz, Méthodes mathématiques pour la physique, 1961, Hermann, Paris, chap. II.
[7] Hadamard, Leçons sur la propagation des ondes et les équations de l'hydrodynamique, 1903, Hermann, Paris, chapitre II, § 2-3-4, chapitre VII.
[8] Lichnérowicz, Propagateurs et commutateurs en relativité générale, 1961, *Publications mathématiques de l'Institut des hautes études scientifiques*, 7-8.
[9] Lichnérowicz, Théories relativistes de la gravitation et de l'électromagnétisme, 1955, Masson, Paris, Livre II, Chapitre V et VI.
[10] Mme Maurer-Tison, Aspects mathématiques de la théorie unitaire du champ d'Einstein, 1959, *Annales Scientifiques de l'École Normale Supérieure*, 3e série, t. 76, Chapitre V, § 2, Chapitre VI, § 1-2.
[11, 12] Vaillant, *C. R. Acad. Sci.*, 1961, t. 253, 231-233; 1909-1911.

BIBLIOGRAPHIE

Aux références précédentes, nous ajouterons une bibliographie sommaire.

Bourbaki, Polynômes et fractions rationnelles. Corps commutatifs, 1959, Hermann.
E. Cartan, Les systèmes différentiels extérieurs et leurs applications géométriques, 1945, Hermann.
Y. Choquet-Bruhat, Fluides relativistes de conductibilité infinie, *Astronautica Acta*, Vol. VI, 1960, Fasc. 6, Vienne, Autriche.
Courant, Note dans *Communications on pure and applied mathematics*, Tome 8, 1955, 497, U.S.A.
Courant et P. D. Lax, Note dans *Proceedings of the National Academy of Sciences*, Vol. 42, A, 1956, 872, U.S.A.
Guelfand et Chilov, Les distributions, 1962, Dunod.
Hadamard, Le Problème de Cauchy et les équations aux dérivées partielles linéaires hyperboliques, 1932, Hermann.
Hörmander, Linear partial differential operators, 1963, Berlin, Göttingen. Heidelberg, Allemagne.

A. LAX, On the Cauchy's problem for partial differential equations with multiple characteristics, dans *Communications on pure and applied mathematics*, Vol. 9, n° 2, (1956), 135-169, U.S.A.

LEDNEV, Nouvelle méthode de résolution des équations aux dérivées partielles (en russe), *Math. Sbornik N.S.*, t. 22, 1948, 205-266, U.R.S.S.

LERAY, Hyperbolic differential equations. *Lectures*, Institute for Advanced Study, Princeton 1954, U.S.A.

LEVI, Caractteristiche multiple e problema di Cauchy. *Ann. di mat.*, ser. 3°, Vol. 16 (1909), 161-201, Italie.

LICHNÉROWICZ, Théorie globale des connexions et des groupes d'holonomie, 1955, Dunod.

LICHNÉROWICZ, Ondes et radiations électromagnétiques et gravitationnelles en relativité générale, *Annali di matématica pura ed applicata*, Serie IV, tomo L, (1960), Bologna, Italie.

MALGRANGE, Sur les systèmes différentiels à coefficients constants, *Séminaire Leray*, Collège de France, 1961-1962.

MATSUMURA, Existence locale de solutions pour quelques systèmes d'équations aux dérivées partielles, *Japanèse Journal of mathematics*, Vol. XXXII, 1962, Japon.

M. A. TONNELAT, La théorie du champ unifié d'Einstein et quelques-uns de ses développements, 1955, Gauthier-Villars.

VAILLANT, *C. R. Acad. Sci.*, 1962, t. 254, 431-433, 1962, t. 255, 628-630; 1962, t. 255, 1560-1562.

VAILLANT, Sur la structure des équations de la théorie unitaire d'Einstein, Schrödinger, *Séminaire Lichnérowicz*, Collège de France, 1961-1962.

ZERNER, Solutions singulières d'équations aux dérivées partielles, *Bulletin de la Société mathématique de France*, 91, 1963, 203-226.

(*Thèse, Fac. Sciences*, Paris, 1964).

Jean VAILLANT,
Entrée J n° 2,
Place du général de Gaulle,
Ronchin (Nord).