ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

BENT FUGLEDE

Le théorème du minimax et la théorie fine du potentiel

Annales de l'institut Fourier, tome 15, nº 1 (1965), p. 65-87
<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1965__15_1_65_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
15, 1 (1965), 65-88.

LE THÉORÈME DU MINIMAX ET LA THÉORIE FINE DU POTENTIEL

par Bent FUGLEDE

1. Capacité et contenance.

Habituellement la théorie du potentiel a lieu dans un seul espace localement compact. Pour certaines questions fondamentales de la théorie il semble être avantageux d'admettre deux tels espaces, X et Y. Nous désignerons par x, respectivement y, les points de ces deux espaces. Les *mesures* de Radon (toujours positives) sur X et sur Y seront désignées par λ, resp. μ, et leur ensemble par $\mathcal{M}(X)$, resp. $\mathcal{M}(Y)$. Ces deux espaces de mesures seront munis de la *topologie vague*.

Par un *noyau* $k = k(x, y)$ sur X $\times$ Y nous entrendrons une application semi-continue inférieurement (s.c.i.) de X $\times$ Y dans $[0, +\infty]$. On obtient deux espèces de *potentiel* par rapport à k. Le potentiel (« direct »)

$$k(x, \mu) = \int k(x, y)\, d\mu(y)$$

d'une mesure μ sur Y; c'est une fonction s.c.i. sur X. Et le potentiel (« transposé »)

$$k(\lambda, y) = \int k(x, y)\, d\lambda(x)$$

d'une mesure λ sur X; c'est une fonction s.c.i. sur Y. On a la *formule de réciprocité* (théorème de Fubini)

$$\int k(\lambda, y)\, d\mu(y) = \int k(x, \mu)\, d\lambda(x) = \iint k(x, y)\, d\lambda(x)\, d\mu(y).$$

Cette quantité s'appelle l'énergie mutuelle de λ et μ, et s'écrit aussi $k(\lambda, \mu)$.

La *capacité* d'un compact $K \subset Y$ par rapport au noyau k se définit par

$$(1) \qquad \operatorname{cap} K = \sup\{\mu(K) | \mu \in \mathcal{M}(K),\ k(x, \mu) \leqq 1 \text{ dans } X\}.$$

Pour un ensemble quelconque $A \subset Y$ on définit la *capacité intérieure*, $\operatorname{cap}_* A$, et la *capacité extérieure*, $\operatorname{cap}^* A$, par

$$\operatorname{cap}_* A = \sup\{\operatorname{cap} K \mid K \subset A,\ K \text{ compact}\},$$

$$\operatorname{cap}^* A = \inf\{\operatorname{cap}_* G \mid G \supset A,\ G \text{ ouvert (dans } Y)\}.$$

Ces deux fonctions d'ensemble sont évidemment croissantes, et $\operatorname{cap}_* A \leqq \operatorname{cap}^* A$. De plus on sait que cap^* est dénombrablement sous additive, et que cap_* l'est pour des ensembles mesurables pour toute mesure sur Y. On appelle A *capacitable* si $\operatorname{cap}^* A = \operatorname{cap}_* A$. Il est évident que tout ouvert est capacitable, et bien connu qu'il en est de même pour tout compact (voir p. ex. [14], ch. I).

Par dualité on définit la quantité suivante:

$$\text{(2)} \qquad \operatorname{cont} K = \inf\{\lambda(X) \mid \lambda \in \mathscr{M}(X),\ k(\lambda, y) \geqq 1 \text{ dans } K\}.$$

(On a échangé X et $K(\subset Y)$, et renversé le signe d'inégalité. On pose $\operatorname{cont} K = +\infty$ lorsqu'il n'y a aucune mesure λ avec les propriétés indiquées.) En suivant la terminologie proposée par M. Brelot [2] on appelle ce nombre la *contenance* du compact $K \subset Y$ par rapport au noyau k.

Pour tout compact $K \subset Y$ on a l'inégalité

$$\text{(3)} \qquad \operatorname{cap} K \leqq \operatorname{cont} K.$$

Soient en fait $\lambda \in \mathscr{M}(X)$ et $\mu \in \mathscr{M}(K)$ deux mesures telles que $k(\lambda, y) \geqq 1$ pour tout $y \in K$ et $k(x, \mu) \leqq 1$ pour tout $x \in X$. Alors, par la formule de réciprocité,

$$\mu(K) \leqq \int k(\lambda, y)\, d\mu(y) = \int k(x, \mu)\, d\lambda(x) \leqq \lambda(X).$$

La question se pose de savoir si le signe d'égalité s'applique dans (3). On sait que la réponse est affirmative lorsque k est symétrique et satisfait au principe de maximum (cf. la remarque au théorème 2.2). Nous allons cependant montrer que ces restrictions sont inutiles.

THÉORÈME 1.1. — *Pour tout noyau (s.c.i.) k sur $X \times Y$ localement compact, et pour tout compact $K \subset Y$, on a* $\operatorname{cap} K = \operatorname{cont} K$.

Démonstration. — Commençons par simplifier et reformuler cet énoncé. On peut supposer d'abord que X est *compact*. Si non, on adjoint à X un point à l'infini, ω, et on pose $k(\omega, y) = 0$ pour tout $y \in Y$. Ensuite on se ramène au cas $K = Y$ (compact) — en remplaçant l'espace Y par le compact donné $K \subset Y$ et le noyau k sur $X \times Y$ par sa restriction à $X \times K$.

Cela étant, nous avons deux espaces compacts, X et Y (= K), et le théorème affirme que cap Y = cont Y. Par définition,

$$\text{cap Y} = \sup\{\mu(Y) | \mu \in \mathscr{M}(Y),\ k(x, \mu) \leqq 1 \text{ sur } X\},$$
$$\text{cont Y} = \inf\{\lambda(X) | \lambda \in \mathscr{M}(X),\ k(\lambda, y) \geqq 1 \text{ sur } Y\}.$$

Introduisons les espaces $\mathscr{M}^1(X)$ et $\mathscr{M}^1(Y)$ des *mesures de probabilité* sur X et Y. On voit alors par un raisonnement d'homogénéité que cap Y $= 1/v$, cont Y $= 1/u$, où l'on a posé

$$u = \sup_{\lambda} \inf_{y} k(\lambda, y) = \sup_{\lambda} \inf_{\mu} k(\lambda, \mu),$$

$$v = \inf_{\mu} \sup_{x} k(x, \mu) = \inf_{\mu} \sup_{\lambda} k(\lambda, \mu).$$

Il est sous-entendu ici et par la suite que x, y, λ, μ parcourent respectivement X, Y, $\mathscr{M}^1(X)$, $\mathscr{M}^1(Y)$ (de sorte que $\lambda(X) = \mu(Y) = 1$).

Ainsi le théorème 1.1 affirme que $u = v$. Mais dans le cas spécial où les espaces compacts X et Y sont *discrets* (donc finis), ceci n'est rien que le célèbre *théorème du minimax* dans la théorie des jeux à deux personnes, dû à V. Neumann [19]. Le noyau k (à valeurs finies, pas nécessairement positives) s'appelle alors « the pay-off matrix ». Les mesures de probabilité λ et μ sont les stratégies (mixtes) des deux joueurs. Le nombre $u = v$ s'appelle la valeur du jeu. Une mesure $\lambda \in \mathscr{M}^1(X)$, resp. $\mu \in \mathscr{M}^1(Y)$, est dite optimale lorsque $\inf_y k(\lambda, y)$, resp. $\sup_x k(x, \mu)$, équivaut à la valeur du jeu. Le théorème de V. Neumann affirme en outre qu'il existe au moins une mesure (stratégie) optimale pour chacun des joueurs.

Nous avons vu ainsi que le théorème 1.1 équivaut à l'extension de l'identité $u = v$ dans le théorème du minimax du cas discret au cas général de deux espaces compacts quelconques X, Y et d'un noyau s.c.i. $k \geqq 0$ sur X × Y. Cette extension, qu'on peut faire aussi bien pour le noyau k à valeurs dans $]-\infty, +\infty]$, a été effectuée par I. L. Glicksberg [17]. Voici une démonstration indépendante. L'extension du cas discret au cas d'un noyau fini *continu* est facile grâce à la continuité de l'énergie mutuelle (the pay-off) $k(\lambda, \mu)$ sur l'espace compact $\mathscr{M}^1(X) \times \mathscr{M}^1(Y)$. Dans le cas général d'un noyau s.c.i. k à valeurs dans $]-\infty, +\infty]$, les quantités u et v satisfont aux inégalités

$$-\infty < u \leqq v \leqq +\infty$$

(voir la démonstration de l'inégalité correspondante (3)). Pour établir l'identité $u = v$, désignons par $\mathscr{H}$ la famille (filtrante pour la relation $\leqslant$) de toutes les applications finies continues $h \leqslant k$ de $X \times Y$ dans $]-\infty, +\infty[$. Pour chaque $h \in \mathscr{H}$ désignons par μ_h une mesure optimale sur Y associée à h (au lieu de k). Soit $h' \in \mathscr{H}$. Pour tout $x \in X$ et toute $h \in \mathscr{H}$ telle que $h \geqslant h'$ on a

$$h'(x, \mu_h) \leqslant h(x, \mu_h) \leqslant v_h.$$

Ici $v_h = \sup_x h(x, \mu_h)$ désigne la valeur du jeu déterminé par le noyau h. Comme l'espace $\mathscr{M}^1(Y)$ est compact, il y a une valeur d'adhérence $\mu_0 \in \mathscr{M}^1(Y)$ de l'application $h \to \mu_h$ suivant $\mathscr{H}$. Pour toute $\lambda \in \mathscr{M}^1(X)$ l'application $\mu \to h'(\lambda, \mu)$ de $\mathscr{M}^1(Y)$ dans $]-\infty, +\infty[$ est continue, et par suite

$$h'(\lambda, \mu_0) \leqslant \limsup_{h \in \mathscr{H}} h'(\lambda, \mu_h) \leqslant \sup_{h \in \mathscr{H}} v_h.$$

D'où il vient

$$k(\lambda, \mu_0) = \sup_{h' \in \mathscr{H}} h'(\lambda, \mu_0) \leqslant \sup_{h \in \mathscr{H}} v_h,$$

grâce à la définition de l'intégrale de la fonction s.c.i. $k(x, y)$ par rapport à la mesure $\lambda \otimes \mu_0$. Par conséquent,

$$v = \inf_{\mu} \sup_{\lambda} k(\lambda, \mu) \leqslant \sup_{\lambda} k(\lambda, \mu_0) \leqslant \sup_{h \in \mathscr{H}} v_h.$$

D'autre part on a $v_h = u_h \leqslant u \leqslant v$, et par suite

$$\sup_{h \in \mathscr{H}} v_h \leqslant u \leqslant v.$$

Les inégalités ainsi établies montrent que $u = v$, et que μ_0 est une mesure optimale sur Y. — Par contre, une mesure optimale sur X n'existe pas toujours dans le cas semi-continu.

Remarquons enfin qu'on a également $u = v$ lorsque k est supposé semi-continu supérieurement. D'autre part, si k est supposé seulement universellement mesurable, il se peut que $u < v$ (même si k est borné); voir J. Ville [21], M. Sion and P. Wolfe [20].

2. Existence d'une mesure optimale pour la contenance d'un compact.

Retournons aux deux problèmes d'extremum conduisant à la définition (1), n° 1, de la capacité et à la définition (2), n° 1, de la contenance d'un compact $K \subset Y$ par rapport à un noyau (s.c.i.) $k = k(x, y) \geqq 0$ sur le produit $X \times Y$ de deux espaces localement compacts. On vient de remarquer (ce qui est aussi une conséquence bien connue de la semi-continuité de l'application $\mu \to k(x, \mu)$ de $\mathscr{M}(K)$ dans $[0, +\infty]$ pour tout $x \in X$) qu'il existe toujours au moins une mesure μ qui réalise la borne supérieure dans la définition (1) de cap K (pourvu que cap K $< +\infty$). Par contre, on sait qu'il n'en est pas de même en général pour la borne inférieure dans la définition (2) de cont K, parce que (même pour les noyaux classiques) le potentiel d'équilibre sur un compact irrégulier, K, peut être <1 en des points de K formant un ensemble de capacité extérieure nulle.

C'est ainsi qu'on doit modifier un peu la définition de la contenance, de sorte qu'on n'exige la validité de l'inégalité $k(\lambda, y) \geqq 1$ que *quasi partout* (q.p.) dans K, i.e., sauf dans une partie de K de capacité extérieure 0. De plus, nous allons étendre la définition de la contenance à toutes les parties A de Y. On obtient alors la notion de contenance introduite par Brelot [2] (dans des cas classiques), et étudiée indépendamment par G. Choquet [9], [10], [11] sous le nom d'*encombrement*, à savoir

$$\text{(4)} \qquad \text{cont}\, A = \inf\{\lambda(X) | \lambda \in \mathscr{M}(X), k(\lambda, y) \geqslant 1 \qquad \text{q.p. dans } A\},$$

interprétée comme $+\infty$ lorsqu'il n'y a aucune telle mesure λ.

On voit facilement que cette modification n'entraîne aucun changement dans la valeur de la contenance, et par suite le théorème 1.1 reste valable. D'une part, la contenance modifiée (4) est évidemment $\leqslant$ la contenance originale ($=$ cap K). D'autre part, l'inégalité (3) subsiste même pour la contenance modifiée parce que l'inégalité $\int k(\lambda, y)\, d\mu(y) \geqslant \mu(K)$ se déduit également de la condition plus faible (¹)

$$\text{(5)} \qquad k(\lambda, y) \geqslant 1 \qquad \text{q.p. dans K}.$$

Même après la modification ci-dessus dans le problème d'extremum conduisant à la définition de la contenance on peut donner des exemples simples d'un noyau (s.c.i.) k et d'un compact K tels qu'il n'existe aucune mesure λ sur X qui minimise $\lambda(X)$ sous la condition (5) (²). Pourtant, si le noyau satisfait à une condition de

(¹) On pourrait même remplacer la qualification « quasi partout » dans (5) par la qualification moins restrictive « à peu près partout » (à p.p.p.), i.e., sauf dans un ensemble N tel que $\text{cap}_* \, N = 0$. La condition $\text{cap}_* \, N = 0$ équivaut en fait à dire que $\mu_* (N) = 0$ pour toute mesure μ sur Y de support compact et de potentiel $k(x, \mu)$ borné dans X.

(²) Soit $X = Y = K =$ un espace compact et infini. Posons $k(x, y) = 1$ pour $x \neq y$, $k(x, x) = 0$. Comme ce noyau est borné, l'ensemble vide est le seul ensemble de capacité 0. Pour toute mesure λ sur K on a $k(\lambda, y) = \lambda(X) - \lambda(\{y\})$. Donc la condition (5) entraîne que $\lambda(X) > 1$. Cela montre que cont K $\geqslant 1$. D'autre part, pour tout nombre naturel n il y a une mesure λ_n portée par $n + 1$ points dont chacun a la mesure $1/n$. Comme une telle mesure satisfait à (5) il vient cont K $\leqslant \lambda_n(X) = (n + 1)/n$, donc cont K $= 1$.

régularité convenable, l'existence des mesures optimales pour la définition (4) de la contenance sera manifeste pour tout compact (de capacité finie). Une telle condition est la suivante.

(A) Pour tout compact $K \subset Y$ de capacité >0 il existe des mesures non nulles ν portées par K telles que les potentiels $k(x, \nu)$ soient partout finis et continus, et que (si X n'est pas compact) $k(x, \nu) \to 0$ quand x tend à l'infini de X.

Dans le cas habituel $X = Y$ on sait que cette condition est remplie pour tout noyau *régulier* (i.e., satisfaisant au principe de continuité par rapport aux potentiels directs $k(x, \mu)$) tel que $k(x, y) \to 0$, uniformément par rapport à y sur toute partie compacte de Y, quand x tend vers le « point à l'infini » de X.

LEMME 2.1. *Si une mesure λ sur X est une valeur d'adhérence pour une suite $\{\lambda_n\}$ de mesures sur X dont les masses totales $\lambda_n(X)$ restent bornées, on a sous l'hypothèse* (A)

$$k(\lambda, y) \geqslant \liminf_n k(\lambda_n, y) \qquad \textit{à p.p.p. dans } Y.$$

Démonstration. — Au sujet de l'expression « à p.p.p. » (à peu près partout) voir la note ([1]). Posons

$$N = \{y \in Y | k(\lambda, y) < \liminf_n k(\lambda_n, y)\},$$
$$N_p = \{y \in Y | k(\lambda, y) + 1/p < \liminf_n k(\lambda_n, y)\}.$$

Comme N est la réunion des N_p ($p = 1, 2, \ldots$), il s'agit de montrer que $\mathrm{cap}_* N_p = 0$ pour tout p. Supposons au contraire que $\mathrm{cap}_* N_p > 0$, et prenons un compact $K \subset N_p$ de capacité positive. D'après l'hypothèse (A) il existe une mesure non nulle ν sur K de potentiel $k(x, \nu)$ fini continu (qui tend vers 0 à l'infini si X est non compact). En vertu du lemme de Fatou et de la définition de la topologie vague on arrive à une contradiction comme suit :

$$\int (k(\lambda, y) + 1/p)\, d\nu(y) \leqslant \int \liminf_n k(\lambda_n, y)\, d\nu(y)$$
$$\leqslant \liminf_n \int k(\lambda_n, y)\, d\nu(y) = \liminf_n \int k(x, \nu)\, d\lambda_n(x)$$
$$\leqslant \int k(x, \nu)\, d\lambda(x) = \int k(\lambda, y)\, d\nu(y).$$

THÉORÈME 2.2. — *Si le noyau k satisfait à la condition* (A), *il existe pour tout compact $K \subset Y$ de capacité finie des mesures $\lambda \in \mathcal{M}(X)$ et*

$\mu \in \mathscr{M}(Y)$ *telles que* $\lambda(X) = \mu(Y) = k(\lambda, \mu) = \operatorname{cap} K$, *et que*

$$k(\lambda, y) \geqslant 1 \qquad \textit{q.p. dans } K,$$

$$k(x, \mu) \leqslant 1 \qquad \textit{partout dans } X.$$

Démonstration. — Choisissons deux suites $\{\lambda_n\}$ et $\{\mu_n\}$ de mesures $\lambda_n \in \mathscr{M}(X)$ et $\mu_n \in \mathscr{M}(Y)$ telles que $k(\lambda_n, y) \geqslant 1$ q.p. dans K, $k(x, \mu_n) \leqslant 1$ partout dans X, et que

$$\lim \lambda_n(X) = \lim \mu_n(Y) = \operatorname{cap} K.$$

Comme ces deux suites sont vaguement bornées il existe des mesures $\lambda \in \mathscr{M}(X)$ et $\mu \in \mathscr{M}(Y)$ adhérentes à la suite $\{\lambda_n\}$, resp. $\{\mu_n\}$. Évidemment $\lambda(X) \leqslant \operatorname{cap} K = \mu(K)$. En vertu de la semi-continuité de l'application $\nu \to k(x, \nu)$ de $\mathscr{M}(K)$ dans $[0, +\infty]$ on a $k(x, \mu) \leqslant 1$ partout dans X. Le lemme précédent montre que $k(\lambda, y) \geqslant 1$ à p.p.p. dans K. L'ensemble exceptionnel s'écrit $K \cap E$, où

$$E = \{y \in Y \mid k(\lambda, y) < 1\}$$

est de type $\mathscr{F}_\sigma$, donc $K \cap E$ de type $\mathscr{K}_\sigma$. Comme $\operatorname{cap}_*(K \cap E) = 0$ il vient $\operatorname{cap}^*(K \cap E) = 0$ parce que les compacts sont capacitables. De plus, $\mu(K \cap E) = 0$ puisque $k(x, \mu)$ est borné. Par conséquent $k(\lambda, y) \geqslant 1$ q.p. dans K et p.p. pour μ. Il en résulte que

$$\begin{aligned} \operatorname{cap} K = \mu(K) &\leqslant \int k(\lambda, y)\, d\mu(y) = k(\lambda, \mu) \\ &= \int k(x, \mu)\, d\lambda(x) \leqslant \lambda(X) \leqslant \operatorname{cap} K. \end{aligned}$$

Remarques. — 1) Lorsque k est symétrique,

$$X = Y \qquad \text{et} \qquad k(x, y) = k(y, x),$$

et satisfait au principe de maximum de Frostman, on sait qu'on peut prendre $\lambda = \mu$ dans le théorème 2.2. Cela découle du théorème d'équilibre obtenu par la méthode de variation de Gauss.

2) Même dans le cas du noyau newtonien, $k(x, y) = |x - y|^{-1}$ dans R^3, la mesure λ (au contraire de μ) n'est pas en général déterminée univoquement par le compact K. Par exemple, si K est une boule de rayon 1 on peut prendre pour λ toute mesure sur K invariante par les rotations autour du centre de K et de masse totale égale à 1.

3. Le problème de capacitabilité

Un problème intéressant dans la théorie « fine » du potentiel est celui de la capacitabilité des ensembles plus généraux (notamment des ensembles analytiques ou sousliniens). Dans la théorie générale des capacités, due à Choquet [6], [13], l'étude de ce problème dépend surtout de la propriété suivante de la capacité extérieure

$$\operatorname{cap}^*(\cup A_n) = \lim \operatorname{cap}^* A_n \tag{6}$$

pour toute suite croissante d'ensembles quelconques A_n. Choquet a démontré dans [6] que cette propriété est une conséquence de l'inégalité suivante pour la capacité des compacts:

$$\operatorname{cap}(K_1 \cup K_2) + \operatorname{cap}(K_1 \cap K_2) \leqslant \operatorname{cap} K_1 + \operatorname{cap} K_2,$$

et que cette inégalité est exacte pour la capacité classique par rapport an noyau newtonien. Cependant l'inégalité tombe en défaut pour des noyaux plus généraux, et il semble difficile de vérifier (6) directement en s'appuyant sur la définition de la capacité. D'autre part il est facile de montrer — sous des conditions de régularité habituelles sur le noyau — que la *contenance* possède bien cette propriété de limite croissante,

$$\operatorname{cont}(\cup A_n) = \lim \operatorname{cont} A_n \tag{7}$$

pour toute suite croissante d'ensembles A_n (cf. Aronszajn and Smith [1] pour les capacités énergétiques d'ordre α, Choquet [9], [10], [11], Kishi [18]). Dans le cas du potentiel newtonien ou de Green ce résultat se trouve déja dans Brelot [2].

C'est ainsi que le problème de capacitabilité dépend de l'identité

$$\operatorname{cap}^* A = \operatorname{cont} A. \tag{8}$$

Dans le n° 1 on a étudié le cas général d'un noyau (s.c.i.) $k = k(x, y)$ ($\geqslant 0$) sur le produit $X \times Y$ de deux espaces localement compacts, et établi l'identité (8) pour tout compact dans Y. (Rappelons qu'on a $\operatorname{cap}^* K = \widehat{\operatorname{cap}}_* K = \operatorname{cap} K$ pour tout compact $K \subset Y$.) On va maintenant passer au cas d'un ensemble quelconque $A \subset Y$ et en même temps vérifier la propriété de limite croissante (7) (donc (6)). Pour ces buts il faut imposer au noyau k des conditions de régularité convenables([3]). Ces restrictions seront de la même nature que celles utilisées par Choquet [9], [10], [11] et Kishi [18] pour établir (7).— Nous commençons par une étude de quelques notions « quasi topologiques » liées à une capacité abstraite satisfaisant à deux conditions de sous-additivité.

4. Ensembles quasi-ouverts ou quasi-fermés, etc. Fonctions quasi-continues.

Dans ce n° on suppose donnée une fonction croissante d'ensemble, cap, définie pour tout compact K d'un espace séparé Y et à valeurs dans $[0, +\infty]$. On en déduit comme au n° 1 les fonctions d'ensemble cap_* et cap^* définies pour toute partie $A \subset Y$. On suppose de plus que cap^* soit *dénombrablement sous-additive* et que

$$\mathrm{cap}_*(A \cup B) \leqslant \mathrm{cap}_* A + \mathrm{cap}^* B \tag{9}$$

pour tout $A, B \subset Y$. On sait que toutes ces conditions sont remplies en particulier par la capacité par rapport à un noyau $k = k(x, y)$ sur le produit de deux espaces localement compacts, X et Y([4]).

DÉFINITION 4.1.— Un ensemble $A \subset Y$ est dit *quasi-ouvert* (resp. *quasi-fermé*, *quasi-compact*, ou *quasi relativement compact*) s'il existe pour tout nombre $\varepsilon > 0$ un ensemble fermé $F \subset Y$ tel que $\mathrm{cap}^* \complement F < \varepsilon$, et que $A \cap F$ soit ouvert relativement à F (resp. que $A \cap F$ soit fermé, compact, ou contenu dans un compact).

Conséquences immédiates. — Pour que A soit quasi-ouvert il faut et il suffit que $\complement A$ soit quasi-fermé. Toute réunion *dénombrable*, ainsi que toute intersection finie, d'ensembles quasi-ouverts est un ensemble quasi-ouvert. On a les énoncés duals pour les ensembles quasi-fermés ou quasi-compacts. Pour que A soit quasi-compact

([3]) Soit p. ex. X = Y = l'adhérence dans $[-\infty, +\infty]$ de l'ensemble N des nombres naturels. Posons $k(x, y) = 1$ pour $y < x < +\infty$, et $k(x, y) = 0$ ailleurs. Pour le compact

$$A_n = \{1, 2, \dots, n\} \subset Y$$

on trouve $\mathrm{cap}\, A_n = \mathrm{cont}\, A_n = 1$. Cependant l'ouvert $N = \cup A_n$ donne $\mathrm{cap}^* N = \mathrm{cap}_* N = 1$, $\mathrm{cont}\, N = +\infty$, de sorte que (6) vaut tandis que (7) et (8) tombent en défaut. — J'ignore si la propriété (6) subsiste pour tout noyau.

([4]) Au sujet de l'inégalité (9) on se ramène d'abord au cas $A \cup B$ compact en remplaçant au besoin $A \cup B$ par un compact quelconque $K \subset A \cup B$ et A, B par $A \cap K$, $B \cap K$. Lorsque $A \cup B = C$ est compact on prend un ouvert $G \supset B$ tel que $\mathrm{cap}_* G < \mathrm{cap}^* B + \varepsilon$. Comme C et G sont universellement mesurables il vient

$$\mathrm{cap}_* C \leqslant \mathrm{cap}_*(C \cap \complement G) + \mathrm{cap}_*(C \cap G) \leqslant \mathrm{cap}_* A + \mathrm{cap}_* G \leqslant \mathrm{cap}_* A + \mathrm{cap}^* B + \varepsilon.$$

il faut et il suffit que A soit quasi-fermé et quasi relativement compact. Toute partie d'un ensemble quasi-compact est quasi relativement compact. Remarquons enfin que, si un ensemble A possède une des propriétés définies ci-dessus, il en est de même pour tout ensemble B tel que $\mathrm{cap}^*(A \cap \complement B) = \mathrm{cap}^*(B \cap \complement A) = 0$.

LEMME 4.2.— *Pour qu'un ensemble* $A \subset Y$ *soit quasi-ouvert il faut et il suffit qu'il existe pour tout* $\varepsilon > 0$ *un ouvert* $H \supset A$ *tel que* $\mathrm{cap}^*(H \cap \complement A) < \varepsilon$. *Pour que* A *soit quasi-fermé* (*resp. quasi-compact ou quasi relativement compact*) *il faut et il suffit qu'il existe pour tout* $\varepsilon > 0$ *un ensemble fermé* (*resp. compact ou relativement compact*) $H \subset A$ *tel que* $\mathrm{cap}^*(A \cap \complement H) < \varepsilon$.

Démonstration. — On se ramène par dualité à la caractérisation des ensembles quasi-fermés (resp. quasi-compacts ou quasi relativement compacts). Si A est un tel ensemble, on prend F fermé conformément à la définition 4.1 et on pose $H = A \cap F$. Alors H est un ensemble du type indiqué, et $\mathrm{cap}^*(A \cap \complement H) = \mathrm{cap}^*(A \cap \complement F) < \varepsilon$. Inversement, si $H \subset A$ possède les propriétés énoncées dans le lemme, il y a un ouvert $G \supset A \cap \complement H$ tel que $\mathrm{cap}^* G < \varepsilon$. On voit que $F = \complement G$ est fermé, $\mathrm{cap}^* \complement F < \varepsilon$, et que $A \cap F = H \cap F$ est fermé (resp. compact ou relativement compact).

LEMME 4.3.— *Un ensemble* $A \subset Y$ *est capacitable lorsqu'il existe pour tout* $\varepsilon > 0$ *un ensemble capacitable* $B \subset Y$ *tel que*

$$\mathrm{cap}^*(A \cap \complement B) < \varepsilon \qquad \textit{et} \qquad \mathrm{cap}^*(B \cap \complement A) < \varepsilon.$$

En fait,

$$\mathrm{cap}^* A \leqslant \mathrm{cap}^* B + \mathrm{cap}^*(A \cap \complement B) < \mathrm{cap}_* B + \varepsilon,$$

$$\mathrm{cap}_* B \leqslant \mathrm{cap}_* A + \mathrm{cap}^*(B \cap \complement A) < \mathrm{cap}_* A + \varepsilon.$$

COROLLAIRE. — Tout ensemble quasi-ouvert est capacitable. Si tout compact est capacitable il en est de même pour tout ensemble quasi-compact.

DÉFINITION 4.4.— Une fonction f sur Y à valeurs dans $[-\infty, +\infty]$ est dite *quasi-continue* (dans Y) s'il existe pour tout $\varepsilon > 0$ un ensemble fermé $F \subset Y$ tel que $\mathrm{cap}^* \complement F < \varepsilon$ et que f soit finie continue relativement à F.

LEMME 4.5.— *Pour qu'une fonction f sur* Y *soit quasi-continue il faut et il suffit que f soit finie quasi partout et que les ensembles*

$$\{y \in Y | f(y) \geqslant t\} \qquad et \qquad \{y \in Y | f(y) \leqslant t\}$$

soient quasi-fermés quel que soit $t \in]-\infty, +\infty[$.

Démonstration. — La nécessité de ces conditions est évidente. Pour établir la suffisance on prend pour tout nombre rationnel r un nombre $\varepsilon_r > 0$ tel que $\Sigma\varepsilon_r \leqslant \varepsilon$. Soit F_r un fermé tel que cap* $\complement F_r < \varepsilon_r$ et que F_r coupe chacun des ensembles quasi-fermés $\{y \in Y | f(y) \geqslant r\}$ et $\{y \in Y | f(y) \leqslant r\}$ en un ensemble fermé. Alors f est continue relativement à $F = \cap F_r$, et on a cap* $\complement F < \varepsilon$. On voit facilement qu'on peut choisir F de façon que f soit finie sur F.

DÉFINITION 4.6.— On dit qu'une fonction f sur Y possède la *quasi-limite* 0 à l'infini (dans Y) s'il existe pour tout $\varepsilon > 0$ un fermé $F \subset Y$ tel que cap* $\complement F < \varepsilon$ et que f s'annule à l'infini dans F (c.à.d. que l'ensemble $\{y \in F | \, |f(y)| \geqslant t\}$ soit relativement compact quel que soit le nombre $t > 0$).

Lorsque Y est compact on peut dire que toute fonction sur Y possède la quasi-limite 0 à l'infini.

LEMME 4.7.—*Pour qu'une fonction f sur* Y *possède la quasi-limite* 0 *à l'infini, il faut et il suffit que l'ensemble* $\{y \in | \, |f(y)| \geqslant t\}$ *soit quasi relativement compact pour tout* $t > 0$.

Démonstration analogue à celle du lemme précédent. — Des lemmes 4.5 et 4.7 résulte en particulier le lemme suivant.

LEMME 4.8.— *Pour qu'une fonction s.c.i. f à valeurs dans* $[0, +\infty]$ *soit quasi-continue et possède la quasi-limite* 0 *à l'infini il faut et il suffit que l'ensemble* $\{y \in Y | f(y) \geqslant t\}$ *soit quasi-compact pour tout* $t > 0$.

DÉFINITION 4.9.— Une fonction f sur Y sera dite *quasi-bornée* s'il existe pour tout $\varepsilon > 0$ un fermé $F \subset Y$ tel que cap* $\complement F < \varepsilon$ et que f soit bornée sur F.

Cela revient à dire que cap*$\{y \in Y | f(y) \geqslant t\} \to 0$ pour $t \to \infty$. Toute fonction quasi-bornée est évidemment finie quasi-partout.

5. Caractérisation des fonctions quasi-continues ayant la quasi-limite 0 à l'infini.

Retournons au cadre d'un noyau (s.c.i.) $k = k(x, y) \geqslant 0$ sur le produit $X \times Y$ de deux espaces localement compacts, et considérons la capacité associée à un tel noyau par la définition (1), n° 1.

THÉORÈME 5.1.[5] — *Soit f une fonction s.c.i. sur* Y *à valeurs dans* $[0, +\infty]$. *Pour que f soit quasi-continue et possède la quasi-limite* 0 *à l'infini dans* Y, *il faut et il suffit que f soit quasi-bornée et que l'application*

$$\mu \to \int f \, d\mu \tag{10}$$

soit vaguement continue relativement à tout ensemble $\mathscr{B} \subset \mathscr{M}(\mathrm{Y})$ qui possède les propriétés suivantes: 1) *Les masses totales $\mu(\mathrm{Y})$, $\mu \in \mathscr{B}$, restent bornées;* 2) *Les potentiels $k(x, \mu)$, $\mu \in \mathscr{B}$, sont bornés dans leur ensemble; et* 3) *Les mesures $\mu \in \mathscr{B}$ sont portées par un même fermé sur lequel f est bornée.*

Démonstration. — Pour tout a, b, $c \in]0, +\infty[$ désignons par $\mathscr{B}_{a,b,c}$ l'ensemble des mesures μ sur Y portées par le fermé

$$\{y \in \mathrm{Y} | f(y) \leqslant a\}$$

telles que $k(x, \mu) \leqslant b$ pour tout $x \in \mathrm{K}$ et que $\mu(\mathrm{Y}) \leqslant c$. Dire qu'une partie $\mathscr{B}$ de $\mathscr{M}(\mathrm{Y})$ a les trois propriétés indiquées ci-dessus équivaut donc à dire que $\mathscr{B}$ est contenue dans un tel ensemble $\mathscr{B}_{a,b,c}$ — L'hypothèse que f soit s.c.i. signifie que l'application (10) est s.c.i. sur tout l'espace $\mathscr{M}(\mathrm{Y})$.

Supposons maintenant que f soit quasi-continue et possède la quasi-limite 0 à l'infini dans Y. Soit $\varepsilon > 0$, et désignons par $\mathrm{F} \subset \mathrm{Y}$ un fermé tel que $\mathrm{cap}^* \complement \mathrm{F} < \varepsilon$ et que la restriction de f à F soit continue et s'annule à l'infini dans F. Comme f est alors bornée sur F elle est quasi-bornée dans Y. De plus, la fonction g sur Y définie par $g(y) = f(y)$ pour $y \in \mathrm{F}$, $g(y) = 0$ pour $y \in \complement \mathrm{F}$, est semi-continue supérieurement et s'annule à l'infini dans Y. Cela signifie que l'application $\mu \to \int g \, d\mu$ est vaguement semi-continue supérieurement relativement à tout ensemble de mesures μ sur Y dont les masses totales restent bornées, p. ex. relativement à $\mathscr{B}_{a,b,c}$ quels que soient a, b, $c \in]0, +\infty[$. Comme

$$\begin{aligned} \int g \, d\mu \leqslant \int f \, d\mu &= \int_{\mathrm{F}} f \, d\mu + \int_{\complement \mathrm{F}} f \, d\mu \\ &\leqslant \int g \, d\mu + a \,.\, \mu(\complement \mathrm{F}) \leqslant \int g \, d\mu + ab \, \mathrm{cap}_* \complement \mathrm{F} \\ &\leqslant \int g \, d\mu + ab\varepsilon \end{aligned}$$

[5] La nécessité des conditions énoncées est essentiellement due à Brelot. La suffisance semble être nouvelle (même dans le cas d'un potentiel $f(y) = k(\lambda, y)$). D'ailleurs le théorème 5.1 ne sera pas utilisé dans ce qui suit.

pour toute $\mu \in \mathscr{B}_{a,b,c}$, on voit que l'application (10) est également semi-continue supérieurement relativement à $\mathscr{B}_{a,b,c}$, donc continue relativement à cet ensemble.

Inversement, supposons que f soit quasi-bornée (donc finie q.p.) et que l'application (10) soit vaguement continue relativement à $\mathscr{B}_{a,b,c}$ quels que soient $a, b, c \in]0, +\infty[$. En vertu du lemme 4.8 il s'agit de montrer que l'ensemble

$$\mathrm{H} = \{y \,\varepsilon\, \mathrm{Y} \mid f(y) \geqslant t\}$$

est quasi-compact pour tout $t \in]0, +\infty[$. Pour cela nous utilisons la méthode esquissée dans [16] au sujet d'une proposition analogue. Posons

$$\mathrm{G}_t = \{y \in \mathrm{Y} \mid f(y) > t\}$$

pour tout t. Si nous pouvons affirmer pour tout nombre naturel n l'existence d'un compact $\mathrm{K}_n \subset \mathrm{G}_{t-1/n}$ tel que $\mathrm{cap}^*(\mathrm{H} \cap \complement \mathrm{K}_n) < \varepsilon \,.\, 2^{-n}$, alors l'intersection K_0 des K_n sera une partie compacte de

$$\mathrm{H} = \bigcap_n \mathrm{G}_{t-1/n}$$

telle que

$$\mathrm{cap}^*(\mathrm{H} \cap \complement \mathrm{K}_0) \leqslant \sum_n \mathrm{cap}^*(\mathrm{H} \cap \complement \mathrm{K}_n) < \varepsilon,$$

de sorte que H soit quasi-compact (lemme 4.2). Il nous reste donc à montrer qu'il existe pour tout nombre r tel que $0 < r < t$ et pour tout $\varepsilon > 0$ un compact $\mathrm{K} \subset \mathrm{G}_r$ pour lequel $\mathrm{cap}^*(\mathrm{H} \cap \complement \mathrm{K}) < \varepsilon$.

L'hypothèse que f soit quasi-bornée signifie que $\mathrm{cap}^* \mathrm{G}_a \to 0$ pour $a \to +\infty$. Fixons deux nombres a et s tels que $\mathrm{cap}^* \mathrm{G}_a < \varepsilon/2$ et que $r < s < t$, et posons

$$\mathrm{A} = \mathrm{G}_s \cap \complement \mathrm{G}_a = \{y \in \mathrm{Y} \mid s < f(y) \leqslant a\}.$$

Considérons la famille filtrante croissante Φ des parties compactes K de G_r, et posons

$$\inf_{\mathrm{K} \in \Phi} \mathrm{cap}_*(\mathrm{A} \cap \complement \mathrm{K}) = \alpha.$$

Il suffit de montrer que $\alpha = 0$. Car cela entraînera l'existence d'un compact $\mathrm{K} \subset \mathrm{G}_r$ tel que $\mathrm{cap}_*(\mathrm{A} \cap \complement \mathrm{K}) < \varepsilon/2$, et par suite (vu que $\mathrm{H} \subset \mathrm{G}_s$ et que $\mathrm{G}_s \cap \complement \mathrm{K}$ est ouvert)

$$\mathrm{cap}^*(\mathrm{H} \cap \complement \mathrm{K}) \leqslant \mathrm{cap}_*(\mathrm{G}_s \cap \complement \mathrm{K}) \leqslant \mathrm{cap}_*(\mathrm{A} \cap \complement \mathrm{K}) + \mathrm{cap}^* \mathrm{G}_a < \varepsilon.$$

Supposons au contraire que $0 < \alpha \leqslant +\infty$. Pour tout $K \in \Phi$, soit Q_K une partie compacte de $A \cap \complement K$ telle que

$$\operatorname{cap} Q_K \geqslant \tfrac{1}{2}\operatorname{cap}_*(A \cap \complement K),$$

et soit μ_K une mesure portée par Q_K telle que $\mu_K(Y) = 1$ et que

$$k(x, \mu_K) \leqslant 1/\operatorname{cap} Q_K \leqslant 2/\alpha \qquad \text{pour tout } x \in X.$$

Soit μ_0 une mesure adhérente vaguement à la famille bornée $\{\mu_K\}$ suivant Φ. Comme μ_K est portée par $\complement K = \complement \mathring{K}$ (où $\mathring{K}$ désigne l'intérieur de K), μ_0 est portée par $\complement \mathring{K}$ pour tout $K \in \Phi$, donc par

$$\bigcap_{K \in \Phi} \complement \mathring{K} = \complement \bigcup_{K \in \Phi} \mathring{K} = \complement G_r = \{y \in Y | f(y) \leqslant r\}.$$

(Tout point de G_r est en fait contenu dans l'intérieur d'un compact $K \subset G_r$ parce que G_r est ouvert et l'espace localement compact Y est complètement régulier.) Il en résulte que $f(y) \leqslant r$ pour tout point y du support de μ_0, de sorte que

$$\int f \, d\mu_0 \leqslant r \,.\, \mu_0(Y) \leqslant r \,.\, \limsup_{K \in \Phi} \mu_K(Y) = r. \tag{11}$$

D'autre part les μ_K, et par suite μ_0, appartiennent à $\mathscr{B}_{a,2/\alpha,1}$ (qui est évidemment vaguement fermé). D'où par hypothèse

$$\int f \, d\mu_0 \geqslant \liminf_{K \in \Phi} \int f \, d\mu_K \geqslant s, \tag{12}$$

parce que $f(y) > s$ partout dans le support de chacune des μ_K, et que $\mu_K(Y) = 1$. Comme $r < s$ les inégalités (11) et (12) sont contradictoires, et la démonstration du théorème est achevée.

6. Capacité intérieure et contenance.

On va maintenant étudier la relation entre la capacité intérieure $\operatorname{cap}_* A$ d'un ensemble quelconque $A \subset Y$ (par rapport au noyau k sur $X \times Y$) et d'une notion correspondante de contenance, à savoir

$$\operatorname{cont}' A = \inf\{\lambda(X) | \lambda \in \mathscr{M}(X), k(\lambda, y) \geqslant 1 \text{ à p.p.p. dans } A\},$$

interprétée comme $+\infty$ lorsqu'il n'y a aucune telle mesure λ. Ainsi on a remplacé la qualification « quasi partout dans A », qui figure dans la définition (4), n° 2, de la contenance cont A, par la qualification moins restrictive « à peu près partout dans A » (voir la note ([1]) au n° 2). Pour tout ensemble $A \subset Y$ on a $\operatorname{cont}' A \leqslant \operatorname{cont} A$. Pour tout compact $K \subset Y$ le raisonnement donné dans le n° 2 montre que $\operatorname{cap} K \leqslant \operatorname{cont}' K \leqslant \operatorname{cont} K = \operatorname{cap} K$, donc que ces quantités sont égales (quel que soit le noyau k). Cela entraîne la première des inégalités suivantes, valables pour tout ensemble $A \subset Y$:

$$(13) \qquad \operatorname{cap}_* A \leqslant \operatorname{cont}' A\,; \qquad \operatorname{cap}^* A \leqslant \operatorname{cont} A.$$

Par la démonstration de la deuxième inégalité on peut supposer que $\operatorname{cont} A < +\infty$. Il existe alors pour tout $\varepsilon > 0$ une mesure λ sur X telle que $k(\lambda, y) \geqslant 1$ q.p. dans A, et que $\lambda(X) < \operatorname{cont} A + \varepsilon$. Posons $\lambda' = (1 + \varepsilon)\lambda$, et

$$N = \{y \in A | k(\lambda, y) < 1\}, \qquad G = \{y \in Y | k(\lambda', y) > 1\}.$$

Vu que $\operatorname{cap}^* N = 0$ et que G est ouvert et contient $A \cap \complement N$, il vient

$$\operatorname{cap}^* A = \operatorname{cap}^*(A \cap \complement N) \leqslant \operatorname{cap}_* G \leqslant \operatorname{cont}' G$$

$$\leqslant \lambda'(X) = (1 + \varepsilon)\,.\,\lambda(X) < (1 + \varepsilon)(\operatorname{cont} A + \varepsilon).$$

— Les inégalités (13) s'expriment comme suit:

LEMME 6.1. — *Soit λ une mesure bornée sur* X, $t \in]0, +\infty[$, *et* A *une partie de* Y *telle que $k(\lambda, y) \geqslant t$ à p.p.p. dans* A (*resp. q.p. dans* A). *Alors* $\operatorname{cap}_* A \leqslant \lambda(X)/t$, *resp.* $\operatorname{cap}^* A \leqslant \lambda(X)/t$.

Il suffit en fait de remplacer λ par $t^{-1}\lambda$ dans la définition de $\operatorname{cont}' A$, resp. $\operatorname{cont} A$.

COROLLAIRE. — Le potentiel (transposé) $k(\lambda, y)$ d'une mesure bornée λ sur X est quasi-borné, donc fini quasi partout dans Y.

L'exemple dans la note (3), n° 3, montre qu'il faut imposer au noyau (s.c.i.) k des conditions additionnelles pour pouvoir affirmer que les signes d'égalité s'appliquent dans (13). En ce qui concerne la première de ces inégalités la condition (A) introduite dans le n° 2 suffit pour ce but.

THÉORÈME 6.2. — *Soit k un noyau satisfaisant à la condition* (A). *Pour tout ensemble* $A \subset Y$ *on a* $\operatorname{cap}_* A = \operatorname{cont}' A$. *Lorsque ce nombre est fini il existe au moins une mesure λ sur* X *telle que* $\lambda(X) = \operatorname{cap}_* A$ *et que $k(\lambda, y) \geqslant 1$ à p.p.p. dans* A.

Démonstration. — Grâce à la première inégalité (13) on peut supposer que $\operatorname{cap}_* A < +\infty$. Pour tout compact $K \subset A$ soit $\lambda_K \in \mathscr{M}(X)$, $\lambda_K(X) = \operatorname{cap} K$ ($= \operatorname{cont} K$), $k(\lambda_K, y) \geqslant 1$ à p.p.p. dans K. Soit $\lambda \in \mathscr{M}(X)$ une valeur d'adhérence pour les λ_K suivant la famille filtrante croissante Φ des compacts $K \subset A$. Alors

$$(14) \qquad \lambda(X) \leqslant \lim_{K \in \Phi} \lambda_K(X) = \lim_{K \in \Phi} \operatorname{cap} K = \operatorname{cap}_* A \leqslant \operatorname{cont}' A.$$

Il nous reste seulement de montrer que $k(\lambda, y) \geqslant 1$ à p.p.p. dans A, car cela impliquera que $\operatorname{cont}' A \leqslant \lambda(X)$, donc que les signes d'égalité s'appliquent dans (14). Posons

$$N = \{y \in A \mid k(\lambda, y) < 1\},$$

et supposons que $\operatorname{cap}_* N > 0$. Il existe alors un compact $K_0 \subset N$ de capacité positive. D'après l'hypothèse (A) il existe une mesure non nulle ν sur K_0 de potentiel $k(x, \nu)$ fini continu et tendant vers 0 à l'infini dans X si X est non compact. Vu que $k(\lambda_K, y) \geqslant 1$ à p.p.p. dans K, et par suite dans K_0 dès que $K \supset K_0$, on arrive à une contradiction comme suit:

$$\begin{aligned}\int d\nu \leqslant \liminf_{K \in \Phi} \int k(\lambda_K, y)\, d\nu(y) &= \liminf_{K \in \Phi} \int k(x, \nu)\, d\lambda_K(x) \\ \leqslant \int k(x, \nu)\, d\lambda(x) &= \int k(\lambda, y)\, d\nu(y) < \int d\nu.\end{aligned}$$

COROLLAIRE.— Tout ensemble $A \subset Y$ de type $\mathscr{K}_\sigma$ est capacitable.

En fait, l'ensemble exceptionnel N est alors également de type $\mathscr{K}_\sigma$ (réunion dénombrable de compacts), et par suite $\operatorname{cap}_* N = 0$ entraîne $\operatorname{cap}^* N = 0$ puisque les compacts sont capacitables. Grâce au lemme 6.1 il en résulte que $\operatorname{cap}^* A \leqslant \lambda(X) = \operatorname{cap}_* A$.

7. Capacité extérieure et contenance.

Dans ce n° on suppose toujours que le noyau (s.c.i.) $k = k(x, y) \geqslant 0$ sur $X \times Y$ localement compact satisfait *d'une part* à la condition (A), n° 2, concernant l'existence de « beaucoup de » mesures ν sur Y de potentiel (direct) $k(x, \nu)$ fini continu et s'annulant à l'infini de X, et *d'autre part* à la condition suivante de quasi-continuité des potentiels transposés:

(B) Le potentiel $k(\lambda, y)$ de toute mesure bornée λ sur X est quasi-continu et possède la quasi-limite 0 à l'infini dans Y.

Lorsque l'espace Y est compact le dernier énoncé de l'hypothèse **(B)** est vide.

LEMME 7.1.— *Tout ensemble* $A \subset Y$ *tel que* $\operatorname{cap}^* A < +\infty$ *est quasi relativement compact.*

Démonstration. — Soit G un ouvert contenant A tel que

$$\mathrm{cap}_* \, G < +\infty.$$

D'après le théorème 6.2 il existe une mesure bornée λ sur X telle que $\lambda(X) = \mathrm{cap}_* \, G$ et que $k(\lambda, y) \geqslant 1$ à p.p.p. dans G. Comme $k(\lambda, y)$ est quasi-continu et possède la quasi-limite 0 à l'infini, l'ensemble

$$H = \{y \in Y | k(\lambda, y) \geqslant 1\}$$

est quasi-compact (lemme 4.8). L'ensemble exceptionnel $N = G \cap \complement H$ est alors quasi-ouvert, donc capacitable (corollaire du lemme 4.3), de sorte que $\mathrm{cap}^* \, N = \mathrm{cap}_* \, N = 0$. Il en résulte que l'ensemble $H \cup N$, qui contient A, est également quasi-compact (voir la dernière des remarques suivant la définition 4.1), et par suite A est quasi relativement compact.

Corollaire. — Tout ensemble quasi-fermé de capacité extérieure finie est quasi-compact, donc capacitable.

Théorème 7.2. — *Pour toute famille filtrante décroissante* Φ *d'ensembles fermés* $F \subset Y$ *tels que* $\mathrm{cap}^* \, F < +\infty$ *on a*

$$\mathrm{cap}^* \bigcap_{F \in \Phi} F = \inf_{F \in \Phi} \mathrm{cap}^* \, F.$$

Démonstration. — On sait que cette relation subsiste pour toute famille filtrante décroissante de *compacts* (voir p. ex. [14], p. 155). Dans le cas présent fixons un ensemble $E \in \Phi$, et désignons par F_0 l'intersection des $F \in \Phi$. En vertu du lemme 4.2 il existe pour tout $\varepsilon > 0$ un compact $K \subset E$ tel que $\mathrm{cap}^* (E \cap \complement K) < \varepsilon$. Comme

$$\mathrm{cap}^*(F_0 \cap K) = \inf_{F \in \Phi} \mathrm{cap}^*(F \cap K)$$

il y a un ensemble $F \in \Phi$ tel que $F \subset E$ et que

$$\mathrm{cap}^*(F \cap K) < \mathrm{cap}^*(F_0 \cap K) + \varepsilon \leqslant \mathrm{cap}^* \, F_0 + \varepsilon.$$

D'où

$$\begin{aligned} \mathrm{cap}^* \, F &\leqslant \mathrm{cap}^*(F \cap K) + \mathrm{cap}^*(F \cap \complement K) \\ &\leqslant \mathrm{cap}^*(F \cap K) + \mathrm{cap}^*(E \cap \complement K) < \mathrm{cap}^* \, F_0 + 2\varepsilon. \end{aligned}$$

— On peut maintenant améliorer le lemme 2.1 comme suit pour un noyau satisfaisant aux conditions (A) et (B) (voir Brelot et Choquet [3] pour le cas newtonien, et Choquet [7], [8], [10], Kishi [18] pour des cas voisins de celui envisagé ici) :

THÉORÈME 7.3. — *Si une mesure λ sur X est une valeur d'adhérence pour une suite $\{\lambda_n\}$ de mesures sur X dont les masses totales $\lambda_n(X)$ restent bornées, on a*

$$k(\lambda, y) \geqslant \liminf_n k(\lambda_n, y) \qquad \textit{q.p. dans } Y.$$

Démonstration. — Comme les $k(\lambda_n, y)$ sont quasi-continus par hypothèse, les ensembles

$$M_{p,n} = \{y \in Y | k(\lambda, y) + 1/p \leqslant k(\lambda_n, y)\}$$

sont quasi-fermés. De plus $M_{p,n} \subset \{y \in Y | k(\lambda_n, y) \geqslant 1/p\}$, de sorte que $\mathrm{cap}^* M_{p,n} \leqslant p \,.\, \lambda_n(X) < +\infty$ (lemme 6.1). Il en résulte que les intersections *dénombrables*

$$N_{p,q} = \bigcap_{n>q} M_{p,n}$$

sont également quasi-fermées et de capacité extérieure finie, donc capacitables. Évidemment $N_p \subset \bigcup_q N_{p,q} \subset N_{p+1}$, où N_p désigne l'ensemble introduit dans la démonstration du lemme 2.1. Vu que $\mathrm{cap}_* N_{p+1} = 0$, on a $\mathrm{cap}^* N_{p,q} = \mathrm{cap}_* N_{p,q} = 0$, donc $\mathrm{cap}^* N_p = 0$ pour tout p, et par suite $\mathrm{cap}^* N = 0$.

— Nous sommes maintenant en état d'établir l'identité (énoncée dans le n° 3) entre la capacité extérieure et la contenance sous les hypothèses (A) et (B), et d'affirmer l'existence d'une mesure qui réalise la borne inférieure dans la définition (4), n° 2, de la contenance. Dans le cas du potentiel newtonien l'idée d'une telle « distribution capacitaire extérieure » (ainsi que de la « distribution capacitaire intérieure » figurant au théorème 6.2) se trouve déjà dans Brelot [2] et Cartan [5].

THÉORÈME 7.4. — *Pour tout ensemble* $A \subset Y$ *on a* $\mathrm{cap}^* A = \mathrm{cont}\, A$. *Lorsque ce nombre est fini il existe au moins une mesure λ sur X telle que* $\lambda(X) = \mathrm{cap}^* A$ *et que* $k(\lambda, y) \geqslant 1$ *q.p. dans* A.

Démonstration. — Grâce à la dernière des inégalités (13), n° 6, on peut supposer que $\mathrm{cap}^* A < +\infty$; et il suffit d'affirmer l'existence d'une mesure λ avec les propriétés indiquées. Pour un ensemble *ouvert* (ou quasi-ouvert), A, on prend la mesure figurant dans le théorème analogue 6.2 pour la capacité intérieure. Alors

$$\lambda(X) = \mathrm{cap}_* A = \mathrm{cap}^* A.$$

L'ensemble exceptionnel $N = A \cap \{y \in Y | k(\lambda, y) < 1\}$ est l'intersection de deux ensembles quasi-ouverts (voir le lemme 4.5), donc lui-même quasi-ouvert et par suite capacitable. Cela montre que $\mathrm{cap}^* N = \mathrm{cap}_* N = 0$, de sorte que $k(\lambda, y) \geqslant 1$ q.p. dans A. — Pour un ensemble *quelconque* $A \subset Y$ choisissons une suite d'ouverts $G_n \supset A$ tels que $\mathrm{cap}_* G_n \to \mathrm{cap}^* A$ pour $n \to +\infty$, et désignons pour tout n par λ_n une mesure sur X telle que $\lambda_n(X) = \mathrm{cap}_* G_n$ et que $k(\lambda_n, y) \geqslant 1$ q.p. dans G_n (donc q.p. dans A). Comme les masses totales $\lambda_n(X)$ restent bornées il existe une valeur d'adhérence λ pour la suite $\{\lambda_n\}$. Le théorème précédent montre que $k(\lambda, y) \geqslant 1$ q.p. dans A, et par suite

$$\mathrm{cont}\, A \leqslant \lambda(X) \leqslant \limsup_n \lambda_n(X) = \mathrm{cap}^* A \leqslant \mathrm{cont}\, A.$$

THÉORÈME 7.5.— *Pour toute suite croissante d'ensembles* $A_n \subset Y$ *on a*

$$\mathrm{cap}^* \bigcup_n A_n = \lim_n \mathrm{cap}^* A_n.$$

Démonstration. — On peut supposer que $\lim_n \mathrm{cap}^* A_n < +\infty$. Soit $\lambda_n \in \mathscr{M}(X)$, $\lambda_n(X) = \mathrm{cap}^* A_n$, $k(\lambda_n, y) \geqslant 1$ q.p. dans A_n. Comme les $\lambda_n(X)$ restent bornées il y a une mesure λ sur X adhérente à la suite $\{\lambda_n\}$. En vertu du théorème 7.3, $k(\lambda, y) \geqslant 1$ q.p. dans chacun des A_n, donc également q.p. dans leur réunion A. Il en résulte que

$$\mathrm{cap}^* A \leqslant \lambda(X) \leqslant \lim_n \lambda_n(X) = \lim_n \mathrm{cap}^* A_n \leqslant \mathrm{cap}^* A.$$

COROLLAIRE.— La réunion A d'une suite croissante d'ensembles capacitables $A_n \subset Y$ est capacitable. En fait,

$$\mathrm{cap}^* A = \lim_n \mathrm{cap}^* A_n = \lim_n \mathrm{cap}_* A_n \leqslant \mathrm{cap}_* A.$$

DÉFINITION 7.6.— Un ensemble $A \subset Y$ sera dit *σ-fini* lorsqu'il se représente comme la réunion d'une famille dénombrable d'ensembles de capacité extérieure finie.

LEMME 7.7.— *Si* $A \subset Y$ *est σ-fini, et si* $A \cap K$ *est capacitable quel que soit le compact* $K \subset Y$, *alors* A *est lui-même capacitable.*

Démonstration. — Soit $A = \cup A_n$, $\mathrm{cap}^* A_n < +\infty$. Grâce aux lemmes 7.1 et 4.2 il existe des compacts $K_n \subset Y$ tels que

$$\mathrm{cap}^*(A_n \cap \complement K_n) < \varepsilon \,.\, 2^{-n}.$$

On peut supposer la suite $\{K_n\}$ croissante. Comme chaque $A \cap K_n$

est capacitable par hypothèse, il en est de même pour la réunion $B = \cup(A \cap K_n) \subset A$. On voit facilement que $\mathrm{cap}^*(A \cap \complement B) < \varepsilon$. Le lemme 4.3 montre alors que A est également capacitable.

— Sous les hypothèses (A) et (B) nous pouvons enfin résoudre le problème de capacitabilité comme suit. (Nous désignons par $\mathscr{K}$, resp. $\mathscr{F}$, l'ensemble des parties compactes, resp. fermées, de l'espace Y.)

THÉORÈME 7.8.— *Tout ensemble analytique dans* Y *est capacitable. Tout ensemble $\mathscr{F}$-souslinien et σ-fini est capacitable.*

Démonstration. — Le premier énoncé résulte du th. 7.5 par application du théorème de capacitabilité de Choquet ([6], théorème 30.1). Le second énoncé s'en déduit en vertu du lemme 7.7 parce que tout ensemble $\mathscr{K}$-souslinien est analytique (Choquet [12], voir aussi Bressler and Sion [4]). En fait, $A \cap K$ est $\mathscr{K}$-souslinien lorsque A est $\mathscr{F}$-souslinien et K est compact.

Voici une démonstration indépendante et au fond plus simple de la capacitabilité des ensembles $\mathscr{F}$-sousliniens et σ-finis (sous les mêmes hypothèses (A) et (B)) ([6]). Désignons par $\mathscr{H}$ l'ensemble des parties fermées et σ-finies de Y. Les théorèmes 7.2 et 7.5 montrent que la fonction croissante d'ensemble cap* est une *capacité abstraite* sur $(Y, \mathscr{H})$ au sens de Choquet [13]. En vertu du lemme 7.7 tout ensemble $H \in \mathscr{H}$ est capacitable, et le théorème principal pour les capacités abstraites ([13], théorème 1.1) montre alors qu'il en est de même pour tout ensemble $\mathscr{H}$-souslinien. Enfin on voit facilement qu'il y a identité entre la notion d'ensemble $\mathscr{H}$-souslinien et celle d'ensemble $\mathscr{F}$-souslinien et σ-fini (voir [15], lemme).

La restriction aux ensembles $\mathscr{F}$-sousliniens et *σ-finis* est essentielle. On peut en fait construire un noyau symétrique k (satisfaisant à tous les principes habituels de la théorie du potentiel) sur un espace localement compact, mais non dénombrable à l'infini, tel qu'il existe des ensembles *fermés* non capacitables (voir [14], ex. 10, p. 213).

8. Sur l'hypothèse (B).

L'hypothèse (B), n° 7, se compose des conditions suivantes (dont la seconde est vide lorsque l'espace Y est compact):

([6]) Voir [15] pour le cas analogue de la *capacité énergétique* par rapport à un noyau *consistant* (de type positif).

(B_0) Le potentiel $k(\lambda, y)$ de toute mesure bornée λ sur X est quasi-continu dans Y.

(B_1) $k(\lambda, y)$ possède la quasi-limite 0 à l'infini dans Y.

Remarque. — Au sujet de la condition (B_1) notons que presque tous les raisonnements et résultats précédents seront conservés si l'on remplace cette condition par la condition suivante :

(B_2) Tout ensemble fermé $F \subset Y$ de capacité extérieure finie est *quasi σ-compact* (7).

Évidemment cette condition est remplie pour *tout* noyau lorsque l'espace Y est *dénombrable à l'infini* (i.e., de type $\mathscr{K}_\sigma$). — Sous les hypothèses (A) et (B_0), la condition (B_2) est moins restrictive que (B_1). En fait, (B_2) est une conséquence immédiate du lemme 7.1 (ou de son corollaire). Lorsqu'on substitue (B_2) à (B_1), le lemme 7.1 doit être modifié d'une manière correspondante, mais les ensembles quasi-fermés de capacité extérieure finie restent capacitables en vertu du lemme 4.3 et du corollaire du théorème 6.2. Cependant le théorème 7.2 tombe en défaut en général (8). Le reste des résultats du n° 7 sont conservés sous les hypothèses (A), (B_0), (B_2).

Retournons maintenant aux conditions (B_0) et (B_1) qui équivalent en tout à la condition (B). Dans le cas d'un seul espace $X = Y$ on sait (Choquet [8], théorème 1) que (B_0) est remplie par tout noyau k *fini continu hors de la diagonale* tel que le noyau transposé $\check{k}$ (défini par $\check{k}(x, y) = k(y, x)$) est régulier (i.e. satisfait au principe de continuité). La démonstration de Choquet est formulée pour X compact, mais s'adapte facilement au cas localement compact (avec λ bornée). — On pourrait d'ailleurs remplacer l'hypothèse que $\check{k}$ soit régulier par l'hypothèse moins restrictive que $\check{k}$ satisfasse au *principe de quasi-continuité* : Si le potentiel $k(\lambda, y)$ d'une mesure λ de support compact $S(\lambda)$ est *fini* continu relativement à $S(\lambda)$, alors $k(\lambda, y)$ est quasi-continu dans tout l'espace. On sait que ce principe implique que tout potentiel *partout fini* $k(\lambda, y)$ avec λ bornée est quasi-continu. Mais il faut qu'on impose au noyau une condition additionnelle (comme p. ex. celle-ci que $k(x, y)$ soit fini continu pour $x \neq y$) afin

(7) Cela signifie qu'il correspond à tout nombre $\varepsilon > 0$ un ensemble $H \subset F$ de type $\mathscr{K}_\sigma$ tel que $\mathrm{cap}^*(F \cap \complement H) < \varepsilon$.

(8) Soit p. ex. X compact, Y discret et infini dénombrable. Pour le noyau $k(x, y) = 1$ on trouve $\mathrm{cap}^* A = \mathrm{cap}_* A = 1$ pour tout ensemble non vide $A \subset Y$. L'espace entier Y est fermé mais pas quasi-compact. Comme toute partie de Y est fermée il y a une suite décroissante de telles parties (non vides) dont l'intersection est vide.

de pouvoir affirmer que *tout* potentiel $k(\lambda, y)$ (avec λ bornée) est quasi-continu ([9]).

Nous complétons le résultat ci-dessus sur la condition (B_0) par le lemme suivant au sujet de la condition (B_1).

LEMME 8.1. — *Soit* $k = k(x, y) \geqslant 0$ *un noyau (s.c.i.) quelconque sur le produit de deux espaces localement compacts* X *et* Y *dont* Y *soit non compact. La condition* (B_1) *est remplie si* $k(x, y) \to 0$, *uniformément par rapport à* x *sur toute partie compacte de* X, *quand* y *tend à l'infini de* Y.

Démonstration. — En vertu du lemme 4.8 il s'agit de montrer que l'ensemble

$$H = \{y \in Y | k(\lambda, y) \geqslant t\}$$

est quasi relativement compact pour tout $t > 0$. Cela signifie (lemme 4.2) qu'il doit correspondre à tout $\varepsilon > 0$ un compact $K \subset Y$ tel que $\mathrm{cap}^*(H \cap \complement K) < \varepsilon$. Comme λ est bornée (disons $\lambda(X) = 1$) il existe un compact $L \subset X$ tel que $\lambda(\complement L) < t\varepsilon/2$. Désignons par λ_L la trace de λ sur L. Par hypothèse il y a un compact $K \subset Y$ tel que

$$k(x, y) \leqslant t/2 \qquad \text{pour} \qquad x \in L, \qquad y \in \complement K,$$

et par suite

$$k(\lambda_L, y) \leqslant (t/2) . \lambda(X) = t/2 \qquad \text{pour} \qquad y \in \complement K.$$

Il en résulte que

$$H \cap \complement K \subset \{y \in Y | k(\lambda - \lambda_L, y) \geqslant t/2\}.$$

D'où par le lemme 6.1

$$\mathrm{cap}^*(H \cap \complement K) \leqslant (2/t) . \lambda(\complement L) < \varepsilon.$$

— Dans le cas X = Y nous pouvons enfin résumer comme suit :

THÉORÈME 8.2. — *Dans un espace localement compact quelconque* X *les hypothèses* (A), *n*° 2, *et* (B), *n*° 7, *sont remplies par tout noyau s.c.i.* $k = k(x, y) \geqslant 0$ *sur* X *tel que* (i) k *et* $\check{k}$ *sont réguliers,* (ii) $k(x, y)$ *est fini continu pour* $x \neq y$, *et* (iii) $k(x, y)$ *tend* (*si* X *est non compact*) *uniformément vers* 0 *quand l'une des variables tend à l'infini de* X *tandis que l'autre reste dans un compact.*

([9]) Soit X = Y = l'adhérence dans $[-\infty, +\infty]$ de l'ensemble N des nombres naturels. Posons $k(0, 0) = +\infty$, $k(0, +\infty) = k(+\infty, 0) = 0$, $k(x, y) = 1$ ailleurs. Ce noyau est symétrique et régulier. Le potentiel $k(\lambda, y)$ d'une mesure λ qui ne charge pas le point 0 est fini continu. Cependant le potentiel de la masse unité placée en 0 n'est pas quasi-continu. Il est discontinu au point $+\infty$ dont la capacité est égale à 1.

Ainsi toute la théorie exposée dans ce mémoire s'applique à un tel noyau. — Notons que les conditions du théorème sont symétriques par rapport à k et $\check{k}$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] N. ARONSZAJN and K. T. SMITH, Functional spaces and functional completion, *Annales Inst. Fourier*, 6 (1955-56), 125–185.

[2] M. BRELOT, Minorantes sous-harmoniques, extrémales et capacités, *J. de Math. pures et appl.*, 24 (1945), 1–32.

[3] M. BRELOT et G. CHOQUET, Le théorème de convergence en théorie du potentiel, *J. Madras Univ.*, 27 (1957), 227-286.

[4] D. W. BRESSLER and M. SION, The current theory of analytic sets, *Can. J. Math.*, 16 (1964), 207–230.

[5] H. CARTAN, Théorie du potentiel newtonien, *Bull. Soc. Math. France*, 73 (1945), 74–106.

[6] G. CHOQUET, Theory of capacities, *Annales Inst. Fourier*, 5 (1953-54), 131–295.

[7] G. CHOQUET, Sur les fondements de la théorie fine du potentiel, *C.R. Acad. Sciences, Paris*, 244 (1957), 1606–1609.

[8] G. CHOQUET, *Sém. Théorie du potentiel*, 1re année (1957), n° 1.

[9] G. CHOQUET, *Sém. Théorie du potentiel*, 3eme année (1958-59), n° 4.

[10] G. CHOQUET, *Sém. Théorie du potentiel*, 3eme année (1958-59), n° 12.

[11] G. CHOQUET, *Sém. Théorie du potentiel*, 3eme année (1958-59), n° 13.

[12] G. CHOQUET, *Ensembles* K-analytiques et K-sousliniens, *Annales Inst. Fourier*, 9 (1959), 75–81.

[13] G. CHOQUET, Forme abstraite du théorème de capacitabilité, *Annales Inst. Fourier*, 9 (1959), 83–89.

[14] B. FUGLEDE, On the theory of potentials in locally compact spaces, *Acta Math.*, 103 (1960), 139–215.

[15] B. FUGLEDE, Capacitabilité des ensembles sousliniens en théorie du potentiel, *Annales Inst. Fourier*, 12 (1962), 293–297.

[16] B. FUGLEDE, Quasi-continuité des potentiels d'énergie finie par rapport à un noyau consistant, *C.R. Acad. Sciences, Paris*, 255 (1962), 34–36.

[17] I. L. Glicksberg, Minimax theorem for upper and lower semi-continuous payoffs, *Rand Corp. Res. Memorandum*, RM 478 (1950).

[18] M. KISHI, Capacitability of analytic sets, *Nagoya math. J.*, 16 (1960), 91-109.

[19] J. v. NEUMANN, Zur Theorie der Gesellschaftsspiele, *Math. Ann.*, 100 (1928), 295–320.

[20] M. SION and P. WOLFE, On a game without a value. *Contributions to the theory of games* III (ed. by Drescher, Tucker, and Wolfe) (1957), 299–306.

[21] J. Ville, Sur la théorie générale des jeux où intervient l'habilité des joueurs, *Traite du calcul des probabilité et de ses applications* (E. Borel et collaborateurs), Paris 1938, t. 2, n° 5.

Bent FUGLEDE,
Faculté des Sciences de l'Université de Copenhague,
Copenhague, Danemark.