Ann. Inst. Fourier, Grenoble
14, 2 (1964), 509-518.

SUR L'ABSCISSE DE CONVERGENCE SIMPLE DES SÉRIES DE DIRICHLET GÉNÉRALES
(Démonstration nouvelle de la relation de KOJIMA),

par Maurice BLAMBERT

Introduction

Je me propose dans ce court mémoire de donner une démonstration de l'expression obtenue par Kojima (dans son mémoire intitulé « On the convergence abscissa of general Dirichlet's series » — Tôhoku J., t. 6) de l'abscisse de convergence simple d'une série de Dirichlet générale, sans condition de signe (ni de condition explicite portant sur la suite, des exposants, à l'exception d'être une D-suite, ou celle des coefficients).

Je me suis imposé, dans ce travail, de retrouver le résultat de cet auteur en évitant des calculs compliqués. En fait, ceux qui figurent sont, comme le lecteur le constatera, tous élémentaires, voir même triviaux. Peut-être le symbolisme utilisé, tout en étant simple, paraîtra-t-il quelque peu pénible à suivre? (le lecteur en jugera). Il trouve son origine dans mon désir de pallier à certaines imprécisions de forme qui me semblent déparer certains résultats classiques, déjà anciens, sur ce sujet.

On considère une série de Dirichlet générale,

$$\{f\}: \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-s\lambda_n}.$$

La suite (λ_n) est une suite réelle positive, strictement croissante et non bornée. On suppose que λ_1 est strictement positif; cette convention n'est d'ailleurs, comme il apparaîtra, nullement restrictive pour l'objet de ce travail. Pour éviter des redites, on convient de dire qu'une suite ayant ces propriétés est une D-suite. On se limite ,dans ce qui suit, à la considération des séries de Dirichlet de ce type.

On pose,

$$\forall x > 0: \quad n[x] = \mathrm{Min}\, n, \qquad n \in \{N_+ | [x] \leqslant \lambda_n\},$$

où $[x]$ désigne, comme il est usuel, le plus grand entier au plus égal à x, et

$$n(x) = \begin{cases} \mathrm{Max}\, n, & n \in \{N_+ | \lambda_n < x,\ x > \lambda_1\}, \\ 0, & \forall x \in]0, \lambda_1]. \end{cases}$$

Ainsi $n(x)$ est la valeur en $x \in R_+$ d'une application de R_+ dans N, et $n[x]$ est la valeur en $x \in R_+$ d'une application de R_+ dans N_+. (On précise que le symbole R_+ désigne ici l'ensemble des réels strictement positifs et non pas, comme il est usuel, l'ensemble des réels non négatifs. N_+ désigne l'ensemble des entiers strictement positifs.)

Il est trivial que,

$$\forall x \in]0, \lambda_1]: \quad n(x) < n[x],$$

puisque $n(x) = 0$ et $n[x] = 1$.

On considère le sous-ensemble maximal non vide de R_+, contenant $]0, \lambda_1]$ comme sous-ensemble strict, en chaque point x duquel l'inégalité $n(x) < n[x]$ est satisfaite. Une condition nécessaire et suffisante pour que $x(\neq [x]) > 0$ appartienne à cet ensemble est que :

$$[[x], x[\cap (\lambda_n) = \emptyset.$$

En effet, si une telle condition est vérifiée pour une valeur $x_0 \neq [x_0] > 0$, on a :

$$\lambda_{n(x_0)} = \lambda_{n([x_0])} < [x_0] < x_0 \leqslant \lambda_{n[x_0]},$$

et donc

$$n[x_0] = n(x_0) + 1.$$

Réciproquement, si, pour $x_0(\neq[x_0]) > 0$, on a

$$[[x_0], x_0[\cap (\lambda_n) \neq \emptyset,$$

il existe au moins un terme de la suite (λ_n) appartenant à l'ensemble $[[x_0], x_0[$, et donc

$$[x_0] \leqslant \lambda_{n[x_0]} \leqslant \lambda_{n(x_0)} < x_0\,;$$

on a par conséquent

$$n[x_0] \leqslant n(x_0).$$

Il est trivial aussi que,

$$\forall x \in \mathrm{N}_+ : \quad n(x) < n[x].$$

$\{n[x], \ldots, n(x)\}$ désigne, lorsque $[[x], x[\cap (\lambda_n) \neq \emptyset$, l'ensemble des entiers positifs successifs,

$$n[x],\ n[x]+1,\ \ldots,\ n(x).$$

La signification usuelle attribuée à la notation $[a, b[\neq \emptyset$, pour a et b réels, impliquant $a < b$, on ne mentionnera pas à chaque fois dans ce qui suit, la condition $[x] < x$, lorsqu'on utilisera la notation $[[x], x[$; elle sera sous-entendue. Si $[[x], x[\cap (\lambda_n) = \emptyset$, ou si $x = [x] > 0$, on convient que le symbole $\{n[x], \ldots, n(x)\}$ désigne l'ensemble vide.

On convient de poser aussi :

$$\forall s \in \mathrm{C} : \quad \sum_{n=n[x]}^{n(x)} a_n e^{-s\lambda_n} = 0,$$

pour

$$0 < x \neq [x] \qquad \text{si} \qquad [[x], x[\cap (\lambda_n) = \emptyset,$$

et pour

$$0 < x = [x].$$

La notation

$$\operatorname*{Max}_{p \in \{n[x], \ldots, n(x)\}} \left| \sum_{n=n[x]}^{n=p} a_n \right|$$

est définie lorsque $[[x], x[\cap (\lambda_n) \neq \emptyset$ qui implique

$$\{n[x], \ldots, n(x)\} \neq \emptyset,$$

et donc $n[x] \leqslant n(x)$. Si, pour $x > 0$, on a

$$[[x], x[\cap (\lambda_n) = \emptyset$$

ou si $x = [x]$, on convient d'attribuer au symbole ci-dessus la valeur 0. Il est donc valué pour chaque $x > 0$, et on a ainsi défini, à l'aide des deux suites (a_n) et (λ_n), une application de R_+ dans $R_+ \cup \{0\}$.

On représente par R_λ le sous-ensemble de R_+ suivant

$$\{x \in R_+ \mid [[x], x[\cap (\lambda_n) \neq \emptyset\}.$$

On désigne par R_1 le sous-ensemble de R défini de la manière suivante, $\forall \sigma \in R_1$, avec $\sigma = \Re s$:

$$\sup_{R_\lambda \ni x} \left\{ e^{-\sigma\lambda_{n[x]}} \max_{P \in \{n[x], \dots, n(x)\}} \left| \sum_{n=n[x]}^{P} a_n \right| \right\} < +\infty,$$

et $\forall \sigma \in C_R R_1$, ce supremum n'est pas fini.

Eu égard aux conventions antérieures, l'expression entre crochets est finie $\forall x \in R_+$ et $\forall \sigma \in R$, et, en outre, R_1 est identique au sous-ensemble de R défini de la même manière mais en substituant R_+ à R_λ. De même, on peut substituer au supremum de l'expression entre crochets, sur R_λ, la considération de la limite supérieure de cette expression pour x croissant sur cet ensemble. Il est évident qu'on obtient encore le même ensemble R_1 en substituant, dans la définition ci-dessus de R_1, à la considération du supremum, sur R_λ, de l'expression entre crochets, celle du supremum sur $\{R_\lambda | x \geqslant x_0\}$, $\forall x_0 > 0$, de cette même expression. On pose

$$\sigma_*^f = \operatorname{Inf} \sigma, \qquad \sigma \in R_1,$$

et

$$\forall \sigma \in R_1 : \quad M_{\sigma, x_0} = \sup_{R_\lambda \ni x \geqslant x_0} \left\{ e^{-\sigma\lambda_{n[x]}} \max_{P \in \{n[x], \dots, n(x)\}} \left| \sum_{n=n[x]}^{P} a_n \right| \right\}$$

Si $R_1 = \emptyset$, on pose $\sigma_*^f = +\infty$.

Il est évident que,

$$\begin{aligned} \forall x_1 \geqslant x_0 : &\quad M_{\sigma, x_1} \leqslant M_{\sigma, x_0}, \\ \forall \sigma' > \sigma : &\quad M_{\sigma', x_0} \leqslant M_{\sigma, x_0} e^{-(\sigma' - \sigma)\lambda_{n[x_0]}} < M_{\sigma, x_0}, \end{aligned}$$

et donc $\sigma'(\geqslant \sigma) \in R_1$ si $\sigma \in R_1$.

M_{σ, x_0} est la valeur en σ d'une application de R_1 dans R_+, où $R_1 \supset]\sigma_*^f, +\infty[$. La valeur M_{σ, x_0} est fonction strictement décroissante de σ dans $]\sigma_*^f, +\infty[$. On prouve très facilement la propriété suivante :

Etant donné un nombre $\alpha \in \overline{\mathrm{R}}$, *une condition nécessaire et suffisante pour que* σ_*^f *soit égal à* α *est que :*

$$\alpha = \overline{\lim_{\mathrm{R}_\lambda \ni x \uparrow +\infty}} \left\{ \log \left[\operatorname*{Max}_{p \in \{n[x], \ldots, n(x)\}} \left| \sum_{n=n[x]}^{p} a_n \right| \right] / \lambda_{n[x]} \right\}.$$

On se propose de prouver que l'abscisse de convergence simple, σ_c^f, de $\{f\}$, est égale à σ_*^f. La démonstration qui suit comporte deux étapes : la première consiste à prouver que $\sigma_c^f \leqslant \sigma_*^f$, et la seconde, que $\sigma_*^f \leqslant \sigma_c^f$.

1. — Si $\sigma_*^f = +\infty$, la relation à établir, $\sigma_c^f \leqslant \sigma_*^f$, est alors triviale. Soit $\sigma_*^f < +\infty$.

On considère, $\forall x (\geqslant x_0) \in \mathrm{R}_\lambda$ et $\forall_p \in \{n[x], \ldots, n(x)\}$, l'identité d'Abel

$$\sum_{n=n[x]}^{p} a_n e^{-\sigma'\lambda_n} = \left(\sum_{n=n[x]}^{p} a_n \right) e^{-\sigma'\lambda_p} + \sum_{t=n[x]}^{p-1} \left(\sum_{n=n[x]}^{t} a_n \right) (e^{-\sigma'\lambda_t} - e^{-\sigma'\lambda_{t+1}}),$$

(pour les valeurs de x vérifiant la relation $n(x) = n[x]$, le second terme du membre de droite est alors égal à 0).

Si $\sigma' \in]\max(0, \sigma_*^f), +\infty[$, on a,

$$\left| \sum_{n=n[x]}^{p} a_n e^{-\sigma'\lambda_n} \right| \leqslant \mathrm{M}_{\sigma',x_0} e^{\sigma'(\lambda_{n[x]} - \lambda_p)} + \mathrm{M}_{\sigma' x_0} e^{\sigma'\lambda_{n[x]}} \sum_{t=n[x]}^{p-1} (e^{-\sigma'\lambda_t} - e^{-\sigma'\lambda_{t+1}}) \leqslant \mathrm{M}_{\sigma',x_0}.$$

Si $\sigma_*^f < 0$ et si $\sigma' \in]\sigma_*^f, 0[$, on a :

$$\left| \sum_{n=n[x]}^{p} a_n e^{-\sigma'\lambda_n} \right| \leqslant \mathrm{M}_{\sigma',x_0} e^{\sigma'(\lambda_{n[x]} - \lambda_p)} + \mathrm{M}_{\sigma',x_0} e^{\sigma'\lambda_{n[x]}} \sum_{t=n[x]}^{p-1} (e^{-\sigma'\lambda_{t+1}} - e^{-\sigma'\lambda_t}) \leqslant \mathrm{M}_{\sigma',x_0}[2e^{\sigma'(\lambda_{n[x]} - \lambda_p)} - 1] < 2\mathrm{M}_{\sigma',x_0} e^{-\sigma'(\lambda_p - \lambda_{n[x]})}.$$

Si $\sigma_*^f < 0$, il est trivial que,

$$\left| \sum_{n=n[x]}^{p} a_n \right| \leqslant \mathrm{M}_{0,x_0}.$$

On remarquera que, eu égard aux conventions posées antérieurement lorsque $x(>0) \notin \mathrm{R}_\lambda$, les 3 inégalités qu'on vient d'obtenir sont, un peu plus généralement, valables $\forall x (\geqslant x_0) \in \mathrm{R}_+$ (elles le sont $\forall x (> 0) \notin \mathrm{R}_\lambda$). On considère deux termes, λ_p et λ_q, de la D-suite (λ_n), avec $q > p$. Il est évident que,

$$[\lambda_q] \leqslant \lambda_q < [\lambda_q] + 1,$$

et l'analogue pour λ_p : donc,

$$n([\lambda_q]) < n[\lambda_q] \leqslant q \leqslant n([\lambda_q] + 1).$$

$n([\lambda_q])$ est un entier défini si $[\lambda_q] > 0$, qui peut se réduire à 0; et l'analogue pour λ_p.

On suppose que les entiers p et q vérifient la condition $n[\lambda_p] < n([\lambda_q])$. Cette condition implique $[\lambda_p] < [\lambda_q]$. On a :

$$\sum_{n=p}^{q} a_n e^{-\sigma'\lambda_n} = \sum_{n=n[\lambda_p]}^{n([\lambda_q])} + \sum_{n=n[\lambda_q]}^{q} - \sum_{n=n[\lambda_p]}^{n(\lambda_p)} \cdot$$

On a obtenu ci-dessus,

$$\forall q \in \mathrm{N}_+ : \quad \{n[\lambda_q], \ldots, q\} \neq \emptyset;$$

tandis que pour chaque indice p, pour lequel $\lambda_p \notin \mathrm{R}_\lambda$, on a, eu égard aux conventions posées au début,

$$\{n[\lambda_p], \ \ldots, \ n(\lambda_p)\} = \emptyset$$

et

$$\sum_{n[\lambda_p]}^{n(\lambda_p)} \cdots = 0$$

(dans ce cas, $n[\lambda_p] = p$, et $n(\lambda_p) = p - 1$ si $p > 1$, et le membre de droite de l'égalité ci-dessus se réduit à la somme des deux premiers termes).

On pose :

$$n_{p,q} = [\lambda_q] - [\lambda_p].$$

Il est évident que l'entier $n_{p,q}$ est au moins égal à 1 puisque, comme on l'a déjà fait remarquer, la condition $n[\lambda_p] < n([\lambda_q])$ implique $[\lambda_p] < [\lambda_q]$. On considère la suite finie des entiers,

$$\{[\lambda_p], \ \ldots, \ [\lambda_p] + r, \ \ldots, \ [\lambda_q]\},$$

et on choisit la suite finie (ε_p^r) telle que,

$$\forall r \in \{1, 2, \ldots, n_{p,q}\} : \quad \varepsilon_p^r \in]0, \quad \min\{1, [\lambda_p] + r - \lambda_{n([\lambda_p]+r)}\}[.$$

On a donc,

$$[\lambda_p] + r - \varepsilon_p^r > [\lambda_p] + r - 1,$$

avec

$$n([\lambda_p] + r) = n([\lambda_p] + r - \varepsilon_p^r).$$

Pour $r > 1$, le cas,

$$(\lambda_n) \cap [[\lambda_p] + r - 1, \qquad [\lambda_p] + r - \varepsilon_p^r] = \emptyset$$

peut se présenter. C'est impossible pour $r = 1$, par définition de $[\lambda_p]$ et ε_p^1. On peut écrire, eu égard à la signification de $\sum\limits_{n[x]}^{n(x)} \cdots$:

$$\sum_{n=n[\lambda_p]}^{n([\lambda_q])} a_n e^{-\sigma'\lambda_n} = \sum_{r=1}^{n_{p,q}} \sum_{n=n[[\lambda_p]+r-1]}^{n([\lambda_p]+r-\varepsilon_p^r)} a_n e^{-\sigma'\lambda_n}$$

puisque

$$\forall r \in \{1, 2, \ldots, n_{p,q}\} : \quad (\lambda_n) \cap]\lambda_{n([\lambda_p]+r-\varepsilon_p^r)}, \qquad [\lambda_p] + r [= \emptyset,$$

en raison du choix de ε_p^r.

Il en résulte que :

$$\left|\sum_{n[\lambda_p]}^{n([\lambda_q])} a_n e^{-\sigma'\lambda_n}\right| \leqslant \sum_{r=1}^{n_{p,q}} \left|\sum_{n[\lambda_p+r-1]}^{n([\lambda_p]+r-\varepsilon_p^r)} a_n e^{-\sigma'\lambda_n}\right|,$$

avec

$$n[[\lambda_p] + r - 1] = n[\lambda_p + r - 1] = n[[\lambda_p] + r - \varepsilon_p^r].$$

Si $\sigma' \in]\max(0, \sigma_*^f), +\infty[$, on a donc :

$$\forall r \in \{1, 2, \ldots, n_{p,q}\} : \quad \left|\sum_{n[\lambda_p+r-1]}^{n([\lambda_p]+r-\varepsilon_p^r)} a_n e^{-\sigma'\lambda_n}\right| \leqslant M_{\sigma', x_{r-1}^p}$$

en posant $x_{r-1}^p = [\lambda_p] + r - 1$.

La majoration est évidemment triviale dans le cas où,

$$(\lambda_n) \cap [[\lambda_p] + r - 1, [\lambda_p] + r - \varepsilon_p^r[= \emptyset,$$

puisque le membre de gauche est nul. Soit $\sigma \in]\max(0, \sigma_*^f), \sigma']$; on a :

$$\left|\sum_{n[[\lambda_p]+r-1]}^{n([\lambda_p]+r-\varepsilon_p^r)} a_n e^{-\sigma'\lambda_n}\right| \leqslant M_{\sigma, x_{r-1}^p}\, e^{-(\sigma'-\sigma)\lambda_{n[x_{r-1}^p]}}.$$

Par conséquent, on a :

$$\left|\sum_{n[\lambda_p]}^{n([\lambda_q])} a_n e^{-\sigma'\lambda_n}\right| \leqslant \sum_{r=1}^{n_{p,q}} M_{\sigma, x_{r-1}^p} e^{-(\sigma'-\sigma)\lambda_{n[x_{r-1}^p]}},$$

(avec $x_0^p = [\lambda_p]$).

σ' et σ étant fixés, satisfaisant aux conditions ci-dessus, alors eu égard à la convergence de la série $\sum_{1}^{\infty} e^{-(\sigma'-\sigma)n}$ (convergente pour σ et σ' réels arbitraires, avec $\sigma' > \sigma$), et à la décroissance de $M_{\sigma,x}$ dans R_λ (pour σ fixé, avec $\sigma > \sigma_*^f$), on a,

$$\forall\varepsilon > 0,\ \exists p_\varepsilon \in N_+,\ \forall p \geqslant p_\varepsilon : M_{\sigma,x_0^p} \sum_{r=1}^{n_{p,q}} e^{-(\sigma'-\sigma)\lambda_{n[x_{r-1}^p]}} < \varepsilon.$$

En outre, il est évident qu'on a,

$$\forall\varepsilon > 0, \quad \exists p'_\varepsilon \in N_+, \qquad \forall p \geqslant p'_\varepsilon :$$

$$\left|\sum_{n=n[\lambda_p]}^{n(\lambda_p)} a_n e^{-\sigma'\lambda_n}\right| \leqslant M_{\sigma',x_0^p} \leqslant M_{\sigma,x_0^p} e^{-(\sigma'-\sigma)\lambda_{n[\lambda_p]}} \leqslant M_{\sigma,x_0^{p'_\varepsilon}} e^{-(\sigma'-\sigma)\lambda_{n[\lambda_{p'_\varepsilon}]}} < \varepsilon.$$

On majorerait d'une manière analogue le terme

$$\sum_{n=n[\lambda_q]}^{q} a_n e^{-\sigma'\lambda_n}.$$

Réunissant ces résultats, il est évident que, si $\sigma_*^f \geqslant 0$, on a nécessairement $\sigma_c^f \leqslant \sigma_*^f$.

Si $\sigma' \in]\sigma_*^f, 0[$, avec $\sigma_*^f < 0$, on a :

$$\forall r \in \{1, 2, \ldots, n_{p,q}\} : \quad \left|\sum_{n[\lambda_p+r-1]}^{n([\lambda_p]+r-\varepsilon_p^r)} a_n e^{-\sigma'\lambda_n}\right| < 2e^{-\sigma'} M_{\sigma',x_{r-1}^p},$$

puisque, s'il existe des termes de (λ_n) appartenant à l'ensemble $[[\lambda_p] + r - 1,\ [\lambda_p] + r - \varepsilon_p^r[$, on a nécessairement,

$$\lambda_{n([\lambda_p]+r-\varepsilon_p^r)} - \lambda_{n[\lambda_p+r-1]} < 1.$$

Le raisonnement est dès lors le même qu'au cas antérieur. D'où encore dans le second cas, et donc en général $\sigma_c^f \leqslant \sigma_*^f$.

2. — La démonstration de la relation, $\sigma_*^f \leqslant \sigma_c^f$, qui complète la précédente (pour en déduire l'égalité de σ_*^f et σ_c^f) est très élémentaire. Si $\sigma_*^f = -\infty$, la relation à établir est alors triviale. Soit $\sigma_*^f \in]-\infty, +\infty]$. Si la relation à établir était fausse, on aurait nécessairement alors $\sigma_c^f < \sigma_*^f$. (qui implique σ_c^f fini ou égal à $-\infty$ si $\sigma_*^f = +\infty$). On se propose de montrer que cette dernière relation implique une contradiction. Pour

cela, avec $x \in R_\lambda$, $p \in \{n[x], \ldots, n(x)\}$, et $\sigma_c^f < \sigma < \sigma_*^f$, on considère l'identité d'Abel,

$$\sum_{n=n[x]}^{p} a_n = \sum_{n=n[x]}^{p} a_n e^{-\sigma\lambda_n} . e^{\sigma\lambda_n} = \left(\sum_{n=n[x]}^{p} a_n e^{-\sigma\lambda_n}\right) e^{\sigma\lambda_p}$$
$$+ \sum_{r=n[x]}^{p-1} \left(\sum_{n=n[x]}^{r} a_n e^{-\sigma\lambda_n}\right)(e^{\sigma\lambda_r} - e^{\sigma\lambda_{r+1}})$$

(le second terme du second membre de cette relation étant égal à 0 si $\rho = n[x]$). Puisque $\sigma > \sigma_c^f$ (σ est fini si $\sigma_c^f = -\infty$), on a :

— Si $\sigma_*^f \leqslant 0$ (alors $\sigma < 0$),

$$\forall \varepsilon > 0, \qquad \exists x_\varepsilon > 0, \qquad \forall x (\geqslant x_\varepsilon) \in R_\lambda : \quad \left|\sum_{n=n[x]}^{p}\right| \leqslant \varepsilon e^{\sigma\lambda_{n[x]}}$$

De cette dernière inégalité résulte que $\sigma_*^f \leqslant \sigma$, et donc la contradiction $\sigma_*^f \leqslant \sigma_c^f < \sigma_*^f$.

— Si $\sigma_*^f > 0$ (avec la possibilité $\sigma_*^f = +\infty$) on choisit alors σ vérifiant la condition max $(0, \sigma_c^f) < \sigma < \sigma_*^f$,

$$\forall \varepsilon > 0, \qquad \exists x_\varepsilon > 0, \qquad \forall x(\geqslant x_\varepsilon) \in R_\lambda :$$
$$\left|\sum_{n=n[x]}^{p} a_n\right| < 2\varepsilon e^{\sigma\lambda_p} \leqslant 2\varepsilon e^{\sigma\lambda_{n(x)}}.$$

Puisque $[x] \leqslant \lambda_{n[x]} \leqslant \lambda_{n(x)} < x$ implique

$$\lambda_{n(x)} - \lambda_{n[x]} < x - [x] < 1,$$

il résulte encore de l'inégalité obtenue que $\sigma_*^f \leqslant \sigma$, et donc encore la contradiction $\sigma_*^f \leqslant \sigma < \sigma_*^f$.

En résumé, on a établi une relation qui exprime σ_c^f quelle que soit son signe (et sans condition restrictive relative à la D-suite (λ_n)) au moyen des deux suites (a_n) et (λ_n). On peut énoncer :

Théorème. — *Une condition nécessaire et suffisante pour que l'abscisse de convergence σ_c^f de la série*

$$\{f\} : \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-s\lambda_n}$$

soit égale a un nombre donné $\alpha \in \overline{R}$ est que,

$$\alpha = \overline{\lim_{R_\lambda \ni x \uparrow +\infty}} \left\{\left[\log \max_{p \in \{n[x], \ldots, n(x)\}} \left|\sum_{n=n[x]}^{p} a_n\right|\right] / \lambda_{n[x]}\right\}.$$

On remarquera que le membre de droite de cette condition conserve la même valeur si on remplace $\lambda_{n[x]}$ par x. Si, en outre, on adjoint aux conventions posées, la suivante,

$$\forall x(> 0) \notin \mathrm{R}_\lambda : \log \operatorname*{Max}_{p \in \{n[x], \ldots, n(x)\}} \left| \sum_{n=n[x]}^{p} a_n \right| = -\infty,$$

alors le membre de droite de la condition conserve la même valeur si, dans l'écriture de ce membre, on remplace R_λ par R_+.

Le résultat qu'exprime le théorème ainsi formulé n'est autre, à la présentation près, que celui obtenu par Kojima.

(Manuscrit reçu le 1er juin 1964)

Maurice BLAMBERT,
Faculté des Sciences de Grenoble,
Institut Fourier,
2, place du Doyen-Gosse,
Grenoble (Isère).