

NOUVELLE MÉTHODE POUR DÉMONTRER LA PARACOMPACTITÉ DES ESPACES MÉTRISABLES

par Gabriel MOKOBODZKI.

Nous utiliserons la terminologie et les notations de Bourbaki.

1. Soit (E, d) un espace métrique et soit \mathcal{U} un recouvrement ouvert de E .

THÉORÈME 1. — *Il existe une partition continue de l'unité subordonnée à \mathcal{U} .*

Démonstration. — On considère des familles $\mathcal{F} = (p_i)_{i \in I}$ de fonctions numériques continues, positives, sur E , ayant les propriétés suivantes :

a) pour tout $i \in I$, l'ouvert $(p_i > 0)$ est contenu dans un ouvert $U \in \mathcal{U}$ et $p_i \neq 0$.

$$b) \quad \sum_{i \in I} p_i = p \leq 1.$$

c) Pour tous $y, y' \in E$, $|p(y) - p(y')| \leq d(y, y')$, de sorte que p est toujours continue.

Exemple d'une telle famille.

Soit $x \in E$; il existe $r \in \mathbb{R}^+$, $0 < r \leq 1$ et un ouvert $U \in \mathcal{U}$, tels que la boule ouverte de centre x et de rayon r soit contenue dans U . La fonction numérique p définie, pour tout $y \in E$, par $p(y) = (r - d(y, x))^+$ est non nulle, et pour tous $y, y' \in E$, $|p(y) - p(y')| \leq d(y, y')$.

La famille $\mathcal{F} = \{p\}$ satisfait bien aux conditions a), b), c). Nous aurons besoin du lemme suivant qu'on démontre par passage à la limite en se ramenant au cas fini.

LEMME 1. — Soit $(f_\alpha)_{\alpha \in A}$ une famille de fonctions numériques sur E telle que, pour tout $\alpha \in A$ et pour tout $y, y' \in E$, on ait

$$|f_\alpha(y) - f_\alpha(y')| \leq d(y, y').$$

Si $f = \sup_{\alpha \in A} f_\alpha$ (resp. $g = \inf_{\alpha \in A} f_\alpha$) est finie, alors pour tous $y, y' \in E$, on a

$$|f(y) - f(y')| \leq d(y, y') \\ (\text{resp. } |g(y) - g(y')| \leq d(y, y')).$$

Ce lemme étant admis, revenons aux familles $\mathcal{F} = (p_i)_{i \in I}$ satisfaisant aux conditions a), b), c).

L'ensemble de ces familles, ordonné par inclusion est inductif, et cet ensemble n'est pas vide.

D'après le lemme de Zorn, soit donc $\mathcal{F} = (p_i)_{i \in I}$ une famille maximale.

On va montrer que $p = \sum_{i \in I} p_i$ est strictement positive en tout point de E .

En effet, soient $x \in E$, $U \in \mathcal{U}$, $B_{x,r}$ une boule ouverte, de rayon $r \leq 1$, contenue dans U .

La fonction numérique $f_x : y \rightsquigarrow (r - d(y, x))^+$ est continue, positive et $0 \leq f_x \leq 1$. Posons $p' = \sup(p, f_x)$; on a donc encore pour tous $y, y' \in E$, $|p'(y) - p'(y')| \leq d(y, y')$.

Posons encore $p_\alpha = p' - p \geq 0$.

La famille \mathcal{F} étant maximale, on a $p_\alpha \equiv 0$, ou encore $p \geq f_x$, et comme $f_x(x) = r > 0$, on a bien $p(x) > 0$.

On obtient une partition continue de l'unité subordonnée à \mathcal{U} en posant, pour tout $i \in I$

$$f_i = \frac{p_i}{p} \quad \text{et alors} \quad \sum_i f_i = 1.$$

2. Soit E un espace topologique quelconque.

THÉORÈME 2. — Soit $(p_i)_{i \in I}$ une partition continue de l'unité sur E .

Il existe alors une famille $(f_i)_{i \in I}$ de fonctions numériques continues ≥ 0 , formant une partition de l'unité et telle que

1° Pour tout $i \in I$, le support fermé de f_i est contenu dans l'ouvert $(p_i > 0)$.

2° Les supports fermés des fonctions f_i forment une famille localement finie.

Démonstration. — Posons $d(x, y) = \sup_{i \in I} |p_i(x) - p_i(y)|$ pour tous $x, y \in E$. On obtient ainsi un écart borné sur E et l'on va voir qu'il est aussi continu sur E . Soit $x \in E$; pour tout $\varepsilon > 0$, il existe J fini, $J \subset I$ tel que $\sum_{i \in J} p_i(x) \geq 1 - \frac{\varepsilon}{2}$.

La fonction $f = \sum_{j \in J} p_j$ est continue sur E et $f(x) \leq \frac{\varepsilon}{2}$. Il existe donc un voisinage ω de x tel que

$$(x' \in \omega) \implies |p_i(x') - p_i(x)| \leq \varepsilon \quad \forall i \in J$$

et $f(x') < \varepsilon$; d'où finalement, pour tout $i \in I$, $|p_i(x) - p_i(x')| \leq \varepsilon$ ou encore

$$(x' \in \omega) \implies d(x, x') \leq \varepsilon.$$

On introduit maintenant, les fonctions

$$\begin{aligned} \varphi &= \sup_{i \in I} p_i \quad \text{et pour tout } x \in E, \\ \theta_x &= \sup_{p_j(x) < \frac{1}{2} \varphi(x)} p_j. \end{aligned}$$

On remarquera que pour tout $x \in E$, il existe un indice j tel que $\theta_x(x) = p_j(x)$ de sorte que

$$\theta_x(x) < \frac{1}{2} \varphi(x) \quad \text{pour tout } x \in E.$$

LEMME 2. — *Les fonctions $\varphi, \theta_x, x \in E$, sont continues.*

D'après notre lemme 1, on a, pour tous $y, y' \in E, x \in E$

$$|\varphi(y) - \varphi(y')| \leq d(y, y')$$

et

$$|\theta_x(y) - \theta_x(y')| \leq d(y, y').$$

Le lemme 2 résulte alors de la continuité de l'écart d . Considérons maintenant la famille des fonctions

$$p'_i = \left(p_i - \frac{1}{2} \varphi \right)^+.$$

Cette famille possède les propriétés suivantes :

1° $0 \leq p'_i \leq p_i$, p'_i est continue, $\forall i \in I$.

2° Pour tout $x \in E$, il existe $i \in I$ tel que $p'_i(x) > 0$, (par exemple $i \in I$ tel que $p_i(x) > \frac{1}{2} \varphi(x)$).

3° Pour tout $i \in I$, le support fermé de p'_i est contenu dans l'ouvert ($p_i > 0$).

4° Pour tout $x \in E$, l'ouvert $\left(\theta_x < \frac{\varphi}{2}\right)$ contient x , ne rencontre que les supports des fonctions p'_i telles que

$$p_i(x) \geq \frac{1}{2} \varphi(x) > 0,$$

et il y a seulement un nombre fini de telles fonctions p_i , puisque la somme $\sum_{i \in I} p_i(x) = 1$.

5° La fonction $p' = \sum_{i \in I} p'_i$ est continue et pour tout $x \in E$, $p'(x) > 0$.

En effet, pour tout $i \in I$, on peut écrire $p_i = p'_i + p''_i$ où p''_i est ≥ 0 .

Les fonctions $p' = \sum_{i \in I} p'_i$ et $p'' = \sum_{i \in I} p''_i$ sont semi-continues inférieurement et de somme $p' + p'' = \sum_{i \in I} p_i = 1$, de sorte que p' est continue. Ceci étant établi, la famille de fonctions $f_i = \frac{p'_i}{p'}$, $i \in I$, satisfait aux conditions du théorème 2.

COROLLAIRE. — Soit (E, d) un espace métrique.

1° L'espace topologique E est paracompact.

2° Pour tout recouvrement ouvert \mathcal{U} de E , il existe une partition continue de l'unité $(p_i)_{i \in I}$ subordonnée à \mathcal{U} et telle que la famille des ouverts $(p_i > 0)_{i \in I}$ soit localement finie.

Manuscrit reçu en novembre 1964

Gabriel MOKOBODZKI,
102, avenue de Saint-Mandé,
Paris, 12^e.