

FABIENNE MAROTTE

CHANGGUI ZHANG

**Multisommabilité des séries entières solutions
formelles d'une équation aux q -différences
linéaire analytique**

Annales de l'institut Fourier, tome 50, n° 6 (2000), p. 1859-1890

http://www.numdam.org/item?id=AIF_2000__50_6_1859_0

© Annales de l'institut Fourier, 2000, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'institut Fourier » (<http://annalif.ujf-grenoble.fr/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

MULTISOMMABILITÉ DES SÉRIES ENTIÈRES SOLUTIONS FORMELLES D'UNE ÉQUATION AUX q -DIFFÉRENCES LINÉAIRE ANALYTIQUE

par F. MAROTTE et C. ZHANG

Introduction.

Soit $q > 1$ fixé. On considère une équation aux q -différences, linéaire, avec ou sans second membre, à coefficients analytiques à l'origine de \mathbb{C} . Dans [Zh], on introduit la notion de développement asymptotique q -Gevrey d'ordre 1 et celle de série entière Gq -sommable. On établit la version q -analogue suivante d'un résultat de J.-P. Ramis [Ra1] : toute série entière solution formelle d'une équation aux q -différences est Gq -sommable d'ordre 1 dans le cas où le polygone de Newton associé admet une unique pente égale à 1. L'objectif du présent article est de montrer que cet énoncé demeure vrai dans le cas général, quitte à changer Gq -sommable en Gq -multisommable. Ce dernier constitue une version q -analogue d'un résultat récent sur les solutions formelles d'une équation différentielle linéaire analytique en 0 (cf [BBRS]).

L'article comprend trois parties. Dans la première partie, nous étudions un q -analogue de la transformation de Borel-Laplace d'ordre strictement positif quelconque. Après l'extension à l'ordre arbitraire de la notion

Mots-clés : Développement asymptotique – Équation aux q -différences – Multisommabilité – Produit de q -convolution – Transformation de q -Borel – Transformation de q -Laplace – Accélération – Estimations Gevrey.
Classification math. : 30E99 – 33D10 – 39B22 – 40G99.

de série Gq -sommable d'ordre 1 de [Zh], nous introduisons la nouvelle notion de produits de q -convolution (voir 1.4); elle jouera un rôle important dans les prochaines parties.

Dans la seconde partie, nous examinons la Gq -sommabilité du carré de la série thêta de Jacobi tronquée à gauche, $(\sum_{n \geq 0} q^{n(n-1)/2} x^n)^2$, ce qui fournit un exemple de série entière ne s'écrivant pas comme somme de séries Gq -sommables de niveaux simples (Théorème 2.2.1). Nous définissons ensuite la notion de série entière Gq -multisommable en combinant les transformations de q -Borel et de q -Laplace de différents niveaux, c'est-à-dire en introduisant des q -analogues des accélérateurs élémentaires étudiés par J. Ecalle ([Ec], Chapitre 2), J. Martinet et J.-P. Ramis ([MR2]).

Dans la dernière partie, nous montrons la Gq -multisommabilité de toute série entière solution formelle d'une équation aux q -différences linéaire analytique (Théorèmes 3.3.2, 3.3.5). La preuve de ce résultat repose essentiellement sur le fait que tout opérateur aux q -différences peut être décomposé en produit de plusieurs opérateurs analytiques aux q -différences d'ordre 1. Nous expliquons également comment nous servir de cette factorisation pour former un système fondamental de solutions formelles.

En nous inspirant de l'article [Tr] de W. J. Trjitzinsky, nous avons étudié diverses factorisations formelles d'un opérateur aux q -différences. Vu la complexité des calculs, nous n'avons pas inclus ce travail dans le corps du présent article. Les résultats présentés ici constituent une suite de l'article [Zh], dont les résultats seront précédés de I. Nous espérons que nos travaux pourront servir à l'étude du phénomène de Stokes et du groupe de Galois aux q -différences local en 0; ceci est en cours d'étude.

Une des premières versions de l'article a été envoyée à *Ann. Inst. Fourier* durant l'été 1998; nous avons reçu de nombreuses remarques importantes de la part du referee anonyme désigné par la revue; nous le remercions vivement.

Signalons enfin qu'une partie des résultats de l'article a été présentée dans la Note [MZ].

1. Transformations de Borel-Laplace q -analogues d'ordre s ($s > 0$).

Dans toute la partie, k et s désignent un couple de nombres réels positifs tel que $ks = 1$, θ désigne un nombre réel quelconque.

1.1. Quelques définitions et notations. En vue d'adapter la méthode de Gq -sommation à la classe des séries q -Gevrey d'ordre s , nous avons besoin de généraliser certaines notations de notre premier article sur le même sujet ([Zh]). Conscients du désarroi éventuel que peut provoquer la complexité de la liste suivante de notations, nous renvoyons le lecteur à ce dernier article pour retrouver les étapes conduisant à nos notations dans le cas $s = 1$.

1.1.1. On définit la transformation de q -Borel formelle d'ordre s (ou de niveau k), notée $\hat{B}_{q;s}$, comme étant l'application linéaire de $\mathbb{C}[[x]]$ dans $\mathbb{C}[[\xi]]$ qui fait correspondre, à chaque monôme x^n , le monôme $q^{-sn(n-1)/2}\xi^n$. Son inverse est noté $\hat{L}_{q;s}$, et sera appelé la transformation de q -Laplace formelle d'ordre s .

Notons $\mathbb{C}[[x]]_{q;s}$ l'ensemble des séries entières q -Gevrey d'ordre s ; c'est l'image de $\mathbb{C}\{\xi\}$ par $\hat{L}_{q;s}$.

1.1.2. On désigne respectivement par $\tilde{\mathbb{C}}$ la surface de Riemann du logarithme et par \log la détermination principale de celui-ci. Par définition, on note $\frac{\log x}{\log q} = \log_q x = \log_q |x| + i \arg_q x$.

On note $d_\theta := \{x \in \tilde{\mathbb{C}} : \arg x = \theta\}$ la direction d'argument θ . On appelle voisinage sectoriel de d_θ toute partie de $\tilde{\mathbb{C}}$ contenant un secteur ouvert du type $\{x \in \tilde{\mathbb{C}} : |\arg x - \theta| < \varepsilon\}$, où $\varepsilon > 0$.

On appelle germe de fonction analytique en $0 \in \tilde{\mathbb{C}}$ toute fonction définie et analytique dans un ouvert du type «disque en colimaçon» $\tilde{D}(0; R) := \{x \in \tilde{\mathbb{C}} : |x| < R\}$, où $R > 0$ arbitraire; on note $\tilde{\mathbb{O}}$ l'ensemble de ces germes de fonctions.

1.1.3. Soit $\varphi : V \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction définie sur une partie non radialement bornée V de $\tilde{\mathbb{C}}$. Par définition, on dit que φ admet à l'infini dans V une croissance q -exponentielle d'ordre k et de type fini si pour tout $R > 0$, il existe des constantes $\mu \in \mathbb{R}$, $K > 0$ telles que, si $\xi \in V$ et si $|\xi| > R$, alors $|\varphi(\xi)| \leq K|\xi^\mu q^{\frac{k}{2} \log_q^2 \xi}|$.

On note $\tilde{\mathbb{H}}_{q;s}^\theta$ l'ensemble des fonctions analytiques φ dans un voisinage sectoriel de d_θ et qui vérifient les deux conditions suivantes :

- (i) φ admet un développement asymptotique (au sens de Poincaré) en 0 dans un secteur bissecté par d_θ ;
- (ii) φ admet à l'infini une croissance q -exponentielle d'ordre k et de type fini dans ce secteur.

On note $\mathbb{H}_{q;s}^\theta$ l'ensemble constitué des éléments φ de $\tilde{\mathbb{H}}_{q;s}^\theta$ qui sont supposés, de plus, analytiques au voisinage de 0 dans \mathbb{C} . On note enfin $\mathbb{E}_{q;s}$ l'ensemble des *fonctions entières* ayant à l'infini une croissance q -exponentielle d'ordre k et de type fini dans le plan complexe. On a (par compacité de $[0, 2\pi]$) :

$$\mathbb{H}_{q;s}^\theta = \tilde{\mathbb{H}}_{q;s}^\theta \cap \mathbb{C}\{\xi\}, \quad \mathbb{E}_{q;s} = \bigcap_{\theta \in [0, 2\pi]} \mathbb{H}_{q;s}^\theta.$$

1.1.4. Soit $f \in \tilde{\mathcal{O}}$. On dit que f admet un *développement asymptotique q -Gevrey d'ordre s dans la direction d_θ* et on écrit $f \in \mathbb{G}_{q;s}^\theta$, s'il existe une série entière $\hat{f} := \sum_{n \geq 0} a_n x^n$ vérifiant : il existe des constantes $K > 0$, $A > 0$, $\varepsilon > 0$ telles que, pour tout $x \in \tilde{\mathbb{C}}$ de module suffisamment petit, tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $\vartheta \in]\theta - \varepsilon, \theta + \varepsilon[$, on ait :

$$\left| f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} a_k x^k \right| < K A^n q^{\frac{s}{2} n^2 + \frac{k}{2} (\arg_q(xe^{-i\vartheta}))^2} |x|^n.$$

Pour tout élément $f \in \mathbb{G}_{q;s}^\theta$, son développement asymptotique \hat{f} est unique et appartient à l'espace $\mathbb{C}[[x]]_{q;s}$.

On désignera par $\tilde{\mathbb{G}}_{q;s}^\theta$ l'ensemble des fonctions $f \in \tilde{\mathcal{O}}$ qui vérifient la condition suivante : il existe une série entière $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$ et une constante $\varepsilon > 0$ telles que, si $|x| \rightarrow 0$ et si $\vartheta \in]\theta - \varepsilon, \theta + \varepsilon[$, on ait :

$$\left| f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} a_k x^k \right| < K_n q^{\frac{k}{2} (\arg_q(xe^{-i\vartheta}))^2} |x|^n,$$

où, pour tout $n \in \mathbb{N}$, K_n est une constante dépendant uniquement de n . On a $\mathbb{G}_{q;s}^\theta \subset \tilde{\mathbb{G}}_{q;s}^\theta$.

1.2. *Séries Gq -sommables d'ordre s* . Soit $\hat{f} \in \mathbb{C}[[x]]_{q;s}$.

1.2.1. DÉFINITION. — On dit que \hat{f} est *Gq -sommable d'ordre s dans la direction d_θ* si $\hat{f} \in \mathbb{C}[[x]]_{q;s}$ et si $\hat{\mathcal{B}}_{q;s} \hat{f} \in \mathbb{H}_{q;s}^\theta$; dans ce cas, on note $\hat{f} \in \mathbb{C}\{x\}_{q;s}^\theta$.

On dit que d_θ est une *direction singulière d'ordre s pour \hat{f}* et on note $\theta \in DS(\hat{f})$, si $\hat{\mathcal{B}}_{q;s} \hat{f} \notin \mathbb{H}_{q;s}^\theta$.

La série \hat{f} est dite *Gq -sommable d'ordre s* et on note $\hat{f} \in \mathbb{C}\{x\}_{q;s}$, si $DS(\hat{f}) \cap [0, 2\pi]$ est fini.

1.2.2. À l'aide de la proposition I-3.1.4 (avec q changé en q^s), on obtient que \hat{f} a un rayon de convergence non nul si, et seulement si, $\hat{B}_{q;s}\hat{f} \in \mathbb{E}_{q;s}$. Il vient aussitôt que pour tout θ :

$$\mathbb{C}\{x\} \subset \mathbb{C}\{x\}_{q;s}^\theta \subset \mathbb{C}[[x]]_{q;s}.$$

On peut vérifier que $\hat{f} \in \mathbb{C}\{x\}$ si, et seulement si, $DS(\hat{f}) = \emptyset$ (cf I-4.1.4).

1.2.3. THÉORÈME. — Les deux conditions suivantes sont équivalentes :

- (i) La série \hat{f} est Gq -sommable d'ordre s dans la direction d_θ .
- (ii) Il existe une fonction $f \in \mathbb{G}_{q;s}^\theta$ admettant \hat{f} pour développement asymptotique q -Gevrey d'ordre s dans la direction d_θ .

De plus, le germe de fonction analytique f qui vérifie la condition (ii) ci-dessus est unique.

Idée de la preuve. — On utilisera une version q -analogue de la transformation de Borel-Laplace pour lier les fonctions $f \in \mathbb{G}_{q;s}^\theta$ et $\hat{B}_{q;s}\hat{f} \in \mathbb{H}_{q;s}^\theta$; voir plus loin les propositions 1.3.3, 1.3.6 et le théorème 1.3.7. □

1.2.4. La fonction f du théorème 1.2.3 sera appelé Gq -somme d'ordre s de \hat{f} dans la direction d_θ et sera notée $S_{q;s}^\theta \hat{f}$. On obtient ainsi une application $S_{q;s}^\theta : \mathbb{C}\{x\}_{q;s}^\theta \rightarrow \mathbb{G}_{q;s}^\theta$ qui vérifie, entre autres, la propriété suivante : si $\hat{f} \in \mathbb{C}\{x\}$, alors $S_{q;s}^\theta \hat{f}$ est la somme habituelle de \hat{f} . Ceci résulte du théorème précédent. Pour d'autres propriétés algébriques sur $S_{q;s}^\theta$, voir 1.4.2.

1.3. Définition de $\mathcal{B}_{q;s}^\theta$ et de $\mathcal{L}_{q;s}^\theta$. On interprète l'opérateur de sommation $S_{q;s}^\theta$ au moyen d'une transformation de Laplace analytique q -analogue d'ordre s . On étudiera ensuite l'inverse de cette dernière transformation.

1.3.1. LEMME. — Soit φ une fonction continue de $[0, \infty e^{i\theta}[$ dans \mathbb{C} . On suppose qu'il existe $\mu \in \mathbb{R}$ tel que $\varphi(\xi) = O(\xi^\mu q^{\frac{k}{2} \log_q^2 \xi})$ pour ξ tendant vers l'infini sur d_θ . Si l'on pose

$$\mathcal{L}_{q;s}^\theta \varphi(x) := \frac{q^{-1/(8k)} \sqrt{k}}{\sqrt{2\pi \log q}} \int_{d_\theta} q^{-\frac{k}{2}(\log_q \frac{x}{\xi})(\log_q \frac{x}{\xi} - \frac{1}{k})} \varphi(\xi) \frac{d\xi}{\xi},$$

alors $x \mapsto \mathcal{L}_{q;s}^\theta \varphi(x)$ définit une fonction analytique dans le disque $\tilde{D}(0; q^{(1/2-\mu)/k})$ de $\tilde{\mathbb{C}}$ qui vérifie la propriété suivante : pour tout $R \in]0, q^{(1/2-\mu)/k}[$, il existe $C_R > 0$ tel que l'on ait, pour tout $x \in \tilde{D}(0; R)$,

$$|\mathcal{L}_{q;s}^\theta \varphi(x)| < C_R q^{\frac{k}{2}(\arg_q(xe^{-i\theta}))^2}.$$

Preuve. — Quitte à faire une rotation d'angle $(-\theta)$ sur ξ et x , on peut supposer que $\theta = 0$. Par hypothèse, il existe $K > 0$ vérifiant d'une part $|\varphi(\xi)| < K$ si $\xi \in [0, 1]$, et d'autre part $|\varphi(\xi)| < K\xi^\mu q^{\frac{k}{2}\log_q^2 \xi}$ si $\xi \geq 1$. En écrivant $\int_0^\infty = \int_0^1 + \int_1^\infty$, on obtient

$$\left| \int_0^\infty q^{-\frac{k}{2}(\log_q \frac{x}{\xi})(\log_q \frac{x}{\xi} - \frac{1}{k})} \varphi(\xi) \frac{d\xi}{\xi} \right| < K q^{\frac{k}{2} \arg_q^2 x} \int_0^\infty q^{-\frac{k}{2} \log_q \xi (\log_q \xi + \frac{1}{k})} \frac{d\xi}{\xi} + K \left| q^{-\frac{k}{2} \log_q x (\log_q x - \frac{1}{k})} \right| \int_1^\infty \xi^{k \log_q |x| + \mu - 1/2} \frac{d\xi}{\xi}.$$

Il en résulte que, d'une part, la fonction $\mathcal{L}_{q;s}^\theta \varphi(x)$ est bien définie pour $|x| < q^{(1/2-\mu)/k}$ et, d'autre part, elle vérifie la propriété de croissance annoncée. \square

1.3.2. Par définition, on appelle $\mathcal{L}_{q;s}^\theta$ la transformation de q -Laplace analytique d'ordre s dans la direction d_θ .

1.3.3. PROPOSITION. — Sous l'hypothèse du lemme 1.3.1, si l'on suppose, de plus, que φ admette un développement asymptotique (au sens de Poincaré) $\hat{\varphi}$ pour ξ en 0 dans un voisinage sectoriel de d_θ , alors $\mathcal{L}_{q;s}^\theta \varphi \in \tilde{\mathcal{G}}_{q;s}^\theta$ et son développement asymptotique est égal à la transformée $\hat{\mathcal{L}}_{q;s} \hat{\varphi}$.

En particulier, si $\varphi \in \mathbb{H}_{q;s}^\theta$ (resp. $\mathbb{E}_{q;s}$), alors la transformée $\mathcal{L}_{q;s}^\theta \varphi$ appartient à l'ensemble $\mathcal{G}_{q;s}^\theta$ et admet $\hat{\mathcal{L}}_{q;s} \hat{\varphi}$ pour développement asymptotique q -Gevrey d'ordre s dans d_θ (resp. pour développement de Taylor en l'origine du plan complexe).

Preuve. — Soit $n \in \mathbb{N}$. On remarque que, d'une part,

$$\mathcal{L}_{q;s}^\theta \xi^n(x) = q^{sn(n-1)/2} x^n$$

et d'autre part, si une fonction ϕ vérifie le lemme 1.3.1 et telle que $\phi(\xi) = O(\xi^n)$ pour $\xi \rightarrow 0$ dans d_θ , alors il existe $K > 0$ tel que

$$|\mathcal{L}_{q;s}^\theta \phi(x)| \leq K q^{\frac{k}{2}(\arg_q(xe^{-i\theta}))^2} |x|^n$$

pour tout $x \in \tilde{\mathcal{C}}$ de module suffisamment petit. Ainsi, la proposition découle immédiatement du lemme 1.3.1 ci-dessus. \square

Par conséquent, si l'on désigne par \mathcal{S}^θ l'opérateur de prolongement analytique le long de la direction d_θ , on a la relation

$$\mathcal{S}_{q;s}^\theta = \mathcal{L}_{q;s}^\theta \mathcal{S}^\theta \hat{\mathcal{B}}_{q;s}$$

sur $\mathbb{C}\{x\}_{q,s}^\theta$. Il en résulte que la condition (i) implique (ii) dans le théorème 1.2.3.

Étant donné $R > 0$, on désignera par $\partial^+ \tilde{D}(0; R)$ le bord positivement orienté du disque $\tilde{D}(0; R)$ dans $\tilde{\mathbb{C}}$.

1.3.4. LEMME. — Soit f une fonction définie et analytique dans $\tilde{D}(0; r)$ ($r > 0$); on suppose qu'il existe $n \in \mathbb{N}$, $\varepsilon > 0$ et $K > 0$ tels que, si $|x| < r$, alors $|f(x)| < K|x|^n q^{\frac{k}{2}(\arg_q(xe^{-i\vartheta}))^2}$ pour tout $\vartheta \in]\theta - \varepsilon, \theta + \varepsilon[$. Soit $V = \{\xi \in \tilde{\mathbb{C}} : |\arg \xi - \theta| < \varepsilon\}$. Soit $0 < R < r$; on pose

$$\mathcal{B}_{q,s}^\theta f(\xi) := -i \frac{q^{1/(8k)} \sqrt{k}}{\sqrt{2\pi \log q}} \int_{\partial^+ \tilde{D}(0; R)} q^{\frac{k}{2} \log_q \frac{\xi}{\xi} (\log_q \frac{\xi}{\xi} - \frac{1}{k})} f(x) \frac{dx}{x}.$$

On a les assertions suivantes :

(i) $\xi \mapsto \mathcal{B}_{q,s}^\theta f(\xi)$ définit une fonction analytique, à croissance q -exponentielle d'ordre k et de type fini à l'infini dans V , qui est indépendante de R ;

(ii) pour tout $\rho \in]0, r[$, il existe $K_\rho > 0$ tel que, si $\xi \in V$ et $|\xi| < \rho q^{(-n+1/2)/k}$, on ait

$$|\mathcal{B}_{q,s}^\theta f(\xi)| < K_\rho q^{-\frac{s}{2}n(n-1)} |\xi|^n.$$

Preuve. — Par hypothèse, si $x = Re^{it}$ ($t \in \mathbb{R}$), on a

$$\begin{aligned} &|q^{\frac{k}{2} \log_q \frac{\xi}{\xi} (\log_q \frac{\xi}{\xi} - \frac{1}{k})} f(x)| \\ &< KR^n q^{\frac{k}{2} \log_q \frac{|\xi|}{R} (\log_q \frac{|\xi|}{R} + \frac{1}{k})} e^{-\frac{k}{2\ln q} (2t - \vartheta - \arg \xi)(\vartheta - \arg \xi)}. \end{aligned}$$

On obtient que la fonction $\mathcal{B}_{q,s}^\theta f(\xi)$ est bien définie et à croissance q -exponentielle d'ordre k à l'infini dans le secteur V ; elle est analytique et, par Cauchy, elle est indépendante du choix de la petite valeur de R .

La seconde assertion résulte de la remarque suivante : si $|\xi| < \rho q^{(-n+1/2)/k}$, on a

$$\inf_{R \in]0, \rho[} R^n q^{\frac{k}{2} \log_q \frac{|\xi|}{R} (\log_q \frac{|\xi|}{R} + \frac{1}{k})} = q^{\frac{s}{2}(-n^2 + n - \frac{1}{4})} |\xi|^n. \quad \square$$

1.3.5. Par définition, on appelle $\mathcal{B}_{q,s}^\theta$ la transformation de q -Borel analytique d'ordre s dans la direction d_θ .

1.3.6. PROPOSITION. — (i) Si $f \in \tilde{\mathbb{G}}_{q,s}^\theta$, de développement asymptotique que \hat{f} , alors $\mathcal{B}_{q,s}^\theta f \in \tilde{\mathbb{H}}_{q,s}^\theta$ et admet $\hat{\mathcal{B}}_{q,s} \hat{f}$ pour développement asymptotique en 0 dans un secteur bissecté par d_θ .

(ii) Si $f \in \mathbb{G}_{q,s}^\theta$, ayant \hat{f} pour développement asymptotique q -Gevrey d'ordre s dans la direction d_θ , alors $\mathcal{B}_{q,s}^\theta f \in \mathbb{H}_{q,s}^\theta$ et admet $\hat{\mathcal{B}}_{q,s} \hat{f}$ pour développement de Taylor en $0 \in \mathbb{C}$.

(iii) Si f est la fonction somme d'une série entière \hat{f} de rayon de convergence non nul, alors $\mathcal{B}_{q,s}^\theta f \in \mathbb{E}_{q,s}$ et c'est la fonction somme de la série $\hat{\mathcal{B}}_{q,s} \hat{f}$.

Preuve. — La première assertion découle du lemme précédent et de la remarque suivante : pour $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\mathcal{B}_{q,s}^\theta x^n(\xi) = q^{-sn(n-1)/2} \xi^n.$$

Si $f \in \mathbb{G}_{q,s}^\theta$, on a $\hat{f} \in \mathbb{C}[[x]]_{q,s}$ donc $\hat{\mathcal{B}}_{q,s} \hat{f} \in \mathbb{C}\{\xi\}$; de la deuxième assertion du lemme 1.3.4 ci-dessus, on déduit que $\mathcal{B}_{q,s}^\theta f \in \mathbb{C}\{\xi\}$, d'où $\mathcal{B}_{q,s}^\theta f \in \mathbb{H}_{q,s}^\theta$.

L'assertion (iii) est immédiate. □

1.3.7. THÉORÈME. — (i) Sur chacun des espaces $\mathbb{E}_{q,s}$, $\mathbb{H}_{q,s}^\theta$, $\tilde{\mathbb{H}}_{q,s}^\theta$, on a

$$\mathcal{B}_{q,s}^\theta \circ \mathcal{L}_{q,s}^\theta = \text{id}.$$

(ii) Sur chacun des espaces $\mathbb{C}\{x\}$ (l'espace des germes de fonctions analytiques au voisinage de 0 dans \mathbb{C}), $\mathbb{G}_{q,s}^\theta$, $\tilde{\mathbb{G}}_{q,s}^\theta$, on a

$$\mathcal{L}_{q,s}^\theta \circ \mathcal{B}_{q,s}^\theta = \text{id}.$$

Preuve. — Nous vérifions seulement la première assertion, et nous donnerons à la fin de la preuve quelques indications pour la seconde.

Quitte à faire une rotation, on peut supposer que $\theta = 0$. Soit $\varphi \in \tilde{\mathbb{H}}_{q,s}^0$; on pose $\phi = \mathcal{B}_{q,s}^0 \circ \mathcal{L}_{q,s}^0 \varphi$, et on va vérifier que $\phi = \varphi$ sur \mathbb{R}^+ , donc sur un voisinage sectoriel de \mathbb{R}^+ par unicité du prolongement analytique.

Soit $\xi \in \mathbb{R}^+$ fixé. Afin de combiner les intégrales définissant \mathcal{B} et \mathcal{L} , on choisit d_- (resp. d_+) une direction suffisamment proche de \mathbb{R}^+ , d'argument négatif (resp. positif). On décompose le chemin $\partial^+ \tilde{D}(0; R)$ en deux parties notées Γ_- , Γ_+ avec : $x = Re^{it} \in \Gamma_-$ si $t \in]-\infty, 0]$, $x = Re^{it} \in \Gamma_+$ si

$t \in [0, +\infty[$; en faisant si nécessaire une homothétie, on supposera $R = 1$. Si l'on pose $\phi(\xi) = \mathcal{B}_{q;s}^0 \circ \mathcal{L}_{q;s}^0 \varphi(\xi)$, on aura :

$$\begin{aligned} \phi(\xi) &= -i \frac{k}{2\pi \log q} \sum_{\varepsilon=+,-} \int_{\Gamma_\varepsilon} q^{\frac{k}{2} \log_q \frac{x}{\xi} (\log_q \frac{x}{\xi} - \frac{1}{k})} \int_{d_\varepsilon} q^{-\frac{k}{2} \log_q \frac{x}{u} (\log_q \frac{x}{u} - \frac{1}{k})} \varphi(u) \frac{du dx}{u x} \\ &\stackrel{(1)}{=} -i \frac{k}{2\pi \log q} \sum_{\varepsilon=+,-} \int_{d_\varepsilon} \sqrt{\frac{\xi}{u}} q^{\frac{k}{2} (\log_q^2 \xi - \log_q^2 u)} \varphi(u) \int_{\Gamma_\varepsilon} q^{k \log_q \frac{x}{\xi} \log_q x} \frac{dx du}{x u} \\ &\stackrel{(2)}{=} \frac{1}{2\pi i} \left(\int_{d_-} - \int_{d_+} \right) \sqrt{\frac{\xi}{u}} q^{\frac{k}{2} (\log_q^2 \xi - \log_q^2 u)} \frac{\varphi(u)}{\log u - \log \xi} \frac{du}{u} \\ &\stackrel{(3)}{=} \varphi(\xi). \end{aligned}$$

Ici, on a utilisé respectivement le théorème de Fubini pour (1) et la formule de Cauchy pour (3), le passage (2) résultant d'un calcul direct. D'où l'assertion (i) du théorème.

Pour vérifier la seconde assertion du théorème, supposons $f \in \tilde{\mathbb{G}}_{q;s}^0$. On fixe un petit réel positif x , et on choisit deux disques en colimaçon $\tilde{D}(0; R_1)$, $\tilde{D}(0; R_2)$ avec $R_1 < x < R_2$; on applique ensuite le théorème de Fubini aux intégrales doubles

$$\int_0^1 \left(\int_{\partial^+ \tilde{D}(0; R_1)} K(x, \xi, v) \frac{dv}{v} \right) \frac{d\xi}{\xi}, \quad \int_1^{+\infty} \left(\int_{\partial^+ \tilde{D}(0; R_2)} K(x, \xi, v) \frac{dv}{v} \right) \frac{d\xi}{\xi},$$

où $K(x, \xi, v) = q^{\frac{k}{2} \log_q \frac{v}{\xi} (\log_q \frac{v}{\xi} - \frac{1}{k})} q^{-\frac{k}{2} \log_q \frac{x}{\xi} (\log_q \frac{x}{\xi} - \frac{1}{k})} f(v)$, et on conclut avec la formule de Cauchy comme précédemment. \square

1.4. Produits de q -convolution. On rappelle que dans la théorie classique de la sommation de Borel-Laplace, le produit usuel se transforme en produit de convolution par la transformation de Borel. En ce qui concerne la sommabilité des séries q -Gevrey, on verra que la notion de produit de q -convolution introduite ici jouera aussi un rôle très important; voir Théorème 2.4.3. On remarquera également que notre produit de q -convolution coïncide avec le produit habituel quand $q^s = 1$ ($q = 1$ ou $s = 0$ par exemple).

1.4.1. LEMME. — Les ensembles $\mathbb{G}_{q;s}^\theta$, $\tilde{\mathbb{G}}_{q;s}^\theta$ constituent des $\mathbb{C}\{x\}$ -modules.

Plus précisément, soient $f \in \mathbb{C}\{x\}$, $g \in \mathbb{G}_{q;s}^\theta$ (resp. $\tilde{\mathbb{G}}_{q;s}^\theta$) et $h = fg$. On a $a : h \in \mathbb{G}_{q;s}^\theta$ (resp. $\tilde{\mathbb{G}}_{q;s}^\theta$) et $\hat{h} = f\hat{g}$, où l'on note $\hat{}$ la prise du développement asymptotique d'une fonction.

Preuve. — Étant donné $n \in \mathbb{N}$ et \hat{u} une série entière, on pose \hat{u}_n la somme partielle des n premiers termes de \hat{u} . Si $f = \sum_{n \geq 0} a_n x^n$, on a $(f\hat{g})_n = \sum_{j=0}^n a_j x^j \hat{g}_{n-j}$; on en déduit la relation suivante :

$$(fg)(x) - (f\hat{g})_n(x) = \sum_{j=0}^n a_j x^j (g(x) - \hat{g}_{n-j}(x)) + \sum_{j>n} a_j x^j g(x).$$

Le résultat du lemme en découle. □

1.4.2. PROPOSITION. — L'ensemble $\mathbb{C}\{x\}_{q;s}^\theta$ constitue un $\mathbb{C}\{x\}$ -module, stable par l'opérateur aux q -différences $\sigma_q : \hat{f}(x) \mapsto \hat{f}(qx)$, et tel que pour tout $(\hat{f}, \hat{g}) \in \mathbb{C}\{x\} \times \mathbb{C}\{x\}_{q;s}^\theta$, on ait $\mathcal{S}_{q;s}^\theta(\hat{f}\hat{g}) = \mathcal{S}\hat{f}\mathcal{S}_{q;s}^\theta\hat{g}$, où $\mathcal{S}\hat{f}$ désigne la somme habituelle de \hat{f} .

Preuve. — Il suffit de changer q en q^s dans la proposition I-4.3.1 (dont la preuve utilise essentiellement la transformation de q -Borel analytique). □

La proposition précédente implique ceci : si $\hat{f} \in \mathbb{C}\{x\}$ et $\hat{g} \in \mathbb{C}\{x\}_{q;s}^\theta$, alors $\hat{B}_{q;s}(\hat{f}\hat{g}) \in \mathbb{H}_{q;s}^\theta$ (comparer ceci avec le lemme 1.4.1 ci-dessus).

1.4.3. Considérons le produit de deux séries entières $\hat{f}, \hat{g} \in \mathbb{C}[[x]]$. On a formellement

$$\hat{B}_{q;s}(\hat{f}\hat{g})(\xi) = \sum_{n \geq 0} a_n q^{-sn(n-1)/2} \xi^n \hat{B}_{q;s} \hat{f}(q^{-sn}\xi),$$

les a_n étant les coefficients de la série \hat{g} . Ceci nous suggère de définir une loi de composition interne (commutative) dans $\mathbb{C}[[\xi]]$ notée $\hat{\star}_{q;s}$ de la manière suivante. Si $\hat{\varphi} = \sum_{n \geq 0} \alpha_n \xi^n$, $\hat{\gamma} = \sum_{n \geq 0} \beta_n \xi^n$, on pose

$$\hat{\varphi} \hat{\star}_{q;s} \hat{\gamma}(\xi) = \sum_{n \geq 0} \sum_{j=0}^n \alpha_j \beta_{n-j} q^{-sj(n-j)} \xi^n;$$

on a

$$\hat{\varphi} \hat{\star}_{q;s} \hat{\gamma}(\xi) = \sum_{n \geq 0} \alpha_n \xi^n \hat{\gamma}(q^{-sn}\xi) = \sum_{n \geq 0} \beta_n \xi^n \hat{\varphi}(q^{-sn}\xi).$$

Par définition, on appelle $\hat{\varphi} \hat{\star}_{q;s} \hat{\gamma}$ le produit formel de q -convolution d'ordre s de $\hat{\varphi}$ et $\hat{\gamma}$.

Noter que, si $\hat{\varphi} \in \mathbb{C}\{\xi\}$ et $\hat{\gamma} \in \mathbb{C}\{\xi\}$, on a $\hat{\varphi} \hat{\star}_{q;s} \hat{\gamma} \in \mathbb{C}\{\xi\}$; ceci résulte du fait que l'espace des séries q -Gevrey d'ordre s est stable par le produit habituel de deux séries.

Soit I un intervalle ouvert de \mathbb{R} . Pour simplifier, on appelle *germe de secteur de support* I tout secteur ouvert, de sommet de $0 \in \mathbb{C}$, contenant un secteur du type $\{x \in \mathbb{C} : \arg x \in I, |x| < R\}$, avec $R > 0$ arbitraire. Notons $\mathbb{A}(I)$ l'anneau des fonctions analytiques sur un germe de secteur de support I , admettant un développement asymptotique (au sens de Poincaré) en 0 dans ce secteur. Si $\hat{\varphi} = \sum_{n \geq 0} \alpha_n \xi^n \in \mathbb{C}\{\xi\}$, de somme φ , et si $\hat{\gamma}$ est le développement asymptotique d'une fonction $\gamma \in \mathbb{A}(I)$, on pose

$$\varphi \star_{q;s} \gamma(\xi) := \sum_{n \geq 0} \alpha_n \xi^n \gamma(q^{-sn} \xi).$$

(Ici, nous laissons au lecteur le soin de reformuler notre définition en termes de q -intégrale; cf [GR], p. 19.)

1.4.4. LEMME. — *Sous les hypothèses précédentes, on a $\varphi \star_{q;s} \gamma \in \mathbb{A}(I)$ et, plus précisément, $\varphi \star_{q;s} \gamma$ admet $\hat{\varphi} \hat{\star}_{q;s} \hat{\gamma}$ pour développement asymptotique.*

Preuve – Soit $\sum_{n \geq 0} \beta_n \xi^n$ le développement asymptotique de γ en 0 sur un germe de secteur V de support I ; on a, pour tout $\xi \in V : \gamma(q^{-sn} \xi) \rightarrow \beta_0$ si n tend vers $+\infty$. Puisque φ converge au voisinage de l'origine, on déduit la convergence en $0 \in V$ de l'expression définissant $\varphi \star_{q;s} \gamma(\xi)$; autrement dit, $\varphi \star_{q;s} \gamma(\xi)$ est bien définie et analytique sur un germe de secteur noté U dont l'ouverture contient I , tel que $U \subset V$.

Soient $\psi := \varphi \star_{q;s} \gamma$, $\hat{\psi} := \hat{\varphi} \hat{\star}_{q;s} \hat{\gamma}$ et pour $n \in \mathbb{N}$, $\hat{\psi}_n$ la somme partielle d'ordre n de $\hat{\psi}$; on a $\hat{\psi}_n = \sum_{j=0}^n \alpha_j \xi^j \hat{\gamma}_{n-j}(q^{-js} \xi)$, $\hat{\gamma}_\ell$ désignant la somme partielle d'ordre ℓ de la série $\hat{\gamma}$. En écrivant

$$\psi(\xi) - \hat{\psi}_n(\xi) = \sum_{j=0}^n \alpha_j \xi^j (\gamma(q^{-js} \xi) - \hat{\gamma}_{n-j}(q^{-js} \xi)) + \sum_{j>n} \alpha_j \xi^j \gamma(q^{-js} \xi),$$

on conclut à l'asymptoticité de ψ à $\hat{\psi}$. □

Par définition, on appelle $\varphi \star_{q;s} \gamma$ le *produit analytique de q -convolution d'ordre s de φ et γ* . De manière analogue, on peut aussi définir $\varphi \star_{q;s} \gamma$ pour tout couple $(\varphi, \gamma) \in \mathbb{A}(I) \times \mathbb{C}\{\xi\}$.

Le produit (formel ou analytique) de q -convolution d'ordre zéro correspond exactement au produit habituel. Or, on sait que $\mathbb{A}(I)$ est stable pour la multiplication; il serait peut-être intéressant de voir si l'on peut reformuler notre produit de q -convolution de sorte que $\mathbb{A}(I)$ soit stable.

Dans cette direction, on constate aussitôt la propriété suivante (cf la fin de la preuve du lemme précédent) :

1.4.5. PROPOSITION. — *Dans le lemme 1.4.4, si l'on suppose, en plus, que $\gamma \in \tilde{\mathbb{G}}_{q,s'}^\theta$ (ou $\gamma \in \mathbb{G}_{q,s'}^\theta$) avec $s' > 0$, alors on a $\varphi \star_{q;s} \gamma \in \tilde{\mathbb{G}}_{q,s'}^\theta$ (ou $\varphi \star_{q;s} \gamma \in \mathbb{G}_{q,s'}^\theta$, respectivement). \square*

La proposition qui précède étend le résultat du lemme 1.4.1 au cas d'un produit de q -convolution. On remarquera aussi que, d'après la proposition 1.4.2, on a $\varphi \star_{q;s} \gamma \in \mathbb{H}_{q;s}^\theta$ quand $\varphi \in \mathbb{E}_{q;s}$ et $\gamma \in \mathbb{H}_{q;s}^\theta$. Voir le lemme 2.4.4 pour un énoncé plus général.

2. Séries entières Gq -multisommables.

Dans cette partie, nous allons introduire une notion de multisommabilité pour les séries q -Gevrey. Nous commençons par un résultat du type taubérien qui affirme que si l'ordre Gevrey d'une série entière est strictement plus petit que son ordre de Gq -sommabilité, alors la série est convergente. Ce résultat nous permet d'établir l'impossibilité d'exprimer le carré de la série thêta de Jacobi (tronquée) comme somme de plusieurs séries Gq -sommables à simples niveaux ; voir Théorème 2.2.1.

Pour les séries entières Gevrey multisommables, il y a plusieurs définitions équivalentes. Nous en citons deux : l'une utilise le procédé d'*accélération élémentaire* de J. Écalle ([Ec], Chapitre 2), J. Martinet et J.-P. Ramis ([MR2]), une autre décrit une série multisommable comme *combinaison finie* de séries k -sommables à différents niveaux k ([Ba], [MR1]). Le théorème 2.2.1 ci-dessous mettra en défaut cette seconde définition pour une *bonne* théorie des séries entières Gq -multisommables. Car la série étudiée dans ce théorème est solution formelle d'une équation aux q -différences linéaire à coefficients polynomiaux, c'est donc une série qui devrait être sommable avec une méthode *bien* conçue. Dans la perspective d'étudier les équations aux q -différences, nous allons introduire la notion de série entière Gq -multisommable au moyen d'un q -analogue de l'accélération élémentaire citée précédemment. On verra que ceci permet de sommer toute série entière solution formelle d'une équations aux q -différences (cf les théorèmes 3.3.2 et 3.3.5).

2.1. *Un résultat du type taubérien.*

2.1.1. LEMME. — Soit $0 < s' < s$. Soit $\hat{f} \in \mathbb{C}[[x]]$ une série entière telle que $\hat{B}_{q,s}\hat{f}$ converge dans \mathbb{C} vers une fonction entière φ . On a $\hat{f} \in \mathbb{C}[[x]]_{q,s'}$ si et seulement si $\varphi \in \mathbb{E}_{q,s-s'}$.

Preuve. — D'après la définition de $\hat{B}_{q,s}$ (cf 1.1.1), on a $\hat{B}_{q,s} = \hat{B}_{q,s'}\hat{B}_{q,s-s'}$. Or, les applications $\hat{B}_{q,s'} : \mathbb{C}[[x]]_{q,s'} \rightarrow \mathbb{C}\{\xi\}$, $\hat{B}_{q,s-s'} : \mathbb{C}\{\xi\} \rightarrow \mathbb{E}_{q,s-s'}$ sont bijectives; ceci prouve le lemme. \square

2.1.2. PROPOSITION. — Soit $0 < s' < s$ et $\theta \in \mathbb{R}$. On a

$$\mathbb{C}\{x\}_{q,s}^\theta \cap \mathbb{C}\{x\}_{q,s'}^\theta = \mathbb{C}\{x\}_{q,s}^\theta \cap \mathbb{C}[[x]]_{q,s'} = \mathbb{C}\{x\}.$$

Preuve. — Soit $\hat{f} \in \mathbb{C}\{x\}_{q,s}^\theta \cap \mathbb{C}[[x]]_{q,s'}$; il s'agit de vérifier que $\hat{B}_{q,s}\hat{f} \in \mathbb{E}_{q,s}$. Notons φ la fonction somme de la série $\hat{B}_{q,s}\hat{f}$. À partir du lemme 2.1.1 et de la définition 1.2.1, on obtient que $\varphi \in \mathbb{E}_{q,s-s'} \cap \mathbb{H}_{q,s}^\theta$. Soit alors V un voisinage sectoriel de la direction d_θ sur lequel on a $\varphi(\xi) = O(\xi^\mu q^{\frac{1}{2s} \log_q^2 \xi})$ pour $|\xi| \rightarrow +\infty$, où $\mu \in \mathbb{R}$ désigne une constante convenable. Deux cas sont possibles.

(i) $V = \mathbb{C}$: c'est exactement ce que l'on attend de la proposition.

(ii) $V \neq \mathbb{C}$: on pose U un secteur ouvert non vide, d'ouverture $< \pi$, tel que $(\bar{U} \setminus \{0\}) \subset V$; on note W le complémentaire $\mathbb{C}^* \setminus U$ et ∂W la frontière de W dans \mathbb{C}^* . En choisissant une détermination de la fonction logarithme sur W , on considère la fonction $\gamma(\xi) = \varphi(\xi)\xi^{-\mu}q^{-\frac{1}{2s} \log_q^2 \xi}$. C'est une fonction analytique sur W , continue sur $W \cup \partial W$ et bornée sur ∂W . En outre, γ a une croissance exponentielle sur W (même sous-exponentielle : pour tout $\varepsilon > 0$, $\gamma(\xi) = o(e^{\varepsilon|\xi|})$ si $\xi \rightarrow \infty$ dans W). En utilisant le théorème de Phragmén-Lindelöf, on obtient que γ est bornée sur W tout entier; ceci implique que φ a une croissance au plus q -exponentielle d'ordre s à l'infini dans W , donc dans \mathbb{C} . \square

2.1.3. Dans la théorie des séries Gevrey ordinaires, on a un énoncé similaire. Notre énoncé 2.1.2 porte sur une seule direction d_θ alors que dans le cas Gevrey on utilise les séries sommables dans presque toutes les directions (cf [Ra1]).

En outre, la proposition 2.1.2 sera généralisée plus loin pour les séries multisommables.

2.2. Étude de la série $(\sum_{n \geq 0} q^{n(n-1)/2} x^n)^2$.

On pose $\hat{F} := (\sum_{n \geq 0} q^{n(n-1)/2} x^n)^2$. On rappelle que la série thêta de Jacobi tronquée $\sum_{n \geq 0} q^{n(n-1)/2} x^n$ est Gq -sommable d'ordre 1. Dans la suite, on va démontrer le résultat suivant, qui n'a pas d'équivalent dans la théorie de la resommation des séries entières Gevrey ordinaires.

2.2.1. THÉORÈME. — *Pour toute suite finie de réels strictement positifs $(s_j)_{1 \leq j \leq \ell}$ et tout $\theta \in \mathbb{R}$, il n'existe pas de $\hat{f}_j \in \mathbb{C}\{x\}_{q; s_j}^\theta$ vérifiant $(\sum_{n \geq 0} q^{n(n-1)/2} x^n)^2 = \hat{f}_1 + \dots + \hat{f}_\ell$.*

Idée de la preuve. — La série $\sum_{n \geq 0} q^{n(n-1)/2} x^n$ étant q -Gevrey d'ordre 1, son carré \hat{F} l'est également. Il suffit donc de même que \hat{F} ne peut pas se décomposer en la somme de deux séries, l'une étant Gq -sommable d'ordre 1, l'autre q -Gevrey d'ordre $s < 1$. Ceci sera démontré dans le lemme 2.2.5 ci-dessous par des arguments fondés sur la croissance à l'infini de la transformée formelle d'ordre 1 de \hat{F} . \square

2.2.2. Du fait que la série $\sum_{n \geq 0} q^{n(n-1)/2} x^n$ est solution formelle de $xy(qx) - y(x) = -1$, on déduit que \hat{F} vérifie l'équation

$$(q^2 x^3 \sigma_q^2 - x(1+x)\sigma_q + 1)\hat{F}(x) = 1 + x,$$

laquelle se transforme par $\hat{\mathcal{B}}_{q;1}$ en celle-ci :

$$(2.2.3) \quad (1 - q^{-1}\xi^2\sigma_q^{-1})\hat{\mathcal{B}}_{q;1}\hat{F}(\xi) = (1 + \xi)/(1 - \xi).$$

En développant formellement

$$(1 - q^{-1}\xi^2\sigma_q^{-1})^{-1} = \sum_{n \geq 0} (q^{-1}\xi^2\sigma_q^{-1})^n = \sum_{n \geq 0} q^{-n^2} \xi^{2n} \sigma_q^{-n},$$

on en déduit que l'équation (2.2.3) admet une solution analytique en l'origine de \mathbb{C} et une seule, qui est donnée par

$$\hat{\mathcal{B}}_{q;1}\hat{F}(\xi) = \sum_{n \geq 0} q^{-n^2} \xi^{2n} (1 + q^{-n}\xi)/(1 - q^{-n}\xi).$$

On remarquera que $\xi = 1, q, \dots, q^n, \dots$ sont les pôles (simples) de $\hat{\mathcal{B}}_{q;1}\hat{F}$.

Considérons la fonction entière $P(\xi) := \hat{\mathcal{B}}_{q;1}\hat{F}(\xi) \prod_{n \geq 0} (1 - q^{-n}\xi)$. On a, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $P(q^n) = 2q^{n^2} \prod_{1 \leq \ell \leq n} (1 - q^\ell) \prod_{m \geq 1} (1 - q^{-m})$, ce qui implique que

$$(2.2.4) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n P(q^n) q^{-n(3n+1)/2} = 2 \prod_{m \geq 1} (1 - q^{-m})^2.$$

De la relation (2.2.3), on obtient l'équation

$$(1 - \xi)(1 - q^{-1}(1 - \xi)\xi^2\sigma_q^{-1})P(\xi) = 1 + \xi,$$

dont le polygone de Newton relatif au point à l'infini contient une pente et une seule égale à 3. En utilisant un théorème de J.-P. Ramis [Ra2], on conclut que $P \in \mathbb{E}_{q,1/3}$ et que $P \notin \mathbb{E}_{q,s}$ pour tout $s > 1/3$.

Ceci étant, vérifions maintenant le lemme suivant.

2.2.5. LEMME. — Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, il n'existe pas de triplet (s, \hat{f}, \hat{g}) satisfaisant aux conditions suivantes :

- (i) $0 < s < 1$, $\hat{f} \in \mathbb{C}\{x\}_{q;1}^\theta$ et $\hat{g} \in \mathbb{C}[[x]]_{q;s}$;
- (ii) $\hat{F} = \hat{f} + \hat{g}$.

Preuve. — Supposons qu'il existe un triplet (s, \hat{f}, \hat{g}) vérifiant les conditions indiquées. Considérons les fonctions

$$\varphi(\xi) := \hat{B}_{q;1}\hat{f}(\xi) \prod_{n \geq 0} (1 - q^{-n}\xi), \quad \gamma(\xi) := \hat{B}_{q;1}\hat{g}(\xi) \prod_{n \geq 0} (1 - q^{-n}\xi).$$

D'après le lemme 2.1.1, $\hat{B}_{q;1}\hat{g}$ est une fonction entière, donc $\gamma(q^n) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. De la relation $P(\xi) = \varphi(\xi) + \gamma(\xi)$, on a $\varphi(q^n) = P(q^n)$; avec la formule (2.2.4), on obtient que φ est une fonction entière telle que $|\varphi(q^n)| \geq Kq^{3n^2/2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, où $K = 2 \prod_{m \geq 1} (1 - q^{-m})^2$. En utilisant un résultat de Littlewood [Li] sur les fonctions entières d'ordre zéro (cf le lemme I-4.3.7 pour l'énoncé correspondant), on en déduit que φ a une croissance q -exponentielle d'ordre au moins 3 dans \mathbb{C} . La fonction $\prod_{n \geq 0} (1 - q^{-n}\xi)$ étant q -exponentielle d'ordre exactement égale à 1, la fonction $\hat{B}_{q;1}\hat{f}$ admet alors une croissance q -exponentielle d'ordre au moins 2 dans toute direction où elle est définie, ce qui contredit l'hypothèse $\hat{f} \in \mathbb{C}\{x\}_{q;1}^\theta$. □

2.3. Définition d'une série entière Gq -multisommable.

Pour les séries Gevrey, l'accélération élémentaire consiste essentiellement à combiner des transformations de Borel et de Laplace de niveaux différents ; il en sera de même pour les séries q -Gevrey.

2.3.1. Soit $s \geq s' > 0$ et soit $\theta \in \mathbb{R}$. On a : (1) $\mathbb{K}_{q;s}^\theta \subset \mathbb{K}_{q;s'}^\theta$ si $\mathbb{K} = \tilde{\mathbb{H}}$ ou \mathbb{H} ; (2) $\tilde{\mathbb{G}}_{q;s'}^\theta \subset \tilde{\mathbb{G}}_{q;s}^\theta$. Par contre, l'inclusion $\mathbb{G}_{q;s'}^\theta \subset \mathbb{G}_{q;s}^\theta$ n'est pas forcément vraie.

On admettra la convention suivante : si $s = 0$, on a $\mathcal{B}_{q;s}^\theta = \mathcal{L}_{q;s}^\theta = \text{id}$ sur un espace de fonctions quelconque.

2.3.2. LEMME. — Si $\varphi \in \tilde{\mathbb{H}}_{q;s}^\theta$ et $s \geq s' > 0$, alors

$$\mathcal{L}_{q;s}^\theta \varphi = \mathcal{L}_{q;s-s'}^\theta \mathcal{L}_{q;s'}^\theta \varphi \quad \text{et} \quad \mathcal{B}_{q;s-s'}^\theta \mathcal{L}_{q;s}^\theta \varphi = \mathcal{L}_{q;s'}^\theta \varphi.$$

Preuve. — D'après le théorème 1.3.6, \mathcal{L} et \mathcal{B} sont inverses l'un de l'autre, il suffit donc de prouver l'une des assertions du lemme. Prouvons la première et supposons $s \neq s'$; soient $k = 1/s$, $k' = 1/s'$, $\hat{k} = 1/(s - s')$; on a $\hat{k} = kk'/(k' - k)$. En utilisant la définition de \mathcal{L} puis le théorème de Fubini, on a :

$$\begin{aligned} & \mathcal{L}_{q;s-s'}^\theta \mathcal{L}_{q;s'}^\theta \varphi(x) \\ &= C \int_{d_\theta} q^{-\frac{\hat{k}}{2} \log_q \frac{x}{u} (\log_q \frac{x}{u} - \frac{1}{\hat{k}})} \int_{d_\theta} q^{-\frac{k'}{2} \log_q \frac{x}{\xi} (\log_q \frac{x}{\xi} - \frac{1}{k'})} \varphi(\xi) \frac{d\xi}{\xi} \frac{du}{u} \\ &= C \int_{d_\theta} \sqrt{\frac{x}{\xi}} q^{-\frac{\hat{k}}{2} \log_q^2 x - \frac{k'}{2} \log_q^2 \xi} \varphi(\xi) I(x, \xi) \frac{d\xi}{\xi} \\ &= \mathcal{L}_{q;s}^\theta \varphi(x), \end{aligned}$$

où l'on a posé $C = \frac{q^{-1/(8k)} \sqrt{k' \hat{k}}}{2\pi \log q}$ et

$$\begin{aligned} I(x, \xi) &= \int_{d_\theta} q^{-\frac{k'^2}{2(k'-k)} \log_q^2 u + (\hat{k} \log_q x + k' \log_q \xi) \log_q u} \frac{du}{u} \\ &= \sqrt{\frac{2\pi(k' - k) \log q}{k'^2}} q^{\frac{k' - k}{2k'^2} (\hat{k} \log_q x + k' \log_q \xi)^2}. \quad \square \end{aligned}$$

2.3.3. Étant donnée une série q -Gevrey d'ordre s , on lui applique la transformation de q -Borel formelle d'ordre s et on obtient un germe de fonction analytique en l'origine du plan complexe; si, de plus, la transformée obtenue appartient à la classe $\mathbb{H}_{q;s}^\theta$, la série est dite Gq -sommable d'ordre s . Dans la pratique, on constate en général que cette transformée a une croissance q -exponentielle d'ordre plus élevé. Dans ce cas, on lui applique une transformation de Laplace d'ordre adéquat, et l'on essaie ensuite d'autres transformations de Laplace. Autrement dit, on remplace l'inverse $\mathcal{L}_{q;s}$ de la transformation de q -Borel d'ordre s par une succession d'un nombre fini de $\mathcal{L}_{q;s'}$, les s' étant *a priori* tous inférieurs à s . D'après le lemme qui précède, cette démarche étend la méthode de Gq -sommation à une classe de séries plus grande, appelées séries Gq -multisommables.

À présent, on désigne par Ω^+ l'ensemble des suites finies, strictement croissantes, formées de réels strictement positifs. Par convention, on admet que $\emptyset \in \Omega^+$. On pose $\Omega^{+*} = \Omega^+ \setminus \{\emptyset\}$.

Soit $\theta \in \mathbb{R}$; on notera \mathcal{S}^θ l'opérateur de prolongement analytique le long de la direction d_θ , c'est-à-dire dans un voisinage sectoriel de d_θ .

2.3.4. DÉFINITION. — Soit $\vec{s} = (s_1, s_2, \dots, s_r) \in \Omega^{+*}$ et soit $\hat{f} \in \mathbb{C}[[x]]$.

(1) On dit que $\hat{f} \in \mathbb{C}[[x]]$ est Gq -multisommable d'ordre \vec{s} dans une direction d_θ et on écrit $\hat{f} \in \mathbb{C}\{x\}_{q;\vec{s}}^\theta$, si les conditions suivantes sont remplies :

- $\hat{f} \in \mathbb{C}[[x]]_{q;s_r}$;
- $\hat{B}_{q;s_r} \hat{f} \in \mathbb{H}_{q;s_r-s_{r-1}}^\theta$;
- $\mathcal{L}_{q;s_{r-j+1}-s_{r-j}}^\theta \cdots \mathcal{L}_{q;s_r-s_{r-1}}^\theta \mathcal{S}^\theta \hat{B}_{q;s_r} \hat{f} \in \tilde{\mathbb{H}}_{q;s_{r-j}-s_{r-j-1}}^\theta$ pour j compris entre 1 et $r-2$;
- $\mathcal{L}_{q;s_2-s_1}^\theta \cdots \mathcal{L}_{q;s_{r-j+1}-s_{r-j}}^\theta \cdots \mathcal{L}_{q;s_r-s_{r-1}}^\theta \mathcal{S}^\theta \hat{B}_{q;s_r} \hat{f} \in \tilde{\mathbb{H}}_{q;s_1}^\theta$.

(2) Si $\hat{f} \in \mathbb{C}\{x\}_{q;\vec{s}}^\theta$, on appelle Gq -somme d'ordre \vec{s} de \hat{f} dans la direction d_θ la fonction définie de la façon suivante :

$$\mathcal{S}_{q;\vec{s}}^\theta \hat{f} := \mathcal{L}_{q;s_1}^\theta \mathcal{L}_{q;s_2-s_1}^\theta \cdots \mathcal{L}_{q;s_{r-j+1}-s_{r-j}}^\theta \cdots \mathcal{L}_{q;s_r-s_{r-1}}^\theta \mathcal{S}^\theta \hat{B}_{q;s_r} \hat{f}.$$

(3) La direction d_θ est dite *singulière d'ordre \vec{s} pour \hat{f}* si $\hat{f} \notin \mathbb{C}\{x\}_{q;\vec{s}}^\theta$. Lorsque c'est le cas, on écrira $\theta \in DS(\hat{f})$.

(4) La série \hat{f} est dite Gq -multisommable d'ordre \vec{s} si $DS(\hat{f}) \cap [0, 2\pi]$ est fini. Dans ce cas, on dit aussi que $\hat{f} \in \mathbb{C}\{x\}_{q;\vec{s}}$.

Par **convention**, $\mathbb{C}\{x\}_{q;\vec{s}}^\theta$ et $\mathbb{C}\{x\}_{q;\vec{s}}$ désigneront l'ensemble $\mathbb{C}\{x\}$ si $\vec{s} = \emptyset$.

2.3.5. Si $\hat{f} \in \mathbb{C}\{x\}_{q;\vec{s}}^\theta$, avec $\vec{s} = (s_1, \dots, s_r) \in \Omega^{+*}$, on constate aussitôt les propriétés suivantes :

- (1) $\mathcal{S}_{q;\vec{s}}^\theta \hat{f} \in \tilde{\mathbb{G}}_{q;s_1}^\theta$.
- (2) On a $\hat{f} \in \mathbb{C}\{x\}_{q;\vec{s}}^{\theta+2\nu\pi}$, $\mathcal{S}_{q;\vec{s}}^{\theta+2\nu\pi} \hat{f}(x) = \mathcal{S}_{q;\vec{s}}^\theta \hat{f}(xe^{-2\nu\pi i})$ pour tout entier relatif ν . Il s'ensuit que \hat{f} est Gq -multisommable d'ordre \vec{s} si et seulement si $DS(\hat{f})$ est un ensemble discret de \mathbb{R} .
- (3) On a $\hat{f} \in \mathbb{C}\{x\}$ si et seulement si $DS(\hat{f}) = \emptyset$.

2.4. Quelques propriétés sur les séries G_q -multisommables. Commençons par une variante du lemme 2.3.2.

2.4.1. LEMME. — Soient $0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n$ ($n \geq 2$), $\theta \in \mathbb{R}$ et $\hat{f} \in \mathbb{C}[[x]]_{q;t_1}$. Si l'on pose φ la fonction somme de $\hat{\mathcal{B}}_{q;t_1} \hat{f}$, alors on a

$$\varphi = \mathcal{L}_{q;t_2-t_1}^\theta \cdots \mathcal{L}_{q;t_{n-1}-t_{n-2}}^\theta \mathcal{L}_{q;t_n-t_{n-1}}^\theta \mathcal{S}^\theta \hat{\mathcal{B}}_{q;t_n} \hat{f}.$$

Par conséquent, on a

- (i) $\mathbb{C}\{x\}_{q;t_1}^\theta \subset \mathbb{C}\{x\}_{q;(t_1, t_2, \dots, t_n)}^\theta$;
- (ii) $\mathbb{C}[[x]]_{q;t} \cap \mathbb{C}\{x\}_{q;(t_1, t_2, \dots, t_n)}^\theta = \mathbb{C}\{x\}$ pour $t \in]0, t_1[$.

Preuve. — Puisque $\hat{f} \in \mathbb{C}[[x]]_{q;t_1}$, on obtient, d'après le lemme 2.1.1, que $\hat{\mathcal{B}}_{q;t_n} \hat{f} \in \mathbb{E}_{q;t_1-t_n}$. Si $n = 2$, avec la proposition 1.3.3 on a : $\varphi = \mathcal{L}_{q;t_2-t_1}^\theta \mathcal{S}^\theta \hat{\mathcal{B}}_{q;t_2} \hat{f}$.

Supposons $n > 2$; on a $\mathcal{L}_{q;t_n-t_{n-1}}^\theta \mathcal{S}^\theta \hat{\mathcal{B}}_{q;t_n} \hat{f} \in \mathbb{E}_{q;t_1-t_{n-1}}$ car cette fonction est la somme de la série entière $\hat{\mathcal{L}}_{q;t_n-t_{n-1}} \hat{\mathcal{B}}_{q;t_n} \hat{f}$, cette dernière étant égale à $\hat{\mathcal{B}}_{q;t_{n-1}} \hat{f}$. En réitérant ce processus, on prouve l'égalité portant sur la fonction φ du lemme.

La conséquence (i) est immédiate car $\mathbb{G}_{q;t_1}^\theta \subset \tilde{\mathbb{G}}_{q;t_1}^\theta$. Pour (ii), il suffit de remarquer ceci : $\tilde{\mathbb{G}}_{q;t_1}^\theta \cap \mathbb{E}_{q;t_1-t} = \mathbb{G}_{q;t_1}^\theta \cap \mathbb{E}_{q;t_1-t} = \mathbb{E}_{q;t_1-t}$; voir la preuve du lemme 2.1.2. □

Compte tenu du lemme qui précède, on remarque la généralisation suivante de la proposition 2.1.2 :

$$\mathbb{C}\{x\}_{q;\vec{s}}^\theta \cap \mathbb{C}[[x]]_{q;t} = \mathbb{C}\{x\}_{q;\vec{s}}^\theta \cap \mathbb{C}\{x\}_{q;t}^\theta = \mathbb{C}\{x\}_{q;\vec{s}(t)}^\theta,$$

où $\vec{s} = (s_1, \dots, s_r) \in \Omega^+$, $t > 0$ et où l'on note $\vec{s}(t) \in \Omega^+$ la suite extraite de \vec{s} constituée des $s_j \leq t$.

Par définition, on note $[\vec{s}] = \emptyset$ ou $\{s_1, \dots, s_r\}$ selon le cas $\vec{s} = \emptyset$ ou $(s_1, \dots, s_r) \in \Omega^{+*}$.

2.4.2. PROPOSITION. — Soit $\theta \in \mathbb{R}$ et soit $\vec{s}, \vec{s}' \in \Omega^+$ tels que $[\vec{s}] \subset [\vec{s}']$.

On a

$$\mathbb{C}\{x\}_{q;\vec{s}}^\theta \subset \mathbb{C}\{x\}_{q;\vec{s}'}^\theta, \quad \mathcal{S}_{q;\vec{s}'}^\theta |_{\mathbb{C}\{x\}_{q;\vec{s}}^\theta} = \mathcal{S}_{q;\vec{s}}^\theta.$$

Preuve. — Le résultat découle immédiatement des lemmes 2.3.2, 2.4.1 à l'aide de la définition 2.3.3. □

Nous conjecturons que l'égalité $\mathbb{C}\{x\}_{q;\vec{s}}^\theta = \mathbb{C}\{x\}_{q;\vec{s}'}^\theta$ n'a lieu que si $[\vec{s}] = [\vec{s}']$.

2.4.3. THÉORÈME. — *Étant donnés $\vec{s} \in \Omega^+$ et $\theta \in \mathbb{R}$, l'ensemble $\mathbb{C}\{x\}_{q;\vec{s}}^\theta$ constitue un $\mathbb{C}\{x\}$ -module, stable par l'opérateur aux q -différences σ_q , et tel que pour tout $(\hat{f}, \hat{g}) \in \mathbb{C}\{x\} \times \mathbb{C}\{x\}_{q;\vec{s}}^\theta$, on ait $\mathcal{S}_{q;\vec{s}}^\theta(\hat{f}\hat{g}) = \mathcal{S}\hat{\mathcal{S}}_{q;\vec{s}}^\theta\hat{g}$, où $\mathcal{S}\hat{f}$ désigne la somme naturelle de \hat{f} .*

Preuve – Le théorème est déjà connu quand $\vec{s} = \emptyset$: c'est le produit de deux fonctions analytiques en l'origine du plan complexe. On suppose $\vec{s} = (s_1, \dots, s_r) \in \Omega^{+*}$. En tenant compte de la proposition 1.4.2, on considère seulement le cas où $r > 1$. On va vérifier $\mathcal{S}_{q;\vec{s}}^\theta(\hat{f}\hat{g}) = \mathcal{S}\hat{\mathcal{S}}_{q;\vec{s}}^\theta\hat{g}$, les autres propriétés du théorème étant évidentes.

Utilisons la notion de produit de q -convolution introduite dans le paragraphe 1.4.3; on a

$$\hat{\mathcal{B}}_{q;s_r}(\hat{f}\hat{g}) = \hat{\mathcal{B}}_{q;s_r}\hat{f} \star_{q;s_r} \hat{\mathcal{B}}_{q;s_r}\hat{g}.$$

Comme $\hat{g} \in \mathbb{C}[[x]]_{q;s_r}$ et $\hat{f} \in \mathbb{C}\{x\}$, on a $\hat{f}\hat{g} \in \mathbb{C}[[x]]_{q;s_r}$; par unicité du prolongement analytique, on obtient l'expression suivante :

$$\mathcal{S}^\theta \hat{\mathcal{B}}_{q;s_r}(\hat{f}\hat{g}) = \mathcal{S}\hat{\mathcal{B}}_{q;s_r}\hat{f} \star_{q;s_r} \mathcal{S}^\theta \hat{\mathcal{B}}_{q;s_r}\hat{g},$$

où $\mathcal{S}\hat{\mathcal{B}}_{q;s_r}\hat{f} \in \mathbb{E}_{q;s_r}$; et le lemme 2.4.4 ci-dessous nous assurera que $\mathcal{S}^\theta \hat{\mathcal{B}}_{q;s_r}(\hat{f}\hat{g}) \in \mathbb{H}_{q;s_r-s_{r-1}}^\theta$. Considérons ensuite $\mathcal{L}_{q;s_r-s_{r-1}}^\theta \mathcal{S}^\theta \hat{\mathcal{B}}_{q;s_r}(\hat{f}\hat{g})$; d'après les lemmes 2.4.4-5, on aura

$$\mathcal{L}_{q;s_r-s_{r-1}}^\theta \mathcal{S}^\theta \hat{\mathcal{B}}_{q;s_r}(\hat{f}\hat{g}) = \mathcal{S}\hat{\mathcal{B}}_{q;s_{r-1}}\hat{f} \star_{q;s_{r-1}} \mathcal{L}_{q;s_r-s_{r-1}}^\theta \mathcal{S}^\theta \hat{\mathcal{B}}_{q;s_r}\hat{g} \in \tilde{\mathbb{H}}_{q;s_r-s_{r-1}}^\theta,$$

et il en sera de même pour les autres itérés de transformées de Laplace. Ceci entraînera la relation $\mathcal{S}_{q;\vec{s}}^\theta(\hat{f}\hat{g}) = \mathcal{S}\hat{\mathcal{S}}_{q;\vec{s}}^\theta\hat{g}$. □

2.4.4. LEMME. — *Soit $\theta \in \mathbb{R}$ et $0 < s' \leq s$. On a les assertions suivantes :*

- (i) *Si $\varphi \in \mathbb{E}_{q;s}$ et $\gamma \in \mathbb{H}_{q;s'}^\theta$, alors $\varphi \star_{q;s} \gamma \in \mathbb{H}_{q;s'}^\theta$.*
- (ii) *L'énoncé (i) est encore vrai si l'on change $\mathbb{H}_{q;s'}^\theta$ en $\tilde{\mathbb{H}}_{q;s'}^\theta$.*

Preuve. — Vu le lemme 1.4.4 et le fait que le q -convolé de deux séries convergentes reste convergent, il suffit de vérifier la croissance à l'infini de la fonction q -convolée $\varphi \star_{q;s} \gamma$. Soit $\varphi(\xi) = \sum_{n \geq 0} \alpha_n \xi^n$; du fait que $\varphi \in \mathbb{E}_{q;s}$, il existe $R > 0$ tel que $\alpha_n = O(R^n q^{-sn(n-1)/2})$ si $n \rightarrow \infty$. Quitte à faire une homothétie sur la variable ξ , on suppose ceci : $|\alpha_n| < Aq^{-sn(n-1)/2}$

pour tout $n \in \mathbb{N}$, où $A = |\alpha_0| + 1$ par exemple. Avec l'hypothèse que $\gamma \in \mathbb{H}_{q;s'}^\theta$ ou $\tilde{\mathbb{H}}_{q;s'}^\theta$, on peut choisir un voisinage sectoriel V de d_θ sur lequel on ait, si $|\xi| > 1$, alors $|\gamma(\xi)| < Kq^{\frac{1}{2s'} \log_q^2 |\xi|} |\xi|^\mu$, où $K > 0$, $\mu \in \mathbb{R}$ sont des constantes convenables. En choisissant μ tel que $\mu > 1/s + 1/2$, on en déduit l'estimation suivante :

$$q^{-sn(n-1)/2} |\xi^n| |\gamma(q^{-sn}\xi)| < Kq^{\frac{1}{2s'} \log_q^2 |\xi|} |\xi|^\mu q^{-n} q^{n \frac{s-s'}{2s'} (ns-2 \log_q |\xi|)},$$

où $n \in \mathbb{N}$ et $\xi \in V$ avec $|\xi| > 1$.

Soit $\xi \in V$ tel que $|\xi| > 1$. On pose $m_\xi = \min\{m \in \mathbb{N} : |\xi| \leq q^{sm/2}\}$. Avec la définition de $\varphi \star_{q;s} \gamma$ et l'estimation obtenue précédemment sur le produit $q^{-sn(n-1)/2} |\xi^n| |\gamma(q^{-sn}\xi)|$, on a :

$$\begin{aligned} |\varphi \star_{q;s} \gamma(\xi)| &< AKq^{\frac{1}{2s'} \log_q^2 |\xi|} |\xi|^\mu \sum_{0 \leq n \leq m_\xi} q^{-n} q^{\frac{s-s'}{2s'} n(ns-2 \log_q |\xi|)} + \\ &\quad + AK \sum_{n > m_\xi} q^{-sn(n-1)/2} |\xi^n| \\ &< \frac{AK}{1-q^{-1}} q^{\frac{1}{2s'} \log_q^2 |\xi|} |\xi|^\mu + K' q^{\frac{1}{2s} \log_q^2 |\xi|} |\xi|^{\mu'}, \end{aligned}$$

où $K' > 0$ et $\mu' \in \mathbb{R}$. Ceci termine la preuve du lemme. □

2.4.5. LEMME. — *Sous les hypothèses du lemme 2.4.4 (ii), on a*

$$\mathcal{L}_{q;s'}^\theta(\varphi \star_{q;s} \gamma) = \mathcal{L}_{q;s'}^\theta \varphi \star_{q;s-s'} \mathcal{L}_{q;s'}^\theta \gamma$$

(ici, on conventionne que $F \star_{q;0} G = FG$, produit usuel entre les fonctions).

Preuve. — Soient $\varphi = \sum_{n \geq 0} \alpha_n \xi^n \in \mathbb{E}_{q;s}$ et $\gamma \in \tilde{\mathbb{H}}_{q;s'}^\theta$; on distinguera deux cas : $s = s'$ et $s > s'$.

Cas où $s > s'$. On a : $\mathcal{L}_{q;s'}^\theta \varphi = \sum_{n \geq 0} \alpha_n q^{s'n(n-1)/2} \xi^n \in \mathbb{E}_{q;s-s'}$, $\mathcal{L}_{q;s'}^\theta \gamma \in \tilde{\mathbb{G}}_{q;s'}^\theta$. Notons $f := \mathcal{L}_{q;s'}^\theta \varphi \star_{q;s-s'} \mathcal{L}_{q;s'}^\theta \gamma$; on a $f \in \tilde{\mathbb{G}}_{q;s'}^\theta$, d'après l'assertion 1.4.5. En développant

$$f(\zeta) = \sum_{n \geq 0} \alpha_n q^{s'n(n-1)/2} \zeta^n \mathcal{L}_{q;s'}^\theta \gamma(q^{-n(s-s')}\zeta),$$

et avec Fubini on obtient que $\mathcal{B}_{q;s'}^\theta f = \varphi \star_{q;s} \gamma$; ceci prouve le lemme.

Cas où $s = s'$. Il suffit de remarquer que $\tilde{\mathbb{G}}_{q;s}^\theta$ sont des $\mathbb{C}\{x\}$ -modules; voir le lemme 1.4.1 et la proposition 1.4.2. □

3. Gq -multisommabilité dans les équations aux q -différences.

Jusqu'à la fin de l'article, Δ désigne un opérateur aux q -différences de la forme

$$\Delta = a_0(x) + a_1(x)\sigma_q + \dots + a_m(x)\sigma_q^m,$$

où m est un entier ≥ 1 , $a_0(x)a_m(x) \neq 0$ et où, pour tout entier j variant de 0 à m ,

$$a_j(x) = \sum_{\nu \geq 0} a_{j,\nu} x^\nu \in \mathbb{C}\{x\}.$$

Pour chaque entier j tel que $a_j(x) \neq 0$, désignons par $\text{val}(a_j)$ (resp. M_j), la valuation de la fonction analytique $a_j(x)$ en $x = 0$ (resp. le point M_j de coordonnées $(j, \text{val}(a_j))$). On note $PN(\Delta)$ l'enveloppe convexe de \mathbb{R}^2 engendré par les demi-droites ascendantes partant des points M_j . Par définition, $PN(\Delta)$ est le polygone de Newton de Δ ; on a $PN(\Delta) \subset [0, m] \times [0, +\infty[$.

Quitte à changer la variable x en $z = x^{1/\nu}$ avec $\nu \in \mathbb{N}^*$ convenable, on supposera que **toutes les pentes de $PN(\Delta)$ sont entières**. On appellera *multiplicité d'une pente* la longueur de la projection du côté de la pente sur l'axe des abscisses; on écrira $\vec{\Delta} := (k_1, k_2, \dots, k_m)$ la suite croissante formée des pentes de $PN(\Delta)$ comptées avec leurs multiplicités respectives.

Le résultat central de la partie est le théorème 3.3.2, qui affirme que toute série entière figurant dans un système fondamental de solutions formelles de $\Delta y = 0$ est Gq -multisommable; il s'ensuit que si une série entière \hat{f} vérifie $\Delta \hat{f} \in \mathbb{C}\{x\}$, alors elle est Gq - $\vec{\Delta}$ -sommable. Pour établir ces résultats, l'un des ingrédients principaux sera d'utiliser la factorisation analytique de l'équation. On trouvera quelques remarques dans le dernier paragraphe de la partie.

3.1. Factorisation analytique de l'opérateur Δ . Soit $k := k_m$ la pente la plus grande de $PN(\Delta)$. En effectuant le changement $y = x^r q^{-\frac{k}{2} \log_q x (\log_q x - 1)} z$, on a

$$\Delta y = x^r q^{-\frac{k}{2} \log_q x (\log_q x - 1)} \bar{\Delta} z,$$

avec $\bar{\Delta} = \sum_{j=0}^m q^{jr - kj(j-1)/2} a_j(x) x^{-kj} \sigma_q^j$. On observe que $PN(\bar{\Delta})$ possède une pente horizontale, les autres étant strictement négatives ou verticales. Pour simplifier, on suppose que $\bar{\Delta} = \sum_{j=0}^m b_j(x) \sigma_q^j$ et que $b_j \in \mathbb{C}\{x\}$,

$b_m(0) \neq 0$. Désignons par $P_m(X)$ le polynôme caractéristique correspondant à la pente horizontale de $\tilde{\Delta} : P_m(X) = \sum_{j=0}^m b_j(0)X^j$, où les $b_0(0), \dots, b_{m-1}(0)$ ne sont pas tous nuls. Désignons enfin par r_m un nombre complexe tel que $P_m(q^{r_m}) = 0$ et que $P_m(q^{r_m+l}) \neq 0$ pour $l \in \mathbb{N}^*$.

3.1.1. LEMME. — *Il existe une série entière convergente $f \in \mathbb{C}\{x\}$ telle que : (1) $f(0) = 1$; (2) la fonction $y_m := x^{r_m} q^{-\frac{k_m}{2} \log_q x (\log_q x - 1)} f$ soit solution de l'équation $\Delta y = 0$.*

Preuve. — Voir [Zh], p. 252. □

Notons $\mathbb{C}\{x\}^1$ l'ensemble des séries entières convergentes $f \in \mathbb{C}\{x\}$ telles que $f(0) = 1$. C'est un groupe multiplicatif, stable pour l'opérateur aux q -différences $\sigma_q : f(x) \mapsto f(qx)$.

Considérons la fonction y_m du lemme précédent; soient $\alpha_m = q^{r_m}$ et $g(x) = f(qx)/f(x)$; on a $\alpha_m \in \mathbb{C}^*$, $g \in \mathbb{C}\{x\}^1$. Du fait que y_m annule à la fois les opérateurs $x^{k_m} \sigma_q - \alpha_m g(x)$ et Δ , on peut factoriser Δ sous la forme suivante : $\Delta = \Delta'(x^{k_m} \sigma_q - \alpha_m g(x))$, où $\Delta' \in \mathbb{C}\{x\}[\sigma_q]$ est d'ordre diminué de 1 par rapport à Δ . De plus, les pentes du polygone de Newton de Δ' coïncident avec les $m - 1$ premières valeurs de celles de Δ (comptées avec multiplicité).

En itérant le processus $\Delta \mapsto \Delta'$, l'opérateur Δ se décompose de la façon suivante :

$$(3.1.2) \quad \Delta = g_0(x)(x^{k_1} \sigma_q - \alpha_1 g_1(x))(x^{k_2} \sigma_q - \alpha_2 g_2(x)) \dots (x^{k_m} \sigma_q - \alpha_m g_m(x)),$$

où $g_0(x) \in \mathbb{C}\{x\}$, $(k_1, \dots, k_m) = \vec{\Delta}$, et, pour j variant de 1 à m , $\alpha_j \in \mathbb{C}^*$, $g_j \in \mathbb{C}\{x\}^1$.

3.1.3. LEMME. — *Soit $\alpha \in \mathbb{C}^*$, $g \in \mathbb{C}\{x\}^1$ et $k \in \mathbb{Z}$. Il existe une et une seule paire de séries entières $u, v \in \mathbb{C}\{x\}^1$ vérifiant la relation $x^k \sigma_q - \alpha g(x) = u(x)(x^k \sigma_q - \alpha)v(x)$ dans l'anneau $\mathbb{C}\{x\}[\sigma_q]$.*

Preuve. — L'égalité $x^k \sigma_q - \alpha g(x) = u(x)(x^k \sigma_q - \alpha)v(x)$ équivaut aux relations :

$$u(x)v(qx) = 1, \quad u(x)v(x) = g(x),$$

lesquelle sont vérifiées si, et seulement si,

$$u(qx)/u(x) = g(qx), \quad v(x)/v(qx) = g(x).$$

En faisant opérer successivement toutes les puissances positives de $\sigma_{q^{-1}}$ sur ces deux dernières équations (ici, $q > 1$), on déduit que

$$u_0(x) = \prod_{n \geq 0} g(q^{-n}x), \quad v_0(x) = \prod_{n \geq 1} \frac{1}{g(q^{-n}x)}$$

constituent une solution du problème. L'unicité résulte du fait que dans $\mathbb{C}\{x\}$, l'équation $y(x)/y(qx) = 1$ n'a pas de solution non constante. \square

Par conséquent, la relation (3.1.2) s'exprime en celle-ci :

(3.1.4)

$$\Delta = h_0(x)(x^{k_1}\sigma_q - \alpha_1)h_1(x)(x^{k_2}\sigma_q - \alpha_2)h_2(x)\dots(x^{k_m}\sigma_q - \alpha_m)h_m(x),$$

où $h_0 \in \mathbb{C}\{x\}$ (ayant en $x = 0$ la même valuation que le coefficient de σ_q^0 de Δ), $(k_1, \dots, k_m) = \vec{\Delta}$, $\alpha_j \in \mathbb{C}^*$ et $h_j \in \mathbb{C}\{x\}^1$ ($1 \leq j \leq m$).

3.1.5. Dans la formule (3.1.4), on a d'une part $k_{j+1} \geq k_j$ et, d'autre part, si $k_{j+1} = k_j$, alors $\alpha_{j+1}/\alpha_j \notin q^{-\mathbb{N}^*}$. Soient ℓ, j deux entiers compris entre 1 et m tels que $\ell > j$; on note $\ell \succ j$ et on dit que ℓ précède j (dans Δ) si $k_\ell = k_j$ et $\alpha_\ell/\alpha_j \in q^{\mathbb{N}}$. On pose

$$\mu_j(\Delta) = \text{Card}\{\ell \in [j, m] : \ell \succ j\}.$$

3.2. Recherche des solutions formelles. Depuis les années trente, on sait prouver l'existence d'un système fondamental de solutions formelles d'une équation aux q -différences. Dans la suite, on va brièvement expliquer comment se servir de la factorisation (3.1.4) pour construire, au moyen des séries entières et des expressions de la forme

$$(\log_q x)^\nu x^r q^{-\frac{k}{2} \log_q x (\log_q x - 1)}, \quad \nu \in \mathbb{N}, r \in \mathbb{C}, k \in PN(\Delta),$$

un système fondamental de solutions formelles pour $\Delta y = 0$.

3.2.1. *Notations.* — Soit Δ un opérateur aux q -différences donné sous la forme (3.1.4), où $k_j \in \mathbb{Z}$ pour $1 \leq j \leq m$; désignons par r_j le nombre complexe vérifiant simultanément $q^{r_j} = \alpha_j$ et $\Im(r_j) \in]-\pi i / \log q, \pi i / \log q[$; posons

$$e_j = x^{r_j} q^{-\frac{k_j}{2} \log_q x (\log_q x - 1)}.$$

Par définition, on écrira $\hat{y} \in e_j \mathbb{C}[[x]][\log_q x]$ (resp. $\hat{y} \in e_j \mathbb{C}[[x]][\log_q x]_\mu$ avec $\mu \in \mathbb{N}$) lorsque \hat{y}/e_j est un polynôme en $\log_q x$ (resp. de degré au plus égal à μ), ayant pour coefficients des séries entières. Il faut noter

que $\ell \succ j$ si et seulement si $e_\ell/e_j \in x^{\mathbb{N}}$ ($\ell > j$); il s'ensuit que $e_\ell \mathbb{C}[[x]][\log_q x] \subset e_j \mathbb{C}[[x]][\log_q x]$ quand $\ell \succ j$.

Notons

$$\hat{\mathcal{F}}(\Delta) = \left\{ \sum_{1 \leq j \leq m} e_j P_j(\log_q x) : P_j(Y) \in (\mathbb{C}[[x]][x^{-1}])[Y] \right\}.$$

C'est un espace vectoriel sur le corps de fraction, $\mathbb{C}[[x]][x^{-1}]$, de l'anneau des séries entières. Pour tous $r, r' \in \mathbb{C}$ et $k, k' \in \mathbb{Z}$, on pose

$$x^r q^{-\frac{k}{2} \log_q x (\log_q x - 1)} x^{r'} q^{-\frac{k'}{2} \log_q x (\log_q x - 1)} = x^{r+r'} q^{-\frac{k+k'}{2} \log_q x (\log_q x - 1)},$$

on obtient de façon naturelle un anneau commutatif contenant $\hat{\mathcal{F}}(\Delta)$ que l'on notera $\hat{\mathcal{F}}(\Delta)$. L'action de σ_q s'y étend de la manière suivante :

$$\sigma_q(\log_q x) = \log_q x + 1, \quad \sigma_q(x^r q^{-\frac{k}{2} \log_q x (\log_q x - 1)}) = q^r x^{r-k} q^{-\frac{k}{2} \log_q x (\log_q x - 1)}.$$

3.2.2. DÉFINITION. — Étant donnée une famille $\hat{y}_1, \dots, \hat{y}_n$ d'éléments de $\hat{\mathcal{F}}(\Delta)$ qui vérifient $\Delta y = 0$, on dit qu'elle constitue un système fondamental si son q -Wronskien $W_q(\hat{y}_1, \dots, \hat{y}_m)$ défini par

$$W_q(\hat{y}_1, \dots, \hat{y}_m) = \det((\sigma_q)^{i-1} \hat{y}_j)_{1 \leq i, j \leq m}$$

est non nul.

3.2.3. THÉORÈME. — L'équation $\Delta y = 0$ possède un système fondamental de solutions formelles $(\hat{y}_j)_{1 \leq j \leq m}$ avec, pour chaque j , $\hat{y}_j \in e_j \mathbb{C}[[x]][\log_q x]_{\mu_j(\Delta)}$.

Preuve. — On procède par récurrence sur l'ordre de l'équation. Si $m = 1$, c'est une équation d'ordre 1 et la fonction e_m/h_m en est une solution, non nulle, donc fondamentale.

Soit $m > 1$; sans nuire à la généralité du résultat, on supposera que $h_m \equiv 1$. Soit ℓ un entier compris entre 1 et $m - 1$; on considère l'opérateur Δ_ℓ défini par

$$\Delta_\ell = h_0(x^{k_1} \sigma_q - \alpha_1) \dots h_{\ell-1}(x^{k_\ell} \sigma_q - \alpha_\ell).$$

Supposons que l'équation $\Delta_\ell y = 0$ admet un système fondamental de solutions formelles $(\hat{y}_{\ell,j})_{1 \leq j \leq \ell}$ avec $\hat{y}_{\ell,j} \in e_j \mathbb{C}[[x]][\log_q x]_{\mu_j(\Delta_\ell)}$. Nous nous proposons d'étudier l'équation $\Delta_{\ell+1} y = 0$, avec $\Delta_{\ell+1} = \Delta_\ell h_\ell(x^{k_{\ell+1}} \sigma_q - \alpha_{\ell+1})$.

La fin de la démonstration revient à démontrer les deux lemmes suivants.

3.2.4. LEMME. — Pour chaque entier j compris entre 1 et ℓ , il existe

$$\hat{y}_{\ell+1,j} \in e_j \mathbb{C}[[x]][\log_q x]_{\mu_j(\Delta_{\ell+1})}$$

qui vérifie l'équation en y :

$$h_\ell(x^{k_{\ell+1}}\sigma_q - \alpha_{\ell+1})y = \hat{y}_{\ell,j}.$$

3.2.5. LEMME. — Pour chaque $j = 1, \dots, \ell$, fixons $\hat{y}_{\ell+1,j}$ vérifiant le lemme précédent et posons $\hat{y}_{\ell+1,\ell+1} = e_{\ell+1}$. Alors $(\hat{y}_{\ell+1,j})_{1 \leq j \leq \ell+1}$ est un système fondamental de solutions formelles pour $\Delta_{\ell+1}y = 0$.

Preuve du lemme 3.2.4. — Par hypothèse, on a

$$\hat{y}_{\ell,j} = e_j \sum_{\nu=0}^{\mu_j(\Delta_\ell)} (\log_q x)^\nu \hat{f}_{\ell,j,\nu}, \quad \hat{f}_{\ell,j,\nu} \in \mathbb{C}[[x]];$$

il reste à établir l'existence de séries entières $\hat{f}_{\ell+1,j,\nu}$ telles que

$$h_\ell(x^{k_{\ell+1}}\sigma_q - \alpha_{\ell+1})e_j \sum_{\nu=0}^{\mu_j(\Delta_{\ell+1})} (\log_q x)^\nu \hat{f}_{\ell+1,j,\nu} = e_j \sum_{\nu=0}^{\mu_j(\Delta_\ell)} (\log_q x)^\nu \hat{f}_{\ell,j,\nu}.$$

On distinguera deux cas : (i) $\mu_j(\Delta_{\ell+1}) = \mu_j(\Delta_\ell)$; (ii) $\mu_j(\Delta_{\ell+1}) = \mu_j(\Delta_\ell) + 1$.

Cas (i) : $\mu_j(\Delta_{\ell+1}) = \mu_j(\Delta_\ell)$. On pose $\mu = \mu_j(\Delta_\ell)$. En identifiant les coefficients de $e_j(\log_q x)^\nu$ dans chacune des équations précédentes portant sur les $\hat{f}_{\ell+1,j,\nu}$, il s'ensuit que ces séries doivent vérifier les relations suivantes :

$$(3.2.6) \quad \begin{aligned} & (\alpha_j x^{k_{\ell+1}-k_j} \sigma_q - \alpha_{\ell+1}) \hat{f}_{\ell+1,j,\nu} \\ &= \frac{\hat{f}_{\ell,j,\nu}}{h_\ell} - \alpha_j x^{k_{\ell+1}-k_j} \sum_{i=\nu+1}^{\mu} \binom{i}{\nu} \sigma_q \hat{f}_{\ell+1,j,i}, \quad 1 \leq \nu \leq \mu. \end{aligned}$$

L'hypothèse $\mu_j(\Delta_{\ell+1}) = \mu_j(\Delta_\ell)$ équivalant à dire que $k_{\ell+1} > k_j$ ou $k_{\ell+1} = k_j$ mais $\alpha_{\ell+1}/\alpha_j \notin q^{\mathbb{N}}$, l'opérateur $(\alpha_j x^{k_{\ell+1}-k_j} \sigma_q - \alpha_{\ell+1})$ est alors un automorphisme de $\mathbb{C}[[x]]$; d'où l'existence (et même l'unicité) des séries entières $\hat{f}_{\ell+1,j,\nu}$ qui vérifient (3.2.6).

Cas (ii) : $\mu_j(\Delta_{\ell+1}) = \mu_j(\Delta_\ell) + 1$. On a $k_{\ell+1} = k_j$, $\alpha_{\ell+1} = \alpha_j q^n$ avec $n \in \mathbb{N}$. En posant $\mu = \mu_j(\Delta_\ell)$, les séries $\hat{f}_{\ell+1,j,\nu}$ en question vérifient les équations suivantes :

$$(3.2.7) \quad \begin{aligned} (\sigma_q - q^n) \hat{f}_{\ell+1,j,\mu+1} &= 0, \\ (\sigma_q - q^n) \hat{f}_{\ell+1,j,\nu} &= \frac{\hat{f}_{\ell,j,\nu}}{\alpha_j h_\ell} - \sum_{i=\nu+1}^{\mu+1} \binom{i}{\nu} \sigma_q \hat{f}_{\ell+1,j,i}, \quad 1 \leq \nu \leq \mu. \end{aligned}$$

Du fait que dans $\mathbb{C}[[x]]$, $\ker(\sigma_q - q^n)$ et $\text{coker}(\sigma_q - q^n)$ sont tous deux unidimensionnels, on obtient que le système (3.2.7) admet des solutions $\hat{f}_{\ell+1,j,\nu}$ dans $\mathbb{C}[[x]]$ (qui sont d'ailleurs uniques à un même facteur multiplicatif complexe près) ; ceci termine la preuve du lemme 3.2.4.

Preuve du lemme 3.2.5. — On voit clairement que les $\hat{y}_{\ell+1,j}$ annulent l'opérateur $\Delta_{\ell+1}$; il reste à considérer le q -Wronskien du système. Or, avec la définition des $\hat{y}_{\ell+1,j}$ on a :

$$\begin{aligned} \lambda_i \sigma_q^i \hat{y}_{\ell+1,\ell+1} - \beta_i \sigma_q^{i-1} \hat{y}_{\ell+1,\ell+1} &= 0, \\ \lambda_i \sigma_q^i \hat{y}_{\ell+1,j} - \beta_i \sigma_q^{i-1} \hat{y}_{\ell+1,j} &= \sigma_q^{i-1} \hat{y}_{\ell,j}, \quad 1 \leq j \leq \ell, \end{aligned}$$

où $1 \leq i \leq \ell$, $\lambda_i = \sigma_q^{i-1}(h_\ell x^{k_{\ell+1}})$, $\beta_i = \alpha_{\ell+1} \sigma_q^{i-1} h_\ell$; on en déduit que

$$W_q(\hat{y}_{\ell+1,1}, \dots, \hat{y}_{\ell+1,\ell+1}) = \frac{1}{\beta_1 \dots \beta_\ell} W_q(\hat{y}_{\ell,1}, \dots, \hat{y}_{\ell,\ell}) \sigma_q^\ell \hat{y}_{\ell+1,\ell+1};$$

ainsi, le lemme s'en déduit directement avec l'hypothèse imposée sur $(\hat{y}_{\ell,j})$.

En combinant les lemmes 3.2.4, 3.2.5 et la méthode de récurrence, on obtient le théorème du paragraphe. \square

Remarquons que le théorème que l'on vient de démontrer était déjà connu à l'époque de C.R. Adams ; voir [Ad]. En ce qui concerne l'appellation de *système fondamental de solutions formelles*, il est naturel de se poser la question suivante : Est-ce que toute solution formelle peut s'exprimer comme combinaison linéaire d'éléments du système $(\hat{y}_j)_{1 \leq j \leq m}$ du théorème 3.2.3 ? Pour répondre à cette question, il est important de préciser le choix du corps des q -constantes ; nous nous contenterons de faire remarquer le résultat suivant.

3.2.8. THÉORÈME. — *Soit $(\hat{y}_j)_{1 \leq j \leq m}$ un système de solutions formelles de l'équation $\Delta y = 0$ obtenu dans le théorème 3.2.3. Soit \hat{y} un élément de $\hat{\mathcal{F}}(\Delta)$ vérifiant $\Delta \hat{y} = 0$. Alors il existe des nombres complexes c_j tels que $\hat{y} = \sum_{j=1}^m c_j \hat{y}_j$.*

Preuve. — Notons J l'ensemble des entiers compris entre 1 et m tels que, étant donné un entier $\ell \in [1, m]$, il existe un et un seul entier j dans J vérifiant $\ell \succ j$. Puisque $\ell \succ j \Leftrightarrow e_\ell/e_j \in x^{\mathbb{N}}$, on a la décomposition suivante :

$$\hat{\mathcal{F}}(\Delta) = \bigoplus_{j \in J} e_j(\mathbb{C}[[x]][x^{-1}])[\log_q x].$$

Soit $\hat{y} \in \hat{\mathcal{F}}(\Delta)$ tel que $\Delta \hat{y} = 0$; on pose $\hat{y} = \sum_{j \in J} e_j P_j(\log_q x)$, où $P_j(Y) \in (\mathbb{C}[[x]][x^{-1}])[Y]$. Pour tout $j \in J$, on désigne par Δ_j l'opérateur aux q -différences tel que $\Delta(e_j z) = e_j \Delta_j z$, z étant la fonction inconnue. Les pentes de $PN(\Delta_j)$ sont les pentes de $PN(\Delta)$ diminuées par k_j ; en particulier, on remarquera que Δ_j admet une pente horizontale.

Ceci étant, on a : $e_j \sum_{j \in J} \Delta_j(P_j(\log_q x)) = 0$, ce qui implique que pour tout $j \in J$, on a : $\Delta_j(P_j(\log_q x)) = 0$. Nous sommes alors conduits à vérifier le résultat suivant.

3.2.9. LEMME. — Soient $K_0 = \{j \in [1, m] : e_j \in x^{\mathbb{Z}}\}$ et $\mu = \text{Card}K_0$. Alors les solutions formelles de $\Delta y = 0$ dans $(\mathbb{C}[[x]][x^{-1}])[\log_q x]$ constituent un espace vectoriel de dimension μ sur \mathbb{C} , qui admet pour base les éléments $(\hat{y}_j)_{j \in K_0}$ du système $(\hat{y}_j)_{1 \leq j \leq m}$ du théorème 3.2.3.

Preuve. — Ceci résulte immédiatement de la preuve du lemme 3.2.4. □

3.3. Sommabilité des solutions formelles. Dans le théorème 3.2.3, on peut choisir $\hat{y}_m = e_m/h_m$, donc $\hat{y}_m/e_m \in \mathbb{C}\{x\}$; on va généraliser ce résultat pour tous les membres du système (\hat{y}_j) .

3.3.1. Notations complémentaires. Nous reprenons les notations (3.2.3). En outre, à chaque paire d'entiers (ℓ, j) telle que $1 \leq j \leq \ell \leq m$, on associe le multi-ordre $\vec{s}_{\ell,j} \in \Omega^+$ de la manière suivante. Si $k_\ell = k_j$, on pose $\vec{s}_{\ell,j} = \emptyset$; sinon, $\vec{s}_{\ell,j}$ est l'élément de Ω^{+*} composé des inverses respectifs des éléments non nuls de l'ensemble $\{k_\ell - k_\nu : j \leq \nu < \ell\}$.

Pour tout multi-ordre $\vec{s} \in \Omega^+$ et toute direction d_θ , on définit de manière évidente les sous-espaces $e_j \mathbb{C}\{x\}_{q;\vec{s}}[\log_q x]_\mu$, $e_j \mathbb{C}\{x\}_{q;\vec{s}}^\theta[\log_q x]_\mu$ de l'espace vectoriel $e_j \mathbb{C}[[x]][\log_q x]_\mu$ introduit au (3.2.3).

Ceci étant, nous pouvons maintenant énoncer une version plus précise du théorème 3.2.3.

3.3.2. THÉORÈME. — Il existe un système fondamental de solutions formelles de l'équation $\Delta y = 0$, $(\hat{y}_j)_{1 \leq j \leq m}$, tel que

$$\hat{y}_j \in e_j \mathbb{C}\{x\}_{q;\vec{s}_{m,j}}[\log_q x]_{\mu_j(\Delta)}.$$

Plus précisément, soit $\hat{y}_j = e_j \sum_{\nu=0}^{\mu_j(\Delta)} (\log_q x)^\nu \hat{f}_{j,\nu}$ dans le théorème 3.2.3. Alors $\hat{f}_{j,\nu} \in \mathbb{C}\{x\}_{q;\vec{s}_{m,j}}$ et

$$DS(\hat{f}_{j,\nu}) \subset \cup_{j < \ell \leq m, k_j < k_\ell} \left\{ \theta \in \mathbb{R} : \frac{\alpha_\ell}{\alpha_j} e^{-(k_\ell - k_j)i\theta} \in \mathbb{R}^{+*} \right\}.$$

Preuve. — On va procéder de manière analogue à ce que l'on a fait pour le théorème 3.2.3 : si $m = 1$, on a $e_m/h_m \in \mathbb{C}\{x\}$, ce qui correspond à $\vec{s}_{m,m} = \emptyset$; si $m > 1$, étant donné ℓ un entier compris entre 1 et $m - 1$ on suppose que $\hat{f}_{\ell,j,\nu} \in \mathbb{C}\{x\}_{q;\vec{s}_{\ell,j}}$ et

$$DS(\hat{f}_{\ell,j,\nu}) \subset \cup_{j < l \leq \ell, k_j < k_l} \left\{ \theta \in \mathbb{R} : \frac{\alpha_l}{\alpha_j} e^{-(k_l - k_j)i\theta} \in \mathbb{R}^{+*} \right\}.$$

Pour obtenir la sommabilité des $\hat{f}_{\ell+1,j,\nu}$, nous avons besoin du lemme suivant.

3.3.3. LEMME. — Soient $k \in \mathbb{N}$, $\alpha \in \mathbb{C}^*$, $\hat{f}, \hat{g} \in \mathbb{C}[[x]]$ tels que $(x^k \sigma_q - \alpha)\hat{f} = \hat{g}$.

- (i) Si $k = 0$ et si $\hat{g} \in \mathbb{C}\{x\}$, alors $\hat{f} \in \mathbb{C}\{x\}$.
 (ii) Si $k > 0$ et si $\hat{g} \in \mathbb{C}\{x\}_{q;\vec{s}}$, avec $\vec{s} = (1/k, s_2, \dots, s_r) \in \Omega^{+*}$, alors $\hat{f} \in \mathbb{C}\{x\}_{q;\vec{s}}$ et $DS(\hat{f}) \subset DS(\hat{g}) \cup \{\theta \in \mathbb{R} : \alpha e^{-ik\theta} \in \mathbb{R}^{+*}\}$.

Preuve du lemme. — L'assertion (i) résulte directement d'une comparaison des coefficients de \hat{f} et \hat{g} ; on ne considère que la seconde assertion, avec $k \in \mathbb{N}^*$.

Soit $s_1 = 1/k$ et appliquons la transformation formelle de q -Borel d'ordre s_1 à l'équation $(x^k \sigma_q - \alpha)\hat{f} = \hat{g}$; on a

$$(q^{(1-k)/2} \xi^k - \alpha) \hat{\mathcal{B}}_{q;s_1} \hat{f}(\xi) = \hat{\mathcal{B}}_{q;s_1} \hat{g}(\xi).$$

En décomposant $1/(q^{(1-k)/2} \xi^k - \alpha)$ en éléments simples, on obtient

$$\hat{\mathcal{B}}_{q;s_1} \hat{f}(\xi) = \sum_{\kappa=1}^k \frac{\beta_\kappa \hat{\mathcal{B}}_{q;s_1} \hat{g}(\xi)}{\xi - \alpha_\kappa}, \quad \beta_\kappa \in \mathbb{C}^*, \quad (\alpha_\kappa)^k = \alpha q^{(k-1)/2}.$$

On est alors conduit à démontrer le résultat suivant.

3.3.4. Si $(\hat{\mathcal{B}}_{q;s_1} \hat{f})(\xi) = (\hat{\mathcal{B}}_{q;s_1} \hat{g})(\xi)/(1 - \xi)$ et si $\hat{g} \in \mathbb{C}\{x\}_{q;\vec{s}}^\theta$, alors on a $\hat{f} \in \mathbb{C}\{x\}_{q;\vec{s}}^\theta$ pourvu que $\theta \neq 0 \pmod{2\pi}$.

En effet, si $r = 1$, le résultat devient évident car $\hat{\mathcal{B}}_{q;s_1}\hat{g}$ et $\hat{\mathcal{B}}_{q;s_1}\hat{f}$ ont les mêmes propriétés d'analyticité et de croissance q -exponentielle dans toute direction ne passant pas par le point d'affixe 1.

Supposons $r \geq 2$. De l'égalité $\hat{\mathcal{B}}_{q;s_r} = \hat{\mathcal{B}}_{q;s_r-s_1}\hat{\mathcal{B}}_{q;s_1}$, on obtient

$$\hat{\mathcal{B}}_{q;s_r}\hat{f}(\zeta) = \varphi(\zeta)\hat{\mathcal{X}}_{q;s_r-s_1}\hat{\mathcal{B}}_{q;s_r}\hat{g}(\zeta),$$

où l'on a posé

$$\varphi(\zeta) = \hat{\mathcal{B}}_{q;s_r-s_1}(1/(1-\xi))(\zeta) \in \mathbb{E}_{q;s_r-s_1}.$$

D'après le lemme 2.4.4 (i), on obtient que $\hat{\mathcal{B}}_{q;s_r}\hat{f} \in \mathbb{H}_{q;s_r-s_{r-1}}^\theta$ car, d'une part, $s_r - s_1 \geq s_r - s_{r-1}$, et d'autre part, $\hat{\mathcal{B}}_{q;s_r}\hat{g} \in \mathbb{H}_{q;s_r-s_{r-1}}^\theta$ (par hypothèse).

Si $r = 2$, on utilise le lemme 2.4.5, avec $\gamma = \mathcal{B}_{q;s_2}\hat{g}$, $s = s_2 - s_1 = s'$; on obtient, à l'aide du lemme 2.3.2 :

$$\mathcal{L}_{q;s_2-s_1}^\theta \mathcal{S}^\theta \hat{\mathcal{B}}_{q;s_2}\hat{f} = (\mathcal{S}^\theta \hat{\mathcal{B}}_{q;s_1}\hat{g})(\xi)/(1-\xi),$$

ce qui montre que $\mathcal{L}_{q;s_2-s_1}^\theta \mathcal{S}^\theta \hat{\mathcal{B}}_{q;s_2}\hat{f} \in \tilde{\mathbb{H}}_{q;s_1}^\theta$; on prouve ainsi le résultat (3.3.4) dans le cas en question.

Si $r > 2$, il suffit d'appliquer à plusieurs reprises le lemme 2.4.5 et d'aboutir enfin à la relation

$$\mathcal{B}_{\vec{s}}^\theta \hat{f}(\xi) = (\mathcal{B}_{\vec{s}}^\theta \hat{g})(\xi)/(1-\xi),$$

avec

$$\mathcal{B}_{\vec{s}}^\theta = \mathcal{L}_{q;s_2-s_1}^\theta \cdots \mathcal{L}_{q;s_{r-j+1}-s_{r-j}}^\theta \cdots \mathcal{L}_{q;s_r-s_{r-1}}^\theta \mathcal{S}^\theta \hat{\mathcal{B}}_{q;s_r};$$

nous laissons le détail au lecteur.

Revenons au théorème 3.3.2. En appliquant le lemme 3.3.3 aux équations (3.2.6-8) et en remarquant que $\mathbb{C}\{x\}_{q;\vec{s}_{\ell,j}} \subset \mathbb{C}\{x\}_{q;\vec{s}_{\ell+1,j}}$ (car $[\vec{s}_{\ell,j}] \subset [\vec{s}_{\ell+1,j}]$, voir Proposition 2.4.2), on obtient la sommabilité et les directions singulières éventuelles pour chacune des séries $\hat{f}_{\ell+1,j,\nu}$, ce qui achève la preuve du théorème. \square

Comme application du théorème 3.3.2, on remarque le résultat important suivant.

3.3.5. THÉORÈME. — Si $\hat{f} \in \mathbb{C}[[x]]$ est une série telle que $\Delta \hat{f} \in \mathbb{C}\{x\}$, alors on a $\hat{f} \in \mathbb{C}\{x\}_{q;\vec{s}}$ où $\vec{s} \in \Omega^+$ est la suite composée des inverses respectifs des éléments strictement positifs de l'ensemble $\{k_j : 1 \leq j \leq m\}$.

En particulier, si Δ n'a pas de pente strictement positive et si $\Delta \hat{f} \in \mathbb{C}\{x\}$, alors \hat{f} elle-même est convergente.

Preuve. — On suppose que \hat{f} n'est pas la série nulle. Considérons d'abord le cas où $\Delta \hat{f} = 0$: \hat{f} est solution (formelle) de l'équation $\Delta y = 0$. En tenant compte du lemme 3.2.9, \hat{f} est combinaison linéaire, à coefficients dans \mathbb{C} , de certaines $\hat{y}_j \in \mathbb{C}[[x]]$, $j_0 \leq j \leq j'_0$, qui correspondent à la pente horizontale avec $e_j \in x^{\mathbb{Z}}$. La sommabilité de \hat{f} s'en déduit de celle de ces solutions \hat{y}_j .

Supposons donc $\Delta \hat{f} \neq 0$, et posons $a = \Delta \hat{f}$, $\Delta_{m+1} = \sigma_q(\frac{1}{a} \Delta) - \frac{1}{a} \Delta$; on a $\Delta_{m+1} \hat{f} = 0$ et on se ramène alors au cas que l'on vient de traiter, avec Δ_{m+1} remplaçant Δ . Par un calcul direct, on trouve que $PN(\Delta_{m+1}) = PN(\Delta) \cup \{0\}$; ceci termine la preuve. \square

Dans le théorème 3.3.5, on peut préciser les directions singulières de \hat{f} en fonction des α_j et k_j .

3.4. Quelques questions et remarques. Un prolongement naturel de notre présent article serait d'étudier le phénomène de Stokes dans les équations aux q -différences ainsi que le problème des invariants, voire la théorie de Galois.

Pour bâtir une théorie de Galois à partir du Gq -resommation, la question suivante est particulièrement importante : est-ce que le produit de deux séries Gq -multisommables reste encore Gq -multisommable? Dans l'affirmative, l'opérateur de resommation $S_{q;\bar{s}}^\theta$ est-il un morphisme d'algèbres q -différentielles? Nous connaissons certaines réponses partielles; nous en citons ici deux sans démonstration.

3.4.1. Soient $s > 0$, $\theta \in \mathbb{R}$ et $\hat{f}, \hat{g} \in \mathbb{C}\{x\}_{q;s}^\theta$. On a $f\hat{g} \in \mathbb{C}\{x\}_{q;s/2,s}^\theta$ et $S_{q;s/2,s}^\theta(f\hat{g}) = S_{q;s}^\theta \hat{f} S_{q;s}^\theta \hat{g}$.

3.4.2. Étant données $\hat{f}_1, \hat{f}_2 \in \mathbb{C}[[x]]$ telles que $\Delta_j \hat{f}_j \in \mathbb{C}\{x\}$ où $\Delta_j \in \mathbb{C}\{x\}[\sigma_q]$ pour $j = 1, 2$, on peut construire (par un algorithme) un opérateur $\Delta \in \mathbb{C}\{x\}[\sigma_q]$ tel que $\Delta(\hat{f}_1 \hat{f}_2) \in \mathbb{C}\{x\}$; on en déduit que $\hat{f}_1 \hat{f}_2$ est Gq -multisommable. De plus, on a

$$S_{q;\bar{s}_1}^\theta \hat{f}_1 S_{q;\bar{s}_2}^\theta \hat{f}_2 = S_{q;\bar{s}}^\theta(\hat{f}_1 \hat{f}_2).$$

Grâce au théorème 3.3.2, on peut construire un système fondamental de solutions analytiques (sur le revêtement ...) pour une équation aux q -différences linéaire analytique. Ce résultat améliore celui de W.J. Trjitzinsky [Tr] sur le même sujet.

Remarquons enfin que l'on peut déduire de ce même théorème un résultat important de J.-P. Ramis [Ra2] sur la croissance des solutions entières d'une équation aux q -différences linéaire à coefficients polynomiaux. L'idée est la suivante : on trace le polygone de Newton relatif au point à l'infini et on forme un système fondamental de solutions formelles, les séries intervenant étant en puissance descendante en x (ou une ramification de x). Ces séries sont Gq -multisommables ; leurs Gq -sommées donnent naissance à un système fondamental de solutions analytiques, fondamental au sens q -analogue (à q -constantes près...). Ainsi on peut exprimer toute solution entière dans ce système et on obtient directement la croissance q -exponentielle de la solution.

BIBLIOGRAPHIE

- [Ad] C. R. ADAMS, On the linear ordinary q -difference equations, *Ann. Math.*, Ser. II, 30, No. 2 (1929) 195-205.
- [Ba] W. BALSER, A different characterization of multisummable power series, *Analysis*, 12 (1992), 57-65.
- [BBRS] W. BALSER, B.J.L. BRAAKSMA, J.-P. RAMIS et Y. SIBUYA, Multisummability of formal power series solutions of linear ordinary differential equations, *Asymptotic Analysis*, 5 (1991), 27-45.
- [Ec] J. ECALLE, Introduction aux fonctions analysables et preuve constructive de la conjecture de Dulac, Hermann, Paris, 1992.
- [GR] G. GASPER et M. RAHMAN, Basic hypergeometric series, *Encycl. Math. Appl.*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1990.
- [Li] J. E. LITTLEWOOD, On the asymptotic approximation to integral functions of zero order, *Proc. London Math. Soc.*, Serie 2, no 5 (1907), 361-410.
- [MR1] B. MALGRANGE et J.-P. RAMIS, Fonctions multisommables, *Ann. Inst. Fourier*, 42-1/2 (1992), 353-368.
- [MZ] F. MAROTTE et C. ZHANG, Sur la sommabilité des séries entières solutions formelles d'une équation aux q -différences, II, *C. R. Acad. Sci. Paris*, t. 327, Série I (1998) 715-718.
- [MR2] J. MARTINET et J.-P. RAMIS, Elementary acceleration and multisummability I, *Ann. Inst. Henri Poincaré*, Vol. 54, no 4 (1991) 331-401.
- [Ra1] J.-P. RAMIS, Les séries k -sommables et leurs applications, *Complex Analysis, Microlocal Calculus and Relativistic Quantum Theory, Lecture Notes in Physics*, 126 (1980) 178-199.
- [Ra2] J.-P. RAMIS, About the growth of entire functions solutions of linear algebraic q -difference equations, *Annales de la Fac. de Toulouse*, Série 6, Vol. I, no 1 (1992) 53-94.

- [Tr] W.J. TRJITZINSKY, Analytic Theory of Linear q -Difference Equations, Acta Mathematica, 61 (1933) 1-38.
- [Zh] C. ZHANG, Développements asymptotiques q -Gevrey et séries Gq -sommables, Ann. Inst. Fourier, 49-1 (1999) 227-261.

Manuscrit reçu le 15 juillet 1998,
révisé le 17 janvier 2000,
accepté le 30 mars 2000.

F. MAROTTE et C. ZHANG,
Université de La Rochelle,
Département et Laboratoire de Mathématiques
Pôle Sciences et Technologie
Avenue Marillac
17042 La Rochelle cedex 1 (France).

fmarotte@univ-lr.fr
czhang@univ-lr.fr