ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

JACQUES DENY

Principe complet du maximum et contractions

Annales de l'institut Fourier, tome 15, nº 1 (1965), p. 259-271

<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1965__15_1_259_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
15, 1 (1965), 259-272.

PRINCIPE COMPLET DU MAXIMUM ET CONTRACTIONS

par Jacques DENY

On sait que A. Beurling a eu l'idée d'introduire les contractions en théorie du potentiel; cela a conduit à la notion d'espace de Dirichlet [4], c'est-à-dire à une axiomatique de la notion d'énergie en théorie du potentiel.

Le but de cet exposé est de montrer que, dans des espaces fonctionnels très généraux, les deux énoncés suivants sont équivalents:

1) les contractions normales (resp. la contraction « module ») opèrent.

2) le principe complet du maximum (resp. le principe de domination) est satisfait.

Ce résultat établit donc le lien entre les espaces de Dirichlet (ou des espaces fonctionnels voisins) et les noyaux d'une « bonne théorie » du potentiel.

On verra en outre que, dans les cas de la convolution, toutes les contractions opèrent dès que la contraction-module opère.

1. Préliminaires sur les espaces fonctionnels.

Soient X un espace localement compact, et ξ une mesure de Radon positive sur X. Modifiant légèrement la définition de Aronszajn et Smith [1], nous adopterons la suivante:

DÉFINITION. — *Un espace fonctionnel réel* $\mathcal{H} = \mathcal{H}(X, \xi)$ *relativement à* X *et* ξ *est un espace de Hilbert complet de classes de fonctions réelles localement* ξ*-intégrables, vérifiant l'axiome suivant:*

(*a*) *A tout compact* K *de* X *on peut associer une constante finie* A(K) *telle que l'on ait, pour tout $u \in \mathscr{H}$:*

$$\int_K |u(x)|\, d\xi(x) \leqslant A(K)\|u\| \ (^1).$$

Deux fonctions localement presque partout égales (pour ξ) représentent le même élément de $\mathscr{H}$. Dans la relation précédente, la fonction u du premier membre désigne un représentant quelconque de l'élément $u \in \mathscr{H}$; par la suite, on fera constamment des abus de langage analogues. La norme et le produit scalaire dans $\mathscr{H}$ sont désignés respectivement par $\|\,.\,\|$ et $(\,.\,,\,.\,)$. On considèrera seulement le cas réel, l'extension au domaine complexe des résultats de cet exposé étant immédiate.

L'espace fonctionnel $\mathscr{H}$ est dit *régulier* si $\mathscr{C} \cap \mathscr{H}$ est dense dans $\mathscr{C}$ et dans $\mathscr{H}$, $\mathscr{C}$ étant l'espace des fonctions numériques continues à support compact. Cette hypothèse ne sera *jamais faite* dans cet exposé.

On désignera par $\mathfrak{M}$ l'ensemble des (classes de) fonctions numériques mesurables bornées à support compact dans X, et par $\mathfrak{M}^+$ l'ensemble des éléments positifs de $\mathfrak{M}$.

Potentiels d'une fonction de $\mathfrak{M}$. A toute fonction $f \in \mathfrak{M}$ on peut associer un élément unique $U^f \in \mathscr{H}$ tel que, pour tout $u \in \mathscr{H}$ on ait

$$(U^f, u) = \int u(x) f(x)\, d\xi(x);$$

l'ensemble de ces « potentiels » U^f est partout dense dans $\mathscr{H}$.

C'est une conséquence facile et d'ailleurs bien connue de l'axiome (a); l'élément U^f est appelé le potentiel engendré par f. Le carré de sa norme $\|U^f\|^2 = \int U^f f\, d\xi$ est *l'énergie* de f. Plus généralement, si f et g sont deux éléments de $\mathfrak{M}$, on a :

$$(U^f, U^g) = \int U^f g\, d\xi = \int U^g f\, d\xi.$$

En l'absence de toute hypothèse de densité concernant $\mathscr{H}$, l'application $f \to U^f$ de $\mathfrak{M}$ dans $\mathscr{H}$ n'est pas injective.

Potentiels purs. On appelle potentiels purs les éléments du cône $\mathscr{P}$, adhérence de l'ensemble des éléments U^f, avec $f \in \mathfrak{M}^+$.

La projection u' d'un élément $u \in \mathscr{H}$ sur $\mathscr{P}$ est caractérisée par les relations :

(1) Il s'agit d'« un espace fonctionnel hilbertien ξ-mesurable » dans la terminologie de Aronszajn et Smith.

$$u'(x) \geqslant u(x) \qquad \text{presque partout (localement);}$$

$$(u', u) = \|u'\|^2.$$

C'est une application facile du théorème des projections sur un convexe fermé non vide dans un espace de Hilbert. On en déduit une importante caractérisation des potentiels purs: *pour qu'un élément $u \in \mathscr{H}$ soit dans $\mathscr{P}$, il faut et il suffit que, pour tout élément positif v de $\mathscr{H}$, on ait:*

$$(u, v) \geqslant 0,$$

ou, ce qui revient au même:

$$\|u + v\| \geqslant \|u\|.$$

Espaces fonctionnels à noyau positif. On dira que l'espace fonctionnel $\mathscr{H}$ est à noyau positif si, pour toute $f \in \mathfrak{M}^+$, l'élément U^f est positif (i.e., il existe une fonction positive représentant U^f). Lorsqu'il en est ainsi, les potentiels purs sont évidemment positifs.

Rappelons ici un théorème de Aronszajn et Smith [2]: pour que l'espace fonctionnel $\mathscr{H}$ soit à noyau positif, il faut et il suffit qu'à tout élément u de $\mathscr{H}$ on puisse associer un autre élément $\tilde{u}$ vérifiant les relations suivantes:

$$\tilde{u}(x) \geqslant |u(x)| \qquad \text{presque partout (localement);}$$

$$\|\tilde{u}\| \leqslant \|u\|.$$

On montre facilement que, dans un espace fonctionnel à noyau positif, les relations $f \in \mathfrak{M}^+$, $g \in \mathfrak{M}^+$, $U^f \leqslant U^g$ entraînent

$$\|U^f - U^g\|^2 \leqslant \|U^g\|^2 - \|U^f\|^2;$$

il en résulte aussitôt que si $\{U^{f_i}\}_{i \in I}$ (avec $f_i \in \mathfrak{M}^+$) est une famille ordonnée filtrante d'éléments de norme uniformément bornée, cette famille converge dans $\mathscr{H}$ (vers un élément de $\mathscr{P}$).

Les principes fondamentaux. Soit $\mathscr{H}$ un espace fonctionnel. On dira que *le principe de domination* est satisfait dans $\mathscr{H}$ si, quels que soient f et g de $\mathfrak{M}^+$, la relation $U^f(x) \leqslant U^g(x)$ est satisfaite presque partout (localement) sur X dès qu'elle l'est presque partout sur l'ensemble $\{x | f(x) > 0\}$.

Il s'agit d'une forme particulièrement simple d'un énoncé observé par H. Cartan [5] en théorie newtonienne. De même, adaptant une définition donnée dans [6], on dira que *le principe complet du maximum* est satisfait dans $\mathscr{H}$ si, quels que soient f et $g \in \mathfrak{M}^+$, la relation

$U^f(x) \leqslant U^g(x) + 1$ est satisfaite presque partout (localement) sur X dès qu'elle l'est presque partout sur $\{x | f(x) > 0\}$.

Evidemment le principe complet du maximum entraîne le principe de domination, qui à son tour entraîne que l'espace fonctionnel $\mathscr{H}$ est à noyau positif.

Les contractions. Soient u et v deux fonctions numériques définies sur X. On dit que v est une *contraction normale* de u si on a les relations suivantes:

$$|v(x)| \leqslant |u(x)| \qquad (x \in X);$$

$$|v(x) - v(y)| \leqslant |u(x) - u(y)| \qquad (x \in X,\ y \in X).$$

Pour que v soit une contraction normale de u, il faut et il suffit qu'il existe une contraction normale T de la droite réelle (application de **R** dans **R** diminuant les distances et conservant l'origine) telle que $v = T \circ u$.

On dit que l'élément $v \in \mathscr{H}$ est une contraction normale de l'élément $u \in \mathscr{H}$ s'il existe un représentant de v qui est une contraction normale d'un représentant de u.

On dit qu'une contraction normale T *opère* dans $\mathscr{H}$ si, quel que soit $u \in \mathscr{H}$, on a $T \circ u \in \mathscr{H}$ et $\|T \circ u\| \leqslant \|u\|$; évidemment $T \circ u$ désigne ici la classe de la fonction $T \circ f$, où f est un représentant quelconque de l'élément u (cette classe est indépendante du choix du représentant f).

Particulièrement importante pour notre objet sera la *contraction-module*, définie par $T(a) = |a|$ $(a \in \mathbf{R})$.

2. Espaces fonctionnels sur lesquels les contractions opèrent.

Soit $\mathscr{H}$ un espace fonctionnel. Pour l'instant on supposera seulement que *la contraction-module opère sur* $\mathscr{H}$. Voici alors un résultat de [4]:

Lemme. — *Si la contraction-module opère sur* $\mathscr{H}$, *les potentiels purs sont positifs et l'enveloppe inférieure de deux potentiels purs est un potentiel pur.*

Rappelons brièvement la démonstration. Soit u un potentiel pur; l'ensemble $\mathscr{U} = \{v \in \mathscr{H} | v - u \geqslant 0\}$ est un convexe fermé non vide de $\mathscr{H}$, dont u est l'unique élément de norme minimum (d'après la caractérisation des potentiels purs donnée dans **1**); or on a par hypothèse $|u| \in \mathscr{U}$ et $\| \, |u| \, \| \leqslant \|u\|$, d'où $u = |u| \geqslant 0$.

Soient maintenant u et v deux potentiels purs; évidemment $\inf(u, v) = \frac{u + v}{2} - \frac{|u - v|}{2}$ est un élément de $\mathscr{H}$. Parmi les éléments de $\mathscr{H}$ majorant $\inf(u, v)$ il en est un et un seul de norme minimum, soit w; c'est un potentiel pur (voir caractérisation des éléments de $\mathscr{P}$). Comme on a:

$$4\|\inf(u, w)\|^2 = \|u + w\|^2 + \| |u - w| \|^2 - 2(u + w, |u - w|)$$
$$\leqslant \|u + w\|^2 + \|u - w\|^2 - 2(u + w, u - w) = 4\|w\|^2$$

(on a utilisé à nouveau la caractérisation des potentiels purs), il en résulte que $w = \inf(u, w)$. On a de même $w = \inf(v, w)$, d'où le résultat.

THÉORÈME 1. — *Si la contraction-module opère sur $\mathscr{H}$, le principe de domination est satisfait.*

On va montrer plus: si $f \in \mathfrak{M}^+$ et $u \in \mathscr{P}$ sont tels que $U^f(x) \leqslant u(x)$ presque partout sur l'ensemble $\{x | f(x) > 0\}$, la même relation a lieu presque partout localement sur X. Or la méthode utilisée par H. Cartan [5] en théorie newtonienne s'adapte mot à mot: d'après le lemme, $v = \inf(U^f, u)$ est un potentiel pur, et on a:

$$\|U^f - v\|^2 = (U^f, U^f - v) - (v, U^f - v) \leqslant 0$$

car $(U^f, U^f - v) = \int (U^f - v) f \, d\xi = 0$ puisqu'on a $U^f(x) = v(x)$ presque partout sur $\{x | f(x) > 0\}$, et d'autre part $(v, U^f - v) \geqslant 0$ puisqu'on a $v \in \mathscr{P}$ et $U^f - v \geqslant 0$. On a donc $v = U^f$, d'où le résultat.

On va supposer maintenant que *toutes les contractions normales* opèrent sur $\mathscr{H}$. Il en résulte que *si la fonction u représente un potentiel pur, $v = \inf(u, 1)$ représente aussi un potentiel pur.* En effet v est une contraction normale de u; c'est donc un élément de $\mathscr{H}$. Soit alors w l'unique élément de $\mathscr{H}$ de norme minima parmi ceux qui majorent v; on sait que w est un potentiel pur, et on démontre, comme pour le lemme précédent qu'on a $w = \inf(u, w)$; d'autre part $\inf(w, 1)$ est un élément de $\mathscr{H}$ majorant v, et comme c'est une contraction normale de w on a $w = \inf(w, 1)$ (unicité de l'élément de norme minima). Il vient donc finalement $w = \inf(u, 1) = v$, donc v est bien un potentiel pur.

Voici donc un corollaire de cette remarque et du théorème 1: *si u et v sont des potentiels purs*, $\inf(u, v + 1)$ *est un potentiel pur.* Cela résulte immédiatement de la relation élémentaire:

$$\inf(u, v + 1) = \inf(u, v + \inf(u, 1)).$$

THÉORÈME 1'. — *Si les contractions normales opèrent sur $\mathscr{H}$, le principe complet du maximum est satisfait.*

En effet on démontre plus généralement que si $f \in \mathfrak{M}^+$ et $v \in \mathscr{P}$ sont tels que $U^f(x) \leqslant v(x) + 1$ presque partout sur $\{x | f(x) > 0\}$, cette relation a lieu presque partout localement dans X. La démonstration est toute semblable à celle du théorème 1 : il suffit de vérifier, par le procédé de Cartan, que U^f est égal au potentiel pur $w = \inf(U^f, v + 1)$.

Remarque. — Un espace de Dirichlet n'est autre qu'un espace fonctionnel *régulier* (voir § **1**) dans lequel toutes les contractions normales opèrent. Le principe complet du maximum est donc satisfait dans tout espace de Dirichlet, mais, dans ce cas, on peut en donner un énoncé beaucoup plus fin, grâce à l'emploi des éléments « précisés » (voir [4]).

3. Espaces fonctionnels dans lesquels le principe de domination est satisfait.

Soit $\mathscr{H}$ un espace fonctionnel. Dans les paragraphes **3** et **4** on supposera toujours vérifié l'axiome suivant, plus fort que (a):

(a') *Pour tout compact* K *de* X, *il existe une constante finie* B(K) *telle que, pour tout élément u de $\mathscr{H}$, on ait :*

$$\int_K |u(x)|^2 \, d\xi(x) \leqslant B(K)\|u\|^2 :$$

Evidemment l'axiome (a') entraîne l'axiome (a), mais la réciproque est inexacte. On verra cependant au paragraphe **5** une classe importante d'espaces fonctionnels dans lesquels l'axiome (a') est vérifié.

L'axiome (a') permet de définir les potentiels U^f pour des fonctions f n'appartenant pas à $\mathfrak{M}$: A toute fonction f de carré intégrable à support compact, on peut associer un élément unique U^f de $\mathscr{H}$ tel qu'on ait, pour tout élément u de $\mathscr{H}$:

$$(U^f, u) = \int uf d\xi.$$

En appliquant l'inégalité de Schwarz on en déduit que si f est nulle hors du compact K, on a :

$$\|U^f\|^2 \leqslant B(K)\int|f|^2 \, d\xi.$$

Si la fonction f est positive, U^f est un potentiel pur; en effet si on pose $f_n = \inf(f, n)$ $(n \in \mathbf{N})$, on vérifie facilement que U^{f_n} converge fortement vers U^f.

Dans les paragraphes **3** et **4** on suppose toujours vérifié le *principe de domination*, ce qui entraîne que $\mathscr{H}$ est à noyau positif. On aura besoin d'un énoncé plus fort en apparence:

Extension du principe de domination. Pour toute fonction $f \in (L^2)^+$ *à support compact et pour tout potentiel pur* u*, la relation* $U^f(x) \leqslant u(x)$ *a lieu presque partout localement sur* X *dès qu'elle a lieu presque partout sur* $\{x | f(x) > 0\}$.

Le principe de domination entraîne ipso facto cet énoncé plus fort. On ne détaillera pas la démonstration, qui ne présente aucune difficulté sérieuse, mais exige quelques précautions; l'idée essentielle est évidemment d'approcher u par des éléments U^ϕ, avec $\phi \in \mathfrak{M}^+$.

THÉORÈME 2. — *Soit* $\mathscr{H}$ *un espace fonctionnel; si l'axiome* (a') *et le principe de domination sont satisfaits, la contraction-module opère dans* $\mathscr{H}$.

1°) *Démonstration dans le cas où* X *est compact.* L'application linéaire $G: f \to U^f$ de L^2 dans L^2 est continue, car l'axiome (a') entraîne:

$$\|U^f\|_{L^2} \leqslant B(X)\|f\|_{L^2}.$$

Cet opérateur G (le *noyau* de $\mathscr{H}$) est hermitien positif, donc $I + \lambda G$ est inversible pour tout $\lambda > 0$. On pose:

$$R_\lambda = G(I + \lambda G)^{-1} = (I + \lambda G)^{-1}G.$$

Cet opérateur R_λ (la résolvante) est hermitien positif, de norme $\leqslant 1/\lambda$; il vérifie par définition:

(1) $$\lambda G R_\lambda = \lambda R_\lambda G = G - R_\lambda \text{ } (^2).$$

Appelons *forme approchée* d'indice λ la forme quadratique H_λ définie sur L^2 par:

$$H_\lambda(f) = \lambda \int (f - \lambda R_\lambda f) f \, d\xi = \lambda(f - \lambda R_\lambda f, f)_{L^2}.$$

On admettra le résultat suivant, dont la démonstration repose

(2) Les résolvantes ont été utilisées systématiquement en théorie du potentiel (mais dans un cadre assez différent) par G. Hunt [8] (cas d'un noyau inversible) et par G. Lion [9] (cas d'un noyau non inversible).

uniquement sur la structure hilbertienne de l'espace L^2 (et le fait que G est hermitien positif sur L^2):

Pour tout $u \in L^2$, *la fonction* $\lambda \to H_\lambda(u)$ *est croissante; les éléments* u *de* $\mathscr{H}$ *sont les éléments de* L^2 *pour lesquels* $H_\lambda(u)$ *est bornée, et on a alors:*

$$\|u\|^2 = \lim_{\lambda \to \infty} H_\lambda(u).$$

Observons que *si* $f \in L^2$ *est positive,* $R_\lambda f$ *est positive.* En effet posons $g = R_\lambda f$. D'après (1) on a $\lambda G g = Gf - g$, donc

$$\lambda G g^+(x) \leqslant Gf(x) + \lambda G g^-(x)$$

presque partout sur $\{x | g^+(x) > 0\}$. D'après l'extension du principe de domination, cette inégalité a lieu presque partout dans X, d'où $g(x) = Gf(x) - \lambda Gg(x) \geqslant 0$ presque partout dans X, d'où le résultat ([3]).

Le théorème s'en déduit immédiatement: soit en effet $u \in \mathscr{H}$. On a $|u| \in L^2$ et

$$H_\lambda(|u|) = \lambda \int |u|^2 \, d\xi - \lambda^2 \int (R_\lambda |u|)|u| \, d\xi.$$

Comme R_λ transforme les fonctions positives en fonctions positives, on a donc $H_\lambda(|u|) \leqslant H_\lambda(u) \leqslant \|u\|^2$ pour tout λ positif; d'après le résultat admis sur les formes approchées, on a donc $|u| \in \mathscr{H}$ et $\| |u| \| \leqslant \|u\|$, autrement dit la contraction module opère dans $\mathscr{H}$.

2°) *Démonstration dans le cas général.* On se ramène au cas d'un espace compact de la façon suivante: Soit K un compact de X. Soit $\mathfrak{W}_K$ le sous-espace fermé de $\mathscr{H}$ engendré par les U^f, avec $f \in L^2$, f nulle hors de K. On vérifie facilement les propriétés suivantes:

(i) Si u'_K est la projection de $u \in \mathscr{H}$ sur $\mathfrak{W}_K$, on a $u'_K(x) = u(x)$ presque partout sur K.

(ii) Si u est un élément de $\mathfrak{W}_K$ et si $u(x) = 0$ presque partout sur K, alors $u = 0$.

Notons alors $\mathscr{H}_K$ l'ensemble des restrictions à K des éléments de $\mathfrak{W}_K$. Munissons la restriction de $u \in \mathfrak{W}_K$ à K de la norme de u dans $\mathscr{H}$. D'après (ii) $\mathscr{H}_K$ est un espace fonctionnel, relatif à l'espace compact K et à la restriction de ξ à K; le principe de domination est évidemment satisfait dans $\mathscr{H}_K$.

([3]) Cette méthode est directement inspirée des travaux de G. Hunt et de G. Lion (*loc. cit.*).

Soit u un élément quelconque de $\mathscr{H}$. Soit u'_K sa projection sur $\mathfrak{W}_K$, et soit v_K la restriction de u'_K à K. D'après la première partie de la démonstration, on a $|v_K| \in \mathscr{H}_K$ et

$$\| |v_K| \|_{\mathscr{H}_K} \leqslant \|v_K\|_{\mathscr{H}_K} = \|u'_K\| \leqslant \|u\|.$$

D'après (ii) il existe un unique élément $w_K \in \mathfrak{W}_K$ dont la restriction à K coïncide avec $|v_K|$, et on a $\|w_K\| = \| |v_K| \|_{\mathscr{H}_K} \leqslant \|u\|$. Il suffit alors de faire « tendre » K vers X: on montrera facilement que w_K converge faiblement dans $\mathscr{H}$ vers un élément w vérifiant $w(x) = |u(x)|$ presque partout localement. On a donc bien $|u| \in \mathscr{H}$ et $\| |u| \| \leqslant \lim\limits_{K} \|w_K\| \leqslant \|u\|$.

4. Espaces fonctionnels dans lesquels le principe complet du maximum est satisfait.

Soit P un opérateur linéaire sur $L^2(\xi)$. On dit que P est *sous-markovien* s'il transforme toute fonction de L^2 à valeurs comprises entre 0 et 1 en une fonction de même nature.

Une mesure positive σ sur $X \times X$ est dite *sous-markovienne* (relativement à ξ) si sa projection sur X est majorée par ξ.

Nous utiliserons cette remarque très simple, qui joue un rôle capital dans la détermination des espaces de Dirichlet (voir [4]): Si P est un opérateur hermitien sous-markovien sur L^2, il existe une mesure sous-markovienne symétrique sur $X \times X$ et une seule, telle que l'on ait:

$$(Pf, g)_{L^2} = \iint f(x)g(y)\, d\sigma(x, y) \tag{2}$$

pour tout couple de fonctions f et g continues à support compact sur X.

THÉORÈME 2'.— *Soit $\mathscr{H}$ un espace fonctionnel; si l'axiome (a') et le principe complet du maximum sont vérifiés, toutes les contractions normales opèrent dans $\mathscr{H}$.*

On peut supposer que l'espace X est *compact*, le cas général s'en déduisant par le procédé du paragraphe **3** (voir la deuxième partie de la démonstration du théorème 2). Considérons à nouveau les opérateurs « résolvantes » R_λ. On a déjà vu qu'ils transformaient toute fonction positive de L^2 en une fonction positive. On va montrer que λR_λ *est sous-markovien.*

En effet soit $f \in L^2$, à valeurs comprises entre 0 et 1. Par définition de R_λ on a :

$$G(f - \lambda R_\lambda f) = R_\lambda f,$$

où G est l'opérateur « noyau » défini au paragraphe 3. On a donc:

$$G(f - \lambda R_\lambda f)^+ = G(f - \lambda R_\lambda f)^- + R_\lambda f.$$

Or, sur l'ensemble $\{x|(f(x) - \lambda R_\lambda f(x))^+ > 0\}$, on a

$$R_\lambda f(x) < f(x)/\lambda \leqslant 1/\lambda \qquad \text{(presque partout).}$$

Il résulte donc du principe complet du maximum qu'on a $G(f - \lambda R_\lambda f)(x) \leqslant 1/\lambda$ presque partout, et par suite $\lambda R_\lambda f(x) \leqslant 1$ presque partout, donc λR_λ est sous-markovien.

Soit alors σ la mesure sous-markovienne associée à l'opérateur hermitien sous-markovien λR_λ. La forme approchée H_λ (voir § 3) s'exprime aisément à l'aide de σ_λ, et, compte tenu de ce que σ_λ est symétrique, on a, d'après la relation (2):

$$\begin{aligned} H_\lambda(f) &= \lambda(f, f - \lambda R_\lambda f)_{L^2} \\ &= \lambda\int(1 - s_\lambda(x))|f(x)|^2\, d\xi(x) + \tfrac{1}{2}\lambda\iint|f(x) - f(y)|^2\, d\sigma_\lambda(x, y) \end{aligned}$$

où s_λ est la densité par rapport à ξ de la projection de σ_λ sur X; comme σ_λ est sous-markovienne, on a évidemment $s_\lambda(x) \leqslant 1$ presque partout.

Si donc u est un élément de $\mathscr{H}$ et si v est une contraction de u, on a, d'après l'expression précédente et la propriété fondamentale des formes approchées (voir § 3):

$$H_\lambda(v) \leqslant H_\lambda(u) \leqslant \|u\| \qquad (\lambda > 0).$$

Il en résulte donc $v \in \mathscr{H}$ et $\|v\| = \lim_{\lambda \to \infty} H_\lambda(v) \leqslant \|u\|$.

5. Espaces fonctionnels invariants par translations.

On suppose maintenant que X est un groupe abélien localement compact, et ξ la mesure de Haar sur X (on la notera dx). L'espace fonctionnel $\mathscr{H}$ (relatif à X et ξ) est dit *invariant par les translations de* X si, pour tout $x \in X$ et tout $u \in \mathscr{H}$, on a $\tau_x u \in H$ et $\|\tau_x u\| = \|u\|$, $\tau_x u$ étant la classe déduite de u par la translation x ($\tau_x u(y) = u(y - x)$).

De cette propriété et de l'axiome (a) il résulte que, pour tout $u \in \mathscr{H}$, l'application $x \to \tau_x u$ de X dans $\mathscr{H}$ est fortement continue. D'autre part, pour tout système d'éléments f, g, h de $\mathfrak{M}$, on a les relations :

$$\mathrm{U}^{\tau_x f} = \tau_x \mathrm{U}^f ;$$

$$\int \mathrm{U}^f\, g * \check{h}\, dx = \int \mathrm{U}^g\, f * h\, dx,$$

où $\check{h}$ est le symétrique de h par rapport à l'origine ($\check{h}(x) = h(-x)$).

Si on suppose en outre que les potentiels purs sont positifs, on déduit de cette dernière relation l'existence d'une mesure positive et de type positif κ sur X telle que, pour toute $f \in \mathscr{C}$ (ensemble des fonctions continues à support compact sur X), on ait :

$$\mathrm{U}^f = \kappa * f. \tag{3}$$

Cette mesure κ est appelée *le noyau de convolution* associé à l'espace $\mathscr{H}$.

Cette expression des potentiels va nous permettre d'établir le résultat suivant :

THÉORÈME 3. — *Soit $\mathscr{H}$ un espace fonctionnel invariant par translation. Si la contraction-module opère dans $\mathscr{H}$, alors :*

(i) *l'axiome* (a') *est satisfait ;*

(ii) *toutes les contractions normales opèrent dans $\mathscr{H}$.*

Démonstration de (i). — On a vu (§ 2) que si la contraction-module opère, $\mathscr{H}$ est à noyau positif ; on va montrer que, dans le cas de la translation, cette propriété entraîne l'énoncé (i).

Soit en effet κ le noyau de convolution associé à $\mathscr{H}$. Soit K un compact de X, et soit $\mathfrak{M}_K$ l'ensemble des éléments de $\mathfrak{M}$ nuls hors de K. La formule (3) est encore valable pour un élément f de $\mathfrak{M}_K$ (les deux membres sont des classes de fonctions). D'autre part la fonction de type positif $\kappa * f * \check{f}$ est presque partout égale à une fonction continue bien déterminée ; en notant $\mathrm{Tr}\, \kappa * f * \check{f}$ la valeur à l'origine de cette fonction continue, il vient :

$$\|\mathrm{U}^f\|^2 = \int \mathrm{U}^f(x) f(x)\, dx = \mathrm{Tr}\, \kappa * f * \check{f} \leqslant \mathrm{B(K)} \int |f(x)|^2\, dx,$$

où B(K) est la charge du compact $\mathrm{K} + (-\mathrm{K})$ pour la mesure κ.

Soit maintenant u un élément quelconque de $\mathscr{H}$. Comme $\mathfrak{M}_K$ est partout dense dans $L^2(K)$, on a:

$$\int_K |u(x)|^2\,dx = \sup_{f\in\mathfrak{M}_K} \frac{|\int uf\,dx|^2}{\int|f|^2\,dx} = \sup_{f\in\mathfrak{M}_K} \frac{(u, U^f)^2}{\int|f|^2\,dx}$$

$$\leqslant \sup_{f\in\mathfrak{M}_K} \frac{\|u\|^2\|U^f\|^2}{\int|f|^2\,dx} \leqslant B(K)\|u\|^2$$

donc l'axiome (a') est bien satisfait dans tout espace fonctionnel à noyau positif invariant par translation.

Démonstration de (ii). — On va s'appuyer sur un résultat de la théorie du potentiel par rapport à un noyau de convolution, énoncé sans démonstration dans [7]: le noyau κ étant symétrique et satisfaisant au principe de domination (d'après (i) et le théorème 2), il satisfait au « principe d'équilibre ». Par régularisation il en résulte que, quel que soit le compact K, il existe une fonction $h\in\mathscr{C}^+$ telle que $U^h(x) = \kappa * h\,(x) = 1$ partout sur K, $U^h(x) \leqslant 1$ partout dans X.

Soient alors f et g deux fonctions de $\mathfrak{M}^+$, telles que

$$U^f(x) \leqslant U^g(x) + 1$$

presque partout sur l'ensemble $E = \{x|f(x) > 0\}$. En prenant pour K un compact contenant E, il vient $U^f(x) \leqslant U^g(x) + U^h(x)$ presque partout sur E, donc presque partout sur X (principe de domination). On a donc $U^f(x) \leqslant U^g(x) + 1$ presque partout sur X, donc le principe complet du maximum est satisfait. Il résulte alors de (i) et du théorème 2′ que toutes les contractions normales opèrent sur $\mathscr{H}$.

Remarque. — Il existe des espaces fonctionnels (non invariants par translation) pour lesquels l'axiome (a') est satisfait et dans lesquels la contraction-module opère, mais les contractions normales n'opèrent pas toutes. On construira facilement un tel exemple en prenant pour X un espace fini (voir [3]).

BIBLIOGRAPHIE

[1] N. Aronszajn et K. T. Smith, Functional spaces and functional completion, *Ann. Inst. Fourier,* 6 (1956), 125-185.

[2] N. Aronszajn et K. T. Smith, Characterization of positive reproducing kernels, *Amer. J. Math.*, 79 (1957), 611-622.

[3] A. BEURLING et J. DENY, Espaces de Dirichlet, I, le cas élémentaire, *Acta Math.*, 99 (1958), 203-224.

[4] A. BEURLING et J. DENY, Dirichlet spaces, *Proc. Nat. Acad. Sc.*, 45 (1959), 208-215.

[5] H. CARTAN, Théorie du potentiel newtonien, etc., *Bull. Soc. Math. de France,* 73 (1945), 74-106.

[6] H. CARTAN et J. DENY, Le principe du maximum en théorie du potentiel, etc., *Acta de Szeged,* 12 (1950), 81-100.

[7] G. CHOQUET et J. DENY, Aspects linéaires de la théorie du potentiel, II, Théorème de dualité et applications, *C.R. Acad. Sc.,* Paris, 243 (1956), 764-767; III, Noyaux de composition satisfaisant au principe du balayage sur tout ouvert, *Ibid.,* 250 (1960), 4260-4262.

[8] G. HUNT, Markov processes and potentials, II, *Illinois J. Math.,* 1 (1957), 316-369.

[9] G. LION, Principe complet du maximum et semi-groupes sous-markoviens, *C.R. Acad. Sc.,* Paris, 258 (1964), 3621-3623.

Jacques DENY,
Faculté des Sciences de Paris,
Centre d'Orsay,
Orsay (S. et O.).