GABRIEL MOKOBODZKI

Représentation intégrale des fonctions surharmoniques au moyen des réduites

Annales de l'institut Fourier, tome 15, nº 1 (1965), p. 103-112

<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1965__15_1_103_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
15, 1 (1965), 103-112.

REPRÉSENTATION INTÉGRALE DES FONCTIONS SURHARMONIQUES AU MOYEN DES RÉDUITES

par Gabriel MOKOBODZKI

Introduction.

Le point de départ de ce travail est la recherche d'une méthode assez directe, permettant d'obtenir la représentation intégrale sur le cône convexe des fonctions surharmoniques positives, dans le cadre de la théorie de Brelot, avec ses axiomes 1, 2, 3'.

La mise en évidence de topologies permettant cette représentation intégrale se trouve déjà dans les travaux de Brelot, moyennant une hypothèse supplémentaire sur l'existence d'une base dénombrable d'ouverts réguliers complètement déterminants et dans la thèse de Mme Hervé, qui avec les axiomes 1, 2, 3' et l'existence d'une base dénombrable d'ouverts réguliers, introduit la topologie adéquate, basée sur l'emploi du théorème de partition.

Cette topologie étant connue grâce aux travaux précédents, on a remarqué qu'elle pouvait être définie très simplement comme la topologie de la convergence en graphe, aussi bien avec les hypothèses de Brelot, qu'avec celles, plus faibles de Mme Hervé, en n'utilisant que des proprietés très générales des fonctions surharmoniques.

Il restait à montrer qu'il existe suffisamment de formes affines, continues pour la topologie de la convergence en graphe, sur le cône convexe des fonctions surharmoniques positives. Le cadre que nous avons adopté ne prétend pas être une nouvelle présentation axiomatique de la théorie des fonctions surharmoniques; nous avons seulement retenu de la théorie de Brelot un catalogue de propriétés dont nous avions besoin et qui sont rappelées au début de cet exposé. Ainsi, la condition (R_4) qui peut paraître artificielle, est une conséquence de la propriété de Harnack vérifiée par les fonctions harmoniques $\geqslant 0$ dans un ouvert connexe.

La mise en évidence de ces conditions permettra peut-être d'appliquer notre méthode à des cas plus généraux, où l'on n'aura pas toute la richesse de la théorie axiomatique de Brelot.

Pour suivre notre construction, il est un fil directeur: c'est l'analogie entre les fonctions croissantes d'ouverts, continues à gauche, définies par les réduites, et les fonctions numériques croissantes $\geqslant 0$, continues à gauche sur $[0, 1]$.

Ces dernières fonctions étant croissantes, ont au plus une infinité dénombrable de points de discontinuité dans $[0,1]$, et, par une « intégration » convenable on fait disparaître ces ensembles exceptionnels gênants.

Notre méthode originale a été beaucoup améliorée en nous inspirant des travaux de G. Choquet sur la représentation intégrale des capacités où une méthode semblable est utilisée. Enfin, et ce sera l'objet d'un travail ultérieur, ou peut montrer, en modifiant convenablement les conditions (S_1)–(S_4) et (R_1)–(R_4), que dans le cadre de l'axiomatique de Bauer, le cône convexe des fonctions surharmoniques positives est métrisable et faiblement complet. Ou peut donc appliquer les derniers résultats de G. Choquet sur la représentation intégrale dans de tels cônes convexes.

NOTATIONS. — Soient Ω un espace localement compact, S un cône convexe de fonctions numériques s.c.i. à valeurs dans $\overline{R^+}$, satisfaisant aux propriétés suivantes:

(S_1) $v_1, v_2 \in S \Rightarrow \inf(v_1, v_2) \in S$; $\quad 1 \in S$.

(S_2) $v \in S \Rightarrow v^{-1}(+\infty)$ est d'intérieur vide.

(S_3) Soit (v_α) une famille d'éléments de S et soit $v = \inf v_\alpha$. La fonction $\hat{v}$, régularisée s.c.i. de v, appartient à S ($\hat{v}$ est définie par $\hat{v}(x) = \liminf\limits_{g \to x} v(y)$).

(S_4) Soit (v_α) une famille filtrante croissante d'éléments de S et $v = \sup v_\alpha$. Alors $v \in S$, ou bien $v \equiv +\infty$.

DÉFINITION. — *Pour tout ouvert $\omega \subset \Omega$ et $v \in S$,*

$$R_v^\omega = \inf_{\substack{v' \in S \\ v' \geqslant v \text{ sur } \Omega}} v' \qquad \textit{s'appelle la réduite de } v \textit{ sur } \omega.$$

On vérifie immédiatement quelques propriétés des réduites.

a) $\forall v \in S$ et $\omega \subset \Omega$, $R_v^\omega \in S$, $R_v^\omega = v$ sur ω.

b) $\forall v \in S$ et $\omega \subset \Omega$, $R_v^\omega = \sup\limits_{\substack{\bar{\omega}' \subset \omega \\ \bar{\omega}' \text{ compact}}} R_v^{\omega'}$.

c) Soit (v_α) une famille filtrante croissante d'éléments de S; si $v = \sup v_\alpha \equiv +\infty$, pour tout ouvert ω non vide, $\sup R^{\omega}_{v_\alpha} \equiv +\infty$

d) Soit $\mathscr{F}$ un filtre sur S. Si pour un couple (ω, x), ω ouvert non vide, $x \notin \bar{\omega}$, on a $\limsup_{\mathscr{F}} R^{\omega}_{v}(x) < +\infty$, alors

$$u = \sup_{M \in \mathscr{F}} \left(\widehat{\inf_{v \in M} v} \right) \quad \text{appartient à S.}$$

On imposera de plus aux réduites les conditions suivantes:

(R_1) Pour tout ouvert $\omega \subset \Omega$ et pour tous $v_1, v_2 \in S$,

$$R^{\omega}_{v_1+v_2} = R^{\omega}_{v_1} + R^{\omega}_{v_2} \qquad \text{(additivité des réduites)}$$

(R_2) Pour tout ouvert $\omega \subset \Omega$, et tout $v \in S$, R^{ω}_{v} est finie, continue, en tout point de $\complement \bar{\omega}$.

(R_3) Pour tout $v \in S$ et $x \in \Omega$,

$$R^{\Omega \setminus \{x\}}_{v}(x) = v(x)$$

$$\text{(ou encore} \qquad R^{\Omega \setminus \{x\}}_{v} = v).$$

(R_4) (1) Soient ω_1 et ω_2 des ouverts relativement compacts de Ω, $\bar{\omega}_1 \subset \omega_2$, et soit $x \notin \bar{\omega}_1$. Pour tout ultrafiltre $\mathscr{U}$ sur S tel que

$$\lim_{\mathscr{U}} R^{\omega_1}_{v}(x) < +\infty,$$

la fonction $u = \sup_{M \in \mathscr{U}} \left(\widehat{\inf_{v \in M} v} \right)$ satisfait aux conditions

$$R^{\omega_1}_{u}(x) \leqslant \lim_{\mathscr{U}} R^{\omega_1}_{v}(x) \leqslant R^{\omega_2}_{u}(x) \leqslant \lim_{\mathscr{U}} R^{\omega_2}_{v}(x)$$

Ces propriétés sont en particulier vérifiées dans la théorie axiomatique de Brelot, avec ses axiomes 1, 2, 3′, en supposant de plus que les constantes soient harmoniques.

Nous allons montrer qu'on peut définir une topologie T sur $S \cup \{+\infty\}$ pour laquelle $S \cup \{+\infty\}$ est compact.

Nous aurons besoin des quelques préliminaires suivants. Soient X un espace compact, $\mathscr{K}(X)$ l'ensemble des compacts de X, et soient ω un ouvert de X, $s = \{\omega_1 \ldots, \omega_n\}$ une suite finie d'ouverts de X. Les ensembles

$$0_{\omega,s} = \{K ; K \in \mathscr{K}(X) ; K \subset \omega ; K \cap \omega_i \neq \emptyset \quad \forall \omega_i \in s\}$$

forment alors une base d'une topologie $\mathscr{C}$ sur $\mathscr{K}(X)$, pour laquelle $\mathscr{K}(X)$ est compact. Nous dirons pour abréger que c'est la topologie

(1) La condition (R_4) est en particulier vérifiée dans le cas suivant: *a*) pour tout ouvert $\omega \subset \Omega$, tout compact $\kappa \subset \omega$ et tout $x \notin \bar{\omega}$, $R^{\omega}_{v}(x) = R^{\omega \setminus \kappa}_{v}(x)$, $\forall v \in S$. *b*) la famille des fonctions R^{ω}_{v} telles que $R^{\omega}_{v}(x) \leqslant 1$ $(x \notin \bar{\omega})$, est également continue au point x.

naturelle de $\mathscr{K}(X)$. (Voir Bourbaki, *Topologie Générale*, Ed. 1951, Exercices 4 et 5, ch. II, § 4.)

APPLICATIONS. — Soient Y un espace compact, C_i le cône convexe de toutes les fonctions numériques s.c.i. sur Y, à valeurs dans $\bar{\mathbf{R}}^+$. Pour toute $v \in C_i$, désignons par Γ_v l'ensemble des couples (y, λ) $(y \in Y,\ \lambda \in \bar{\mathbf{R}}^+)$ tels que $\lambda \geqslant v(y)$. Par abus de langage nous dirons que Γ_v est le graphe de v. Dire que v est s.c.i. implique que Γ_v est compact; inversement, si A est un ensemble compact de $Y \times \bar{\mathbf{R}}^+$ tel que $(y, \lambda) \in A$ et $(\alpha \geqslant \lambda) \Rightarrow (y, \alpha) \in A$, alors A est le graphe d'une v s.c.i. Par ailleurs l'application $\Gamma : v \Rightarrow \Gamma_v$ est bijective. Nous pouvons alors poser la:

DÉFINITION 1. — *On appelle topologie de la convergence en graphe sur C_i l'image réciproque par Γ de la topologie naturelle sur l'ensemble des compacts de $Y \times \bar{\mathbf{R}}^+$.*

Le cône C_i est alors compact pour la topologie de la convergence en graphe. Il est intéressant d'avoir une base d'ouverts de cette topologie mettant en évidence que C_i est un ensemble de fonctions. Soit φ une fonction numérique continue sur Y,

$$s = \{(\omega_1, \lambda_1), \ldots, (\omega_n, \lambda_n)\},$$

où les ω_i sont des ouverts de Y, et les $\lambda_i > 0$.

Les ensembles suivants (où $v \gg \varphi$ signifie $v(y) > \varphi(y), \forall y \in Y$)

$$0_{\varphi,s} = \{v ; v \in C_i ; v \gg \varphi ; \inf_{y \in \omega_i} v(y) < \lambda_i \quad \forall(\omega_i, \lambda_i) \in s\}$$

forment alors une base de cette topologie. Dans ce qui suit C_i sera toujours muni de la topologie de la convergence en graphe.

PROPOSITION 1. — *Soit $\mathscr{F}$ un filtre convergent sur C_i. Alors*

$$u = \lim_{\mathscr{F}} = \sup_{M \in \mathscr{F}} \left(\widehat{\inf_{v \in M} v} \right)$$

$(\widehat{\inf v})$ *désigne la régularisée s.c.i. de* $\inf v$

Démonstration. — Soit $0_{\varphi,s}$ un voisinage de u. Il existe $M \in \mathscr{F}$, tel que

$$(v \in M) \Rightarrow \begin{array}{l} v > \varphi. \\ \inf_{y \in \omega_i} v(y) < \lambda_i. \end{array}$$

Ceci montre que $v_M = \widehat{\inf_{v \in M} v} \leqslant u$ et $v_M \geqslant \varphi$ puisque $\mathscr{F}$ converge dans C_i, d'où $\lim_{\mathscr{F}} = \sup_{M \in \mathscr{F}} (\widehat{\inf_{v \in M} v})$.

DÉFINITION 2. — *Pour un filtre quelconque* $\mathscr{G}$ *sur* C_i, *on posera*

$$\widehat{\lim\inf_{\mathscr{G}}} = \sup_{M\in\mathscr{G}}(\widehat{\inf_{v\in M} v}).$$

PROPOSITION 2. — *Pour qu'un filtre* $\mathscr{F}$ *sur* C_i *soit convergent, il faut et il suffit que pour tout filtre* $\mathscr{G}$ *plus fin que* $\mathscr{F}$, *on ait*

$$\widehat{\lim\inf_{\mathscr{G}}} = \widehat{\lim\inf_{\mathscr{F}}}.$$

(Si $\mathscr{G}$ est plus fin que $\mathscr{F}$, $\widehat{\lim\inf_{\mathscr{G}}} \geqslant \widehat{\lim\inf_{\mathscr{F}}}$.)

COROLLAIRE 1. — *L'application* $(v, y) \Rightarrow v(y)$ *de* $C_i \times Y$ *dans* $\bar{\mathbf{R}}^+$ *est semi-continue inférieurement.*

COROLLAIRE 2. — *Toute mesure* $\mu \geqslant 0$ *sur* Y *définit une forme affine s.c.i. sur* C_i.

Extension. — Si Y est localement compact, on le plongera dans son compactifié d'Alexandroff $\tilde{Y} = Y \cup \{\omega\}$. Les éléments de C_i seront prolongés en posant $v(\omega) = 0\ \forall v \in C_i$. On notera C_i^0 l'extension de C_i à $Y \cup \{\omega\}$. Tous les résultats précédents s'appliquent intégralement.

PROPOSITION 3. — *Les conditions* S_3, S_4 *satisfaites par le cône* S *impliquent que* $S \cup \{+\infty\}$ *est compact pour la topologie de la convergence en graphe.*

En effet, soit $\mathscr{F}$ un filtre sur S convergeant dans C_i. Alors

$$\lim_{\mathscr{F}} = u = \sup_{M\in\mathscr{F}}(\widehat{\inf_{v\in M} v}).$$

D'après S_3, $v_M = \widehat{\inf_{v\in M} v} \in S$. D'après S_4, $u = \sup v_M \in S \cup \{+\infty\}$.

Dans ce qui suit, nous désignerons par T la topologie sur S de la convergence en graphe et nous montrerons que les formes affines positives T continues sur S séparent les points de S. Il faut remarquer que les topologies introduites par M. Brelot et Mme Hervé pour étudier la représentation intégrale des fonctions surharmoniques sont identiques à la topologie de la convergence en graphe.

DÉFINITION 3. — Soit $\varphi \geqslant 0$ une fonction numérique continue bornée sur Ω.

Pour tout $v \in \mathrm{S}$, on appellera réduite de v sur φ la fonction définie en chaque point $x \in \Omega$ par

$$\mathrm{R}_v^{\varphi}(x) = \int_0^{\sup\varphi} \mathrm{R}_v^{(\varphi > \alpha)}(x)\, d\alpha$$

où $(\varphi > \alpha)$ désigne l'ouvert $\omega_\alpha = \{y ; \varphi(y) > \alpha\}$ et $d\alpha$ la mesure de Lebesgue.

On a alors le

THÉORÈME 1. — *Pour tout $v \in \mathrm{S}$ et $\varphi \geqslant 0$ sur Ω, continue, on a, ou bien $\mathrm{R}_v^{\varphi} \in \mathrm{S}$, ou bien $\mathrm{R}_v^{\varphi} = +\infty$, et, dans le premier cas, R_v^{φ} est finie et continue dans l'ouvert $\complement\, \mathrm{S}_\phi$.*

Démonstration. — Soit $\mathscr{C} = [\alpha_0 < \alpha_1 < \cdots < \alpha_n]$ une subdivision de l'intervalle $[0, \sup\varphi]$ $(\alpha_0 = 0,\ \alpha_n = \sup\varphi)$ et posons

$$\mathrm{R}_v^{\varphi,\mathscr{C}} = \sum_{i=1}^{n} (\alpha_1 - \alpha_{i-1}) \mathrm{R}_v^{(\varphi > \alpha_i)}$$

Pour chaque $y \in \Omega$ la fonction $\alpha \Rightarrow \mathrm{R}_v^{(\varphi > \alpha)}(y)$ est décroissante et $\geqslant 0$, donc mesurable au sens de Riemann, de sorte que l'on a

$$\mathrm{R}_v^{\varphi} = \sup_{\mathscr{C}} \mathrm{R}_v^{\varphi,\mathscr{C}} \qquad \text{et} \qquad \mathrm{R}_v^{\varphi} \in \mathrm{S}.$$

De plus pour tout ouvert $\omega \supset \mathrm{S}_\varphi$, on a $\mathrm{R}^{\omega}_{\mathrm{R}_v^{\varphi,\mathscr{C}}} = \mathrm{R}_v^{\varphi,\mathscr{C}}$, de sorte que l'on a aussi $\mathrm{R}^{\omega}_{\mathrm{R}_v^{\varphi}} = \mathrm{R}_v^{\varphi}$ ce qui montre que R_v^{φ} est finie et continue en tout point de $\complement\, \mathrm{S}_\phi$.

Nous avons encore besoin des lemmes suivants.

LEMME 1. — Soient ω_1, ω_2 des ouverts non vides de Ω

$$x_1 \notin \bar{\omega}_1, \qquad x_2 \notin \bar{\omega}_2.$$

Alors il existe $k > 0$ tel que $\forall v \in \mathrm{S}$

$$\frac{1}{k} \mathrm{R}_v^{\omega_2}(x_2) \leqslant \mathrm{R}_v^{\omega_1}(x_1) \leqslant k \mathrm{R}_v^{\omega_2}(x_2).$$

Démonstration. — Supposons le lemme non vérifié. Il existerait alors une suite $v_n \in \mathrm{S}$ telle que

$$\mathrm{R}_{v_n}^{\omega_1}(x_1) \leqslant \frac{1}{2^n} \qquad \text{et} \qquad \mathrm{R}_{v_n}^{\omega_2}(x_2) \geqslant 1.$$

Soit alors $v = \sum_n v_n$; on devrait avoir $v \not\equiv +\infty$ puisque $\mathrm{R}_v^{\omega_1}(x_1) \leqslant 1$ mais d'autre part $\mathrm{R}_v^{\omega_2}(x_2) = +\infty$, ce qui est contradictoire.

Appelons « couple (φ, x) » les couples où φ est une fonction numérique $\geqslant 0$, continue à support compact et $x \in \complement S_\phi$. Du résultat précédent, on déduit facilement le

COROLLAIRE.— Soient (φ_1, x_1), (φ_2, x_2) deux couples $(\varphi_1, \varphi_2 \neq 0)$. Il existe $k > 0$ tel que $\forall v \in S$, on ait

$$\frac{1}{k} R_v^{\varphi_2}(x_2) \leqslant R_v^{\varphi_1}(x_1) \leqslant k R_v^{\varphi_2}(x_2).$$

(Il résulte de S_4 que si $v \in S$ et $v \neq 0$ $v(x) > 0$, pour tout $x \in \Omega$.)

On peut faire alors plusieurs remarques

a) $R_v^\omega = \sup\limits_{\substack{S\varphi \subset \omega \\ 0 \leqslant \varphi \leqslant 1}} R_v^\varphi$; $\qquad R_{v_1+v_2}^\varphi = R_{v_1}^\varphi + R_{v_2}^\varphi$

b) $\forall v \in S$, $\qquad v(x) = \sup\limits_{\substack{0 \leqslant \varphi \leqslant 1 \\ x \in S_\varphi \text{compact}}} R_v^\varphi(x)$

c) Pour tout couple (φ, x) l'ensemble $B_{\varphi,x} = \{v ; v \in S ; R_v^\varphi(x) = 1\}$ est une base de S.

Nous sommes maintenant en mesure de démontrer le théorème principal de cette étude :

THÉORÈME 2.— *Pour tout couple* (φ, x), *la forme affine* $v \to R_v^\varphi(x)$ *est continue sur* S, *muni de la topologie de la convergence en graphe.*

Démonstration. — D'après la proposition 2, il suffit de montrer que pour tout ultrafiltre $\mathscr{U}$ sur S qui converge en graphe vers $u \in S$, on a

$$R_u^\varphi(x) = \lim\nolimits_{\mathscr{U}} R_v^\varphi(x).$$

On a la formule $u = \lim_{\mathscr{U}} = \sup\limits_{M \in \mathscr{F}} \widehat{(\inf\limits_{v \in M} v)}$

1^er^ *cas.* — $\lim_{\mathscr{U}} R_v^\varphi(x) = +\infty$, alors $u \equiv +\infty$ en raison du corollaire du lemme 1.

2^ème^ *cas.* — $\lim_{\mathscr{U}} R_v^\varphi(x) < +\infty$.

D'après R_5, pour $\alpha, \beta \in]0, \sup \varphi[$, $\alpha < \beta$

$$R_u^{(\varphi > \alpha)}(x) \geqslant \lim\nolimits_{\mathscr{U}} R_v^{(\varphi > \beta)}(x) \geqslant R_u^{(\varphi > \beta)}(x).$$

Pour tout $v \in S$, soit θ_v l'application $\alpha \to \theta_v(\alpha) = R_v^{(\varphi > \alpha)}(x)$ définie sur $[0, \sup \varphi]$.

Il existe $S \in \mathscr{U}$ et $M > 0$, tels que $(v \in S) \Rightarrow (\theta_v \leqslant M)$, donc aussi $\theta_u \leqslant M$.

Par ailleurs, les fonctions θ_u, θ_v ($v \in S$) sont décroissantes et pour $\alpha < \beta$, $\alpha, \beta \in]0, \sup \varphi[$,

$$\theta_u(\alpha) \geqslant \lim_{\mathscr{U}} \theta_v(\beta) \geqslant \theta_u(\beta).$$

Ces conditions entraînent que hors d'un ensemble dénombrable $N \subset]0, \sup \varphi[$, où θu est discontinue, θ_v converge simplement vers θ_u suivant $\mathscr{U}$, ce qui entraîne la convergence des intégrales:

$$\int_0^{\sup\varphi} \theta_u(\alpha)\, d\alpha = \lim_{\mathscr{U}} \int_0^{\sup\varphi} \theta_v(\alpha)\, d\alpha.$$

COROLLAIRE 1.— *Les fonctions affines* T-*continues sur* S *séparent les éléments de* S. *L'ensemble* $B_{\varphi,x} = \{v\,;\, R_v^\varphi(x) = 1\}$ *est une base compacte de* S.

Soit $\Phi = \prod_{1 \in I} \mu_i$ l'injection de S dans $\mathbf{R}^{+I}$, muni de la topologie faible.

COROLLAIRE 2.— *Sur* S, *l'image réciproque par* Φ *de la topologie faible de* $\mathbf{R}^I$ *est identique à la topologie de la convergence en graphe.*

COROLLAIRE 3. — *Pour tout ouvert* $\omega \subset \Omega$, *l'application*

$$(v, x) \rightarrow R_v^\omega(x)$$

de $S \times \Omega$ *dans* $\mathbf{R}^+$ *est semi-continue inférieurement (resp. pour toute* φ *continue bornée* $\geqslant 0$ $(v, x) \rightarrow R_v^\varphi(x)$).

COROLLAIRE 4.— *Soit* μ *une mesure de Radon* $\geqslant 0$ *de masse totale* 1, *sur une base* B *de* S, *et de barycentre* v_μ ; *soit* ν *une mesure de Radon* $\geqslant 0$ *sur* Ω. *Pour tout ouvert* $\omega \subset \Omega$

$$\int_\Omega R_{v_\mu}^\omega\, d\nu = \int_B \left(\int_\Omega R_v^\omega\, d\nu\right) d\mu$$

(appliquer le théorème de Fubini.)

Ce «corollaire» est en fait un des principaux résultats que fournit la théorie de la représentation intégrale.

DÉFINITION. — *On dira qu'une mesure de Radon* $\mu \geqslant 0$ *est continue, si la restriction à* S *est* T-*continue.*

Soit μ une mesure continue.

PROPOSITION 4. — *Soit* μ *une mesure continue. L'application canonique de* S *dans* $L^1(\mu)$ *est continue,* S *étant muni de la topologie* T, $L^1(\mu)$ *de la topologie forte.*

Démonstration. — Soit $\mathscr{F}$ un filtre convergent sur S et soit

$$u = \lim_{\mathscr{F}} = \sup_{M \in \mathscr{F}} (\widehat{\inf_{v \in M} v}).$$

Pour tout $M \in \mathscr{F}$, soit $v_M = \widehat{\inf_{v \in M} v}$, alors v_M tend vers u, suivant le filtre des sections de $\mathscr{F}$, et comme μ est une mesure

$$\inf_{M \in \mathscr{F}} \int (u - v_M)\, d\mu = 0.$$

Mais pour tout $v \in M \int (u - v)^+ \, d\mu \leqslant \int (u - v_M)\, d\mu$ de sorte que l'on a

$$\lim_{\mathscr{F}} \int (u - v)^+ \, d\mu = 0$$

ce qui entraîne $\lim_{\mathscr{F}} \int |u - v|\, d\mu = 0$ puisque μ est une mesure continue.

COROLLAIRE. — *Supposons qu'il existe une mesure continue μ sur Ω telle que l'application canonique de* S *dans* $L^1(\mu)$ *soit injective, alors le cône* S *est métrisable pour la topologie* T *et tout point de* S *est résultante d'une mesure portée par les génératrices extrémales de* S.

L'intérêt de la proposition précédente provient du lemme suivant :

LEMME. — *Supposons qu'outre* $(S_1, -S_4)$, *le cône* S *satisfasse à la condition* (S_5): *tout* $v \in S$ *est enveloppe supérieure d'une famille filtrante croissante* $(v_\alpha)_{\alpha \in A}$, $v_\alpha \in S$, *où tous les* v_α *sont continus sur* Ω. (*En fait, on peut montrer que* (S_5) *est une conséquence de* $S_1 - S_4$ *et* $(R_1 - R_5)$.) *Alors pour tout couple* (φ, x), *il existe une mesure de Radon* μ *sur* S_φ, *telle que* $\int v\, d\mu = R_v^\varphi(x), \forall v \in S$.

Démonstration. — Sur le compact S_φ, considérons l'espace vectoriel des différences de deux fonctions $v_1 - v_2$, où v_1, v_2 sont des éléments continus de S. Soit H cet espace vectoriel. La constante $1 \in H$ et l'application

$$(v_1 - v_2) \to (R_{v_1}^\varphi(x) - R_{v_2}^\varphi(x))$$

définit une forme linéaire croissante sur H.

Il résulte du théorème de Hahn-Banach qu'il existe une mesure $\mu \geqslant 0$ sur S_φ telle que $\int v\, d\mu = R_v^\varphi(x)\, \forall v \in S$.

PROPOSITION 5. — ***Si Ω est à base dénombrable, il existe une mesure continue μ sur Ω, telle que si $v_1, v_2 \in S$ et $v_1 = v_2$ μ.p.p. alors $v_1 = v_2$.***

Démonstration. — Soit (φ_n, x_n) une suite de couples telle que les formes affines μ_{φ_n, x_n} associées séparent les éléments de S. Pour tout

n, soit μ_n une mesure de Radon sur S_{φ_n} telle que

$$\int v \, d\mu_n = R_v^{\varphi_n}(x_n) \qquad \forall v \in S.$$

Il existe alors une suite α_n de nombres réels > 0 telle que $\mu = \Sigma \alpha_n \mu_n$ soit une mesure continue sur Ω et la mesure μ répond bien aux conditions cherchées.

BIBLIOGRAPHIE

[1] M. BRELOT, Lectures on Potential theory, *Tata Institute*, (1960).

[2] G. CHOQUET, Theory of capacities, *Ann. Inst. Fourier*, Grenoble, 5 (1954).

[3] R. M. HERVÉ, Recherches axiomatiques sur la théorie des fonctions surharmoniques et du Potentiel, *Ann. Inst. Fourier*, Grenoble, 12 (1962), Thèse.

Gabriel MOKOBODZKI,
102, avenue de Saint Mandé,
Paris (12e).