



ANNALES

DE

L'INSTITUT FOURIER

Jean-Pierre VIGUÉ

Ensembles d'unicité pour les automorphismes et les endomorphismes analytiques d'un domaine borné

Tome 55, n° 1 (2005), p. 147-159.

http://aif.cedram.org/item?id=AIF_2005__55_1_147_0

© Association des Annales de l'institut Fourier, 2005, tous droits réservés.

L'accès aux articles de la revue « Annales de l'institut Fourier » (<http://aif.cedram.org/>), implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://aif.cedram.org/legal/>). Toute reproduction en tout ou partie cet article sous quelque forme que ce soit pour tout usage autre que l'utilisation à fin strictement personnelle du copiste est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

cedram

*Article mis en ligne dans le cadre du
Centre de diffusion des revues académiques de mathématiques
<http://www.cedram.org/>*

ENSEMBLES D'UNICITÉ POUR LES AUTOMORPHISMES ET LES ENDOMORPHISMES ANALYTIQUES D'UN DOMAINE BORNÉ

par Jean-Pierre VIGUÉ

À Henri Cartan,
à l'occasion de son centième anniversaire.

1. Introduction.

Le groupe des automorphismes analytiques d'un domaine borné D de \mathbb{C}^n a fait l'objet de nombreuses études depuis les premiers travaux de H. Cartan [3] et [4]. Sur ce sujet, on peut consulter par exemple T. Franzoni et E. Vesentini [6], R. Narasimhan [10] et J.-P. Vigué [14]. En particulier, il faut citer le théorème d'unicité de H. Cartan qui s'énonce de la façon suivante.

THÉORÈME 1.1. — *Soit D un domaine borné de \mathbb{C}^n , soit a un point de D et soit $f : D \rightarrow D$ une application holomorphe telle que $f(a) = a$ et que $f'(a) = \text{id}$. Alors, $f = \text{id}$.*

Ce théorème montre en particulier que, si $f \in \text{Aut}(D)$ et $g \in H(D, D)$ sont tels que $f(a) = g(a)$ et que $f'(a) = g'(a)$, alors $f = g$ [$H(D, D)$ désigne l'ensemble des applications holomorphes de D dans D].

Mots-clés : ensembles d'unicité, automorphismes et endomorphismes analytiques, théorème d'unicité de H. Cartan.
Classification math. : 32H02.

On peut se demander si, au lieu de considérer $f(a)$ et $f'(a)$, on peut caractériser f par sa valeur en un nombre fini de points bien choisis dans D . Plus précisément, on définit un ensemble d'unicité de la façon suivante.

DÉFINITION 1.2. — *On dit qu'un ensemble (z_1, \dots, z_d) de points de D est un ensemble d'unicité pour $\text{Aut}(D)$ (resp. $H(D, D)$) si, pour tout $f \in \text{Aut}(D)$ (resp. $H(D, D)$), $f(z_i) = z_i, i = 1, \dots, d$ entraîne que $f = \text{id}$.*

Par des méthodes de géométrie différentielle, B. Fridman, K. Tim, S. Krantz et D. Ma [7] ont montré le théorème suivant.

THÉORÈME 1.3. — *Soit M une variété complexe connexe hermitienne complète de dimension n telle que tout automorphisme analytique de M soit une isométrie pour la métrique hermitienne considérée. Alors il existe un ouvert dense W de M^{n+1} formé d'ensembles d'unicité pour $\text{Aut}(M)$.*

De plus, des exemples montrent qu'il existe des familles de $(n + 1)$ points distincts de M^{n+1} qui ne sont pas des ensembles d'unicité pour $\text{Aut}(M)$. Maintenant, si on considère un domaine borné D de \mathbb{C}^n , il n'est pas toujours possible de le munir d'une telle métrique. Cependant, nous allons montrer que le théorème précédent demeure exact pour n'importe quel domaine borné D de \mathbb{C}^n . Notre démonstration est basée sur des propriétés du groupe des automorphismes analytiques d'un domaine borné D de \mathbb{C}^n .

Il est naturel ensuite de se poser la question de l'existence d'ensembles d'unicité pour $H(D, D)$. Nous commencerons par étudier deux exemples : celui de la boule-unité B_2 de \mathbb{C}^2 (pour la norme hermitienne). Dans cet exemple, l'ensemble des points (z_1, z_2, z_3) de B_2^3 qui est un ensemble d'unicité pour $H(D, D)$ forme un ouvert dense de B_2^3 . Ensuite, nous étudierons le cas du bidisque Δ^2 . Dans ce cas, il existe des ensembles d'unicité mais l'ensemble $X(3) \subset (\Delta^2)^3$ des ensembles d'unicité n'est pas dense dans $(\Delta^2)^3$.

Le reste de l'article sera consacré à l'existence d'ensembles d'unicité pour $H(D, D)$. Nous montrerons d'abord, en utilisant un résultat de M. Abate [1] qu'étant donné un domaine borné D de \mathbb{C}^n et un point a de D , il existe n points (z_1, \dots, z_n) de D tels que (a, z_1, \dots, z_n) soit un ensemble d'unicité pour $H(D, D)$. Ensuite, nous étudierons en détails le cas des dimensions 1 et 2. Nous montrerons en particulier que, pour un domaine borné convexe D de \mathbb{C}^2 , étant donnés deux points distincts (z_1, z_2)

de D , il existe toujours au moins un point $z \in D$ tel que (z, z_1, z_2) soit un ensemble d'unicité pour $H(D, D)$.

Nous allons commencer par un certain nombre de rappels sur le groupe $\text{Aut}(D)$ et sur l'ensemble des applications holomorphes de D dans D .

2. Rappels.

Soit D un domaine borné de \mathbb{C}^n . L'ensemble $H(D, D)$ et le groupe $\text{Aut}(D)$ sont munis de la topologie de la convergence uniforme sur tout compact de D . Rappelons le théorème suivant dû à H. Cartan [4] (voir aussi E. Bedford [2]).

THÉORÈME 2.1. — *Soit D un domaine borné de \mathbb{C}^n et soit $a \in D$. Soit $f_n \in \text{Aut}(D)$ une suite d'automorphismes convergeant uniformément sur tout compact de D vers g . Supposons que $g(a) \in D$. Alors $g \in \text{Aut}(D)$.*

Étant donné un point a de D , on définit le groupe d'isotropie du point a comme

$$\text{Aut}_a(D) = \{f \in \text{Aut}(D) \mid f(a) = a\}.$$

Concernant ce groupe, on a le théorème suivant, dû à H. Cartan [3] (voir aussi une démonstration de ce résultat dans J.-P. Vigué [16 et 17]).

THÉORÈME 2.2. — *Soit D un domaine borné de \mathbb{C}^n , soit $a \in D$ et soit $\text{Aut}_a(D)$ le groupe d'isotropie du point a . Alors il existe une application holomorphe $\varphi : D \rightarrow \mathbb{C}^n$ qui vérifie les propriétés suivantes :*

- $\varphi(a) = 0$ et φ est une carte locale au voisinage de a ;
- pour tout $f \in \text{Aut}_a(D)$, on a : $\varphi \circ f = f'(a) \circ \varphi$.

Ce résultat exprime que f est linéaire dans la carte locale φ .

Enfin, nous utiliserons le lemme suivant.

LEMME 2.3. — *Soit D un domaine borné de \mathbb{C}^n , soit $a \in D$ et soit $f \in \text{Aut}_a(D)$. Alors toutes les valeurs propres de $f'(a)$ sont de module 1 et l'application linéaire $f'(a)$ est diagonalisable.*

Ce lemme est une conséquence des inégalités de Cauchy pour les itérées f^n de f .

On déduit de H. Cartan [5] le résultat suivant.

THÉORÈME 2.4. — Soit D un domaine borné de \mathbb{C}^n et soit $p : D \rightarrow D$ une rétraction holomorphe (c'est-à-dire une application holomorphe telle que $p^2 = p$). Soit $a \in p(D)$. Alors il existe une constante M qui ne dépend que de D et de a et une application holomorphe $u : D \rightarrow B(0, M)$ de D dans la boule $B(0, M)$ de centre 0 et de rayon M qui vérifie les propriétés suivantes :

- (i) $u(a) = 0$, $u'(a) = \text{id}$ et u est une carte locale au voisinage de a ;
- (ii) $u \circ p = p'(a) \circ u$, ce qui signifie que, dans la carte locale u , p est un projecteur linéaire.

La démonstration de H. Cartan consiste d'abord à se ramener au cas où $a = 0$ et à définir u par la formule suivante :

$$u = (\text{id} - p'(a)) \circ (\text{id} - p) + p'(a) \circ p,$$

et il est facile de vérifier les propriétés annoncées. L'existence de M se déduit des inégalités de Cauchy.

3. Ensembles d'unicité pour $\text{Aut}(D)$.

Soit d un entier positif et soit D un domaine borné de \mathbb{C}^n . Rappelons qu'un ensemble $(z_1, \dots, z_d) \in D^d$ est un ensemble d'unicité pour $\text{Aut}(D)$ si, pour tout $f \in \text{Aut}(D)$, $f(z_i) = z_i, i = 1, \dots, d$ entraîne que $f = \text{id}$. On définit alors $W(d) \subset D^d$ comme l'ensemble des $(z_1, \dots, z_d) \in D^d$ tels que (z_1, \dots, z_d) soit un ensemble d'unicité pour $\text{Aut}(D)$. Le premier résultat concernant $W(d)$ est le suivant.

THÉORÈME 3.1. — Supposons que D soit un domaine borné de \mathbb{C}^n . L'ensemble $W(d)$ est un ouvert (éventuellement vide) de D^d .

Démonstration. — Montrons que le complémentaire $S(d)$ est fermé. Soit Z^n une suite de points de $S(d)$ convergeant vers Z^0 . Il nous faut montrer que $Z^0 \in S(d)$, c'est-à-dire qu'il existe $f \in \text{Aut}(D)$ tel que $f|_{Z^0} = \text{id}|_{Z^0}$ et que f soit différent de l'identité. Comme Z^n appartient à $S(d)$, il existe un automorphisme f_n de D tel que $f_n|_{Z^n} = \text{id}|_{Z^n}$ et que f_n soit différent de l'identité. Soit $Z^n = (z_1^n, \dots, z_d^n)$. Comme f_n est différent de l'identité, on sait d'après le théorème d'unicité de H. Cartan (Théorème 1.1) que $f_n'(z_1^n)$ est différent de l'identité. Comme $f_n'(z_1^n)$ est une application linéaire diagonalisable, ceci entraîne que $f_n'(z_1^n)$ admet une valeur propre de module 1, différente de 1. Quitte à remplacer f_n par une

puissance convenable de f_n on peut supposer que cette valeur propre est de partie réelle ≤ 0 . En utilisant le théorème de Montel, on peut extraire de la suite f_n une sous-suite f_{n_k} convergeant uniformément sur tout compact de D vers une application holomorphe g . Il est clair que $g(z_1^0) = z_1^0$. D'après le théorème 2.1, g est un automorphisme analytique de D et nous avons bien sûr $g|_{Z^0} = \text{id}|_{Z^0}$. Par passage à la limite, $g'(z_1^0)$ admet une valeur propre de partie réelle ≤ 0 . Ainsi g n'est pas égal à l'identité et Z^0 appartient à $S(d)$. Le théorème est démontré.

Bien sûr, si d est petit, l'ensemble $W(d)$ peut être vide. Ainsi, pour la boule-unité ouverte B_n de \mathbb{C}^n , on peut vérifier que, pour tout $d \leq n$, l'ensemble $W(d)$ est vide. En revanche, dès que $d \geq n + 1$, nous allons montrer maintenant que $W(d)$ est un ouvert dense de D^d . Plus précisément, nous avons le théorème suivant.

THÉORÈME 3.2. — *Soit D un domaine borné de \mathbb{C}^n , soit $a \in D$ et soit $d \geq n + 1$. L'ensemble $S_a(d)$ des points $(z_1, \dots, z_{d-1}) \in D^{d-1}$ tels que (a, z_1, \dots, z_{d-1}) n'appartienne pas à $W(d)$ est contenu dans un sous-ensemble analytique strict de D^{d-1} . Par suite, $W(d)$ est un ouvert dense de D^d .*

Démonstration. — Soit $a \in D$. D'après le théorème 2.2, il existe une application holomorphe $\varphi : D \rightarrow \mathbb{C}^n$ qui vérifie les propriétés suivantes :

- $\varphi(a) = 0$, et φ est une carte locale au voisinage de a ;
- pour tout $f \in \text{Aut}_a(D)$, pour tout $z \in D$, on a :

$$\varphi(f(z)) = f'(a) \cdot \varphi(z).$$

Soit $f \in \text{Aut}(D)$ tel que $f(a) = a, f(z_i) = z_i, i = 1, \dots, d - 1$. Nous allons montrer que, si les $(\varphi(z_i))_{i=1, \dots, d-1}$ forment un système générateur de \mathbb{C}^n , alors $f = \text{id}$. En effet, si cela est le cas, on a, pour $i = 1, \dots, d - 1$

$$\varphi(z_i) = \varphi(f(z_i)) = f'(a) \cdot \varphi(z_i).$$

On en déduit que $f'(a) \cdot v = v$, pour tous les vecteurs d'un système générateur de \mathbb{C}^n . Ainsi, $f'(a) = \text{id}$, et le théorème d'unicité de H. Cartan (théorème 1.1) montre que $f = \text{id}$.

Ensuite, on vérifie facilement que l'ensemble des $(z_1, \dots, z_{d-1}) \in D^{d-1}$ tels que $(\varphi(z_1), \dots, \varphi(z_{d-1}))$ ne soit pas un système générateur de \mathbb{C}^n est caractérisé par la nullité de certains mineurs de la matrice des $(\varphi(z_1), \dots, \varphi(z_{d-1}))$ et que les fonctions holomorphes obtenues ne sont pas identiquement nulles, car φ est une carte locale au voisinage de a .

À titre d'exemple, il est très facile, pour un domaine cerclé borné de \mathbb{C}^n de dire quels sont les ensembles d'unicité pour $\text{Aut}(D)$ dont le premier élément est l'origine.

PROPOSITION 3.3. — *Soit D un domaine cerclé borné de \mathbb{C}^n et soit $(z_1, \dots, z_{d-1}) \in D^{d-1}$ un système générateur de \mathbb{C}^n . Alors $(0, z_1, \dots, z_{d-1})$ est un ensemble d'unicité pour $\text{Aut}(D)$.*

Démonstration. — On sait d'après H. Cartan [3] que tout automorphisme $f \in \text{Aut}(D)$ laissant l'origine fixe est linéaire. Le résultat s'en déduit facilement.

4. Quelques exemples d'ensembles d'unicité pour $H(D, D)$.

Considérons maintenant l'ensemble $H(D, D)$ des fonctions holomorphes de D dans D . Nous avons déjà défini ce qu'est un ensemble d'unicité pour $H(D, D)$. Bien sûr, un ensemble d'unicité pour $H(D, D)$ est aussi un ensemble d'unicité pour $\text{Aut}(D)$. Avant d'étudier le problème général, nous allons considérer deux exemples.

1) La boule-unité ouverte B_2 de \mathbb{C}^2 (pour la norme hermitienne).

Soit $Z = (z_1, z_2, z_3)$ trois points de B_2 . On veut étudier si Z est un ensemble d'unicité pour $H(B_2, B_2)$. Comme B_2 est homogène sous l'action du groupe $\text{Aut}(B_2)$, et quitte à remplacer f par $g^{-1} \circ f \circ g$, où g est un automorphisme analytique de B_2 convenablement choisi, il suffit de connaître les ensembles d'unicité dont le premier élément est l'origine 0.

Soit donc $f \in H(B_2, B_2)$ tel que $f(0) = 0, f(z_2) = z_2, f(z_3) = z_3$. Si $z_2 \neq 0$, l'application du disque-unité ouvert Δ dans B_2

$$\zeta \mapsto \varphi(\zeta) = \zeta z_2 / \|\zeta z_2\|$$

est une géodésique complexe, au sens de E. Vesentini [12 et 13] passant par 0 et z_2 , et comme la frontière de la boule-unité B_2 de \mathbb{C}^2 est strictement convexe, c'est, à un changement de paramètre près, la seule géodésique complexe passant par 0 et z_2 . On peut exprimer ce résultat autrement en disant que φ est la seule application holomorphe de Δ dans D telle que $\varphi(0) = 0, \varphi(\|z_2\|) = z_2$. Mais $f \circ \varphi$ vérifie la même propriété, ce qui entraîne que $f \circ \varphi = \varphi$. On a donc : $f(\zeta z_2) = \zeta z_2$. Par suite, $f'(0).z_2 = z_2$. Le même raisonnement montre que $f'(0).z_3 = z_3$. On en déduit que, si (z_2, z_3) forment une base de \mathbb{C}^2 , $f'(0) = \text{id}$ et, d'après le théorème d'unicité de

H. Cartan, $f = \text{id}$. Ainsi, les ensembles d'unicité pour $H(B_2, B_2)$ forment un ensemble dense dans B_2^3 . Connaissant les automorphismes linéaires de la boule B_2 , il est facile de vérifier que $Z = (0, z_2, z_3)$ est un ensemble d'unicité pour $\text{Aut}(B_2)$ si et seulement si (z_2, z_3) est une base de \mathbb{C}^2 . Ainsi, les ensembles d'unicité pour $H(B_2, B_2)$ et pour $\text{Aut}(B_2)$ sont les mêmes.

2) Le bidisque $\Delta^2 \subset \mathbb{C}^2$.

Considérons par exemple l'ensemble $Z^0 = ((0, 0), (1/2, 0), (-1/2, 0))$ de $(\Delta^2)^3$. Il est clair que Z^0 n'est un ensemble d'unicité ni pour $\text{Aut}(\Delta^2)$ ni pour $H(\Delta^2, \Delta^2)$. Mais, de plus, on a le résultat suivant.

Il existe un voisinage V de Z^0 dans $(\Delta^2)^3$ tel que tout point Z de V n'est pas un ensemble d'unicité pour $H(\Delta^2, \Delta^2)$.

En effet, soit $Z = ((z_1^1, z_2^1), (z_1^2, z_2^2), (z_1^3, z_2^3))$ et supposons que z_1^1, z_1^2, z_1^3 soient deux à deux distincts. Considérons le polynôme d'interpolation de Lagrange P tel que $P(z_1^i) = z_2^i$, $i = 1, 2, 3$. [P est l'unique polynôme de degré au plus deux vérifiant cette propriété]. Un calcul élémentaire montre qu'une condition suffisante pour que P envoie Δ dans Δ est que

$$\sum_{i=1}^3 \left[|z_2^i| \prod_{j \neq i} \frac{1 + |z_1^j|}{|z_1^i - z_1^j|} \right] < 1,$$

et il est clair que l'ensemble ainsi défini contient un voisinage V de Z^0 dans $(\Delta^2)^3$. Alors l'application holomorphe $f : \Delta^2 \rightarrow \Delta^2$ définie par $f(u, v) = (u, P(u))$ est une rétraction holomorphe, distincte de l'identité dont l'image contient Z . Le résultat est démontré.

On peut quand même remarquer (et nous reviendrons sur cette question dans la suite) qu'il existe des ensembles d'unicité pour $H(\Delta^2, \Delta^2)$. Ainsi, $Z = ((0, 0), (a, 0), (0, b))$ avec a et b non nuls, est un ensemble d'unicité. En effet, soit $f = (f_1, f_2)$ tel que $f|_Z = \text{id}$. On a : $f_1(0, 0) = 0$, $f_1(a, 0) = a$. Le lemme de Schwarz montre que $f_1(\cdot, 0)$ est un automorphisme analytique de Δ , égal à l'identité. Mais d'après T. Franzoni et E. Vesentini [6], si on considère une famille d'applications holomorphes $\varphi : M \times D \rightarrow D$ (avec M connexe et D borné) telle que, pour un certain m_0 dans M , $\varphi(m_0, z) = z$, alors, pour tout $m \in M$, $\varphi(m, z) = z$. On en déduit que $f_1(z_1, z_2) = z_1$. Le même raisonnement appliqué à f_2 montre que $f_2(z_1, z_2) = z_2$, et Z est bien un ensemble d'unicité.

Ainsi, les deux exemples que nous avons donnés montrent que, pour $H(D, D)$, les choses peuvent être plus compliquées. Dans certains cas, les ensembles d'unicité forment un ouvert dense de D^{n+1} ; dans d'autres cas, on

peut trouver des ensembles d'unicité mais ils ne forment pas un ensemble dense.

Nous allons maintenant montrer, dans le cas général et dès que $d \geq n + 1$, qu'il existe des ensembles d'unicité dans D^d .

5. Existence d'ensembles d'unicité pour $H(D, D)$.

Nous allons d'abord montrer, comme précédemment, le théorème suivant.

THÉORÈME 5.1. — *Soit D un domaine borné taut de \mathbb{C}^n , et soit $f \in H(D, D)$. Soit d un entier. L'ensemble $X(d)$ des éléments (z_1, \dots, z_d) qui forme un ensemble d'unicité pour $H(D, D)$ est un ouvert de D^d .*

Démonstration. — Il nous faut montrer que son complémentaire est fermé. Soit Z^n une suite d'éléments de D^d qui n'appartiennent pas à $X(d)$, convergente vers $Z^0 = (z_1, \dots, z_n)$. On peut donc trouver $f_n \in H(D, D)$ tel que $f_n|_{Z^n} = \text{id}|_{Z^n}$ et que f_n ne soit pas l'identité. Soit z_1^n le premier élément de Z^n . Comme f_n est différent de l'identité, $f_n'(z_1^n)$ admet une valeur propre λ de module ≤ 1 , différente de 1. Soit $r, 0 < r < 1$. En distinguant le cas $|\lambda| = 1$ et $|\lambda| < 1$, et quitte à remplacer par une puissance convenable de f_n , on peut supposer que $f_n'(z_1^n)$ admet une valeur propre λ qui n'appartient pas au disque $\Delta(1, r)$ de centre 1 et de rayon r . D'après le théorème de Montel, on peut extraire de la suite f_n une sous-suite f_{n_k} convergeant uniformément sur tout compact vers f . On déduit du fait que D est taut que f appartient à $H(D, D)$. Il est clair d'une part que $f(z_i) = z_i, i = 1, \dots, d$ et que, d'autre part, $f'(z_1)$ admet une valeur propre différente de 1. Ainsi Z n'est pas un ensemble d'unicité et le théorème est démontré.

Comme dans le cas des automorphismes analytiques, pour d petit, il n'existe pas d'ensembles d'unicité pour $H(D, D)$. Cependant, nous pouvons montrer le théorème suivant.

THÉORÈME 5.2. — *Soit D un domaine borné de \mathbb{C}^n , et soit $a \in D$. Alors il existe un ouvert U de D^n tel que $(a, \dots, a) \in \bar{U}$ et que, pour tout $(z_1, \dots, z_n) \in U$, (a, z_1, \dots, z_n) soit un ensemble d'unicité pour $H(D, D)$.*

Démonstration. — Soit donc $f \in H(D, D)$ telle que $f(a) = a, f(z_i) = z_i, i = 1, \dots, n$. On veut montrer que, si (z_1, \dots, z_n) sont bien choisis, f est

égal à l'identité. Choisissons $r > 0$ tel que la boule $B_k(a, r)$ de centre a et de rayon r pour la distance de Kobayashi k_D soit relativement compacte dans D . On peut supposer que tous les points z_i appartiennent à $B_k(a, r)$ et on sait d'autre part que $B_k(a, r)$ est stable par f . Toute application g adhérente à la suite des itérées $(f|_{B_k(a, r)})^n$ envoie a priori $B_k(a, r)$ dans $\overline{B_k(a, r)}$, mais si $z \in B_k(a, r)$ est tel que $k_D(a, z) = r_0 < r$, alors $k_D(a, g(z)) \leq r_0$ et $g(z) \in B_k(a, r)$. Par suite, toute application g adhérente à la suite des itérées $(f|_{B_k(a, r)})^n$ envoie $B_k(a, r)$ dans $B_k(a, r)$. En reprenant la construction de M. Abate [1], on montre qu'il existe une rétraction holomorphe ρ adhérente à la suite des itérées $(f|_{B_k(a, r)})^n$ et ρ est une rétraction holomorphe de $B_k(a, r)$ dans $B_k(a, r)$. D'après M. Abate [1], H. Cartan [4] et E. Bedford [2], dire que f est un automorphisme analytique de D est équivalent à dire que la dimension de l'image de ρ est n , c'est-à-dire que ρ est l'application identique.

Pour simplifier, supposons que $a = 0$. La carte locale u définie au théorème 2.4 qui linéarise ρ est telle que $u'(0) = \text{id}$. C'est une application holomorphe de $B_k(a, r)$ dans \mathbb{C}^n bornée par une constante M qui ne dépend que de D . Comme $B_k(a, r)$ contient une boule $B(0, r')$ pour la norme, on peut utiliser les inégalités de Cauchy, et on a, pour tout $z \in B(0, r'/2)$,

$$\|(1/n!)u^{(n)}(z)\| \leq \frac{M}{(r'/2)^n},$$

où $\|(1/n!)u^{(n)}(z)\|$ désigne la norme du polynôme homogène $x \rightarrow (1/n!)u^{(n)}(z).(x, \dots, x)$. De la formule de Taylor à l'ordre 2, on déduit

$$\|u(z) - u'(0).z\| \leq \frac{\|u^{(2)}\|_{[0, z]}}{2!} \|z\|^2$$

$$\|u(z) - z\| \leq \frac{M}{(r'/2)^2} \|z\|^2.$$

Maintenant, si on considère n points (z_1, \dots, z_n) contenus dans la boule $B(0, r'/2)$ de \mathbb{C}^n , on a :

$$u(z_i) = z_i + \varepsilon(z_i) \text{ avec } \|\varepsilon(z_i)\| \leq \frac{M}{(r'/2)^2} \|z_i\|^2.$$

Soit $d = \det(u(z_1), \dots, u(z_n))$. En écrivant $u(z_i) = z_i + \varepsilon(z_i)$, et en utilisant la n -linéarité du déterminant, on trouve que

$$d = \sum \det(a_{f(1)}, \dots, a_{f(n)}),$$

la somme étant étendue à toutes les applications $f : \{1, \dots, n\} \rightarrow \{1, 2\}$, où $a_{f(i)}$ vaut z_i si $f(i) = 1$, $\varepsilon(z_i)$ si $f(i) = 2$.

Par suite,

$$|d - \det(z_1, \dots, z_n)| \leq \sum |\det(a_{f(1)}, \dots, a_{f(n)})|,$$

la somme étant étendue à toutes les applications f où f est différente de l'application constante égale à 1. On a alors :

$$|d - \det(z_1, \dots, z_n)| \leq (\|z_1\| + \|\varepsilon(z_1)\|) \dots (\|z_n\| + \|\varepsilon(z_n)\|) - \|z_1\| \dots \|z_n\|.$$

En posant $K = M/(r'/2)^2$, on trouve :

$$|d - \det(z_1, \dots, z_n)| \leq (\|z_1\| + K\|z_1\|^2) \dots (\|z_n\| + K\|z_n\|^2) - \|z_1\| \dots \|z_n\|.$$

On peut facilement trouver un ouvert V étoilé par rapport à l'origine de $(\mathbb{C}^n)^n$ tel que, pour tout $z = (z_1, \dots, z_n)$ appartenant à V , on ait

$$|\det(z_1, \dots, z_n)| \geq 1/2 \|z_1\| \dots \|z_n\|.$$

Alors, dès que (z_1, \dots, z_n) appartenant à V est assez proche de 0, d est différent de 0, et $(u(z_1), \dots, u(z_n))$ est une base de \mathbb{C}^n . Comme ρ est égal à $\rho'(0)$ dans la carte u , ceci montre que ρ est égal à l'identité et f est un automorphisme analytique de D . Comme les ensembles des points (z_1, \dots, z_n) de D tels que (a, z_1, \dots, z_n) soit un ensemble d'unicité pour $\text{Aut}(D)$ est dense dans D^n , on en déduit qu'il existe un ouvert U de D^n tel que $(a, \dots, a) \in \bar{U}$ et que, pour tout $(z_1, \dots, z_n) \in U$, (a, z_1, \dots, z_n) soit un ensemble d'unicité pour $H(D, D)$. Le théorème est démontré.

6. Le cas de la dimension 1 et 2.

Nous allons maintenant voir ce que deviennent ces conditions en dimension 1 et 2. Commençons par le cas de la dimension 1.

Soit D un domaine borné de \mathbb{C} . D'après H. Cartan [4], toute application holomorphe $f : D \rightarrow D$ ayant 2 points fixes distincts est un automorphisme analytique de D . [En effet, étant donné une telle application, on peut trouver une suite f^{n_k} extraite de la suite des itérées qui converge vers une application g non dégénérée, ce qui, en dimension 1, signifie seulement que la dérivée g' n'est pas identiquement nulle. C'est bien sûr le cas puisque g n'est pas constante].

Les ensembles d'unicité pour $H(D, D)$ et pour $\text{Aut}(D)$ sont donc les mêmes. Génériquement, il suffit de considérer deux points distincts de D pour avoir un ensemble d'unicité. En général, deux points distincts quelconques ne suffisent pas, comme le montre l'exemple suivant : $D = \{z \in \mathbb{C} | r < |z| < 1/r\}$, avec $0 < r < 1$. Alors, l'application $f(z) = 1/z$ laisse fixes les points 1 et -1 .

En revanche, on sait d'après un résultat de E. Peschl et M. Lehtinen [11] que, si D est un domaine borné de \mathbb{C} et si $f : D \rightarrow D$ a 3 points fixes distincts, alors f est l'identité.

Étudions maintenant le cas de la dimension 2. Nous allons considérer un domaine borné convexe D de \mathbb{C}^2 , et nous allons montrer qu'étant donné deux points distincts (z_1, z_2) de D , on peut toujours trouver un troisième point z de D tel que (z, z_1, z_2) soit un ensemble d'unicité pour $H(D, D)$.

THÉORÈME 6.1. — *Soit D un domaine borné convexe de \mathbb{C}^2 et soient (z_1, z_2) deux points distincts de D . Alors il existe un ouvert non vide U de D tel que, pour tout $z \in U$, (z, z_1, z_2) soit un ensemble d'unicité pour $H(D, D)$.*

Bien sûr, comme le montrent les calculs faits dans le cas du bidisque Δ^2 , U n'est pas dense dans D en général.

Démonstration. — Soit D un domaine borné convexe de \mathbb{C}^2 et soit $f : D \rightarrow D$ une application holomorphe. On sait d'après [15] que, si l'ensemble $\text{Fix } f$ des points fixes de f est non vide, il existe une rétraction holomorphe $\rho : D \rightarrow \text{Fix } f$. Pour montrer que f est égal à l'identité, il suffit de montrer que l'image de ρ est de dimension 2. Si l'ensemble des points fixes de f contient au moins 2 points distincts, il est clair que l'image de la rétraction ρ ne peut pas être de dimension 0; elle est donc de dimension au moins 1.

Considérons une rétraction holomorphe $\rho : D \rightarrow D$ telle que $\rho(D)$ soit de dimension 1. On a alors

$$\rho(D) \longrightarrow D \longrightarrow \rho(D)$$

où la première application est l'injection canonique de $\rho(D)$ dans D . On en déduit une suite d'applications en homotopie

$$\pi_1(\rho(D), a) \longrightarrow \pi_1(D, a) \longrightarrow \pi_1(\rho(D), a).$$

La composée de ces applications est l'identité sur $\pi_1(\rho(D), a)$, et comme $\pi_1(D, a) = 0$, on en déduit que $\pi_1(\rho(D), a) = 0$. Ainsi, la variété $\rho(D)$ est simplement connexe; comme elle est hyperbolique, elle est isomorphe au disque-unité Δ . On déduit de E. Vesentini [12] et [13] que $\rho(D)$ est l'image d'une géodésique complexe $\varphi : \Delta \rightarrow D$.

Pour montrer le théorème et compte-tenu du fait que, si (z, z_1, z_2) sont des points fixes de f , il existe une rétraction holomorphe dont l'image contient les points (z, z_1, z_2) , il nous suffit de montrer qu'il existe un ouvert

non vide U tel que, pour tout $z \in U$, il n'existe pas de géodésique complexe $\varphi : \Delta \rightarrow D$ telle que son image contienne (z, z_1, z_2) .

Soient donc deux points distincts z_1 et z_2 de D . On sait qu'il existe une application holomorphe $g : D \rightarrow \Delta$ telle que

$$c_D(z_1, z_2) = c_\Delta(g(z_1), g(z_2)) = \omega(g(z_1), g(z_2)),$$

où c_D désigne la distance de Carathéodory sur D , et ω la distance de Poincaré. (voir [8] et [9]). Supposons que $z \in \varphi(\Delta)$, où φ est une géodésique complexe passant par z_1 et z_2 . Alors, g est une isométrie pour la distance de Carathéodory c_D sur $\varphi(\Delta)$. On a donc :

$$c_D(z, z_1) = c_\Delta(g(z), g(z_1)) \quad (1).$$

Soit $\varepsilon > 0$. Définissons l'ouvert

$$U_\varepsilon = \{z \in D \mid c_D(z, z_1) > \varepsilon \text{ et } c_\Delta(g(z), g(z_1)) < \varepsilon\}.$$

Soit $z \in U_\varepsilon$. Il est clair d'après (1) que, quelle que soit la géodésique complexe $\varphi : \Delta \rightarrow D$ passant par z_1 et z_2 , z n'appartient pas à $\varphi(\Delta)$.

Quitte à changer la paramétrisation de φ , on peut supposer que $g(\varphi(\zeta)) = \zeta$, pour tout $\zeta \in \Delta$. Soit $\zeta_1 \in \Delta$ tel que $\varphi(\zeta_1) = z_1$. On a :

$$g'(z_1) \cdot \varphi'(\zeta_1) = 1.$$

Le théorème des fonctions implicites montre que l'ensemble

$$\{z \in D \mid g(z) = g(z_1)\}$$

est, au voisinage de z_1 , une sous-variété analytique complexe de dimension 1. Il existe donc $z \neq z_1$ dans D tel que $g(z) = g(z_1)$. On a :

$$0 \neq c_D(z, z_1) > c_D(g(z), g(z_1)) = 0,$$

et $z \in U_\varepsilon$, pour $\varepsilon > 0$ suffisamment petit. Ainsi, pour $\varepsilon > 0$ suffisamment petit, U_ε n'est pas vide.

On en déduit que, pour tout $z \in U_\varepsilon$, pour tout $f \in H(D, D)$, $f(z_1) = z_1, f(z_2) = z_2, f(z) = z$ entraîne que f est égal à l'identité. Le théorème est démontré.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] M. ABATE, Iteration theory, compactly divergent sequences and commuting holomorphic maps, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci., (4), 18 (1991), 167–191.
- [2] E. BEDFORD, On the automorphism group of a Stein manifold, Math. Ann., 266 (1983), 215–227.

- [3] H. CARTAN, Les fonctions de deux variables complexes et le problème de la représentation analytique, *J. Math. pures et appl.*, 9e série, 11 (1931) 1–114.
- [4] H. CARTAN, Sur les fonctions de plusieurs variables complexes. L'itération des transformations intérieures d'un domaine borné, *Math. Z.*, 35 (1932), 760–773.
- [5] H. CARTAN, Sur les rétractions d'une variété, *C. R. Acad. Sci. Paris, Sér. I Math.*, 303 (1986), 715.
- [6] T. FRANZONI and E. VESENTINI, Holomorphic maps and invariant distances, *Notas de Matematica [Mathematical Notes]*, 69, North-Holland Publishing Co, Amsterdam, 1980.
- [7] B. FRIDMAN, K. KIM, S. KRANTZ, D. MA, On fixed points and determining sets for holomorphic automorphisms, *Michigan Math. J.*, 50 (2002), 507–515.
- [8] L. HARRIS, Schwarz-Pick systems of pseudometrics for domains in normed linear spaces, *Advances in holomorphy (Proc. Sem. Univ. Fed. Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 1977)*, North-Holland Math. Stud., 34, 345–406, North-Holland, Amsterdam 1979.
- [9] M. JARNICKI and P. PFLUG, Invariant distances and metrics in complex analysis. de Gruyter Expositions in Mathematics, 9, Walter de Gruyter Co, Berlin, 1993.
- [10] R. NARASIMHAN, Several complex variables, The University of Chicago Press, Chicago, Ill., 1971.
- [11] E. PESCHL and M. LEHTINEN, A conformal self-map which fixes 3 points is the identity, *Ann. Acad. Sci. Fenn., sér. A I Math.*, 4 (1979), 85–86.
- [12] E. VESENTINI, Complex geodesics, *Compositio Math*, 44 (1981), 375–394.
- [13] E. VESENTINI, Complex geodesics and holomorphic maps, *Symposia Mathematica*, Vol. XXVI (Rome, 1980), 211–230.
- [14] J.-P. VIGUÉ, Le groupe des automorphismes analytiques d'un domaine borné d'un espace de Banach complexe. Application aux domaines bornés symétriques, *Ann. Sci. École Norm. Sup.*, (4) 9 (1976), 203–281.
- [15] J.-P. VIGUÉ, Points fixes d'applications holomorphes dans un domaine borné convexe de \mathbb{C}^n , *Trans. Amer. Math. Soc.*, 289 (1985), 345–353.
- [16] J.-P. VIGUÉ, Sur les points fixes d'applications holomorphes, *C. R. Acad. Sci. Paris, Sér. I Math.*, 303 (1986), 927–930.
- [17] J.-P. VIGUÉ, Sur les ensembles d'unicité pour les automorphismes analytiques d'un domaine borné, *C. R. Math. Acad. Sci. Paris*, 336 (2003), 589–592.

Manuscrit reçu le 29 mars 2004,
accepté le 7 septembre 2004.

Jean-Pierre VIGUÉ,
Université de Poitiers
UMR CNRS 6086, Mathématiques
SP2MI, BP 30179
86962 Futuroscope (France)
vigie@math.univ-poitiers.fr