ANNALES

DE

L'INSTITUT FOURIER

Bernard MALGRANGE

Travaux de Frédéric Pham (Première partie)

Tome 53, nº 4 (2003), p. 947-955.

<http://aif.cedram.org/item?id=AIF_2003__53_4_947_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
53, 4 (2003), 947–955

LES TRAVAUX DE FRÉDÉRIC PHAM
(Première partie)

par Bernard MALGRANGE

Frédéric Pham est né le 17 novembre 1938 à Saïgon. Il a été élève de l'Ecole Polytechnique de 1957 à 1959. Il a été ensuite, de 1961 à 1969 chercheur à Saclay, au service de Physique théorique où il a préparé sa thèse, soutenue en novembre 1967. Il est à Nice comme professeur depuis octobre 1970; il est resté à Nice depuis cette date à l'exception d'un détachement d'un an à Hanoï en 1979-1980.

Avant de parler de ses travaux permettez-moi d'évoquer rapidement quelques souvenirs, en particulier la manière dont nous avons fait connaissance. C'était vers 62-63; j'avais l'habitude d'aller le dimanche avec des collègues d'Orsay et de Saclay grimper des rochers à Fontainebleau, exercice où j'étais particulièrement mauvais; un de nos amis communs, chercheur à Saclay, Cirano de Dominicis nous a présenté l'un à l'autre. De cette première rencontre, je me souviens d'un jeune physicien grimpant avec aisance des rochers presque inaccessibles pour moi, et déclarant à la descente, dans le pur style de Fontainebleau "c'est à vache!".

Nous avons appris progressivement à nous connaître, en particulier au séminaire Thom que nous fréquentions tous les deux à Bures-sur-Yvette. Mais nos relations étaient restées plus ou moins espacées, jusqu'à la venue de Frédéric à Nice; de Grenoble, où j'étais moi-même arrivé en 69, j'ai eu l'occasion de nombreuses visites à Nice, et Frédéric aussi de visites à Grenoble (quoique moins fréquentes); cette tradition se continue jusqu'à ce jour.

Puisque j'ai prononcé le nom de René Thom, j'aimerais dire juste un mot à son propos. Sa participation à cette réunion aurait évidemment été très désirable; en particulier, il aurait été bien plus compétent que moi pour parler de tout ce qui touche à la topologie. Il faut bien dire que, malheureusement cette participation est tout à fait impossible étant donné son état - je n'ose même pas dire "son état de santé". C'est un sujet de grande tristesse pour tous ses amis. *

1. Singularités de fonctions et topologie.

À Saclay, en compagnie d'autres physiciens, et notamment Fotiadi, Froissart, et Lascoux, Pham s'intéresse à un sujet très actif à cette époque : l'étude des processus de diffusion, et plus précisément des singularités de Landau de la matrice S. Cela l'amène à s'intéresser aux méthodes de topologie différentielle développées par Thom, et aux singularités des intégrales dépendant d'un paramètre, objet du travail de Leray sur la théorie des résidus.

De cette période, je retiendrai trois gros articles, datant de 65-67. Le premier "Singularités des processus de diffusion multiple", qui constitue sa thèse, est le plus "physique", si l'on peut dire, des trois. Faute de compétence, je laisserai à André Voros le soin d'en parler.

Le second "Introduction à l'étude topologique des singularités de Landau" est un exposé purement mathématique de notions de base nécessaires à l'étude des singularités. Il commence par des rappels sur la topologie, la théorie des résidus de Leray, le théorème d'isotopie de Thom, et le théorème de Picard-Lefschetz, et se termine en montrant comment, avec ces outils, l'étude des singularités considérées peut être abordée. Dans ce travail se manifestent déjà certaines qualités du style particulier de F. Pham.

D'une part un goût pour les exemples particuliers poussés jusqu'au bout. D'autre part, le souci de dégager et d'exposer systématiquement des procédures (si l'on veut, "des recettes") permettant d 'aborder les exemples. Ceci donne quelquefois une rédaction assez différente de celle, plus usuelle, qui se borne à l'énoncé de théorèmes suivi de leur démonstration. Je ne sais pas s'il faut voir là un reflet de ses goûts personnels, ou de sa formation de physicien ... ou peut-être les deux.

Je remarque aussi que le choix du sujet, et de la manière de l'aborder, dénote une perspicacité qui n'était pas si courante à cette époque.

* Ce texte a été écrit en juin 2002. René Thom, déjà gravement malade à cette époque, est mort le 24 octobre suivant.

Le troisième article, qui est d'ailleurs paru le premier, a pour titre "Formules de Picard- Lefchetz généralisées et ramification des intégrales". C'est certainement cet article qui a établi sa réputation de mathématicien.

Dans ce travail, il se propose de faire pour les polynômes $\sum x_i^{\nu_i}$ ce que fait la formule de Picard-Lefschetz pour $\sum x_i^2$; en termes plus modernes, il s'agit d'étudier "la fibration de Milnor" associée à ce polynôme (inutile de dire que le livre de Milnor n'existait pas à l'époque). Pham détermine donc de la façon la plus explicite l'homologie de la fibre de Milnor, sa monodromie, la forme d'intersection, la variation de Lefschetz (ou "forme de Seifert"). Il traite même des problèmes plus généraux, par exemple lorsque l'on ôte une sous-variété linéaire à la fibre de Milnor. Le succès de cet article tient en bonne partie aux applications spectaculaires à la topologie différentielle qu'en a tiré Brieskorn. Quoique ceci sorte un peu de mon sujet, je ne résiste pas au plaisir d'en parler.

Considérons la variété V de dimension $2n-1$ obtenue en coupant, dans $\mathbb{C}^{n+1}$, par la sphère unité la variété algébrique $\sum_1^{n+1} x_i^{\nu_i} = 0$. Brieskorn se demande à quelle condition V est une sphère; on suppose $n \geqslant 3$ pour pouvoir utiliser les résultats de Smale sur la conjecture de Poincaré; on est alors ramené à calculer l'homologie de V; on trouve la condition suivante : si p est le polynôme caractéristique de la monodromie, on doit avoir $p(1) = 1$; les calculs de Pham permettent alors de déterminer exactement pour quelles valeurs des ν_i ceci a lieu; pour le résultat précis, je renvoie à Brieskorn. Il faut ensuite examiner quelles sphères exotiques on obtient; comme V borde la fibre de Milnor, qui est parallélisable, il faut chercher parmi les sphères de dimension impaire bordant une variété parallélisable, sphères qui ont été déterminées par Kervaire-Milnor. Dans le cas "n pair", il faut regarder l'invariant d'Arf de la fibre de Milnor : il se déduit de $p(-1)$ mod 8. Dans le cas "n impair", il faut regarder la signature de la forme d'intersection qui se déduit aussi des calculs de Pham. Le résultat final est qu'on trouve **toutes** les sphères de dimension impaire qui bordent une variété parallélisable. Par exemple, en dimension 7, il y en a 28, données par les polynômes $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^3 + x_5^{6k-1}$, $k = 1, \ldots, 28$. Comme le dit Brieskorn, les travaux de Pham permettent d'obtenir sans effort ("mühelose") ces résultats. Cette application, à laquelle bien sûr les physiciens n'avaient pas pensé, est à mon sens un magnifique contre-exemple à l'idée, fort répandue à l'époque, suivant laquelle les mathématiciens n'avaient désormais plus rien à tirer de la Physique. Comme chacun sait, cette idée est, depuis, largement passée de mode, et c'est tant mieux!

2. Systèmes différentiels de Gauss-Manin, et analyse microlocale.

Après ces travaux, Pham se tourne quelques années vers des sujets de géométrie algébrique plus ou moins proches de ses préoccupations antérieures. On lui doit quelques articles sur ce sujet, seul ou en en collaboration avec Bernard Teissier. Notamment, dans l'un de ces articles il étudie les déformations équisingulières de courbes planes et montre le résultat suivant "Si les idéaux jacobiens d'une famille de courbes planes forment une famille équisingulière d'idéaux, la famille des courbes est équisingulière" (mais la réciproque est fausse).

Ces préoccupations se reflètent dans l'orientation de ses élèves de l'époque en particulier Briançon et Galligo. Mais bientôt, motivé en grande partie par le travail de Sato-Kashiwara-Kawai connu sous le sigle SKK, et par leur séjour à Nice durant l'année 1972-73, Pham se tourne vers l'analyse microlocale au sens de ces auteurs. Cette théorie étudie les équations aux dérivées partielles linéaires d'un point de vue algébrico-géométrique; en ce sens, comme le note Pham, le nom d' "analyse algébrique" qu'affectionne Sato à la suite de Lagrange est peut être un peu réducteur. Les objets de base sont d'une part l'anneau $\mathcal{D}$ *i.e.*, le faisceau d'anneaux des opérateurs différentiels linéaires à coefficients analytiques et son localisé dans le cotangent, l'anneau $\mathcal{E}$ des opérateurs pseudodifférentiels (ou microdifférentiels), d'autre part les $\mathcal{D}$ et $\mathcal{E}$-modules , versions "algébriques" des systèmes différentiels ou microdifférentiels. Un rôle essentiel dans cette théorie est joué par les modules holonomes ou "maximaux surdéterminés", c'est-à-dire, en gros, contenant le plus grand nombre possible d'équations.

Pham voit tout de suite l'intérêt de tels systèmes pour étudier les singularités d'applications analytiques, et en particulier les fonctions à singularités isolées; comme nous l'avons vu, son intérêt pour ces objets n'était pas nouveau; entre temps , leur étude topologique systématique avait fait l'objet d'un célèbre livre de Milnor. Pham est dans les premiers, sinon le premier à considérer le système différentiel de Gauss-Manin; ce sytème précise en termes de $\mathcal{D}$ et $\mathcal{E}$-modules la connexion de Gauss-Manin, considérée par les géomètres différentiels à la suite de Gauss-Picard-Fuchs-Manin-Grothendieck; cette précision consiste en ce qu'on évite de se localiser hors des singularités; par exemple, ceci permet d'étudier l'image directe du faisceau constant par une application $X \to \mathbb{C}$, X une variété algébrique, et pas seulement d'étudier cette image hors du lieu critique.

Ces idées sont expliquées dans son livre “Singularités des systèmes différentiels de Gauss-Manin”, paru en 79. Ce livre, qui n’a pas pris une ride, est encore à mon sens, une des meilleures introductions à l’analyse microlocale à la Sato et à ses applications géométriques. Pham insiste sur l’intérêt qu’il y a à se placer au point de vue microdifférentiel (ou “microlocal”) dans ce sujet, et pas seulement au point de vue différentiel. Je vais en donner deux exemples.

Le premier exemple concerne les intégrales asymptotiques

$$\int e^{\tau f(x)} a(x) dx, \ x = (x_1, \dots, x_n),$$

avec f à singularité isolée, l’intégrale étant prise sur une chaîne convenable; ces intégrales admettent des développements asymptotiques en τ^{-1}, qu’on peut interpréter comme transformés de Fourier de développements asymptotiques $\int adx/df$ pris sur des cycles de $f = t$; Pham remarque qu’ils peuvent être interprétés microdifférentiellement en développements suivant $(d/dt)^{-1}$, et montre leur convergence au sens microdifférentiel (“convergence Gevrey”). Ce résultat semble aujourd’hui évident, mais j’avoue que sur le moment, il m’a surpris.

Le second exemple est tiré de l’appendice de son livre, dû à Maisonobe et Rombaldi; sans doute cet appendice n’est- il pas signé de Pham; mais, sans vouloir minimiser la contribution de ses auteurs, il me paraît clair qu’il porte la marque de Pham, dont ce sont d’ailleurs les élèves.

Je vais donner quelques détails : appelons pour un instant “fonctions” les fonctions holomorphes sur le revêtement universel d’un disque pointé de centre 0 dans $\mathbb{C}$, et “microfonctions” l’espace des “fonctions” modulo celles qui se prolongent au disque entier; étant donnée une fonction à singularité isolée au voisinage 0 dans $\mathbb{C}$, on appelle “solutions” les “fonctions” qui vérifient le système de différentiel de Gauss-Manin, et de même, “microsolutions” les microfonctions qui vérifient le même système. L’article montre que les solutions correspondent à l’homologie de la fibre de Milnor (par intégration dans la fibre), et de même que les microsolutions correspondent à l’homologie à support fermé. La flèche de variation de Lefchetz est alors donnée par la variation : microfonctions $\to$ fonctions, qui consiste à prendre la différence de deux déterminations successives $f(e^{2i\pi}x) - f(x)$. Incidemment, la bijectivité de la variation se traduit ainsi : le système de Gauss-Manin est égal à son microlocalisé.

Cette construction, malgré son apparente naïveté, est, je crois, très importante. Elle traduit, en fait, en termes analytiques, la construction des cycles évanescents de Grothendieck et Deligne (construction que les auteurs ignoraient visiblement) ; elle montre donc implicitement l'équivalence de la notion de cycle évanescent à la Deligne avec la microlocalisation à la Sato, tout au moins le long d'une hypersurface lisse. À noter que cette équivalence n'a été reconnue clairement par l'ensemble des spécialistes que quelques années plus tard.

Pour moi, cette construction a eu encore un autre rôle, à cause de l'intervention de la variation dans la traduction faisceautique de la transformation de Fourier : en dimension complexe 1, et en situation locale, cette transformation échange la variation et l'application canonique "bête" fonctions $\rightarrow$ microfonctions. M'étant alors demandé ce qui généralisait tout cela en dimensions supérieures, je me suis convaincu que la réponse résidait essentiellement en une transformation de Sato allant des faisceaux sur les fibres en sphères vers les faisceaux sur le fibré dual ; cette transformation est introduite au chapitre I de Sato-Kashiwara-Kawai, mais sans référence à Fourier. Cette intuition a été transformée ensuite en théorème précis avec l'aide décisive de Brylinski et Verdier ; le même résultat a aussi été obtenu indépendamment par Kashiwara-Hotta. Telle est, si je me rappelle bien, l'origine de mon intérêt pour la relation entre $\mathcal{D}$-modules et transformation de Fourier.

Les déformations de systèmes microdifférentiels sont un autre sujet qui occupe Pham à cette époque, et particulièrement pendant l'année qu'il passe à Hanoï. Il fait aussi travailler ses nombreux élèves vietnamiens sur ce sujet. Je mentionnerai principalement le gros article "Singularités des systèmes de Gauss-Manin réticulés", écrit en collaboration avec Nguyen Tien Dai et Nguyen Huu Duc. En gros, ce travail et les autres sur le même sujet se proposent d'étendre aux systèmes différentiels la problématique de Thom-Mather : stabilité, déploiements universels, etc... ; et aussi de comparer ces notions au niveau des fonctions et des système de Gauss-Manin associés ou bien des modules microdifférentiels et de leurs variétés caractéristiques. Il serait un peu long d'énoncer ici les résultats précis. En gros, ce qu'on obtient est une implication (ou une équivalence) stabilité de la variété caractéristique versus stabilité du système microdifférentiel ; bien sûr, avec un certain nombre d'hypothèses, dont celle de singularité régulière.

Inspiré par ces travaux, j'avais essayé d'aborder le sujet par une autre méthode, consistant à chercher des formes normales à la Birkhoff. Il me semble que dans ce courant d'idées, les développements actuels les plus fructueux sont sortis du travail de K. Saito qui réussit à faire intervenir la forme d'intersection dans le système de Gauss-Manin microlocal d'un déploiement. Ce travail est l'une des origines de développement récent, en particulier les travaux de Dubrovin sur les variétés de Frobenius.

Il me reste encore à parler de deux articles; le premier porte un titre champêtre, et même montagnard : “La descente des cols par les onglets de Lefschetz, avec vues sur Gauss-Manin”. Il s'agit d'une étude globale de la méthode du col pour des intégrales de Laplace polynomiales, i.e. du type suivant $\int_\Gamma e^{-\tau f(x)}a(x)dx$, $x=(x_1,\ldots,x_n)$, f et a des polynômes; on peut aussi ajouter un paramètre dans f et a. Le cycle infini Γ doit être choisi pour que l'intégrale ait un sens. Par exemple, si f est à coefficients réels et tend vers $+\infty$ pour $x \in \mathbb{R}^n$ tendant vers l'infini, on peut prendre $\Gamma = \mathbb{R}^n$, avec $\mathrm{Re}\,\tau > 0$.

En supposant que les singularités de f sont isolées, et qu'il n'y a pas de “cycles évanescents à l'infini”, par une transformation de Laplace et l'utilisation de Gauss-Manin, on réduit l'intégrale à une somme d'intégrales attachées à différents points critiques; chacune de ces intégrales est en principe susceptible de calcul par un développement en série ne dépendant que du voisinage du point en question, suivi d'une sommation de Borel. Mais cette méthode bute sur un problème de monodromie globale, que Pham traite en détail; ce faisant, il systématise des travaux sur la méthode du col qui remontent à Riemann, et ont été développés plus récemment par des mathématiciens russes, notamment Arnold et Fedoriuk.

La méthode de Pham a été généralisée récemment par Delabaere et Howls, avec l'adjonction d'un diviseur à croisements normaux, et de conditions au bord.

À noter aussi que la seconde partie de l'article reprend les considérations sur la variation dont il a été question plus haut, et donne une version transcendante du “higher résidu paising” par lequel K. Saito exprime la forme d'intersection.

Le second article s'intitule “Transformées de Laplace des microsolutions de systèmes holonomes”. Il est paru en 1984 à l'Enseignement mathématique. J'ai envie de le considérer comme un article charnière entre les préoccupations microdifférentielles antérieures, et les préoccupations résurgentes futures.

Le but est l'application des méthodes microlocales à l'analyse semi-classique. Il est question, à la suite de Balian-Bloch et de Voros, d'intégrales de Laplace de la forme $\int_\gamma e^{-t\tau}\psi(x,t)dt$, où ψ est une fonction analytique multiforme de $(x,t) \in \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}$, dont le lieu de ramification est de trace discrète sur chaque droite complexe $x =$ cste. En général, une telle intégrale est singulière aux points (x,τ) tels que x appartienne au discriminant de S. La remarque fondamentale est ici la suivante : même en un tel point, l'intégrale n'acquiert pas de singularité lorsque ψ est solution d'un système holonome à singularités régulières non caractéristique pour la projection $\mathbb{C}^n \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}^n$ (i.e. les droites $x =$ cste ne sont pas caractéristiques).

Cela résulte de deux faits : d'une part, dans l'intégrale de Laplace, seule intervient la "microfonction" associée à ψ (en un sens plus global que plus haut; ici on a, dans chaque fibre, un ensemble discret de points singuliers et non un seul. Je passe sur cette distinction et je passe aussi sur les problèmes connexes "d'intégrale exacte", ou "exacte modulo corrections exponentiellement petites"). D'autre part, une étude difficile de Kashiwara-Kawai sur les systèmes microdifférentiels "en position générique" permet d'affirmer le résultat requis pour les microfonctions. À noter aussi qu'un travail ultérieur d'Abdel Gadir, malheureusement non publié, permet de démontrer directement le résultat voulu sans même l'hypothèse "singularité régulière". Mais l'hypothèse "projection non caractéristique" reste essentielle.

Comme la transformation de Laplace transforme les phénomènes de ramification en phénomènes de Stokes, le résultat précédent a des conséquences importantes sur la dépendance du phénomène de Stokes (dans la variable τ) par rapport au paramètre x.

En particulier, dans le cas des points tournants ordinaires, on retombe sur les règles données par Voros dans son travail sur l'oscillateur quartique.

À partir de là, le travail de Pham va évoluer sous l'effet des circonstances suivantes : en premier lieu, il prend connaissance de la théorie des "fonctions résurgentes" d'Écalle. Cette théorie, développée quelques années auparavant d'une manière tout à fait indépendante de ce qui précède, considère de façon systématique des phénomènes analogues aux précédents, notamment des relations du type : analyse des singularités du prolongement analytique $\leftrightarrow$ phénomène de Stokes, sommation de Borel, etc. Et ceci, dans le contexte d'équations beaucoup plus générales, par exemple équations différentielles ou aux différences nonlinéaires. En particulier, il prend connaissance des relations existant entre cette théorie et l'analyse semi-classique à la Voros (relations découvertes par Écalle et Voros eux-mêmes).

En second lieu, en étudiant des points tournants plus compliqués, Pham se rend compte de la nécessité irrémédiable pour leur étude de sortir du cadre microdifférentiel holonome (je dois avouer qu'il lui a fallu longtemps pour m'en convaincre!).

Désormais, l'essentiel de l'activité de Pham sera consacré à l'utilisation des méthodes résurgentes en analyse semi-classique. Ce sujet, comme je viens de le rappeler, est distinct de l'analyse microlocale; il me semble cependant qu'il en est assez voisin par ses méthodes et ses résultats. Je laisse à Voros le soin de vous en parler.

Bernard MALGRANGE,
Institut Fourier
CNRS UMR 5582
BP 74
38402 Saint-Martin d'Hères Cedex (France).