ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

ROSE-MARIE HERVÉ

Quelques propriétés des fonctions surharmoniques associées à une équation uniformément elliptique de la forme $Lu = -\sum_i \frac{\partial}{\partial x_i}(\sum_j a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_j}) = 0$

Annales de l'institut Fourier, tome 15, nº 2 (1965), p. 215-223
<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1965__15_2_215_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
15, 2 (1965), 215-224.

QUELQUES PROPRIÉTÉS DES FONCTIONS SURHARMONIQUES ASSOCIÉES A UNE ÉQUATION UNIFORMÉMENT ELLIPTIQUE DE LA FORME

$$\mathrm{L}u = -\sum_i \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\sum_j a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_j}\right) = 0$$

par Rose-Marie HERVÉ

Dans un précédent article [5], dont les notations sont conservées ici, j'ai montré que les solutions locales d'une équation uniformément elliptique $\mathrm{L}u = 0$, dans un domaine borné Ω de R^n, forment un système de fonctions harmoniques dans Ω satisfaisant à l'axiomatique de M. Brelot. Je démontre ici quelques propriétés des fonctions surharmoniques associées à ce système (dites L-surharmoniques lorsqu'il y a ambiguïté) :

— La proportionnalité des potentiels de support ponctuel donné dans Ω résulte d'une étude des fonctions harmoniques > 0 possédant une singularité isolée, inspirée de celle qu'ont faite Gilbarg et Serrin [3] dans le cas où les coefficients sont localement lipschitziens.

— La notion d'effilement ne dépend pas de l'opérateur L considéré, donc coïncide avec la notion d'effilement classique.

— Une fonction surharmonique dans Ω, minorée au voisinage de la frontière par une fonction $\varphi \in \mathrm{W}_0^{1,2}(\Omega)$ (c'est-à-dire par une fonction (¹) $\in \mathrm{W}^{1,2}(\Omega)$ et « nulle à la frontière »), est $\geqslant 0$ dans Ω : ce principe du minimum pour les fonctions surharmoniques améliore celui que j'avais démontré dans [5] (théorème 2), en levant la restriction φ s.c.s. dans Ω.

(¹) $f \in \mathrm{W}^{1,2}(\Omega)$ si $f \in \mathrm{L}^2(\Omega)$ ainsi que ses dérivées partielles 1res.

— La solution du problème de Dirichlet, au sens de Perron-Wiener-Brelot, dans un ouvert $\omega \subset \overline{\omega} \subset \Omega$, quand la donnée sur la frontière est la trace sur $\partial\omega$ d'une fonction V surharmonique dans Ω et $\in W^{1,2}_{loc}(\Omega)$, est la solution L^{ω}_{V} de $Lu = 0$ telle que $V - L^{\omega}_{V} \in W^{1,2}_{0}(\omega)$: cette propriété étend celle que j'avais démontrée dans [5] (théorème 3), où la donnée était la trace sur $\partial\omega$ d'une fonction $\in C^{0}(\overline{\omega}) \cap W^{1,2}(\omega)$. Elle a pour conséquence :

— Une fonction V surharmonique dans Ω et $\in W^{1,2}(\Omega)$ a une plus grande minorante harmonique dans Ω, qui est L^{Ω}_{V}.

Les hypothèses sur l'opérateur L sont les mêmes que dans [5].

1. Proportionnalité des potentiels de support ponctuel donné dans Ω.

Soit $\beta(O, R)$ la boule ouverte de centre O et de rayon R.

LEMME. — *Pour toute solution locale $u \geqslant 0$ dans $\beta(O, R) - \{0\}$ et tout nombre r tel que $0 < r \leqslant \frac{R}{2}$, on a $\sup\limits_{\partial\beta(0,r)} u \leqslant c \inf\limits_{\partial\beta(0,r)} u$, où c est une constante > 0 ne dépendant que de n (dimension de l'espace) et λ (coefficient d'uniforme ellipticité).*

Considérons la fonction $v(x) = u(rx)$ définie sur l'ouvert $\omega\left(0, \frac{R}{r}\right) = \beta\left(0, \frac{R}{r}\right) - \{0\}$, et montrons qu'elle est solution locale dans $\omega\left(0, \frac{R}{r}\right)$ de l'équation

$$\sum_i \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\sum_j b_{ij} \frac{\partial v}{\partial x_j}\right) = 0, \tag{1}$$

où $b_{ij}(x) = a_{ij}(rx)$.

Soit $\varphi \in \mathcal{D}\left(\omega\left(0, \frac{R}{r}\right)\right)$; en posant $y = rx$ et $\psi(y) = \varphi\left(\frac{y}{r}\right)$:

$$\int_{\omega\left(0,\frac{R}{r}\right)} \sum_{i,j} b_{ij} \frac{\partial v}{\partial x_i} \frac{\partial \varphi}{\partial x_j}\, dx = r^2 \int_{\omega(0,R)} \sum_{i,j} a_{ij}(y) \frac{\partial u}{\partial y_i}(y) \frac{\partial \psi}{\partial y_j}(y) \frac{dy}{r^n}$$
$$= 0 \quad \text{puisque } \psi \in \mathcal{D}(\omega(0, R)).$$

On applique alors à v, solution locale $\geqslant 0$ de (1) dans l'ouvert fixe $\omega(0, 2)$, l'inégalité de Harnack due à Moser [7] : étant donné le compact $\partial\beta(0, 1)$, il existe une constante $c > 0$, ne dépendant que de n et λ, telle que

$$\sup_{\partial\beta(0,1)} v \leqslant c \inf_{\partial\beta(0,1)} v,$$

ou encore

$$\sup_{\partial\beta(0,r)} u \leqslant c \inf_{\partial\beta(0,r)} u.$$

THÉORÈME 1. — *Les potentiels dans Ω, de support ponctuel donné $y \in \Omega$, sont proportionnels.*

On considère le cône convexe des potentiels dans Ω de support y : soient p et q deux éléments extrémaux de ce cône, supposés non proportionnels. Rappelons d'abord le principe du minimum suivant ([4], n° 3, propriété 3) : si v est surharmonique dans un ouvert $\omega \subset \Omega$, $\geqslant -$ un potentiel dans Ω, et satisfait à $\liminf_{\substack{x \in \omega \\ x \to y}} v(x) \geqslant 0$ pour tout $y \in \partial\omega \cap \Omega$, alors $v \geqslant 0$ dans ω.

S'il existait $\alpha > 0$ tel que $p \geqslant \alpha q$ dans un voisinage de y diminué de y, ce principe du minimum étendrait l'inégalité $p \geqslant \alpha q$ à $\Omega - \{y\}$, puis $p - \alpha q$ serait prolongeable surharmoniquement au point y, d'où $p = \alpha q +$ un potentiel dans Ω de support y, ce qui est contraire à p extrémal non proportionnel à q.

Je dis que $\inf_{\partial\beta(y,r)} p = o\left(\sup_{\partial\beta(y,r)} q\right)$ quand $r \to 0$: s'il n'en était pas ainsi, il existerait $\alpha > 0$ et une suite r_n strictement décroissante, tendant vers 0, telle que, pour chaque n,

$$\inf_{\partial\beta(y,r_n)} p \geqslant \alpha \sup_{\partial\beta(y,r_n)} q,$$

donc $p \geqslant \alpha q$ sur $\partial\beta(y, r_n)$; d'après le principe classique du minimum appliqué dans chaque couronne $\beta(y, r_n) - \overline{\beta}(y, r_{n+1})$, on aurait $p \geqslant \alpha q$ dans un voisinage de y diminué de y, ce qui est impossible.

Le lemme prouve alors que l'on a même $\sup_{\partial\beta(y,r)} p = o\left(\inf_{\partial\beta(y,r)} q\right)$ quand $r \to 0$, en particulier $p \leqslant q$ sur $\partial\beta(y, r)$ pour r assez petit, d'où la même contradiction.

Cas particulier de la boule.

Pour chaque point y d'une boule ouverte β, on sait [6] qu'il existe une fonction de Green dans β de pôle y, notée g_y, harmonique dans $\beta - \{y\}$, ayant pour limite $+\infty$ au point y et 0 en tout point $\in \partial\beta$; en outre $g_y(x)$ est symétrique en x et y. Par suite g_y est un potentiel dans β de support y, et tout potentiel dans β admet une représentation intégrale unique à l'aide de g_y et d'une mesure $\geqslant 0$ sur β([4], théorème 18.2). Autre propriété de la fonction de Green : pour tout compact $K \subset \beta$, de diamètre < 1 si $n = 2$, il existe deux constantes A et B > 0 telles que $x, y \in K$ entraîne

$$(1)\quad \begin{cases} \dfrac{A}{|x-y|^{n-2}} \leqslant g_y(x) \leqslant \dfrac{B}{|x-y|^{n-2}} & \text{si} \quad n > 2, \\ A \log \dfrac{1}{|x-y|} \leqslant g_y(x) \leqslant B \log \dfrac{1}{|x-y|} & \text{si} \quad n = 2. \end{cases}$$

2. Comparaison du L-effilement et du Δ-effilement d'un ensemble.

Rappel sur les ensembles effilés [1, 4].

a) Définition : Un ensemble $E \subset \Omega$ est effilé en un point $x_0 \in \Omega - E$ si $x_0 \notin \overline{E}$ ou s'il existe une fonction φ surharmonique dans un voisinage de x_0 telle que

$$\liminf_{\substack{x \in E \\ x \to x_0}} \varphi(x) > \varphi(x_0).$$

b) Un critère d'effilement : Pour que E soit effilé en $x_0 \in \overline{E} - E$, il faut et il suffit qu'il existe une fonction φ surharmonique > 0 dans un voisinage de x_0, finie en x_0, telle que $\lim\limits_{\substack{x \in E \\ x \to x_0}} \varphi(x) = +\infty$.

c) Soit E effilé en x_0 : si $\rho_{x_0}^{\omega}$ est la mesure harmonique en x_0 d'un ouvert $\omega \ni x_0$, $\rho_{x_0}^{\omega}(E \cap \partial\omega) \to 0$ selon l'ordonné filtrant décroissant des ouverts $\omega \ni x_0$.

Théorème 2. — *Étant donné un ensemble* $E \subset \Omega$ *et un point* $x_0 \in \Omega - E$, *les conditions* E L-*effilé en* x_0 *et* E Δ-*effilé en* x_0 *sont équivalentes.*

Cela résulte du critère d'effilement *b*) et de la double inégalité (1) terminant le n° 1 : E L-effilé en x_0 équivaut à l'existence d'un L-potentiel p dans une boule β de centre x_0 ayant, au point x_0, une valeur finie et une limite sur E égale à $+\infty$;

si $p = \int_\beta g_y \, d\mu(y)$, et si μ est portée par un compact $\subset \beta$, de diamètre < 1 si $n = 2$, cela équivaut à dire que la fonction Δ-surharmonique $\int_\beta \frac{d\mu(y)}{|x-y|^{n-2}}$ si $n > 2$,

$$\int_\beta \log \frac{1}{|x-y|} \, d\mu(y) \qquad \text{si} \qquad n = 2,$$

a au point x_0 une valeur finie et une limite sur E égale à $+\infty$.

Conséquence. — Soit E L-effilé en x_0 : si $d\sigma$ est la mesure superficielle sur une sphère de rayon r, il résulte de la propriété *c*) que $\frac{\sigma(\mathrm{E} \cap \partial\beta(x_0, r))}{\sigma(\partial\beta(x_0, r))} \to 0$ quand $r \to 0$.

3. Un théorème d'approximation pour les fonctions surharmoniques localement bornées.

Soit $\rho_n(x)$ une suite « régularisante » formée de fonctions $\geqslant 0$, indéfiniment différentiables, dépendant seulement de $|x|$, nulles pour $|x| \geqslant \frac{1}{n}$ et telles que $\int \rho_n(x) \, dx = 1$.

THÉORÈME 3. — *Soit* V *une fonction surharmonique localement bornée dans* Ω : *alors* $\mathrm{V} * \rho_n \to \mathrm{V}$ *en tout point* $\in \Omega$.

Soit $x_0 \in \Omega$ et $\varepsilon > 0$: on a $\mathrm{V}(x) \geqslant \mathrm{V}(x_0) - \varepsilon$ sur un voisinage de x_0, donc $\mathrm{V} * \rho_n(x_0) \geqslant \mathrm{V}(x_0) - \varepsilon$ pour n assez grand.

Pour majorer $\mathrm{V} * \rho_n(x_0)$, on considère l'ensemble

$$\mathrm{E} = \{x \in \Omega : \mathrm{V}(x) > \mathrm{V}(x_0) + \varepsilon\},$$

effilé au point x_0, et l'on écrit

$$\mathrm{V} * \rho_n(x_0) = \int_{x_0 - \complement \mathrm{E}} \mathrm{V}(x_0 - t)\rho_n(t) \, dt + \int_{x_0 - \mathrm{E}} \mathrm{V}(x_0 - t)\rho_n(t) \, dt :$$

la première intégrale est $\leqslant \mathrm{V}(x_0) + \varepsilon$. Pour majorer la seconde, soit I, on l'écrit, en posant $|t| = r$ et $\rho_n(t) = f_n(r)$:

$$\mathrm{I} = \int_0^{1/n} \left[\int_{(x_0 - \mathrm{E}) \cap \partial\beta(0, r)} \mathrm{V}(x_0 - t) \, d\sigma(t) \right] f_n(r) \, dr ;$$

puisque $V \leqslant M$ sur un voisinage de x_0, on a, pour n assez grand,

$$I \leqslant M \int_0^{1/n} \sigma(E \cap \partial\beta(x_0, r)) f_n(r)\, dr \leqslant \varepsilon M \int_0^{1/n} \sigma(\partial\beta(0, r)) f_n(r)\, dr = \varepsilon M$$

d'après la conséquence du théorème 2.

Ainsi $V * \rho_n(x_0) \leqslant V(x_0) + \varepsilon(M + 1)$ pour n assez grand.

Conséquence. — Soient V surharmonique localement bornée dans Ω, ω un ouvert tel que $\overline{\omega} \subset \Omega$: la solution H_V^ω du problème de Dirichlet dans ω est limite de $H^\omega_{V*\rho_n}$.

En effet, $V * \rho_n \to V$ en tout point $\in \partial\omega$ et $|V * \rho_n|$ est borné sur $\partial\omega$ indépendamment de n.

Remarque. — Si en outre $V \in W^{1,2}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$, la solution L_V^ω de $Lu = 0$ dans ω telle que $V - L_V^\omega \in W_0^{1,2}(\omega)$ est limite, dans $W^{1,2}(\omega)$, de $L^\omega_{V*\rho_n}$.

En effet, $V * \rho_n \to V$ dans $W^{1,2}(\omega)$ et l'application $f \to L_f^\omega$ de $W^{1,2}(\omega)$ dans lui-même est continue.

Rappelons aussi que cette application est croissante; comme d'autre part $f = 0$ p.p. dans ω au voisinage de $\partial\omega$ entraîne $L_f^\omega = 0$ dans ω, $f \geqslant 0$ p.p. dans ω au voisinage de $\partial\omega$ entraîne $L_f^\omega \geqslant 0$ dans ω.

4. Un principe du minimum pour les fonctions surharmoniques (²).

Théorème 4. — *Une fonction surharmonique dans Ω, minorée p.p. au voisinage de $\partial\Omega$ par une fonction $\in W_0^{1,2}(\Omega)$, est $\geqslant 0$ dans Ω.*

Soient V surharmonique dans Ω, $\varphi \in W_0^{1,2}(\Omega)$, $\varphi \leqslant V$ p.p. au voisinage de $\partial\Omega$: en remplaçant au besoin V et φ par $\inf(V, 0)$ et $\inf(\varphi, 0)$, on peut supposer V localement bornée dans Ω.

Montrons d'abord que, pour tout ouvert $\omega \subset \overline{\omega} \subset \Omega$ tel que

(²) Les résultats de Littman, Stampacchia et Weinberger [6] permettent de comparer le théorème 4, comme principe du maximum pour les fonctions sous-harmoniques, à celui démontré pour les sous-solutions locales dans [5], et de constater que le théorème 4 est plus général : en effet, la régularisée s.c.s. ess. d'une sous-solution locale dans Ω lui est égale p.p., et elle est sous-harmonique dans Ω.

$V \geqslant \varphi$ p.p. sur un voisinage de $\partial\omega$, on a $H_V^\omega \geqslant L_\varphi^\omega$ dans ω. Pour cela, on considère une suite « régularisante » ρ_p : pour p assez grand, $V * \rho_p \in C^\infty(\overline{\omega})$, donc ([5], théorème 3)

$$H^\omega_{V*\rho_p} = L^\omega_{V*\rho_p};$$

d'autre part $V \geqslant \varphi$ p.p. sur un voisinage de $\partial\omega$ entraîne, pour p assez grand, $V * \rho_p \geqslant \varphi * \rho_p$ au voisinage de $\partial\omega$, donc

$$L^\omega_{V*\rho_p} \geqslant L^\omega_{\varphi*\rho_p}$$

dans ω; enfin $H^\omega_{V*\rho_p} \to H^\omega_V$ et il existe une suite partielle p' telle que $L^\omega_{\varphi*\rho_{p'}} \to L^\omega_\varphi$ p.p. dans ω; d'où $H^\omega_V \geqslant L^\omega_\varphi$ p.p., donc partout, dans ω.

Soit alors une suite croissante d'ouverts $\omega_n \subset \overline{\omega}_n \subset \Omega$ dont la réunion est Ω : pour n assez grand on a $H_V^{\omega_n} \geqslant L_\varphi^{\omega_n}$ dans ω_n; quand $n \to +\infty$, $L_\varphi^{\omega_n}$ prolongée par φ dans $\Omega - \omega_n$ a pour limite faible 0 dans $W^{1,2}(\Omega)$ ([5], proposition 5), tandis que la suite décroissante $H_V^{\omega_n}$ a pour limite h, harmonique dans Ω ou $-\infty$; pour tout ensemble mesurable $E \subset \overline{E} \subset \Omega$, on a $\lim \int_E H_V^{\omega_n} dx \geqslant 0$, d'où h harmonique $\geqslant 0$ dans Ω et $V \geqslant h \geqslant 0$ dans Ω.

5. Le problème de Dirichlet dans ω, pour une donnée sur $\partial\omega$ qui est la trace d'une fonction surharmonique dans $\Omega \supset \overline{\omega}$ et $\in W^{1,2}_{\text{loc}}(\Omega)$.

THÉORÈME 5. — *Soit* V *surharmonique dans* Ω *et* $\in W^{1,2}_{\text{loc}}(\Omega)$: *si l'ouvert* ω *est tel que* $\overline{\omega} \subset \Omega$, *la solution* H_V^ω *du problème de Dirichlet dans* ω, *pour la donnée* V *sur* $\partial\omega$, *est la solution* L_V^ω *de* $Lu = 0$ *dans* ω *telle que* $V - L_V^\omega \in W_0^{1,2}(\omega)$.

Soit d'abord V localement bornée dans Ω : en reprenant la suite régularisante ρ_p de la démonstration précédente, on a $H^\omega_{V*\rho_p} = L^\omega_{V*\rho_p}$ pour p assez grand, $H^\omega_{V*\rho_p} \to H^\omega_V$ dans ω et, pour une suite partielle p', $L^\omega_{V*\rho_{p'}} \to L^\omega_V$ p.p. dans ω.

Soit maintenant V quelconque : si $V_n = \inf(V, n)$, on a $H^\omega_{V_n} = L^\omega_{V_n}$; la suite V_n étant croissante, $H^\omega_{V_n} \to H^\omega_V$ dans ω. Il suffit alors de montrer que $V_n \to V$ dans $W^{1,2}(\omega)$, et cela résulte de $\operatorname{grad} V_n \to \operatorname{grad} V$ en tout point où V est fini, c'est-à-dire p.p., joint à $|\operatorname{grad} V_n| \leqslant |\operatorname{grad} V|$.

6. La plus grande minorante harmonique d'une fonction surharmonique dans Ω et $\in W^{1,2}(\Omega)$.

Soient une fonction V surharmonique dans Ω et une suite croissante d'ouverts $\omega_n \subset \overline{\omega}_n \subset \Omega$ dont la réunion est Ω : la suite $H_V^{\omega_n}$ est décroissante et sa limite h est harmonique dans Ω ou $-\infty$. Dans la première éventualité, V admet une plus grande minorante harmonique dans Ω qui est h : en effet, $V \geqslant H_V^{\omega_n}$ dans ω_n pour chaque n entraîne $V \geqslant h$ dans Ω et, si h' est une minorante harmonique de V dans Ω, on a $h' \leqslant H_V^{\omega_n}$ dans ω_n pour chaque n, donc $h' \leqslant h$ dans Ω.

THÉORÈME 6. — *Si* V *est surharmonique dans* Ω *et* $\in W^{1,2}(\Omega)$, *alors* V *admet une plus grande minorante harmonique dans* Ω, *qui est* L_V^Ω.

On reprend la suite ω_n ci-dessus : pour chaque n, $H_V^{\omega_n} = L_V^{\omega_n}$ dans ω_n; quand $n \to +\infty$, $H_V^{\omega_n}$ tend en décroissant vers h et $L_V^{\omega_n}$ prolongée par V dans $\Omega - \omega_n$ a pour limite faible L_V^Ω dans $W^{1,2}(\Omega)$. Par suite, pour tout ensemble mesurable $E \subset \overline{E} \subset \Omega$, $\int_E h\,dx = \int_E L_V^\Omega\,dx$; alors h est harmonique dans Ω et égale à L_V^Ω.

COROLLAIRE 1. — *Soit* V *surharmonique dans* Ω *et* $\in W^{1,2}(\Omega)$: *alors* V *est un potentiel dans* Ω *si et seulement si* $V \in W_0^{1,2}(\Omega)$.

COROLLAIRE 2. — *Soit* V *surharmonique dans* Ω *et* $\in W_{\text{loc}}^{1,2}(\Omega)$: *pour tout ouvert* $\omega \subset \overline{\omega} \subset \Omega$, *la plus grande minorante harmonique de* V *dans* ω *est* H_V^ω.

Remarque. — Dans l'axiomatique de M. Brelot, cette dernière propriété n'est pas vraie pour V et ω quelconques; elle est vérifiée pour V localement bornée dans Ω, moyennant l'axiome D, qui est d'ailleurs satisfait ici. Il suffit en effet de le vérifier pour les potentiels dans une boule (de diamètre $\leqslant 1$ si $n = 2$), en utilisant la double inégalité (1) à la fin du n° 1 et un énoncé de G. Choquet [2] sur le principe du maximum « λ-dilaté ».

BIBLIOGRAPHIE

[1] M. Brelot, Introduction axiomatique de l'effilement, *Ann. di Mat.*, 57 (1962), 77-95.

[2] G. Choquet, Les noyaux réguliers en théorie du potentiel, *C. R. Acad. Sci.*, Paris, 243 (1956), p. 635.

[3] D. Gilbarg et J. Serrin, On isolated singularities of solutions of second order elliptic differential equations, *Journal d'Anal. math.*, 4 (1954-1955), 309-340.

[4] R. M. Hervé, Recherches axiomatiques sur la théorie des fonctions surharmoniques et du potentiel. *Ann. Inst. Fourier*, 12 (1962), 415-571.

[5] R. M. Hervé, Un principe du maximum pour les sous-solutions locales d'une équation uniformément elliptique de la forme

$$\mathrm{L}u = -\sum_i \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\sum_j a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_j}\right) = 0.$$

Ann. Inst. Fourier, 14 (1964), 493-508.

[6] W. Littman, G. Stampacchia et H. F. Weinberger, Regular points for elliptic equations with discontinuous coefficients, *Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa*, 17 (1963), 45-79.

[7] J. Moser, On Harnack's theorem for elliptic differential equations, *Comm. pure appl. Math.*, 14 (1961), 577-591.

Manuscrit reçu le 17 novembre 1964.

Mme R.-M. Hervé,
Institut Mathématique,
Faculté des Sciences,
Nancy (M.-et-M.).