Ann. Inst. Fourier, Grenoble
14, 2 (1964), 527-531.

UN THÉORÈME DE FINITUDE

par Yvette AMICE

Étant donnés une suite strictement croissante d'entiers $S = \{\lambda_n\}_{n \geqslant 1}$ et un intervalle J du tore $T = R/Z$, notons $\Theta(S, J)$ l'ensemble de type H associé à S et $\complement J$:

$$\Theta(S, J) = \{\theta \in T \mid n \in S \Longrightarrow n\theta \in J\}.$$

Soit d'autre part pour $x > 0$, $\nu(x) = \text{Card } \{[0, x[\cap S\}$. P. Eymard [1] a montré qu'il existe une constante $a > 0$, indépendante de la suite S, telle que si $|J| \leqslant a$ ($|J|$ désigne la longueur de J) et si $\overline{\lim\limits_{x \to \infty}} \frac{\nu(x)}{x} \neq 0$, $\Theta(S, J)$ est fini.

Soit $\overline{D}(S) = \lim\limits_{h \to \infty} \left(\operatorname{Sup}\limits_x \frac{\nu(x+h) - \nu(x)}{h} \right)$ la *densité uniforme extérieure* de S $\left(\overline{D}(S) \geqslant \overline{\lim} \frac{\nu(x)}{x} \right)$. Le résultat de [1] peut être amélioré de la façon suivante (*) :

Proposition 1. — *Soient* S *une suite croissante d'entiers telle que* $\overline{D}(S) \neq 0$, *et* $l < 1$. *Alors l'ensemble* Θ *des nombres* $\theta \in T$ *tels qu'il existe un intervalle* $J(\theta)$ *associé à* θ *et satisfaisant à* $|J(\theta)| \leqslant l$ *et* $\{n \in S \Longrightarrow n\theta \in J(\theta)\}$ *est fini.*

Il est clair que cette proposition équivaut à la suivante :

Proposition 1 *bis*. — *Soient* Θ *une partie infinie de* J *et* $l < 1$. *A tout* $\theta \in \Theta$ *associons un intervalle* $J(\theta)$ *de longueur* $|J(\theta)| \leqslant l$. *Alors la suite* $S = \{n \in N \mid \theta \in \Theta \Longrightarrow n\theta \in J(\theta)\}$ *a une densité uniforme extérieure nulle.*

(*) J.-P. Kahane m'a communiqué une démonstration de la proposition 1 qui repose sur un tout autre principe, *cf* [2].

Soient $\theta_1, \ldots, \theta_n \in \Theta$ et soit S_n la suite

$$S_n = \{k \in \mathrm{N} | k\theta_i \in \mathrm{J}(\theta_i),\ i = 1, \ldots, n\}.$$

La suite S_n possède une densité (ordinaire) d_n égale à sa densité uniforme extérieure : nous allons montrer que si Θ est infini on peut extraire une suite $\theta_1, \ldots, \theta_n, \ldots$ telle que $\lim\limits_{n\to\infty} d_n = 0$, ce qui démontrera la proposition.

a) Supposons que $(\theta_1, \ldots, \theta_n, 1)$ soient rationnellement indépendants; alors $\alpha = (\theta_1, \ldots, \theta_n)$ engendre le tore T^n, et $d_n = \prod\limits_{i=1}^{n} |\mathrm{J}(\theta_i)| \leqslant l^n$. Donc la proposition (1 *bis*) est vraie pour un ensemble Θ contenant une infinité de nombres rationnellement indépendants avec 1.

b) Supposons que Θ contienne une infinité de rationnels θ_i, $\theta_i = p_i/q_i$, $(p_i, q_i) = 1$.

La suite S_1 est réunion d'au plus $1 + [|\mathrm{J}(\theta_1)|/q_1]$ progressions arithmétiques de raison q_1. Pour $k \geqslant 2$, soient m_k le plus petit commun multiple de $q_1, \ldots, q_k$ et $a_k = (m_{k-1}, q_k)$. Si S_{k-1} est réunion de r_{k-1} progressions arithmétiques de raison m_{k-1}, S_k est réunion d'au plus $(1 + [q_k/a_k|\mathrm{J}(\theta_k)|])r_{k-1}$ progressions arithmétiques de raison m_k. Donc

$$d_k \leqslant d_{k-1}(|\mathrm{J}(\theta_k)| + a_k/q_k).$$

Or on peut choisir θ_k de telle sorte que $a_k/q_k \leqslant \beta < 1 - l$: alors $\lim\limits_{k\to\infty} d_k = 0$, ce qui démontre la proposition dans le cas où Θ contient une infinité de rationnels.

c) Il reste à envisager le cas où Θ est réunion d'un nombre fini de rationnels et d'un ensemble Θ' constitué de r éléments $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_r$ rationnellement indépendants de 1 et d'une infinité de nombres θ dépendant rationnellement de $\theta_1, \ldots, \theta_r$, 1. Pour $\theta \in \Theta'$, nous définissons le vecteur

$$\mathrm{M}(\theta) = (m_0, m_1, \ldots, m_r, s) \in \mathrm{Z}^{r+2}$$

par les conditions

$$\begin{aligned} &m_0\theta = m_1\theta_1 + \ldots + m_r\theta_r + s \\ &m_0 \geqslant 1 \\ &\quad n > 1 \Longrightarrow \frac{1}{n}\mathrm{M}(\theta) \notin \mathrm{Z}^{r+2}. \end{aligned}$$

Remarquons que si $(m_0, m_1, \ldots, m_r)$ est fixé, il n'existe qu'un nombre fini d'éléments θ distincts tels que

$$M(\theta) = (m_0, \ldots, m_r, r).$$

Donc il existe un indice $i \in [0, r]$ tel que $\overline{\lim_{\theta \in \Theta'}} |m_i(0)| = +\infty$.

Pour $n \geqslant r$, soient $\theta_1, \ldots \theta_n$ n éléments distincts non rationnels de Θ'. Dans le tore T^n l'élément $\alpha = (\theta_1, \ldots, \theta_n)$ engendre un sous-groupe connexe H de dimension r. Soient E le pavé $J(\theta_1) \times J(\theta_2) \times \cdots \times J(\theta_n)$ et χ_E la fonction caractéristique de E, la densité d_n de la suite S_n est

$$d_n = \int_E \chi_E(h)\, dh,$$

où dh désigne la mesure de Haar normalisée de H.

Pour majorer d_n nous allons utiliser un lemme nécessitant encore quelques notations.

Désignons par K un ensemble de n-r indices, $K \leqslant [1, n]$, et soit H_0 le sous-groupe de T^n :

$$H_0 = \{x = (x_1, \ldots, x_n) | i \notin K \Longrightarrow x_i = 0\}.$$

Posons

$$\lambda_{j,K}(H) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad j \notin K \\ 2 \operatorname*{Sup}_{x \in T^n} \left(\operatorname*{inf}_{x-h \in H_0,\, h \in H} |x_j - h_j| \right) & \text{si } j \in K. \end{cases}$$

Lemme. — *Avec les notations ci-dessus*

$$d_n \leqslant \prod_{j=1}^{n} (|J(\theta_j)| + \lambda_j).$$

Soit en effet $G_1 = \{x \in H_0 | -\lambda_j \leqslant 2x_j < \lambda_j, j \in K$. Alors tout $x \in T^n$ s'écrit de façon unique $x = h + g_1$ où $h \in H$ et $g_1 \in G_1$. G_1 s'identifie alors de façon évidente à un tore de dimension $n - r$ dont la mesure de Haar normalisée sera notée dg_1, et pour toute fonction $f(x)$ intégrable sur T^n on a

$$\int_{T^n} f(x)\, dx = \int_{G_1} dg_1 \int_H f(g_1 + h)\, dh.$$

Soit $E_1 = E + G_1$ le saturé de E par G_1 : $E_1 \supseteq E$ et on a

$$d_n \leqslant \int_H \chi_{E_1}(h)\, dh = \int_{T^n} \chi_{E_1}(x)\, dx.$$

Or E_1 est contenu dans un pavé de mesure $\prod_{j=1}^{n}(|J(\theta_j)| + \lambda_j)$, d'où le lemme.

Pour achever la démonstration il suffit de montrer qu'on peut extraire de Θ une suite θ_n telle que pour chaque n, et pour un ensemble d'indices K convenablement choisi, on ait

$$(1) \quad \lambda_j \leqslant \beta, \qquad \text{où } \beta \text{ est donné}, \qquad 0 < \beta < 1 - l.$$

Nous envisageons deux cas.

1. — Si $\overline{\lim\limits_{\theta\in\Theta'}}\, m_0(\theta) = +\infty$, choisissons pour tout entier $n \geqslant r$, $K = [r+1, n]$. Alors pour $j \in K$ on a $\lambda_i \leqslant \dfrac{1}{m_0(\theta_j)}$ donc on pourra satisfaire (1) pour une suite θ_j convenable.

2. — Si pour tout $\theta \in \Theta'$, $1 \leqslant m_0(\theta) \leqslant M$, alors il existe un indice $i \in [1, r]$ tel que $\overline{\lim\limits_{\theta\in\Theta'}}\, |m_i(\theta)| = +\infty$. Soit $i = 1$. Choisissons alors, pour $n \geqslant r$, $K = \{1 \cup [r+1, n-1]$, et supposons, ce qui est loisible, que $m_1(\theta_j) \neq 0$ pour $j > r$. Alors $\lambda_1 \leqslant \dfrac{M}{|m_1(\theta_n)|}$ et $\lambda_j \leqslant M\left|\dfrac{m_1(\theta_j)}{m_1(\theta_n)}\right|$ pour $j \in [r+1, n-1]$. Donc en extrayant de Θ une suite telle que

$$|m_1(\theta_n)| \geqslant \frac{1}{\beta}\,|m_1(\theta_{n-1})|$$

la condition (1) sera satisfaite, ce qui achève la démonstration.

Corollaire 1. — *Soit* S *une suite croissante d'entiers telle que* $\overline{D}(S) \neq 0$, *alors l'ensemble* Θ *des nombres* θ *pour lesquels il existe un intervalle* $J_\theta \neq T$ *satisfaisant à :* $n \in S \Longrightarrow n\theta \in J_\theta$, *est dénombrable.*

Corollaire 2. — *Soit* $G = T_1 \times \cdots \times T_n \times \cdots$ *le tore produit d'une infinité dénombrable de copies de* T. Soit H *un sous-groupe connexe de* G *de dimension finie satisfaisant aux conditions.*

(i) *La projection naturelle de* H *dans* T_n *est surjective.*

(ii) *Pour* $n \neq k$, *l'image de* H *par la projection naturelle dans* $T_n \times T_k$ *n'est pas la diagonale de* $T_n \times T_k$.

Soient E *un pavé de* G *se projetant sur* T_n *suivant un intervalle* J_n *de longueur* $|J_n| \leqslant l < 1$ *pour tout* $n \geqslant 1$, χ_E *la fonction caractéristique de* E *et* dh *la mesure de Haar normalisée de* H, *alors*

$$\int_H \chi_E(h)\, dh = 0.$$

En effet les hypothèses faites sur H signifient que H possède un générateur $\alpha = (\theta_1, \ldots, \theta_n, \ldots)$ tel que $\theta_i \neq \theta_j$ pour $i \neq j$, $\theta_i \notin Q$, et $\theta = \{\theta_1, \ldots, \theta_n, \ldots\}$ contient au plus r éléments rationnellement indépendants de 1, r étant la dimension de H.

BIBLIOGRAPHIE

[1] P. Eymard, Sur les applications qui laissent stable l'ensemble des fonctions presque périodiques, *Bull. Soc. Math.*, F, t. 89, 1961, 2, p. 207-222, II: Un lemme de finitude.

[2] J. P. Kahane, Sur les mauvaises distributions modulo I, *Ann. Inst. Fourier*, 14, 2 (1964), pp. 519-526.

Manuscrit reçu en aout 1964.

Mme Yvette Amice,
Service de Mathématiques,
Faculté des Sciences,
Route de Chauvigny,
Poitiers (Vienne).