ANNALES

DE

L'INSTITUT FOURIER

Nicolas JOUSSE

Étude d'un problème de continuité lié à l'hypothèse de Riemann

Tome 55, nº 4 (2005), p. 1373-1410.

<http://aif.cedram.org/item?id=AIF_2005__55_4_1373_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
55, 4 (2005), 1373–1410

ÉTUDE D'UN PROBLÈME DE CONTINUITÉ LIÉ À L'HYPOTHÈSE DE RIEMANN

par Nicolas JOUSSE

0. Introduction.

À la suite du travail de Nyman [11], plusieurs formes équivalentes de l'hypothèse de Riemann ont été établies, qui sont des variantes les unes des autres. Notons $\mathcal{B}$ le sous espace de $L^2(0,+\infty)$ des fonctions de la forme $f = \sum_{i=1}^n c_i g_{\theta_i}$ avec $n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leqslant \theta_i \leqslant 1$, $c_i \in \mathbb{C}$ pour $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ où

$$g_{\theta_i} \;: t \longmapsto \left\{\frac{\theta_i}{t}\right\}$$

et $\{u\}$ désigne la partie fractionnaire du nombre réel u; et notons χ la fonction indicatrice de l'intervalle $]0, 1]$. On a en particulier le résultat suivant :

Théorème 1 ([5]). — *L'hypothèse de Riemann est vraie* $\Leftrightarrow \chi$ *est dans l'adhérence de* $\mathcal{B}$ *dans* $L^2(0,+\infty)$.

Cette équivalence est intéressante car elle propose une alternative pour la recherche de l'hypothèse de Riemann. Plutôt que d'étudier les zéros de la fonction $\zeta(s)$ de Riemann, on étudie les dilatées de la fonction partie fractionnaire.

Mots-clés : hypothèse de Riemann, critère de Beurling-Nyman, dilatées, continuité, projection.
Classification math. : 11M26, 46C05.

Prenons-nous un instant au jeu et cherchons à vérifier ce critère pour la stratégie *a priori* naïve suivante : on identifie la meilleure approximation f_n de χ dans

$$\mathcal{B}_n = \bigcup_{(\theta_1,\ldots,\theta_n)\in[0,1]^n} \mathrm{Vect}\left(g_{\theta_1},\ldots g_{\theta_n}\right)$$

et on cherche à montrer que f_n converge vers χ dans $L^2(0,+\infty)$.

Une étude numérique a été entreprise par Landreau et Richard [10] pour identifier les premières valeurs de la suite $(f_n)_{n\geqslant 1}$. Mais comme le soulignent ces auteurs, d'un point de vue théorique la première question qui se pose est de savoir si cette fonction de meilleure approximation f_n existe réellement ! Autrement dit :

Question 1. — *Pour n fixé, l'infimum de la distance entre χ et $\mathcal{B}_n$ est-il atteint ?*

La motivation initiale de ce présent travail est de répondre positivement à cette question.

La première remarque est que l'argumentation usuelle ne s'applique pas ici car $\mathcal{B}_n$ n'est pas un convexe fermé. La deuxième remarque est que par compacité de $[0,1]^n$, il suffit pour avoir une réponse positive de vérifier que l'application

$$(*)\qquad \begin{array}{rccl} \Pi_{\chi,g} & : & [0,1]^n & \longrightarrow & L^2(0,+\infty) \\ & & (\theta_1,\ldots,\theta_n) & \longmapsto & P_{\mathrm{Vect}(g_{\theta_1},\ldots,g_{\theta_n})}(\chi) \end{array}$$

est continue (où P_V désigne la projection orthogonale sur V).

Mais cette vérification est moins facile que ce que l'on peut penser de prime abord. En particulier, nous verrons que si on remplace dans la définition de g la fonction partie fractionnaire par une fonction suffisamment régulière, alors l'application $\Pi_{\chi,g}$ n'est pas continue.

Le fait que cette vérification n'aille pas de soi nous amène à considérer ce problème de manière plus générale. Pour $\mathcal{C}$ l'ensemble des parties convexes fermées d'un espace de Hilbert H, on considère l'application

$$\begin{array}{rccl} \Pi & : & \mathcal{C}\times H & \longrightarrow & H \\ & & (C,y) & \longmapsto & P_C(y). \end{array}$$

Si C est fixé, il est bien connu que l'application partielle $y \mapsto P_C(y)$ est continue : c'est l'application de projection sur un convexe fermé. En revanche, si y est fixé, la question de la continuité de l'autre application partielle $C \mapsto P_C(y)$ n'avait semble-t-il jamais été étudiée jusqu'à présent.

En fait, on est rapidement amené à reformuler cette question sous la forme suivante : soit $\mathcal{A}$ une partie de $\mathcal{C}$, munie d'une structure d'espace topologique. À quelle condition sur $\mathcal{A}$, A et y l'application

$$\begin{array}{rccc} \Pi : & \mathcal{A} \times H & \longrightarrow & H \\ & (A, y) & \longmapsto & P_A(y) \end{array}$$

est-elle continue (ou non) en (A, y) ?

L'objet de ce travail est de donner quelques éléments de réponse à cette question générale. En particulier, nous montrons que l'assertion $(*)$ est vraie.

Pour conclure, revenons à la stratégie pour chercher à prouver l'hypothèse de Riemann que nous avons évoquée au début de cette introduction. Il est possible que cette stratégie soit très loin d'être pertinente. Mais en tout état de cause, ce travail nous a amené à mieux comprendre certains des aspects de la spécificité de la fonction partie fractionnaire, spécificité qui est liée au problème de l'hypothèse de Riemann par l'intermédiaire du théorème 1 ci-dessus.

1. Généralités sur la continuité de la projection d'un point fixé sur un sous-espace variable sur un sous-espace variable d'un espace de Hilbert.

Dans toute cette partie, H désigne un espace de Hilbert complexe, et $\mathcal{L}(H)$ l'ensemble des applications linéaires continues de H dans lui-même. Si V un sous-espace fermé de H. Nous désignerons par P_V l'opérateur de projection orthogonale sur V.

1.1. Préliminaires sur la projection orthogonale sur un sous-espace fermé de H.

Rappelons la formule permettant d'obtenir l'expression du projeté de $y_0 \in H$ sur un sous-espace vectoriel de dimension finie V de H.

PROPOSITION 8 1. — *Soient $y_0 \in H$ et $(x_1, \dots, x_n)$ une famille libre d'éléments de H. Le projeté orthogonal $P(y_0)$ de y_0 sur l'espace vectoriel engendré par les vecteurs x_i est donné par la formule :*

$$P(y_0) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\overline{\mathrm{Gram}(x_1, \dots, x_n; x_1, \dots, x_{i-1}, y_0, x_{i+1}, \dots, x_n)}}{\mathrm{Gram}}(x_1, \dots, x_n) x_i$$

où $\mathrm{Gram}(u_1,\ldots,u_n,v_1,\ldots,v_n)=\det\big(\langle u_i,v_j\rangle\big)$.

Donnons enfin une condition nécessaire et suffisante pour que le projeté de y_0 sur V ne change pas lorsque V augmente.

LEMME 1. — *Soient* $\{u_1,\ldots,u_n,y_0\}$ *des éléments de* H*. On a l'équivalence :*

$$P_{\mathrm{Vect}(u_1,\ldots,u_n)}(y_0)=P_{\mathrm{Vect}(u_1,\ldots,u_{n-1})}(y_0)\Longleftrightarrow y_0-P_{\mathrm{Vect}(u_1,\ldots,u_{n-1})}(y_0)\perp u_n.$$

Preuve du lemme 1. — Posons $y_1=P_{\mathrm{Vect}(u_1,\ldots,u_{n-1})}(y_0)$ et $y_2=P_{\mathrm{Vect}(u_1,\ldots,u_n)}(y_0)$. Remarquons que $y_1=P_{\mathrm{Vect}(u_1,\ldots,u_{n-1})}(y_2)$.

▶ Supposons que $y_2=y_1$. On a $y_2-y_0\in\mathrm{Vect}(u_1,\ldots,u_n)^\perp$, donc : $u_n\perp y_2-y_0$, ce qui peut encore s'écrire : $u_n\perp y_1-y_0$. Cela prouve une première implication.

▶ Supposons réciproquement que $u_n\perp y_1-y_0$. Puisque y_1-y_0 appartient déjà à $\mathrm{Vect}(u_1,\ldots,u_{n-1})^\perp$, on a donc : $y_1-y_0\in\mathrm{Vect}(u_1,\ldots,u_n)^\perp$. D'autre part, $y_1\in\mathrm{Vect}(u_1,\ldots,u_{n-1})\subset\mathrm{Vect}(u_1,\ldots,u_n)$. Par unicité du projeté, on obtient donc $y_2=y_1$, ce qui achève la preuve. □

1.2. Convergence faible.

Dans tout ce paragraphe et le suivant, X désigne un espace topologique et x_0 un point de X admettant un système fondamental dénombrable (V_n) de voisinages. Nous utiliserons de façon essentielle la notion de convergence faible et plusieurs de ses propriétés. Commençons par une définition :

DÉFINITION 1. — *Soit* $x\mapsto V(x)$ *une application de* X *dans l'ensemble des sous-espaces vectoriels de* H*. On dit que* $V(x)$ *tend faiblement vers 0 lorsque* x *tend vers* x_0*, et on note* $V(x)\rightharpoonup_{x\to x_0}0$*, lorsque pour toute application bornée* v *de* X *dans* H *telle que* $v(x)\in V(x)$ *pour tout* $x\in X$*, on a :* $v(x)\rightharpoonup_{x\to x_0}0$.

Remarque 1. — Il est plus fréquent d'utiliser la notion de suite convergeant faiblement. C'est la raison pour laquelle nous avons supposé que le point x_0 admettait un système fondamental dénombrable de voisinages. En particulier, $u(x)\rightharpoonup u_0$ lorsque x tend vers x_0 si et seulement si, pour toute suite (x_n) convergeant vers x_0, on a $u(x_n) \rightharpoonup u_0$ lorsque n tend vers $+\infty$.

Nous allons maintenant énoncer quelques propriétés concernant la convergence faible que nous serons amenés à utiliser par la suite. Nous omettons les démonstrations, qui se déduisent simplement du cas classique de la convergence faible des suites (voir par exemple [14], paragraphes 12 et 13).

PROPOSITION 2. — *Soit u une application de X dans H tendant faiblement vers u_0 lorsque x tend vers x_0. Alors, u est bornée au voisinage de x_0.*

Remarque 2. — Si $u(x) \rightharpoonup u_0$ et $v(x) \to v_0$, alors : $\langle u(x), v(x)\rangle \to \langle u_0, v_0\rangle$.

DÉFINITION 2. — *Si E est un espace vectoriel topologique, $(x_i)_{i\in I}$ une famille d'éléments de E, et si le sous-espace vectoriel $\mathrm{Vect}(x_i, i \in I)$ est dense dans E, on dit que la famille $\big(x_i\big)_{i\in I}$ est totale dans E.*

PROPOSITION 3. — *Soit u une application de X dans H bornée au voisinage de x_0, et $u_0 \in H$. On suppose que l'égalité $\lim_{x\to x_0}\langle u(x), y\rangle = \langle u_0, y\rangle$ est vérifiée pour tout y appartenant à une partie totale de H. Alors, $u(x) \rightharpoonup u_0$ quand x tend vers x_0.*

DÉFINITION 3. — *Soit $u : X \to H$ une application. On dit que $u_0 \in H$ est une valeur d'adhérence faible de $u(x)$ quand x tend vers x_0 s'il existe une suite (x_n) d'éléments de X, convergeant vers x_0, et telle que $u(x_n) \rightharpoonup_{n\to+\infty} u_0$.*

PROPOSITION 4. — *Soit $u : X \to H$ une application bornée au voisinage de x_0. L'ensemble des valeurs d'adhérence faibles de $u(x)$ quand x tend vers x_0 est non-vide. Si cet ensemble est un singleton $\{u_0\}$, on a : $u(x) \rightharpoonup_{x\to x_0} u_0$.*

1.3. Un problème général de continuité.

1.3.1. Énoncé du problème. — On rappelle que $\mathcal{C}$ désigne l'ensemble des parties convexes et fermées de H. Soient $u_1, \dots, u_n$ n

applications continues de X dans H. L'application Π étant ncelle de l'introduction, on considère les deux applications :

$$\begin{array}{cccccl} V & : & X & \longrightarrow & H^n \\ & & x & \longmapsto & \big(u_1(x),\ldots,u_n(x)\big) \end{array}$$

$$\begin{array}{cccccl} \Pi_V & : & X\times H & \longrightarrow & H \\ & & (x,y) & \longmapsto & \Pi\Big(\operatorname{Vect}\big(V(x)\big),y\Big). \end{array}$$

On cherche à savoir à quelle(s) condition(s) l'application Π_V est continue sur $X\times H$.

1.3.2. Un exemple de discontinuité. — La question posée dans le problème général est légitime car dans certains cas, l'application considérée n'est pas continue. Pour s'en convaincre, l'exemple le plus simple consiste à prendre $n=1$, $X=\mathbb{C}$, $H=\mathbb{C}$, $y_0=1$ et $u_1(x)=x$. Il est bien clair que $\Pi_V(x,y_0)=1$ si $x\neq 0$ et $\Pi_V(0,y_0)=0$.

1.3.3. Remarques générales sur le problème.

Proposition 5. — *Si l'application d'une variable*

$$\begin{array}{ccccl} \Pi_V(\cdot\,,y_0) & : & X & \longrightarrow & H \\ & & x & \longmapsto & P_{\operatorname{Vect}\big(u_1(x),\ldots,u_n(x)\big)}(y_0) \end{array}$$

est continue en x_0, alors, Π_V est continue en (x_0,y_0).

Preuve de la proposition 5. — Celle-ci est laissée au lecteur. □

Remarque 3. — D'après la proposition 5, nous pourrons nous contenter de vérifier la continuité d'une fonction à une variable pour montrer la continuité de Π_V.

Proposition 6. — *Soit $U : X\to\mathcal{L}(H)$ une application telle que :*

(i) *pour tout $x\in X$, $U(x)$ est un opérateur unitaire de H ;*

(ii) *pour tout $z\in H$, $x\mapsto U(x)(z)$ est continue en x_0.*

Si l'application Π_V est continue en (x_0,y_0) pour tout $y_0\in H$, alors l'application

$$\begin{array}{ccl} X\times H & \longrightarrow & H \\ (x,y) & \longmapsto & P_{\operatorname{Vect}\big(U(x)u_1(x),\ldots,U(x)u_n(x)\big)}(y) \end{array}$$

est continue en (x_0, y_0) *pour tout* $y_0 \in H$.

Preuve de la proposition 6.

▶ Commençons par montrer que de (i) et (ii) découlent

(iii) pour tout $z \in H$, $x \mapsto U(x)^{-1}(z)$ est continue en x_0 ; et

(iv) pour tout $z_0 \in H$, $(x, z) \mapsto U(x)(z)$ est continue en (x_0, z_0) .

L'assertion (iii) provient de la relation

$$\begin{aligned} U(x)^{-1}(z) - U(x_0)^{-1}(z) &= U(x)^{-1}\Big(z - U(x)U(x_0)^{-1}(z)\Big) \\ &= U(x)^{-1}\Big(U(x_0)(z') - U(x)(z')\Big) \end{aligned}$$

où $z' = U(x_0)^{-1}(z)$, qui entraîne :

$$\|U(x)^{-1}(z) - U(x_0)^{-1}(z)\| = \|U(x)(z') - U(x_0)(z')\|.$$

L'assertion (iv) provient de l'égalité

$$U(x)(z) - U(x_0)(z_0) = U(x)(z - z_0) + U(x)(z_0) - U(x_0)(z_0).$$

▶ Si $x \in X$, on peut écrire :

$$\begin{aligned} P_{\mathrm{Vect}\,\left(U(x)u_1(x),\dots,U(x)u_n(x)\right)}(y_0) &= P_{U(x)\,\mathrm{Vect}\,\left(u_1(x),\dots,u_n(x)\right)}(y_0) \\ &\qquad \text{car } U(x) \text{ est linéaire,} \\ &= U(x)P_{\mathrm{Vect}\,\left(u_1(x),\dots,u_n(x)\right)}\big(U(x)^{-1}(y_0)\big) \\ &\qquad \text{car } U(x) \text{ est unitaire.} \end{aligned}$$

Par hypothèse, si $z_0 = U(x_0)^{-1}(y_0)$, l'application Π_V est continue en (x_0, z_0), donc, la proposition découle donc de (iii) et (iv). □

1.3.4. Complément d'un sous-espace vectoriel..

Définition 4. — *Soient* E *un espace vectoriel,* E_1 *et* E_2 *deux sous-espaces de* E*. Nous dirons que* E_2 *est un complément de* E_1 *dans* E *si* $E = E_1 + E_2$*.*

Remarque 4. — E_2 est un supplémentaire de E_1 dans E si et seulement si E_2 est un complément de E_1 dans E et $E_1 \cap E_2 = \{0\}$.

Terminons ce paragraphe par une proposition dont nous omettons la démonstration.

PROPOSITION 7. — *Tout complément de E_1 dans E contient un supplémentaire de E_1 dans E.*

1.3.5. Un critère de continuité . — Nous allons maintenant énoncer un critère nécessaire et suffisant pour la continuité de Π_V, en termes de convergence faible vers 0 d'un certain sous-espace.

PROPOSITION 8. — *Soit $x_0 \in X$, soit $p \in [\![1,n]\!]$ le rang de $\big(u_1(x_0),\dots,u_n(x_0)\big)$. On suppose par exemple que la famille $\big(u_1(x_0),\dots, u_p(x_0)\big)$ est libre. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. Π_V *est continue au point (x_0,y_0), quel que soit $y_0 \in H$.*
2. *Il existe une application $x \mapsto W(x)$, définie dans un voisinage A de x_0, telle que :*
   (a) *Pour tout $x \in A$, $W(x)$ est un complément de* Vect $\big(u_1(x),\dots, u_p(x)\big)$ *dans* Vect $\big(u_1(x),\dots,u_n(x)\big)$.
   (b) $W(x) \rightharpoonup 0$ *lorsque x tend vers x_0.*

Preuve de la proposition 8.

▶ Commençons par la condition suffisante. Soit L un voisinage épointé de x_0 dans lequel la famille $\big(u_1(x),\dots,u_p(x)\big)$ est libre. Notons que l'existence de L découle de la continuité des u_i en x_0. D'après la proposition 7, $W(x)$ contient un supplémentaire $\widetilde{W}(x)$ de Vect $\big(u_1(x),\dots,u_p(x)\big)$ dans Vect $\big(u_1(x),\dots,u_n(x)\big)$. Considérons une base orthonormale $\{v_1(x),\dots,v_m(x)\}$ de $\widetilde{W}(x)$ pour $x \in L$. Notons que $m = m(x)$ où $0 \leqslant m \leqslant n-p$ et $m(x_0) = 0$. Dans toute la preuve, nous utiliserons les notations suivantes :

$$\begin{aligned}\mathcal{U}_1(x) &= \{u_1(x),\dots,u_p(x)\}\\ \mathcal{U}_2(x) &= \{v_1(x),\dots,v_m(x)\}\\ \mathcal{U}(x) &= \{u_1(x),\dots,u_p(x),v_1(x),\dots,v_m(x)\}\end{aligned}$$

Observons que Vect $\big(\mathcal{U}(x_0)\big)$ = Vect $\big(\mathcal{U}_1(x_0)\big)$. Quitte à partitionner L en au plus $n-p+1$ sous-ensembles, on peut supposer que m est constant. Par hypothèse, $W(x) \rightharpoonup 0$, donc $\widetilde{W}(x) \rightharpoonup 0$. Ainsi chacun des produits scalaires $\langle v_i(x), u_j(x)\rangle$ tend vers 0 lorsque x tend vers x_0. Si l'on désigne par $M(x)$ la matrice $\big(\langle u_j(x),u_k(x)\rangle\big)_{1\leqslant j,k\leqslant p}$, on a :

$$\mathrm{Gram}\,\big(\mathcal{U}(x)\big) = \begin{vmatrix} M(x_0) & 0_{p,n-p}\\ 0_{n-p,p} & I_{n-p}\end{vmatrix} + o(1) = \mathrm{Gram}\,\big(\mathcal{U}_1(x_0)\big) + o(1).$$

Par ailleurs, Gram $\big(\mathcal{U}(x)\ ;\mathcal{U}_1(x), v_1(x), \dots, v_{i-1}(x), y_0, v_{i+1}(x), \dots, v_m(x)\big)$ tend vers un déterminant triangulaire supérieur par blocs dont le bloc inférieur droit est non-inversible (car il contient une colonne nulle), donc vers 0.

Enfin, Gram $\big(\mathcal{U}(x)\ ; u_1(x), \dots, u_{j-1}(x), y_0, u_{j+1}(x), \dots, u_p(x), \mathcal{U}_2(x)\big)$ tend vers le déterminant

$$\mathrm{Gram}\big(\mathcal{U}_1(x_0)\ ; u_1(x_0), \dots, u_{j-1}(x_0), y_0, u_{j+1}(x_0), \dots, u_p(x_0)\big).$$

D'après la proposition 1, on peut affirmer que :

$$\begin{aligned}
&P_{\mathrm{Vect}\left(\mathcal{U}(x)\right)}(y_0)\\
&= \sum_{j=1}^{p} \frac{\overline{\mathrm{Gram}(\mathcal{U}(x); u_1(x), \dots, u_{j-1}(x), y_0, u_{j+1}(x), \dots, u_p(x), \mathcal{U}_2(x))}}{\mathrm{Gram}\left(\mathcal{U}(x)\right)} u_j(x)\\
&\quad + \sum_{k=1}^{m} \frac{\overline{\mathrm{Gram}(\mathcal{U}(x)\ ; \mathcal{U}_1(x), v_1(x), \dots, v_{k-1}(x), y_0, v_{k+1}(x), \dots, v_m(x))}}{\mathrm{Gram}\left(\mathcal{U}(x)\right)} v_k(x)\\
&= \sum_{j=1}^{p} \frac{\overline{\mathrm{Gram}(\mathcal{U}_1(x_0)\ ; u_1(x_0), \dots, u_{j-1}(x_0), y_0, u_{j+1}(x_0), \dots, u_p(x_0))}}{\mathrm{Gram}\left(\mathcal{U}_1(x_0)\right)} u_j(x_0) + o(1)\\
&= P_{\mathrm{Vect}\left(\mathcal{U}_1(x_0)\right)}(y_0) + o(1)\\
&= P_{\mathrm{Vect}\left(\mathcal{U}(x_0)\right)}(y_0) + o(1),
\end{aligned}$$

ce qui prouve la continuité de Π_V en (x_0, y_0) d'après la proposition 5.

► Montrons maintenant la réciproque.

L'application $x \mapsto \mathrm{Gram}(u_1(x), \dots, u_p(x))$ est continue et non-nulle en x_0, donc non-nulle dans un certain voisinage V_0 de x_0. La famille $\{u_1(x), \dots, u_p(x)\}$ est donc libre lorsque x varie dans V_0. On peut construire des fonctions continues $e_1, \dots, e_p$ de V_0 dans H telles que pour tout $x \in V_0$, la famille $\{e_1(x), \dots, e_p(x)\}$ soit orthonormale et aussi $\mathrm{Vect}\,(u_1(x), \dots, u_p(x)) = \mathrm{Vect}\,(e_1(x), \dots, e_p(x))$. La construction résulte du procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt qui est valable puisque dans V_0, la famille $\{u_1(x), \dots, u_p(x)\}$ est libre. La seule chose à montrer est la continuité des nouvelles fonctions construites, mais elle découle de la formule de récurrence :

$$e_1 = \frac{u_1}{\|u_1\|} \text{ et } e_j = \frac{v_j}{\|v_j\|} \text{ avec } v_j = u_j - \sum_{k=1}^{j-1} \langle u_j, e_k \rangle e_k.$$

On peut alors décomposer $P_{V(x)}(y_0)$ dans la somme directe orthogonale

$$V(x) = \mathrm{Vect}\,(e_1(x), \dots, e_p(x)) \oplus W(x)$$

pour obtenir :

$$\begin{aligned} P_{V(x)}(y_0) &= \sum_{j=1}^{p} \langle P_{V(x)}(y_0), e_j(x)\rangle e_j(x) + P_{W(x)}(y_0) \\ &= \sum_{j=1}^{p} \langle y_0, e_j(x)\rangle e_j(x) + P_{W(x)}(y_0). \end{aligned}$$

En remarquant que la somme mise en jeu est une fonction continue de la variable x, on peut déduire de la continuité de Π_V en (x_0, y_0) que pour tout $y_0 \in H$, l'application $\Pi_W(\cdot\,, y_0)$ est continue en x_0. On a donc :

$$\text{pour tout } y_0 \in H, \quad \lim_{x \mapsto x_0} P_{W(x)}(y_0) = P_{W(x_0)}(y_0).$$

L'espace $W(x_0)$ étant réduit à $\{0\}$, cette dernière assertion équivaut à :

$$\text{pour tout } y_0 \in H, \quad \lim_{x \mapsto x_0} P_{W(x)}(y_0) = 0.$$

Soit maintenant $w : X \to H$ une fonction bornée (disons par M) telle que $w(x) \in W(x)$ pour tout $x \in X$. On a pour tout $y_0 \in H$:

$$|\langle w(x), y_0\rangle| = \left|\langle w(x), P_{W(x)}(y_0)\rangle\right| \leqslant M \|P_{W(x)}(y_0)\| \quad \to_{x\to x_0} \ 0,$$

donc $W(x) \rightharpoonup 0$ quand x tend vers x_0. □

Il est alors facile de déduire de cette dernière proposition le cas particulier suivant :

Proposition 9. — *Soit $x_0 \in X$ tel que la famille $(u_1(x_0), \dots, u_n(x_0))$ soit une famille libre. Alors, la fonction Π_V est continue en (x_0, y_0), quel que soit $y_0 \in H$.*

2. Un théorème général de continuité.

Dans toute cette partie, X désignera un espace topologique, x_0 un point de X ayant un système fondamental dénombrable de voisinages. $(Y, \mathcal{T}, \mu)$ désignera un espace mesuré où μ est une mesure positive sur la tribu $\mathcal{T}$, et H l'espace de Hilbert $L^2(Y, \mu)$. D'autre part, si $E \in \mathcal{T}$, on identifiera $L^2(E, \mu)$ avec le sous-espace de H constitué des fonctions nulles en dehors de E. Par ailleurs, nous utiliserons la notation $\mathcal{M}$ pour désigner l'ensemble des fonctions mesurables à valeurs complexes définies sur Y. Rappelons que dans H et $\mathcal{M}$, on identifie les fonctions égales presque partout. Enfin, $\mathcal{V}(x_0)$ désignera l'ensemble des voisinages de x_0.

Après avoir rappelé quelques résultats de théorie de l'intégration, nous introduirons la notion de fonctions fines (relativement à μ) en x_0. Enfin, nous énoncerons et démontrerons un théorème général de continuité pour l'application Π_V définie au chapitre précédent.

2.1. Rappels de théorie de l'intégration.

Dans toute la suite, nous manipulerons des fonctions de Vect $\big(\chi_E,\ E \in \mathcal{T}, \mu(E) < +\infty\big)$. Rappelons que cet espace vectoriel est dense dans H.

DÉFINITION 5. — *Une famille $(E_i)_{i\in I}$ d'éléments de $\mathcal{T}$ sera dite complète (relativement à μ) si :*

1. *$\mu(E_i) < +\infty$ pour tout $i \in I$;*

2. *pour toute fonction $f \in \mathcal{M}$ telle que $f\chi_{E_i} \in L^1(Y,\mu)$ pour tout $i \in I$, on a :*

$$\int_{E_i} f d\mu = 0 \text{ pour tout } i \in I \quad \Longrightarrow \quad f = 0.$$

Exemple 1. — Si Y est un espace topologique localement compact et μ une mesure borélienne régulière (voir [12], paragraphe II-4) telle que $\mu(K) < +\infty$ pour tout compact de Y, alors on peut prendre pour (E_i) la famille des compacts de Y.

Remarque 5. — Si $(E_i)_{i\in I}$ est une famille complète d'éléments de $\mathcal{T}$, $\big(\chi_{E_i}\big)_{i\in I}$ forme un système total dans H : Vect $\big(\chi_{E_i},\ i \in I\big)$ est dense dans H.

DÉFINITION 6. — *Si $f \in \mathcal{M}$, nous appellerons support de la fonction f l'ensemble, défini à un ensemble de mesure nulle près par :*

$$\mathrm{Supp}(f) = \big\{y \in Y,\quad f(y) \neq 0\big\}.$$

Remarque 6. — Il est important de faire la différence entre le support qui vient d'être défini et le support de f défini usuellement lorsque Y est un espace topologique, à savoir l'adhérence dans Y de l'ensemble $\big\{y \in Y,\quad f(y) \neq 0\big\}$.

2.2. Fonctions fines (relativement à μ) en x_0.

Nous allons introduire dans ce paragraphe la classe des fonctions fines (relativement à la mesure μ) en un point, dont nous allons énoncer quelques propriétés.

Définition 7. — *Soit $u\ : X \to \mathcal{M}$ une application. On dit que u est fine (relativement à μ) en x_0 si pour tout $E \in \mathcal{T}$ tel que $\mu(E) < +\infty$, on a $\mu\big(E \cap \mathrm{Supp}(u(x))\big) \to 0$ lorsque x tend vers x_0.*

Remarque 7. — Dans la suite, lorsque le contexte indiquera clairement quelle est la mesure μ considérée, nous omettrons généralement la précision : (relativement à μ).

Remarque 8. — En particulier, u est fine en x_0 dès que la limite de $\mu(\mathrm{Supp}\,\big(u(x)\big))$ vaut 0 lorsque x tend vers x_0.

Remarque 9. — Dans cette définition, il n'est pas nécessaire de supposer que x_0 admet un système fondamental dénombrable de voisinages.

Proposition 10. — *L'ensemble des fonctions de X dans $\mathcal{M}$, fines en x_0, est un $\mathcal{M}^X$-module : c'est un espace vectoriel complexe stable par multiplication par une fonction complexe arbitraire de X dans $\mathcal{M}$.*

Les fonctions fines de X dans H ont une propriété importante de convergence faible :

Lemme 2. — *Soit $u\ : X \to H$ une fonction fine en x_0. On suppose qu'il existe un voisinage V de x_0 dans X tel que u est bornée dans V, c'est à dire qu'il existe $M > 0$ tel que $\|u(x)\| \leqslant M$ pour $x \in V$. Alors, $u(x) \rightharpoonup 0$ lorsque x tend vers x_0.*

Preuve du lemme 2. — Soit $E \in \mathcal{T}$ tel que $\mu(E) < +\infty$. Pour $x \in V$, on peut écrire :

$$\begin{aligned}|\langle u(x), \chi_E\rangle| &= \left|\int_Y u(x)(y)\overline{\chi_E(y)}d\mu(y)\right| = \left|\int_{\mathrm{Supp}\,u(x)} u(x)(y)\overline{\chi_E(y)}d\mu(y)\right| \\ &\leqslant M\sqrt{\int_{\mathrm{Supp}\,u(x)} |\chi_E(y)|^2\, d\mu(y)} \text{ d'après l'inégalité de Schwarz} \\ &= M\sqrt{\mu\big(E \cap \mathrm{Supp}(u(x))\big)}.\end{aligned}$$

Puisque u est fine, on en déduit que $\langle u(x), \chi_E \rangle$ tend vers 0 lorsque x tend vers x_0, d'où le résultat d'après la proposition 3. □

Notons qu'il est possible de généraliser le lemme 2 par l'énoncé suivant :

LEMME 3. — *Soient $u_1, u_2, \ldots, u_n : X \to H$ des fonctions fines en x_0. Alors :*

$$\mathrm{Vect}\big(u_1(x), \ldots, u_n(x)\big) \rightharpoonup 0 \quad \textit{lorsque } x \textit{ tend vers } x_0 \ .$$

PROPOSITION 11. — *Soit $u : X \to H$ une fonction fine en x_0 telle que $u(x) \rightharpoonup f$ lorsque x tend vers x_0. On a alors $f = 0$.*

Preuve de la proposition 11. — $u(x)$ converge faiblement dans H, donc est bornée au voisinage de x_0. D'après le lemme 2, on peut donc affirmer que $u(x) \rightharpoonup 0$ lorsque x tend vers x_0. Par unicité de la limite faible, on obtient $f = 0$. □

2.3. Le lemme fondamental.

LEMME 4. — *Soit $u : X \to H$ une application de la forme*

$$(1) \qquad u(x) : y \longmapsto c_1(x)\psi_1(y) + \cdots + c_n(x)\psi_n(y) + f(x)(y)$$

avec $c_i(x) \in \mathbb{C}$ pour $1 \leqslant i \leqslant n$, $x \in X$, et :

1. *chacune des fonctions ψ_i appartient à $\mathcal{M}$;*
2. $\mathrm{Vect}(\psi_1, \ldots, \psi_n) \cap H = \{0\}$*;*
3. *il existe une famille complète $(E_\alpha)_{\alpha \in A}$ d'éléments de $\mathcal{T}$ telle que $\chi_{E_\alpha}\psi_i \in H$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$ et pour tout $\alpha \in A$;*
4. *$f : X \to \mathcal{M}$ est fine en x_0;*
5. *$\|u(x)\|$ est borné pour x variant dans X.*

Alors, $u(x) \rightharpoonup 0$ lorsque x tend vers x_0.

Remarque 10. — Il est important de noter qu'en général, aucune des fonctions $\psi_1, \ldots, \psi_n, f(x)$ n'appartient à H, d'après 2. C'est leur combinaison linéaire $u(x)$ qui est supposée appartenir à H.

Preuve du lemme 4. — Notons tout d'abord que, sans perte de généralité, on peut supposer que la famille $\{\psi_1, \ldots, \psi_n\}$ est libre dans $\mathcal{M}$. D'autre part :

$$\forall x \in X, \forall \alpha \in A, f(x)\chi_{E_\alpha} = u(x)\chi_{E_\alpha} - \sum_{i=1}^{n} c_i(x)\psi_i\chi_{E_\alpha} \in H. \tag{2}$$

▶ Montrons tout d'abord que chacune des fonctions $c_i(x)$ est bornée dans un même voisinage V de x_0. Dans le cas contraire, il existe une fonction $c_i(x)$ qui n'est bornée dans aucun voisinage de x_0. Introduisons $m(x) = \max\big(|c_1(x)|, \ldots, |c_n(x)|\big)$. Ainsi : $\forall M > 0$, $\forall V \in \mathcal{V}(x_0)$, $\exists x \in V$, $|m(x)| > M$. Il existe donc une suite de points (x_p) convergente vers x_0 et telle que pour tout $p \in \mathbb{N}$, $|m(x_p)| > p$. Posons $w(x_p) = \frac{u(x_p)}{m(x_p)}$. Quitte à extraire une sous-suite de (x_p), on peut supposer que chacune des suites $\big(\frac{c_i(x_p)}{m(x_p)}\big)$ est convergente vers β_i et qu'il existe un indice i_0 tel que $m(x_p) = |c_{i_0}(x_p)|$ pour tout p. D'après l'hypothèse 5, la suite $\big(w(x_p)\big)$ tend vers 0 dans H. En particulier, si $\alpha \in A$:

$$\int_{E_\alpha} |w(x_p)|^2 d\mu = \int_{E_\alpha} \Big| \sum_{i=1}^{n} \frac{c_i(x_p)}{m(x_p)}\psi_i + \frac{1}{m(x_p)} f(x_p)\Big|^2 d\mu \longrightarrow 0.$$

Cela entraîne que :

$$\frac{1}{m(x_p)} f(x_p).\chi_{E_\alpha} \longrightarrow -\sum_{i=1}^{n} \beta_i\psi_i\chi_{E_\alpha} \text{ dans } H,$$

Comme d'après l'hypothèse 4, $\frac{1}{m(x_p)} f(x_p).\chi_{E_\alpha}$ est une suite de fonctions de H fine en $p = +\infty$, on obtient d'après la proposition 11 : $\sum_{i=1}^{n} \beta_i\psi_i\chi_{E_\alpha} = 0$ puis $\sum_{i=1}^{n} \beta_i\psi_i = 0$ dans $\mathcal{M}$ d'après l'hypothèse 3. Puisque la famille $\{\psi_1, \ldots, \psi_n\}$ est libre, chacun des β_i est nul, ce qui est absurde puisque $|\beta_{i_0}| = 1$.

▶ Considérons maintenant $\varphi \in H$, une valeur d'adhérence faible de $u(x)$ lorsque x tend vers x_0. Il existe une suite (x_p) tendant vers x_0 telle que $u(x_p) \rightharpoonup \varphi$. Quitte à en extraire une sous-suite, on peut supposer que chacune des suites $\big(c(x_i)\big)$ converge vers une limite $c_i \in \mathbb{C}$. Fixons alors $\alpha \in A$. On a : $\langle u(x_p), \chi_{E_\alpha}\rangle \to \langle \varphi, \chi_{E_\alpha}\rangle$, ce qui se réécrit encore :

$$\sum_{i=1}^{n} c_i(x_p) \int_{E_\alpha} \psi_i d\mu + \int_{E_\alpha} f(x_p) d\mu \longrightarrow \int_{E_\alpha} \varphi d\mu. \tag{3}$$

Introduisons la suite $\big(v(x_p)\big)$ définie par : $v(x_p) = f(x_p).\chi_{E_\alpha} \in H$. On déduit de (2) :

$$\|v(x_p)\| \leqslant \|u(x_p)\| + \sum_{i=1}^{n} \|c_i(x_p)\psi_i\chi_{E_\alpha}\|.$$

La suite $\big(v(x_p)\big)$ est donc bornée. D'autre part, comme la suite $p \mapsto v(x_p)$ est fine en $p = +\infty$ (puisque $p \mapsto f(x_p)$ l'est), on peut affirmer d'après le lemme 2 que $v(x_p) \rightharpoonup 0$, ce qui entraîne :

$$\int_{E_\alpha} f(x_p) d\mu \longrightarrow 0.$$

D'après (3), on en déduit que :

$$\sum_{i=1}^{n} c_i(x_p) \int_{E_\alpha} \psi_i d\mu \longrightarrow \int_{E_\alpha} \varphi d\mu$$

d'où, pour tout $\alpha \in A$:

$$\sum_{i=1}^{n} c_i \int_{E_\alpha} \psi_i d\mu = \int_{E_\alpha} \varphi d\mu.$$

Cela entraîne d'après l'hypothèse 3 que $\sum_{i=1}^{n} c_i \psi_i = \varphi$ presque partout. Puisque $\varphi \in H$, l'hypothèse 2 montre donc que $\varphi = 0$. La preuve est donc terminée grâce à la proposition 4. □

PROPOSITION 12. — *Soient $\psi_1, \ldots, \psi_n$ des éléments de $\mathcal{M}$ vérifiant les conditions 2 et 3 du lemme 4, et $f_1, \ldots, f_p$ des fonctions de X dans $\mathcal{M}$ fines en x_0. On suppose que $V(x)$ est un sous-espace vectoriel de* $\operatorname{Vect}\big(\psi_1, \ldots, \psi_n, f_1(x), \ldots, f_p(x)\big) \cap H$ *pour tout $x \in X$. Alors :*

$$V(x) \rightharpoonup_{x \to x_0} 0.$$

Preuve de la proposition 12. — Soit $v : X \to H$ une fonction bornée telle que $v(x) \in V(x)$ pour tout $x \in X$. D'après la proposition 10, on peut écrire pour tout $x \in X$:

$$v(x) = c_1(x)\psi_1 + \cdots + c_p(x)\psi_n + f(x)$$

où f est une fonction fine en x_0. Le lemme 4 nous permet alors d'affirmer que $v(x) \rightharpoonup_{x \to x_0} 0$, ce qui termine la démonstration. □

2.4. Le théorème principal.

On considère dans ce paragraphe n fonctions $u_i : X \to H$ continues en x_0. Nous allons reprendre le problème énoncé dans le paragraphe 1.3.1. Si les fonctions u_i sont de la forme (1), nous allons énoncer et démontrer un théorème permettant de conclure quant à la continuité de Π_V.

Théorème 2. — *Soit $p \in [\![1,n]\!]$ le rang de $\big(u_1(x_0),\dots,u_n(x_0)\big)$. On suppose par exemple que la famille $\big(u_1(x_0),\dots,u_p(x_0)\big)$ est libre. Soient $\psi_1,\dots\psi_m$ des fonctions de $\mathcal{M}$ vérifiant les conditions 2 et 3 du lemme 4, et $f_1,\dots,f_q$ des fonctions de X dans $\mathcal{M}$ fines en x_0. On suppose que pour tout $x\in X$, il existe un complément $W(x)$ de* $\mathrm{Vect}\,\big(u_1(x),\dots,u_p(x)\big)$ *dans* $\mathrm{Vect}\,\big(u_1(x),\dots,u_n(x)\big)$*, qui est inclus dans* $\mathrm{Vect}\,\big(\psi_1,\dots,\psi_m,f_1(x),\dots,f_q(x)\big)$*. Alors, Π_V est continue en (x_0,y_0), pour tout $y_0\in H$.*

Preuve du théorème 2. — Comme on a aussi $W(x)\subset H$, la proposition 12 montre que $W(x)\rightharpoonup 0$, ce qui nous prouve le résultat attendu d'après la proposition 8. □

3. Le cas des dilatées d'une fonction.

Dans cette partie, nous allons appliquer et approfondir les résultats obtenus précédemment lorsque $Y=G$ est un groupe abélien localement compact et σ-compact, que nous noterons multiplicativement, dont l'élément neutre, noté e, admet un système fondamental dénombrable (V_n) de voisinages. Cette dernière condition équivaut à dire que la topologie de G est définie par une distance d invariante, c'est à dire telle que $d(ac,bc)=d(a,b)$ pour tout $(a,b,c)\in G^3$ (voir le théorème 8.3 de [9]).

Nous continuerons à utiliser les notations $H=L^2(G)$, $\mathcal{M}$ pour désigner l'ensemble des fonctions mesurables de G dans $\mathbb{C}$, et $m=dx$ pour la mesure de Haar du groupe G. Rappelons que m est régulière (voir [9], paragraphes 11.33, 11.34 et 15.8).

Nous utiliserons le groupe dual de G, noté $\widehat{G}$, égal à l'ensemble des caractères continus de G dans l'ensemble des nombres complexes de module 1. Rappelons que le groupe dual d'un groupe discret est compact et inversement.

La transformée de Fourier d'une application $f\in L^1(G)$ sera notée $\widehat{f}$. Rappelons que $\widehat{f}$ est continue sur $\widehat{G}$ et que

$$\begin{array}{cccc}\widehat{f} & : \widehat{G} & \longrightarrow & \mathbb{C}\\ & \chi & \longmapsto & \int_G f(x)\overline{\chi}(x)dx.\end{array}$$

Cette transformation peut s'étendre à H par la transformation de Plancherel.

Nous étudierons ici le problème du paragraphe 1.3.1 lorsque chacune des fonctions u_i est de la forme $u_i(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = f_{\alpha_i}$, où f_{α_i} est une dilatée (que nous définirons ci-après). Plus précisément, pour $f \in H$, on note :

$$\begin{array}{cccc} F & : & G^n & \longrightarrow & H^n \\ & & (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) & \longmapsto & (f_{\alpha_1}, \ldots, f_{\alpha_n}), \end{array}$$

et on s'intéresse à la continuité de l'application

$$\begin{array}{cccc} \Pi_F & : & G^n \times H & \longrightarrow & H \\ & & \big((\alpha_1, \ldots, \alpha_n), y\big) & \longmapsto & P_{\mathrm{Vect}(f_{\alpha_1}, \ldots, f_{\alpha_n})}(y). \end{array}$$

Introduisons immédiatement la notation $V(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = \mathrm{Vect}(f_{\alpha_1}, \ldots, f_{\alpha_n})$ que nous serons amenés à réutiliser.

Commençons par définir de manière précise la notion de fonction dilatée.

3.1. Dilatations et opérateurs invariants sur H.

3.1.1. Définitions.

Définition 8. — *Soient $f \in \mathcal{M}$ et $\alpha \in G$. Nous appelerons dilatée de f par α la fonction f_α définie par : $f_\alpha(x) = f\left(x\alpha^{-1}\right)$ pour $x \in G$.*

Définition 9. — *Pour $\alpha \in G$, on définit l'opérateur $K_\alpha : f \in H \mapsto f_\alpha \in H$.*

Définition 10. — *Nous dirons qu'un opérateur $U : H \to H$ est invariant si U commute avec tous les opérateurs K_α.*

3.1.2. Premières propriétés des dilatées.

Proposition 13. — *Pour $\alpha \in G$ et $f \in H$, on a : $\|f_\alpha\| = \|f\|$.*

Proposition 14. — *L'application $\alpha \mapsto f_\alpha$ de G dans H est continue.*

Preuve de la proposition 14. — Voir [13], paragraphe 1.1.5. □

Les démonstrations des propositions suivantes sont laissées au lecteur.

Proposition 15. — *Pour $\alpha \in G$ et $f \in L^1(G)$, on a :* $\widehat{f_\alpha}(\chi) = \overline{\chi}(\alpha)\widehat{f}(\chi)$ *pour tout* $\chi \in \widehat{G}$.

Proposition 16. — *Soient $f \in \mathcal{M}$ et $\alpha \in G$. Alors :* $\operatorname{Supp}(f_\alpha) = \alpha \operatorname{Supp} f$ *et* $m\big(\operatorname{Supp}(f_\alpha)\big) = m\big(\operatorname{Supp} f\big)$.

Proposition 17. — *Soit X un espace topologique, $x_0 \in X$ et $u : X \to \mathcal{M}$ une fonction. Pour $\alpha \in G$ et $x \in X$, on pose $u_\alpha(x) = u(x)_\alpha$. Alors, si u est fine en x_0, u_α l'est aussi.*

3.1.3. Premières propriétés des opérateurs K_α.

Proposition 18. — *L'ensemble $\{K_\alpha, \alpha \in G\}$ est un groupe commutatif d'opérateurs unitaires de H.*

Proposition 19. — *Soient $\alpha \in G$, $(a_1, \dots, a_n) \in G^n$ et $y_0 \in H$. Alors :*

$$K_\alpha\big(P_{V(a_1,\dots,a_n)}(y_0)\big) = P_{V(\alpha a_1,\dots,\alpha a_n)}(K_\alpha(y_0)).$$

3.2. Fonctions admissibles.

3.2.1. Définition. — Pour certaines fonctions f particulières, il est facile de montrer que Π_F est continue sur G^n. Cela justifie la définition et les propriétés suivantes :

Définition 11. — *L'application $f \in H$ est dite admissible au point $x = (x_1, \dots, x_n) \in G^n$ si, pour tout $y \in H$, l'application Π_F est continue en (x, y). Nous dirons alors que x est un point d'admissibilité de f.*

Définition 12. — *$f \in H$ est dite admissible si pour tout $n \geqslant 1$, elle est admissible en tout point de G^n.*

Le but de ce chapitre est de décrire une classe générale de fonctions admissibles.

3.2.2. Premières propriétés.

PROPOSITION 20. — *Soit $f \in H$. Pour toute permutation σ de $\{1, \ldots, n\}$, on a l'équivalence :*

$$(x_1, \ldots, x_n) \text{ est un point d'admissibilité de } f \iff (x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(n)}) \text{ est un point d'admissibilité de } f.$$

PROPOSITION 21. — *Soient $\alpha \in G$, $f \in H$ et $(x_1, \ldots, x_n) \in G^n$. On a l'équivalence :*

$$f \text{ est admissible en } (x_1, \ldots, x_n) \iff f \text{ est admissible en } (\alpha x_1, \ldots, \alpha x_n).$$

PROPOSITION 22. — *L'ensemble des fonctions admissibles est stable par la composition par tout opérateur U unitaire et invariant.*

3.3. Les exponentielles-polynômes de G.

DÉFINITION 13. — *On appelle exponentielle-polynôme de G toute fonction mesurable $f : G \to \mathbb{C}$ telle que :*

$$\dim\big(\mathrm{Vect}(f_\alpha, \alpha \in G)\big) < +\infty.$$

On désigne par $\mathcal{P}$ l'ensemble des exponentielles-polynômes de G.

PROPOSITION 23. — *$\mathcal{P}$ est une $\mathbb{C}$-algèbre commutative.*

PROPOSITION 24. — *L'algèbre $\mathcal{A}$ engendrée par les caractères multiplicatifs et additifs est égale à $\mathcal{P}$.*

Peuve de la proposition 24. — Voir [8]. □

Exemple 2.

1. Si $G = (\mathbb{R}, +)$, les exponentielles-polynômes sont les fonctions de la forme

$$x \longmapsto \sum_{i=1}^{n} c_i e^{\alpha_i x} x^{k_i} \text{avec } c_i \in \mathbb{C},\ \alpha_i \in \mathbb{C} \text{ et } k_i \in \mathbb{N}\ .$$

2. Si $G = (]0, +\infty[, \times)$, les exponentielles-polynômes sont les fonctions de la forme

$$x \longmapsto \sum_{i=1}^{n} c_i x^{\alpha_i} (\log x)^{k_i} \text{avec } c_i \in \mathbb{C},\ \alpha_i \in \mathbb{C} \text{ et } k_i \in \mathbb{N}\ .$$

Proposition 25. — *Si G n'est pas compact, $\mathcal{P} \cap H = \{0\}$.*

Preuve de la proposition 25. — Par contraposition, montrons que G est compact s'il possède une exponentielle-polynôme $f \neq 0$ de carré intégrable. Soit V l'espace vectoriel de dimension finie $\mathrm{Vect}\big(f_\alpha, \alpha \in G\big)$. Les opérateurs $\big(K_\alpha\big)_{|V}$, $\alpha \in G$, commutent entre eux, et admettent donc un vecteur propre commun $g \neq 0$. On a ainsi pour tout $\alpha \in G$: $g_\alpha = c(\alpha) g$ pour une certaine constante $c(\alpha)$. En posant $h = |g|^2$, élément non nul de $L^1(G)$, on en déduit que $h_\alpha = |c(\alpha)|^2 h$, $\alpha \in G$. Par transformation de Fourier, on a pour tout $\chi \in \widehat{G}$, et tout $\alpha \in G$:

$$\overline{\chi}(\alpha) \cdot \hat{h}(\chi) = |c(\alpha)|^2 \cdot \hat{h}(\chi).$$

Soit E l'ensemble, supposé non vide, des $\chi \in \widehat{G}$ tels que $\widehat{h}(\chi) \neq 0$. On a pour tout $\chi \in E$, et tout $\alpha \in G$:

$$\chi(\alpha) = |c(\alpha)|^2,$$

ce qui montre que E est un singleton $\{\chi_0\}$. La continuité de $\widehat{h}$ sur $\widehat{G}$ entraîne donc que χ_0 est isolé dans $\widehat{G}$. Par conséquent, tout point de $\widehat{G}$ est isolé; c'est un groupe discret et son dual G est donc compact. □

3.4. L'ensemble $\mathcal{E}$.

Définition 14. — *On désigne par $\mathcal{E}$ l'ensemble des fonctions $f : G \to \mathbb{C}$ mesurables telles que pour tout $x_0 \in G$, l'application $x \mapsto f_x - f_{x_0}$ est fine (relativement à la mesure de Haar) en x_0.*

Proposition 27. — *L'ensemble $\mathcal{E}$ est une $\mathbb{C}$-algèbre invariante par dilatation.*

Proposition 28. — *Si S est un sous-ensemble mesurable de G de mesure finie, alors $\chi_S \in \mathcal{E}$.*

Preuve de la proposition 28. — Soit $x \in G$. On a, pour tout $t \in G$:

$$K_x(\chi_S)(t) - K_{x_0}(\chi_S)(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \in xS \cap x_0S \\ 1 & \text{si } t \in xS \setminus x_0S \\ -1 & \text{si } t \in x_0S \setminus xS \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} .$$

Ainsi :

$$\operatorname{Supp}\big(K_x(\chi_S) - K_{x_0}(\chi_S)\big) = xS \triangle x_0S.$$

On a donc :

$$\begin{aligned} m\Big(\operatorname{Supp}\big(K_x(\chi_S) - K_{x_0}(\chi_S)\big)\Big) &= m\big(xS \triangle x_0S\big) \\ &= \|K_x\chi_S - K_{x_0}\chi_S\| \text{ dans } H, \end{aligned}$$

et cette quantité tend vers 0 lorsque x tend vers x_0 d'après la proposition 14. Cela montre bien que $\chi_S \in \mathcal{E}$. □

PROPOSITION 28. — *Soit $f \in \mathcal{M}$. On a l'équivalence :*

$$f \in \mathcal{E} \iff \textit{pour tout } E \in \mathcal{T} \textit{ tel que } m(E) < +\infty, \textit{ on a : } f\chi_E \in \mathcal{E} \ .$$

Preuve de la proposition 28. — La condition nécessaire résulte des propositions 26 et 27. Supposons réciproquement que $f\chi_E \in \mathcal{E}$ pour tout $E \in \mathcal{T}$ tel que $m(E) < +\infty$. Soit $E \in \mathcal{T}$ tel que $m(E) < +\infty$. On a :

$$E \cap \operatorname{Supp}\big(f_x - f_{x_0}\big) = E \cap \operatorname{Supp}\big(f_x\chi_E - f_{x_0}\chi_E\big).$$

Or :

$$\begin{aligned} f_x\chi_E - f_{x_0}\chi_E &= \big(f_{x_0}\chi_E\big)_{xx_0^{-1}} - f_{x_0}\chi_E + f_x\big(\chi_E - \chi_{xx_0^{-1}E}\big) \\ &= \big(f\chi_{x_0^{-1}E}\big)_x - \big(f\chi_{x_0^{-1}E}\big)_{x_0} + f_x\big(\chi_E - \chi_{xx_0^{-1}E}\big). \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} m\big(E \cap \operatorname{Supp}(f_x - f_{x_0})\big) \leqslant{}& m\big(E \cap \operatorname{Supp}((f\chi_{x_0^{-1}E})_x - (f\chi_{x_0^{-1}E})_{x_0})\big) \\ &+ m\big(E \cap \operatorname{Supp}(\chi_E - \chi_{xx_0^{-1}E})\big). \end{aligned}$$

Par hypothèse, $f\chi_{x_0^{-1}E} \in \mathcal{E}$ puisque $x_0^{-1}E$ est de mesure finie. D'autre part, $\chi_E \in \mathcal{E}$ d'après la proposition 27. Par suite, $m\Big(E \cap \operatorname{Supp}\big(f_x - f_{x_0}\big)\Big) \to 0$ lorsque x tend vers x_0, ce qui achève la preuve. □

PROPOSITION 29. — *Soit $f \in \mathcal{M}$. On suppose que pour tout $\epsilon > 0$, f peut s'écrire $f' + f''$ où la fonction $f' \in \mathcal{E}$ et $m\big(\operatorname{Supp} f''\big) < \epsilon$. Alors, la fonction f appartient à $\mathcal{E}$.*

Preuve de la proposition 29. — Fixons $\epsilon > 0$. On a : $f_x - f_{x_0} = f'_x - f'_{x_0} + f''_x - f''_{x_0}$. Ainsi :

$$\begin{aligned}\operatorname{Supp}(f_x - f_{x_0}) &\subset \operatorname{Supp}(f'_x - f'_{x_0}) \cup \operatorname{Supp}(f''_x) \cup \operatorname{Supp}(f''_{x_0}) \\ &= \operatorname{Supp}\left(f'_x - f'_{x_0}\right) \cup x \operatorname{Supp}(f'') \cup x_0 \operatorname{Supp}(f'').\end{aligned}$$

Par conséquent, on peut écrire pour tout $E \in \mathcal{T}$ tel que $m(E) < +\infty$:

$$m\big(E \cap \operatorname{Supp}(f_x - f_{x_0})\big) \leqslant m\big(E \cap \operatorname{Supp}(f'_x - f'_{x_0})\big) + 2m\big(\operatorname{Supp}(f'')\big)$$

donc, puisque $f' \in \mathcal{E}$, on peut en déduire que :

$$\overline{\lim_{x \to x_0}}\, m\big(E \cap \operatorname{Supp}(f_x - f_{x_0})\big) \leqslant 2\epsilon.$$

Comme ϵ et E sont arbitraires, on en déduit que $f \in \mathcal{E}$. □

PROPOSITION 30. — *Soient $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de complexes et $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de sous-ensembles mesurables de G telle que*

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} m\big(S_n\big) < +\infty,$$

alors, si elle est définie, la fonction

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} c_n \chi_{S_n} \tag{4}$$

appartient à $\mathcal{E}$.

Preuve de la proposition 30. — On peut écrire, pour tout $N \in \mathbb{N}$:

$$f = \sum_{n\in\mathbb{N}} c_n \chi_{S_n} = f_N + R_N \text{ où } f_N = \sum_{0\leqslant n\leqslant N} c_n \chi_{S_n} R_N = \sum_{n\geqslant N+1} c_n \chi_{S_n}.$$

La somme définissant f_N ne porte que sur un nombre fini d'entiers, donc la fonction f_N est une combinaison linéaire finie d'éléments de $\mathcal{E}$ (d'après la proposition 27), donc $f_N \in \mathcal{E}$. D'autre part, on a :

$$\operatorname{Supp}(R_N) \subset \bigcup_{n\geqslant N+1} S_n$$

donc,

$$m\big(\operatorname{Supp}(R_N)\big) \leqslant \sum_{n\geqslant N+1} m(S_n) \longrightarrow_{N\to+\infty} 0.$$

La proposition 29 permet alors de conclure. □

PROPOSITION 31. — *Soient $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de complexes et $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathcal{T}$ deux à deux disjoints. Alors, la fonction*

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} c_n \chi_{S_n} \tag{5}$$

appartient à $\mathcal{E}$.

Preuve de la proposition 31. — Soit $E \in \mathcal{T}$ tel que $m(E) < +\infty$. On a

$$\chi_E \cdot \sum_{n\in\mathbb{N}} c_n \chi_{S_n} = \sum_{n\in\mathbb{N}} c_n \chi_{S_n \cap E}.$$

Comme les S_n sont deux à deux disjoints, on a l'inégalité

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} m\big(S_n \cap E\big) \leqslant m(E) < +\infty,$$

ce qui permet d'écrire que $\chi_E \cdot \sum_{n\in\mathbb{N}} c_n \chi_{S_n} \in \mathcal{E}$ en appliquant la proposition 30. La proposition 28 nous permet alors de conclure. □

3.5. Une classe de fonctions admissibles.

Dans ce paragraphe, nous allons décrire une classe de fonctions admissibles.

THÉORÈME 3. — *Si $f \in L^2(G)$ peut s'écrire sous la forme $f' + f''$ où f' est une exponentielle-polynôme (nulle si G est compact) et $f'' \in \mathcal{E}$, alors f est admissible.*

Preuve du théorème 3. — Soit $\big(\psi_1, \dots, \psi_m\big)$ une base de l'espace $\mathrm{Vect}\,\big(f'_\alpha, \alpha \in G\big)$, de dimension finie par hypothèse. Observons que les fonctions ψ_i vérifient les conditions 2 et 3 du lemme 4 en prenant pour (E_α) la famille des compacts de G (la condition 2 est vérifiée d'après la proposition 25). Soient $\mathbf{x_0} = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in G^n$ et p le rang de $(f_{\alpha_1}, \dots, f_{\alpha_n})$ dans H. Soient $1 \leqslant i_1 \leqslant \dots \leqslant i_p \leqslant n$ tels que la famille $(f_{\alpha_{i_k}})_{1\leqslant k\leqslant p}$ soit libre. Pour tout entier $j \notin \{i_1, \dots, i_p\}$, écrivons :

$$f_{\alpha_j} = \sum_{k=1}^{p} \lambda_k^j f_{\alpha_{i_k}}.$$

Considérons enfin un n-uplet $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ tendant vers le n-uplet $\mathbf{x_0}$. On a :

$$\mathrm{Vect}\,\big(f_{x_i}, 1 \leqslant i \leqslant n\big) = \mathrm{Vect}\,\big(f_{x_{i_k}}, 1 \leqslant k \leqslant p\big) + \mathrm{Vect}\,\Big(f_{x_j} - \sum_{k=1}^{p} \lambda_k^j f_{x_{i_k}}, j \notin \{i_1, \dots, i_p\}\Big).$$

Pour tout $j \notin \{i_1, \dots, i_p\}$:

$$\begin{aligned} f_{x_j} - \sum_{k=1}^{p} \lambda_k^j f_{x_{i_k}} &= f_{x_j} - \sum_{k=1}^{p} \lambda_k^j f_{x_{i_k}} - \Big(f_{\alpha_j} - \sum_{k=1}^{p} \lambda_k^j f_{\alpha_{i_k}} \Big) \\ &= f_{x_j} - f_{\alpha_j} - \sum_{k=1}^{p} \lambda_k^j \big(f_{x_{i_k}} - f_{\alpha_{i_k}} \big) \\ &= \underbrace{f'_{x_j} - f'_{\alpha_j} - \sum_{k=1}^{p} \lambda_k^j \big(f'_{x_{i_k}} - f'_{\alpha_{i_k}} \big)}_{\in \mathrm{Vect}\,(\psi_1, \dots, \psi_m)} \\ &\qquad\qquad + \underbrace{f''_{x_j} - f''_{\alpha_j} - \sum_{k=1}^{p} \lambda_k^j \big(f''_{x_{i_k}} - f''_{\alpha_{i_k}} \big)}_{\text{fine en } x_0}. \end{aligned}$$

On peut donc conclure d'après le théorème 2 que f est admissible. □

3.6. Une classe de fonctions non admissibles.

Dans ce paragraphe, nous allons donner des exemples de fonctions non admissibles dans le cas où $G = \mathbb{R}$. Les dilatées d'une fonction g sont alors les fonctions $x \mapsto g(x - \alpha)$.

Proposition 32. — *Soit $g \in H$. On suppose que l'application*

$$\begin{array}{cccc} \Psi : & \mathbb{R} & \longrightarrow & H \\ & \alpha & \longmapsto & g_\alpha \end{array}$$

est dérivable en $\alpha_0 \in \mathbb{R}$. Alors :

(i) *Ψ est dérivable sur $\mathbb{R}$;*

(ii) *$\Psi'(\alpha) = \Psi'(0)_\alpha$ pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$;*

(iii) *si $g \neq 0$, $\Psi(\alpha)$ et $\Psi'(\alpha)$ sont linéairement indépendants pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$;*

(iv) *si $g \neq 0$, alors, pour tout réel α_1, g n'est pas admissible au point (α_1, α_1).*

Remarque 11. — Un cas simple où Ψ est dérivable est celui où g est de classe C^1 et à support compact dans $\mathbb{R}$.

Preuve de la proposition 32.

▶ Commençons par prouver (i) : fixons pour cela $\alpha_1 = \alpha_0 + k$ avec $k \neq 0$. Pour $\alpha \neq \alpha_1$, on peut écrire en posant $\beta = \alpha - k$:

$$\frac{\Psi(\alpha)-\Psi(\alpha_1)}{\alpha-\alpha_1} = \frac{K_\alpha g - K_{\alpha_1} g}{\alpha-\alpha_1} = K_k\left(\frac{g_\beta - g_{\alpha_0}}{\beta-\alpha_0}\right) = K_k\left(\frac{\Psi(\beta)-\Psi(\alpha_0)}{\beta-\alpha_0}\right).$$

Par continuité de K_k et puisque Ψ est dérivable en α_0, on obtient donc la dérivabilité de Ψ en α_1, et la relation :

$$\Psi'(\alpha_1) = K_{\alpha_1-\alpha_0}\Psi'(\alpha_0). \tag{6}$$

▶ D'après (i), l'application Ψ est dérivable sur $\mathbb{R}$, donc en particulier au point 0, qui peut tenir le rôle de α_0 dans la relation (6). L'opérateur K_k est alors $g \mapsto g_{\alpha_1}$ et on obtient pour tout $\alpha_1 \in \mathbb{R}$ la relation : $\Psi'(\alpha_1) = K_{\alpha_1}\Psi'(0)$, ce qui donne (ii).

▶ Prouvons maintenant l'assertion (iii). Soit $\mathcal{F}$ la transformation de Fourier sur H, et posons $\Phi = \mathcal{F} \circ \Psi \ : \mathbb{R} \to L^2(\widehat{G}) = L^2(\mathbb{R})$. On a donc :

$$\mathcal{F}g(t) = \int_{\mathbb{R}} g(x)e^{-itx}dx$$

et

$$\Phi(\alpha) \ : t \longmapsto e^{-it\alpha}\mathcal{F}g(t)$$

Φ est dérivable sur $\mathbb{R}$ car Ψ l'est et $\mathcal{F}$ est linéaire et continue. Soit $\alpha_0 \in \mathbb{R}$: il existe $z \in L^2(\mathbb{R})$ tel que

$$\left\|\frac{\Phi(\alpha)-\Phi(\alpha_0)}{\alpha-\alpha_0} - z\right\| \longrightarrow_{\alpha\to\alpha_0} 0.$$

On peut donc trouver une suite (α_n) convergente vers α_0 telle que $\left(\frac{\Phi(\alpha_n)-\Phi(\alpha_0)}{\alpha_n-\alpha_0}\right)$ converge ponctuellement vers z presque partout. Or, cette dernière suite converge aussi ponctuellement presque partout vers l'application $t \mapsto (-it)e^{-it\alpha_0}\widehat{g}(t)$. Par suite, on a l'égalité :

$$\Phi'(\alpha_0) = \left[t \mapsto (-it)e^{-it\alpha_0}\widehat{g}(t)\right].$$

Supposons maintenant $\Psi(\alpha_0)$ et $\Psi'(\alpha_0)$ liés. Alors, $\Phi(\alpha_0)$ et $\Phi'(\alpha_0)$ sont nécessairement liés, et il existe donc un complexe μ tel que l'application $t \mapsto e^{-it\alpha_0}(1+\mu it)\widehat{g}(t)$ est nulle. La fonction $\widehat{g}$ est donc nulle, ce qui entraîne la nullité de g. Le résultat (iii) est donc prouvé.

▶ Reste enfin à montrer (iv). Soient $\alpha_1 \in \mathbb{R}$ et $y_0 \in H$. Pour $\beta \neq \alpha_1$, on a :

$$\mathrm{Vect}(g_{\alpha_1}, g_\beta) = \mathrm{Vect}\Big(g_{\alpha_1}, \frac{g_{\alpha_1}-g_\beta}{\alpha_1-\beta}\Big).$$

Ainsi, puisque $\Psi(\alpha_1)$ et $\Psi'(\alpha_1)$ sont linéairement indépendants, on peut écrire d'après la proposition 9 que:

$$\lim_{\beta\to\alpha_1} \Pi_F\big((\alpha_1,\beta),y_0\big) = P_{\mathrm{Vect}\,\left(\Psi(\alpha_1),\Psi'(\alpha_1)\right)}(y_0).$$

Par suite, si $y_0 - P_{\mathrm{Vect}\,\left(\Psi(\alpha_1)\right)}(y_0) \notin \mathrm{Vect}\left(\Psi^{'}(\alpha_1)\right)^{\perp}$, on peut dire d'après le lemme 1 que :

$$P_{\mathrm{Vect}\,\left(\Psi(\alpha_1),\Psi'(\alpha_1)\right)}(y_0) \neq P_{\mathrm{Vect}(\Psi(\alpha_1))}(y_0) = \Pi_F\big((\alpha_1,\alpha_1),y_0\big)$$

ce qui prouve la discontinuité de Π_F en (α_1,α_1). □

Question 2. — La réciproque est-elle vraie? Plus précisément, la discontinuité de Π_F au point $(1,1)$ entraîne-t-elle la dérivabilité de Ψ sur $\mathbb{R}$?

Question 3. — Existe-t-il une fonction $g \in L^2(\mathbb{R})$, admissible et continue sur $\mathbb{R}$?

3.7. Un raffinement du théorème du paragraphe 3.6.

Dans ce paragraphe, nous allons généraliser la théorie qui vient d'être présentée dans le paragraphe 3.5. Nous supposerons ici que la mesure utilisée n'est pas la mesure de Haar du groupe G mais se présente sous la forme $m_c = c(x)dx$ où dx est la mesure de Haar de G et c est un caractère positif continu, distinct de la constante 1. En particulier, G n'est pas compact et on suppose que $G \subset \widetilde{G}$, espace topologique avec

$$\forall z \in Z \ := \widetilde{G} \setminus G, \quad \lim_{\substack{x\to z\\ x\in G}} c(x) = 0.$$

On suppose également que chaque élément de Z a un système fondamental dénombrable de voisinages dans $\widetilde{G}$.

Enfin, on pose $X = \widetilde{G}^n$ et comme dans les paragraphes précédents : $Y = G$.

Après avoir exposé les résultats techniques qui complètent ceux des paragraphes précédents ou en différent, nous donnerons un théorème de continuité de Π_F

3.7.1. Prolongement et propriétés des dilatées.

DÉFINITION 15. — *Soient $f \in \mathcal{M}$ et $z \in Z$. On pose : $f_z = 0$.*

PROPOSITION 33. — *Soient $\alpha \in G$ et $f \in H$. On a : $\|f_\alpha\| = \sqrt{c(\alpha)}\|f\|$.*

PROPOSITION 34. — *Soient E une partie mesurable de G et $x \in G$. Alors : $m_c(xE) = c(x)m_c(E)$. En particulier, si $f \in H$: $m_c\big(\operatorname{Supp}(f_x)\big) = c(x)m_c\big(\operatorname{Supp} f\big)$.*

DÉFINITION 16. — *Pour $\alpha \in G$, on définit l'opérateur K^c_α : $f \in H \mapsto \frac{1}{\sqrt{c(\alpha)}} f_\alpha \in H$.*

Il résulte de la définition de K^c_α que :

PROPOSITION 35. — *L'opérateur K^c_α est un opérateur unitaire.*

3.7.2. L'ensemble $\mathcal{E}_c$.

PROPOSITION 36. — *Soient $f \in \mathcal{M}$ telle que $m_c\big(\operatorname{Supp} f\big) < +\infty$ et $z \in Z$. Alors l'application $x \mapsto f_x$ est fine (relativement à la mesure $c(x)dx$) en z.*

Preuve de la proposition 36. — D'après la proposition 34, on a pour tout $x \in G$: $m_c\big(\operatorname{Supp}(f_x)\big) = c(x)m_c\big(\operatorname{Supp} f\big)$. Or, par définition $\lim_{\substack{x\to z\\ x\in G}} c(x) = 0$, donc, on a bien : $\lim_{\substack{x\to z\\ x\in G}} m_c\big(\operatorname{Supp}(f_x)\big) = 0$, ce qui termine la démonstration. □

Nous allons définir une nouvelle classe de fonctions, généralisant l'ensemble $\mathcal{E}$.

DÉFINITION 17. — *Une fonction $f : G \to \mathbb{C}$ mesurable appartient à $\mathcal{E}_c$ lorsque pour tout $x_0 \in \widetilde{G}$, l'application $x \mapsto f_x - f_{x_0}$ est fine (relativement à la mesure $c(x)dx$) en x_0.*

Remarque 12. — En toute rigueur, il faudrait noter $\mathcal{E}_{c,\widetilde{G}}$ car $\mathcal{E}_c$ dépend aussi du choix de l'ensemble $\widetilde{G}$.

Les propositions 27, 29 et 30 sont valables en changeant m en m_c et $\mathcal{E}$ en $\mathcal{E}_c$. En particulier, on a :

Proposition 37. — *Toute fonction de la forme* (4) *vérifiant*

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} m_c(S_n) < +\infty$$

appartient à $\mathcal{E}_c$.

Remarque 13. — Les propositions 28 et 31, en revanche, ne se généralisent pas. En effet, on remarque par exemple que la fonction $1 = \chi_G \notin \mathcal{E}_c$ car

$$x \longmapsto (\chi_G)_x = \begin{cases} \chi_G & \text{si } x \in G \\ 0 & \text{si } x \in Z \end{cases}$$

n'est fine en aucun $z \in Z$.

3.7.3. Fonctions c-admissibles.

Définition 18. — *L'application $f \in H$ est dite c-admissible au point $(x_1, \dots, x_n) \in \widetilde{G}^n$ si pour tout $y_0 \in H$, l'application*

$$\Pi_F \ : (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \to P_{\mathrm{Vect}(f_{\alpha_1}, \dots, f_{\alpha_n})}(y_0)$$

est continue au point $(x_1, \dots, x_n)$. Nous dirons alors que $(x_1, \dots, x_n)$ est un point de c-admissibilité de f.

Définition 19. — *$f \in H$ est dite c-admissible si pour tout $n \geqslant 1$, elle est c-admissible en tout point de $\widetilde{G}^n$.*

Remarque 14. — En toute rigueur, il faudrait parler de $(c, \widetilde{G})$-admissibilité.

3.7.4. Un théorème de c-admissibilité. — Nous allons donner dans ce paragraphe une classe de fonctions c-admissibles. Commençons par examiner une situation légèrement plus générale.

Théorème 4. — *Soit V un sous-espace vectoriel de dimension finie de $\mathcal{M}$, dont les éléments sont de carré intégrable sur tout compact de G, et vérifiant $V \cap H = \{0\}$. Soit $f \in \mathcal{E}_c$. On considère une application continue $u : \widetilde{G} \to H$ telle que :*

(i) *$u(z) = 0$ pour tout $z \in Z$;*

(ii) *pour tout $\alpha \in \widetilde{G}$, $u(\alpha) - f_\alpha \in V$.*

Alors, pour tout $q \in \mathbb{N}^*$, l'application Π_U est continue sur $\widetilde{G}^q \times H$.

Preuve du théorème 4. — Nous allons déduire ce théorème du théorème 2. Commençons par écrire :

$$V = \mathrm{Vect}\,\big(\psi_1, \dots, \psi_m\big).$$

D'après les hypothèses faites sur V, les conditions 2 et 3 du lemme 4 sont vérifiées. Soit $\mathbf{x_0} = (\alpha_1, \dots, \alpha_q) \in \widetilde{G}^q$. Sans perte de généralité, on peut supposer que $\mathbf{x_0}$ s'écrit

$$\mathbf{x_0} = (z_1, \dots, z_l, \alpha_1, \dots, \alpha_n)$$

où $\alpha_i \in G$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$ et $z_j \in Z$ pour tout $j \in [\![1, l]\!]$. Soit p le rang de la famille $(u(\alpha_1), \dots, u(\alpha_n))$ dans H. Soient $1 \leqslant i_1 \leqslant \dots \leqslant i_p \leqslant n$ tels que la famille $(u(\alpha_{i_k}))_{1 \leqslant k \leqslant p}$ soit libre. Pour tout entier $j \notin \{i_1, \dots, i_p\}$, écrivons :

$$u(\alpha_j) = \sum_{k=1}^{p} \lambda_k^j u(\alpha_{i_k}).$$

Considérons enfin un q-uplet $\mathbf{x} = (w_1, \dots, w_l, x_1, \dots, x_n)$ tendant vers le q-uplet $\mathbf{x_0}$ et posons :

$$F(\mathbf{x}) = \mathrm{Vect}\,\big(u(w_1), \dots, u(w_l), u(x_1), \dots, u(x_n)\big).$$

On a :

$$F(\mathbf{x}) = \mathrm{Vect}\,\big(u(x_{i_k}), 1 \leqslant k \leqslant p\big) + G(\mathbf{x}) + H(\mathbf{x})$$

avec

$$\begin{aligned} G(\mathbf{x}) &= \mathrm{Vect}\,\Big(u(x_j) - \sum_{k=1}^{p} \lambda_k^j u(x_{i_k}), j \notin \{i_1, \dots, i_p\}\Big) \\ H(\mathbf{x}) &= \mathrm{Vect}\,\big(u(w_j), 1 \leqslant j \leqslant l\big). \end{aligned}$$

On a d'une part, pour tout $j \notin \{i_1, \dots, i_p\}$:

$$\begin{aligned} u(x_j) - \sum_{k=1}^{p} \lambda_k^j u(x_{i_k}) &= u(x_j) - \sum_{k=1}^{p} \lambda_k^j u(x_{i_k}) - \Big(u(\alpha_j) - \sum_{k=1}^{p} \lambda_k^j u(\alpha_{i_k})\Big) \\ &= u(x_j) - u(\alpha_j) - \sum_{k=1}^{p} \lambda_k^j \big(u(x_{i_k}) - u(\alpha_{i_k})\big) \\ &= \underbrace{f_j(\mathbf{x})}_{\in V} + \underbrace{f_{x_j} - f_{\alpha_j}}_{\text{fine en } \mathbf{x_0}} - \sum_{k=1}^{p} \lambda_k^j \Big(\underbrace{f_{i_k}(\mathbf{x})}_{\in V} + \underbrace{f_{x_{i_k}} - f_{\alpha_{i_k}}}_{\text{fine en } \mathbf{x_0}}\Big). \end{aligned}$$

On a d'autre part, pour $1 \leqslant j \leqslant l$:

$$u(w_j) = g_j(\mathbf{x}) + f_{w_j}$$

avec $g_j(\mathbf{x}) \in V$ pour tout $\mathbf{x} \in \widetilde{G}^n$ et f_{w_j} fine en $\mathbf{x_0}$. On peut donc conclure d'après le théorème 2 que f est admissible. □

On déduit facilement du dernier théorème le résultat suivant.

THÉORÈME 5. — *Si $f \in L^2(G, c(x)dx)$ peut s'écrire sous la forme $f' + f''$ où f' est une exponentielle-polynôme et f'' appartient à $\mathcal{E}_c$, alors f est c-admissible.*

4. Un exemple lié au critère de Beurling et Nyman pour l'hypothèse de Riemann.

4.1. Introduction.

Nous allons maintenant reprendre le problème présenté dans la partie 3 dans le cas où la fonction g est définie par : $g(t) = \left\{\frac{1}{t}\right\}$ (où $\{u\}$ est la partie fractionnaire du réel u, c'est à dire $u - \lfloor u \rfloor$), et lorsque y_0 est la fonction χ caractéristique de l'intervalle $]0, 1]$. Nous poserons ici $H = L^2(0, +\infty)$.

C'est le critère de Beurling et Nyman qui motive ce choix. En désignant par $\mathcal{B}$ le sous-espace de $L^2(0, +\infty)$ des fonctions de la forme $f(t) = \sum_{k=1}^n c_k g_{\alpha_k}(t)$ où $n \in \mathbb{N}$, $c_k \in \mathbb{C}$ et $0 < \alpha_k \leqslant 1$ pour $1 \leqslant k \leqslant n$, ce critère affirme l'assertion suivante : l'hypothèse de Riemann équivaut au fait que la fonction caractéristique χ de l'intervalle $]0, 1]$ est limite dans $L^2(0, +\infty)$ de fonctions de $\mathcal{B}$ (voir [6]).

Le point de départ de la démonstration de ce critère est la formule de transformation de Mellin suivante :

$$\text{pour } 0 < \Re(s) < 1 : \int_0^{+\infty} \left\{\frac{1}{t}\right\} t^{s-1} dt = -\frac{\zeta(s)}{s}.$$

On s'intéresse notamment à la suite (δ_n) définie par

$$\delta_n = \inf_{\substack{(c_1, \dots, c_n) \in \mathbb{C}^n \\ 0 \leqslant \alpha_1, \dots, \alpha_n \leqslant 1}} \left\| \chi - \sum_{i=1}^n c_k g_{\alpha_k} \right\|.$$

On a donc la proposition suivante :

PROPOSITION 38. — *L'hypothèse de Riemann équivaut au fait que $\lim_{n \to +\infty} \delta_n = 0$.*

Remarque 15. — Notons que χ n'est pas combinaison linéaire de fonctions g_{θ_i}. En effet, une égalité de la forme $\chi = \sum_{j=1}^{n} c_j g_{\theta_j}$ entraînerait, par passage à la transformée de Mellin :

$$\frac{1}{s} = -\frac{\zeta(s)}{s}\sum_{j=1}^{n} c_j\theta_j^s \Longrightarrow \frac{1}{\zeta(s)} = -\sum_{j=1}^{n} c_j\theta_j^s \quad , \quad 0 < \Re(s) < 1$$

$$\Longrightarrow \sum_{j=1}^{+\infty}\frac{\mu(j)}{j^s} = -\sum_{j=1}^{n} c_j\theta_j^s \quad , \quad \Re(s) > 1$$

(par prolongement analytique).

L'unicité de l'écriture d'une série de Dirichlet $s \mapsto \sum_{n\geqslant 1} a_n e^{-\lambda_n s}$ donnerait alors la nullité des $\mu(j)$ pour j assez grand, ce qui n'est pas.

Dans tout ce qui suit, nous allons appliquer les résultats du paragraphe 3.7 dans le cas où $G =]0,+\infty[$ muni de la mesure de Haar $\frac{dx}{x}$, $c(x) = x$ et $\widetilde{G} = [0,+\infty[$.

4.2. Résolution du problème et conséquences.

4.2.1. Préliminaires.

PROPOSITION 39. — *L'application $f : t \mapsto \lfloor \frac{1}{t} \rfloor$ appartient à $\mathcal{E}_c$.*

Preuve de la proposition 39. — Remarquons que

$$f = \sum_{n=1}^{+\infty} n.\chi_{]\frac{1}{n+1},\frac{1}{n}]}$$

avec

$$\sum_{n=1}^{+\infty} m_c\Big(\Big]\frac{1}{n+1},\frac{1}{n}\Big]\Big) = \sum_{n=1}^{+\infty}\int_{\frac{1}{n+1}}^{\frac{1}{n}} dt = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n(n+1)} < +\infty.$$

La conclusion résulte alors de la proposition 37. □

THÉORÈME 6 (de Nyman, 1950). — *Soit V un sous-espace fermé de $L^1(0,1)$ invariant par toutes les dilatations K_λ, $\lambda \leqslant 1$. Alors, $V = L^1(0,1)$ si et seulement si :*

1. *Il n'existe aucun $a \in]0,1[$ tel que toute fonction f de V soit nulle presque partout sur $[a,1]$.*

2. *Il n'existe aucun* ρ $(\Re(\rho) \geqslant 1)$ *tel que pour toute fonction* $f \in V$, $\int_0^1 f(t)t^{\rho-1}dt = 0$.

Preuve du théorème 6. — C'est le théorème 4 de [11]. □

4.2.2. Admissibilité de la fonction partie fractionnaire.

Théorème 7. — *La fonction* $g\ : t \mapsto \left\{\frac{1}{t}\right\}$ *est c-admissible.*

Preuve du théorème 7. — L'égalité $\left\{\frac{1}{t}\right\} = \frac{1}{t} - \lfloor\frac{1}{t}\rfloor$ nous permet de conclure grâce au théorème 5 et à la proposition 39. □

Corollaire 1. — *Soit* $n \in \mathbb{N}^*$. *La distance* δ_n *est atteinte et* $\delta_{n+1} < \delta_n$.

Preuve du corollaire 1.

▶ Par définition, δ_n est la borne inférieure de la fonction

$$d_n : (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \longmapsto \left\|\chi - P_{\mathrm{Vect}(g_{\alpha_1},\dots,g_{\alpha_n})}(\chi)\right\|$$

sur le compact $[0,1]^n$. Or, d'après le théorème 7, l'application

$$(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \mapsto P_{\mathrm{Vect}(g_{\alpha_1},\dots,g_{\alpha_n})}(\chi)$$

est continue sur $[0,1]^n$, ce qui entraîne la continuité de d_n. La distance δ_n est donc atteinte.

▶ Par ailleurs, l'inclusion $\mathrm{Vect}(g_{\alpha_1}, \dots, g_{\alpha_n}) \subset \mathrm{Vect}(g_{\alpha_1}, \dots, g_{\alpha_{n+1}})$ nous donne l'inégalité large $\delta_{n+1} \leqslant \delta_n$. Supposons que l'égalité $\delta_{n+1} = \delta_n$ soit vérifiée. Soit $f = \sum_{j=1}^n c_j g_{\theta_j}$ une fonction vérifiant $\delta_n = \|\chi - f\|$. Fixons alors $\theta \in [0,1]$. On a pour tout $c \in \mathbb{C}$ et pour tout $g \in \mathrm{Vect}\left(g_{\theta_1}, \dots, g_{\theta_n}\right)$:

$$\delta_n = \|\chi - f\| = \delta_{n+1} \leqslant \|\chi - g - cg_\theta\|.$$

On peut donc affirmer que :

$$P_{\mathrm{Vect}(g_{\theta_1},\dots,g_{\theta_n})}(\chi) = P_{\mathrm{Vect}(g_{\theta_1},\dots,g_{\theta_n},g_\theta)}(\chi) = f.$$

Posons $\varphi = \chi - f$. On a $\varphi \in L^\infty(0,+\infty) \cap L^2(0,+\infty)$ et $\varphi \perp g_\theta$ pour tout $\theta \in [0,1]$ d'après le lemme 1. On a donc pour tout $\theta \in [0,1]$:

$$\int_0^{+\infty} \varphi(t)\Big(\left\{\frac{\theta}{t}\right\} - \theta\left\{\frac{1}{t}\right\}\Big)dt = 0$$

c'est à dire :

$$\int_0^1 \varphi(t)\Big(\left\{\frac{\theta}{t}\right\} - \theta\left\{\frac{1}{t}\right\}\Big)dt = 0. \tag{7}$$

On a donc $\varphi\chi \in \mathcal{N}^{\perp}$ où $\mathcal{N} = \mathrm{Vect}\Big(g_\theta - \theta g_1, \theta \in [0,1]\Big)$. D'après le lemme 5 énoncé ci-dessous : $\mathcal{N}$ est dense dans $L^1(0,1)$. L'application $\varphi\chi$ est donc identiquement nulle. Par conséquent, l'orthogonalité entre les fonctions φ et g_1 se réécrit :

$$\int_1^{+\infty} \frac{\varphi(t)}{t} dt = 0$$

soit encore :

$$0 = \int_1^{+\infty} \frac{1}{t}\big(\chi(t) - \sum_{j=1}^n c_j g_{\theta_j}(t)\big) dt = -\sum_{j=1}^n c_j \int_1^{+\infty} \frac{\theta_j}{t^2} dt = -\sum_{j=1}^n c_j \theta_j.$$

La fonction φ est donc aussi identiquement nulle sur $[1,+\infty[$, donc sur $\mathbb{R}_+$, ce qui est absurde d'après la remarque 15. □

Lemme 5. — *L'espace* $\mathcal{N} = \mathrm{Vect}\big(g_\theta - \theta g_1, \theta \in [0,1]\big)$ *est dense dans* $L^1(0,1)$.

Preuve du lemme 5. — L'adhérence $\overline{\mathcal{N}}$ de $\mathcal{N}$ dans $L^2(0,1)$ est invariante par toute dilatation K_α ($\alpha \in [0,1]$). D'autre part, la fonction $g_{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2} g_1$ vaut $\frac{1}{2}$ sur $]\frac{1}{2}, 1]$. Enfin, puisque :

$$\int_0^1 \Big(\Big\{\frac{\theta}{t}\Big\} - \theta\Big\{\frac{1}{t}\Big\}\Big) t^{s-1} dt = -\frac{\zeta(s)}{s}\big[\theta^s - \theta\big],$$

on peut conclure d'après le théorème 6, le théorème d'Hadamard et la Vallée Poussin affirmant que $\zeta(s) \neq 0$ si $\Re(s) \geqslant 1$, et le fait que $s = 1$, pôle de ζ, est le seul zéro commun aux fonctions $s \mapsto \theta^s - \theta$. □

4.3. Présentation d'une variante.

Nous allons présenter dans ce paragraphe une variante du théorème 7.

Théorème 8. — *Pour* $\theta \geqslant 0$, *on définit l'application* $h(\theta)\ : t \mapsto \big\{\frac{\theta}{t}\big\} - \theta\big\{\frac{1}{t}\big\}$. *Alors, l'application* Π_F *est continue en* $(\theta_1, \dots, \theta_n, \chi)$.

Preuve du théorème 8. — Posons, pour $t \in]0,+\infty[$, $\psi(t) = -\lfloor \frac{1}{t} \rfloor$. Cette fonction est mesurable, de carré intégrable sur tout compact de G, mais pas sur $]0,+\infty[$. D'autre part, d'après la proposition 39, la fonction ψ appartient à $\mathcal{E}_c$. On a : $h(\theta) = \theta\lfloor \frac{1}{t} \rfloor - \lfloor \frac{\theta}{t} \rfloor$, donc : $h(0) = 0$ et $h(\theta) - \psi_\theta \in \mathrm{Vect}(\psi)$. On peut donc conclure grâce au théorème 4. □

4.4. Approche d'un problème généralisé.

Le critère de Beurling et Nyman qui vient d'être présenté concernait la fonction ζ de Riemann. Nous allons généraliser cette étude à certaines séries de Dirichlet.

4.4.1. Application à certaines séries de Dirichlet. —

Soit F une fonction d'une variable complexe $s = \sigma + i\tau$, qui est une série de Dirichlet convergente pour σ assez grand (disons pour $\sigma > \sigma_0 > 1$), c'est à dire pouvant s'écrire sous la forme

$$F(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a(n)}{n^s}.$$

On sait que la série $F(s)$ converge absolument pour $\sigma > \sigma_0 + 1$.

On suppose que F admet un prolongement méromorphe à $\sigma \geqslant \frac{1}{2}$ avec un nombre fini de pôles $(\rho_1, \dots, \rho_k)$, tous de parties réelles strictement supérieures à $\frac{1}{2}$. On suppose enfin que [1] :

$$(8) \quad \exists A < \frac{1}{2}, \quad \exists T_0 \geqslant 1, \quad \forall \sigma \geqslant \frac{1}{2}, \quad \forall \tau, \quad |\tau| \geqslant T_0 \Longrightarrow |F(\sigma + i\tau)| \leqslant |\tau|^A$$

Définition 20. — *On définit la fonction complémentaire associée à F par :*

$$\begin{array}{rcccl} \{\cdot\}_F & : & \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & & x & \longmapsto & \displaystyle\sum_{j=1}^{k} \mathrm{Res}\Big(\frac{x^s}{s} F(s), \rho_j\Big) - \sum_{n \leqslant x} a(n). \end{array}$$

Proposition 40. — *La fonction*

$$E \ : x \longmapsto \sum_{j=1}^{k} \mathrm{Res}\Big(\frac{x^s}{s} F(s), \rho_j\Big)$$

est une exponentielle-polynôme de $]0, +\infty[$.

Preuve de la proposition 40. — Il suffit de voir cela pour chaque terme $\mathrm{Res}\big(x^s F(s)/s, \rho\big)$. On a :

$$\begin{aligned} \frac{x^s}{s} F(s) &= x^\rho \Big(e^{(s-\rho)\log x} \frac{F(s)}{s}\Big) \\ &= x^\rho \Big(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(\log x)^k}{k!} (s-\rho)^k\Big) \times \Big(\sum_{l=-L}^{+\infty} g_l \frac{(s-\rho)^l}{l!}\Big). \end{aligned}$$

(1) Pour plus de précisions concernant l'ordre des fonctions, on pourra se référer à [15], chapitre II-1

Par suite :

$$\operatorname{Res}\Big(\frac{x^s}{s}F(s),\rho\Big) = x^\rho \sum_{\substack{k+l=-1\\ k\geqslant 0, l\geqslant -L}} \frac{g_l}{k!l!}(\log x)^k, \tag{9}$$

d'où le résultat. □

Proposition 41. — *La fonction $S : t \mapsto \sum_{n\leqslant 1/t} a(n)$ appartient à $\mathcal{E}_c$.*

Preuve de la proposition 41. — On a

$$S = \sum_{n\geqslant 1} S(1/n)\cdot \chi_{]1/(n+1),1/n]}. \qquad \square$$

Proposition 42. — *La fonction $f_F\colon t \mapsto \left\{\frac{1}{t}\right\}_F$ est dans $L^2(0,+\infty)$.*

Preuve de la proposition 42. — La démonstration est classique et nous nous contentons de l'esquisser. Pour $\sigma > \sigma_0$, $x > 0$, x non entier, la formule de Perron (cf. [15], théorème II.2.1.) nous donne

$$\sum_{n\leqslant x} a(n) = \frac{1}{2i\pi}\int_{\sigma-iT}^{\sigma+iT} F(s)x^s s^{-1}ds + o(1), \quad T \longrightarrow +\infty.$$

Pour $T \geqslant T_0$, le déplacement du segment d'intégration à l'abscisse $\sigma = 1/2$ fournit, grâce au théorème des résidus et à l'estimation (8) :

$$\sum_{n\leqslant x} a(n) = E(x) + \frac{1}{2i\pi}\int_{1/2-iT}^{1/2+iT} F(s)x^s s^{-1}ds + o(1), \quad T \longrightarrow +\infty.$$

Il en résulte que $x \mapsto \{1/x\}_F$ est (presque partout) égale à la transformée de Mellin-Plancherel inverse de la fonction $s \mapsto -F(s)s^{-1}$, qui appartient à $L^2(1/2+i\mathbb{R}, d\tau/2\pi)$ d'après (8). La fonction $x \mapsto \{1/x\}_F$ est donc un élément de $L^2(0,+\infty)$. □

On peut alors énoncer la proposition suivante.

Proposition 43. — *La fonction $f_F\ : t \mapsto \left\{\frac{1}{t}\right\}_F$ est c-admissible.*

Preuve de la proposition 43. — D'après les propositions 40, 41 et 42, on peut affirmer que f_F est un élément de $L^2(0,+\infty)$, somme d'une exponentielle-polynôme et d'une fonction de $\mathcal{E}_c$. On conclut donc grâce au théorème 5. □

4.4.2. Le cas particulier des fonctions de la classe de Selberg.

Définition 21. — *Une fonction F d'une variable complexe $s = \sigma + i\tau$ appartient à la classe de Selberg S si F satisfait les cinq conditions suivantes :*

(Sdir) **Série de Dirichlet** *: Pour $\sigma > 1$, $F(s)$ est une série de Dirichlet absolument convergente :*

$$F(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a(n)}{n^s}.$$

(Sprol) **Prolongement analytique** *: Il existe un entier m tel que $(s-1)^m F(s)$ soit une fonction entière d'ordre fini.*

(SEq) **Équation fonctionnelle** *: $F(s)$ satisfait une équation fonctionnelle de la forme*

$$\Phi(s) = \omega\overline{\Phi}(1-s) \text{ où } \Phi(s) := \gamma_F(s)F(s)$$

avec $\gamma_F(s) = Q^s \prod_{j=1}^r \Gamma(\lambda_j s + \mu_j)$, $Q > 0$, $\lambda_j > 0$, $\Re(\mu_j) \geqslant 0$ et $|\omega| = 1$. On dit dans ce cas que γ_F est un γ-facteur de F.

(SRam) **Hypothèse de Ramanujan** *: $\forall \epsilon > 0$, $a(n) = O_\epsilon(n^\epsilon)$.*

(SEul) **Produit Eulérien** *: Pour σ assez grand :*

$$\log F(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{b(n)}{n^s}$$

où $b(n) = 0$ si n n'est pas une puissance d'un nombre premier et $b(n) \ll n^\theta$ pour un $\theta < \frac{1}{2}$.

Introduisons enfin un espace analogue à l'espace $\mathcal{B}$, mais relatif cette fois-ci à la fonction F :

Définition 22.

$$\mathcal{B}_F = \Big\{ t \mapsto \sum_{k=1}^{n} c_k \Big\{\frac{\alpha_k}{t}\Big\}_F, n \in \mathbb{N}, c_k \in \mathbb{C} \text{ et } 0 < \alpha_k \leqslant 1 \text{ pour tout } k \in [\![1, n]\!] \Big\}.$$

On peut alors énoncer le critère de Beurling et Nyman pour la fonction F, dont on peut trouver une preuve dans [1] :

Théorème 9 (Anne de Roton). — *Soit F une fonction de la classe de Selberg. Alors, les assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) *L'hypothèse de Riemann est vraie pour la fonction F;*

(ii) $\left\{\frac{1}{x}\right\}_F \in L^2(0,+\infty)$ *et* $\chi \in \overline{\mathcal{B}_F}$ *où* χ *désigne la fonction caractéristique de l'intervalle* $]0,1]$.

On peut encore une fois s'intéresser ici à la suite $\delta_n^{(F)}$ définie par :

$$\delta_n^{(F)} = \inf_{\substack{(c_1,\ldots,c_n)\in\mathbb{C}^n \\ 0\leqslant\alpha_1,\ldots,\alpha_n\leqslant 1}} \Big\|\chi - \sum_{i=1}^{n} c_k f_{\alpha_k}\Big\|.$$

La proposition 43 entraîne facilement la suivante.

Proposition 44. — *La distance $\delta_n^{(F)}$ est atteinte.*

Question 4. — La suite $\delta_n^{(F)}$ est-elle strictement décroissante?

BIBLIOGRAPHIE

[1] A. de Roton, Généralisation du critère de Beurling-Nyman à la classe de Selberg, thèse de doctorat, Université de Bordeaux 1, 2003.

[2] J.M Arnaudiès et h. fraysse, Cours de mathématiques, Tome 1, Algèbre, Dunod, 1994.

[3] M. Balazard, Completeness problems and the Riemann hypothesis: an annotated bibliography , dans : Number Theory for the Millenium, Proc. Millenial Conf. Number Theory (Urbana, IL, 2000) (M.A. Bennett et al., eds.), A K Peters, Boston (2002), 21–48.

[4] L. Báez- Duarte, M. Balazard, B. Landreau et E. Saias, Étude de l'autocorrélation multiplicative de la fonction "partie fractionnaire", à paraître au Ramanujan Journal.

[5] L. Báez- Duarte, m. balazard, b. landreau et e. saias, Notes sur la fonction ζ de Riemann 3, Advances in Mathematics, 149 (2000), 130–144.

[6] M. Balazard et E. Saias, The Nyman-Beurling equivalent form for the Riemann Hypothesis, Exp. Math. 18 (2000), 131–138.

[7] F. Deutsch, Best approximations in inner product spaces, Springer, 2001.

[8] M. Engert, Finite dimensional translation invariant subspaces, Pacific J. Math., 32 (1970), 333–343.

[9] E. Hewitt et K.A. Ross, Abstract harmonic analysis I , Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften 115, Springer, 1963.

[10] B. Landreau et F. Richard, Le critère de Beurling et Nyman pour l'hypothèse de Riemann : aspects numériques, Experimental Mathematics, 11 (2002), 349–360.

[11] B. Nyman, On some groups and semigroups of translations, thèse, Uppsala, 1950.

[12] W. Rudin, Analyse réelle et complexe, Masson, 1975.

[13] W. Rudin, Fourier analysis on groups, Interscience Publishers, 1962.

[14] L. Schwartz, Analyse hilbertienne, Hermann, 1979.

[15] G. Tenenbaum, Introduction à la théorie analytique et probabiliste des nombres, Cours spécialisés n°1, Société Mathématique de France, 1995.

[16] C. Tisseron, Notions de topologie. Introduction aux espaces fonctionnels, Hermann, 1996.

Manuscrit reçu le 16 septembre 2004,
accepté le 17 janvier 2005.

Nicolas JOUSSE,
Lieu dit "Roquenègre"
33420 RAUZAN (France)
nicolasjousse@club-internet.fr