ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

ARTIBANO MICALI

Sur les algèbres universelles

Annales de l'institut Fourier, tome 14, nº 2 (1964), p. 33-87

<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1964__14_2_33_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
14, 2 (1964) 33-88.

SUR LES ALGÈBRES UNIVERSELLES

par Artibano MICALI [1].

Introduction

1. On étudie ici certains problèmes particuliers qui se présentent dans les algèbres universelles. Pas mal de résultats qu'on y trouve sont valables pour n'importe quelle algèbre universelle, car ils ont un caractère fonctoriel (par exemple, la projectivité d'une algèbre universelle d'un module projectif). D'autres le sont encore par le *principe de commutativité des problèmes universels* (par exemple, la localisation d'une algèbre universelle). Mais, il y a un certain nombre de ces résultats qui sont valables pour les algèbres universelles particulières. Et, l'origine de ce travail est l'un de ces problèmes, à savoir, celui de comparer, pour un idéal donné d'un anneau commutatif à élément unité, son algèbre symétrique et son anneau de Rees (chapitre I). La plus importante application des résultats qu'on y trouve est une nouvelle caractérisation des anneaux locaux réguliers. Ensuite (chapitre II) on attaque le problème d'injectivité dans les algèbres universelles, c'est-à-dire, étant donnés un anneau commutatif à élément unité A et une suite exacte de A-modules unitaires $O \rightarrow M' \rightarrow M$, étudier le noyau de l'extension de $M' \rightarrow M$ à l'algèbre universelle en question. Nous avons étudié ce problème pour l'algèbre symétrique dans plusieurs cas particuliers. Le pas suivant (ch. III) sera une généralisation de la notion d'anneau de Rees et finalement (ch. IV) nous avons étudié de près les algèbres universelles d'un module projectif.

Évidemment on est loin d'épuiser les questions qu'on y trouve. Nous nous sommes placés dans le cadre de l'étude des questions les plus élémentaires concernant les algèbres universelles. C'est d'ailleurs ce qu'on va voir en lisant ce travail.

[1] Bolsista do Conselho Nacional de Pesquisas, Brasil.

2. Certains problèmes n'ont pas été abordés. Ainsi, si A est un anneau intègre de corps de fractions K et si $\underline{a}$ est un idéal de A, on peut penser à trouver des conditions nécessaires et suffisantes sur la suite d'idéaux $\underline{a}^n$ ($n \geqslant 0$ entier) pour que l'anneau de Rees (cf. ch. I, § 1) $R(\underline{a})$ soit intégralement clos dans le corps $K(X)$. Ce problème a été déjà étudié dans [24].

3. Soit A un anneau commutatif à élément unité. Tout A-module est unitaire, toute A-algèbre est munie d'un élément unité et tout homomorphisme d'algèbre transforme élément unité en élément unité. On désigne par $\underline{M}$ la catégorie des A-modules unitaires, $\underline{A}$ la catégorie des A-algèbres, $\underline{A}_c$ celle des A-algèbres commutatives et $\underline{A}_a$ celle des A-algèbres anti-commutatives. Étant donné un A-module M, on peut construire les algèbres tensorielle (TM), symétrique S(M) et extérieure E(M) du module M et on obtient ainsi des foncteurs covariants et exacts à droite $T : \underline{M} \to \underline{A}$, $S : \underline{M} \to \underline{A}_c$ et $E : \underline{M} \to \underline{A}_a$ (cf. [2], [8] et [15]). En outre on doit signaler qu'il s'agit d'algèbres graduées dont le groupe des degrés est $\mathbf{Z}$. Le sous-module des éléments homogènes de degré q de T(M) (resp. S(M), E(M)) est noté par $T^q(M)$ (resp. $S^q(M)$, $E^q(M)$).

4. On sait (cf. ch. II, § 1) que l'algèbre symétrique est un foncteur non-additif. Il n'entre pas dans notre propos de faire de l'Algèbre Homologique non-additive et pour les questions qui s'y rattachent, on renvoie à la littérature (cf. [9], [10], [11] et [12]).

5. On remarque finalement que l'étude de l'algèbre symétrique nous permet de donner une théorie intrinsèque des polynômes. Cette remarque a plutôt un caractère didactique et pour cela on renvoie à la bibliographie (cf. [6], [13] et [15]).

Je n'aurais pas pû arriver au bout sans l'aide constante et les encouragements de M. Samuel. Qu'il veuille accepter mes remerciements sincères. Je tiens à remercier M. Dubreil pour la possibilité qu'il m'a offerte d'exposer dans son séminaire et d'avoir accepté de présider le jury. Mes remerciements vont aussi à M. Bruhat pour avoir bien voulu me suggérer le sujet de la seconde thèse, à M. Koszul pour m'avoir aidé pendant une année passée à l'Institut de Mathématique de Strasbourg et à tous les collègues qui m'ont aidé dans ma tâche.

TABLE DES MATIÈRES

CHAPITRE PREMIER

SUR LES ALGÈBRES SYMÉTRIQUE ET DE REES D'UN IDÉAL

Dans tout ce chapitre, A désignera un anneau commutatif à élément unité et pour tout idéal $\underline{a}$ de A, l'algèbre symétrique de $\underline{a}$ n'est autre que l'algèbre symétrique du A-module $\underline{a}$.

1. L'anneau de Rees d'un idéal (cf. [23]).

Soit $\underline{a}$ un idéal de A et on considère le sous-anneau $R(\underline{a})$ de l'anneau de polynômes $A[X]$ formé des sommes finies $c_0 + c_1X + \cdots + c_qX^q$ où c_i est dans $\underline{a}^i$ pour tout $i \geqslant 0$ (on pose $\underline{a}^0 = A$ et $\underline{a}^1 = \underline{a}$). Il est clair que $R(\underline{a})$ est un sous-anneau de $A[X]$ et on l'appelle l'*anneau de Rees de l'idéal* $\underline{a}$. On a, quelquefois, besoin d'un anneau de Rees un peu plus « grand » et on prend alors l'ensemble des sommes finies $c_{-p}X^{-p} + \cdots + c_{-1}X^{-1} + c_0 + c_1X + \cdots + c_qX^q$ où c_i est dans $\underline{a}^i$ et où l'on pose $\underline{a}^i = A$ pour tout $i \leqslant 0$. On obtient ainsi un sous-anneau de l'anneau $A[X, X^{-1}]$ qui n'est autre que $R(\underline{a})[X^{-1}]$. Mais, en général, nous n'aurons rien à faire avec ce deuxième anneau de Rees.

Si l'idéal $\underline{a}$ est de type fini engendré par des éléments $a_1, \ldots, a_n$, alors on a $R(\underline{a}) = A[a_1X, \ldots, a_nX]$. Ceci nous montre que si A est un anneau noethérien, pour tout idéal $\underline{a}$ de A, l'anneau de Rees $R(\underline{a})$ est aussi noethérien.

Dans le paragraphe suivant on va voir comment on peut comparer, pour un idéal donné, son algèbre symétrique et son anneau de Rees.

2. Comparaison des algèbres symétrique et de Rees d'un idéal.

Soient $\underline{a}$ un idéal de A, $R(\underline{a})$ son anneau de Rees et $S(\underline{a})$ son algèbre symétrique. L'application linéaire φ de $\underline{a}$ dans $R(\underline{a})$ définie par $\varphi(c) = cX$ pour tout c dans $\underline{a}$, se prolonge en un unique homomorphisme $\overline{\varphi}$ de $S(\underline{a})$ dans $R(\underline{a})$ tel que si $j : \underline{a} \to S(\underline{a})$ est l'injection canonique, alors $\overline{\varphi} \circ j = \varphi$. On va montrer que $\overline{\varphi}$ est surjectif. Soit $cX^q \in R(\underline{a})$ un élément homogène de degré q de $R(\underline{a})$. Comme c est dans $\underline{a}^q$, il suffit de supposer que $c = c_1 \ldots c_q$ où les c_i sont dans $\underline{a}$ et donc, $\overline{\varphi}(c_1 \vee \cdots \vee c_q) = c_1X \ldots c_qX = cX^q$. On remarque ici que le symbole $\vee$ désigne la multiplication dans l'algèbre symétrique $S(\underline{a})$. Pour le degré 0, on constate que $\overline{\varphi}(A) = A$. Le problème suivant se pose : *caractériser les idéaux* $\underline{a}$ *de* A *pour lesquels* $\overline{\varphi}$ *soit une bijection.* On peut donner tout de suite la proposition suivante :

Proposition 1. — *Soient* A *un anneau intègre et* $\underline{a}$ *un idéal de* A. *Les conditions suivantes sont équivalentes* : (*i*) $S(\underline{a})$ *est intègre*; (ii) $S(\underline{a})$ *est sans torsion*; (iii) *l'homomorphisme* $\overline{\varphi}$ *est injectif.*

En effet, (i) $\Longrightarrow$ (ii) trivialement et (iii) $\Longrightarrow$ (i), car si l'on a un produit $u \vee v = 0$ dans $S(\underline{a})$, alors $0 = \overline{\varphi}(u \vee v) = \overline{\varphi}(u)\overline{\varphi}(v)$ et comme ceci est valable dans $R(\underline{a})$ qui est intègre, il en résulte que $\overline{\varphi}(u) = 0$, par exemple. D'après (iii), $u = 0$. Pour montrer que (ii) $\Longrightarrow$ (iii) nous allons montrer le lemme suivant :

Lemme 1. — *Soient* A *un anneau intègre et* $\underline{a}$ *un idéal de* A. *Alors le noyau* Ker $(S(\underline{a}) \to R(\underline{a}))$ *est le sous-module de torsion de* $S(\underline{a})$.

On commencera par démontrer le lemme dans le cas où $\underline{a}$ est de type fini engendré par des éléments $a_1, \ldots, a_n$. On peut supposer que $\underline{a} \neq (0)$ et donc, par exemple, que $a_n \neq 0$. Si l'on prolonge l'épimorphisme évident $A^n \to \underline{a} \to (0)$ aux algèbres symétriques, on peut écrire que

$$S(\underline{a}) = A[X_1, \ldots, X_n]/\underline{q}$$

où $\underline{q}$ est l'idéal de $A[X_1, \ldots, X_n]$ engendré par les formes linéaires $b_1X_1 + \cdots + b_nX_n$ telles que $b_1a_1 + \cdots + b_na_n = 0$.

Maintenant on définit un épimorphisme $A[X_1, \ldots, X_n] \to R(\underline{a})$ par $X_i \rightsquigarrow a_i X$ pour $i = 1, \ldots, n$ et si l'on désigne par $\underline{q}_\infty$ (la notion $\underline{q}_\infty$ sera justifiée plus tard) son noyau, alors on écrit $R(\underline{a}) = A[X_1, \ldots, X_n]/\underline{q}_\infty$. On voit que si f est un polynôme homogène de $A[X_1, \ldots, X_n]$, alors f est dans $\underline{q}_\infty$ si et seulement si $f(a_1, \ldots, a_n) = 0$. Il est clair alors que $\underline{q} \subset \underline{q}_\infty$ et que Ker $(S(\underline{a}) \to R(\underline{a})) = \underline{q}_\infty/\underline{q}$. On va alors démontrer que pour tout f dans $\underline{q}_\infty$, il existe un c dans A, $c \neq 0$ tel que cf est dans $\underline{q}$. On procède par récurrence sur le degré q de f. Puisque tout élément homogène de degré 1 de $\underline{q}_\infty$ est dans $\underline{q}$, alors le lemme est vrai pour $q = 1$ et $c = 1 \neq 0$. Supposons que pour tout polynôme homogène de degré $\leqslant q - 1$ de $\underline{q}_\infty$ le lemme soit vrai. On écrit alors

$$f = X_1 f_1(X_1, \ldots, X_n) + X_2 f_2(X_2, \ldots, X_n) + \cdots + X_n f_n(X_n)$$

où les f_i sont homogènes de degré $q - 1$ et on considère le polynôme

$$g = X_1 f_1(a_1, \ldots, a_n) + X_2 f_2(a_2, \ldots, a_n) + \cdots + X_n f_n(a_n).$$

Comme g est un polynôme homogène de degré 1 de $\underline{q}_\infty$, alors g est dans $\underline{q}$ et d'autre part on écrit

$$a_n^{q-1} f - X_n^{q-1} g = X_1 g_1(X_1, \ldots, X_n) + \cdots + X_{n-1} \cdot g_{n-1}(X_{n-1}, X_n),$$

où les g_i sont des polynômes homogènes de degré $q - 1$ de $\underline{q}_\infty$. D'après l'hypothèse de récurrence, pour chaque i il existe un c_i dans A, $c_i \neq 0$ tel que $c_i g_i$ est dans $\underline{q}$. Ceci nous montre que l'on a alors $c_1 \ldots c_{n-1} a_n^{q-1} f$ dans $\underline{q}$. Si $\underline{a}$ n'est pas de type fini, pour tout élément u dans $S(\underline{a})$, il existe un nombre fini d'éléments $a_1, \ldots, a_n$ dans $\underline{a}$ tels que si α est l'homomorphisme de $A[X_1, \ldots, X_n]$ dans $S(\underline{a})$ défini par $\alpha(X_i) = a_i$ pour tout i, alors u est dans $\mathrm{Im}(\alpha)$. Donc, si l'on a $\overline{\varphi}(u) = 0$ avec u dans $S(\underline{a})$, comme on peut écrire $u = \alpha(f)$ avec f dans $A[X_1, \ldots, X_n]$, le raisonnement ci-dessus nous montre qu'il existe un c dans A, $c \neq 0$ tel que $\alpha(\mathrm{cf}) = 0$ et donc, $cu = 0$. Ceci achève la démonstration du lemme.

On suppose maintenant que l'idéal $\underline{a}$ soit de type fini engendré par des éléments $a_1, \ldots, a_n$ et on considère l'homomorphisme homogène $A[X_1, \ldots, X_n, X] \to A[X]$ défini par

$X_i \rightsquigarrow a_i X$ pour $i = 1, \ldots, n$ et $X \rightsquigarrow X$. Son noyau est l'idéal de $A[X_1, \ldots, X_n, X]$ engendré par les $X_i - a_i X$ et, de plus,

$$\operatorname{Ker}(A[X_1, \ldots, X_n, X] \to A[X]) \cap A[X_1, \ldots, X_n] = \underline{q}_\infty.$$

Si l'on pose

$$\underline{q}_s = \left\{ \sum_{i=1}^{n} (X_i - a_i X) f_i \in \underline{q}_\infty \middle| d_X^0(f_i) \leqslant s \quad \text{pour tout } i \right\},$$

où $d_X^0(f_i)$ est le degré de f_i par rapport à X, on vérifie facilement que pour tout s, $\underline{q}_s$ est un idéal homogène de $A[X_1, \ldots, X_n]$ et que dans $A[X_1, \ldots, X_n]$ on a

$$\underline{q} \subset \underline{q}_0 \subset \underline{q}_1 \subset \cdots \subset \underline{q}_s \subset \cdots \subset \underline{q}_\infty.$$

On vérifie aisément que $\underline{q}_0$ est l'ensemble des éléments $\sum_{i=1}^{n} X_i f_i$ de $A[X_i, \ldots, X_n]$, où les f_i sont dans $A[X_1, \ldots, X_n]$, tels que $\sum_{i=1}^{n} a_i f_i = 0$ et donc, $\underline{q} = \underline{q}_0$. En effet, si $f \in \underline{q}_0$ alors on peut écrire que $f = \sum_{i=1}^{n} X_i f_i$ tel que $\sum_{i=1}^{n} a_i f_i = 0$ et comme les f_i sont dans $A[X_1, \ldots, X_n]$, on peut mettre

$$f_i = \sum_j c_{i,j} m_j(X),$$

où les $c_{i,j}$ sont dans A et les $m_j(X)$ sont des monômes en les indéterminées $X_1, \ldots, X_n$. La relation

$$0 = \sum_j \left(\sum_i a_i c_{i,j} \right) m_j(X)$$

entraîne $\sum_i a_i c_{i,j} = 0$ pour tout j et donc,

$$f = \sum_j \left(\sum_i c_{i,j} X_i \right) m_j(X) \in \underline{q}.$$

Il en résulte aussi de la construction faite ci-dessus que si l'on a $\underline{q}_s = \underline{q}_{s+1}$ pour un certain entier $s \geqslant 0$, alors $\underline{q}_s = \underline{q}_{s+r}$ pour tout $r \geqslant 1$.

Soit $\underline{a}$ un idéal de type fini de A engendré par des éléments $a_1, \ldots, a_n$, et on considère son algèbre symétrique $S(\underline{a}) = A[X_1, \ldots, X_n]/\underline{q}$. On dira que l'idéal $\underline{a}$ obéit à la *condition* (I) (condition d'injectivité) ou que la *condition* (I) est vérifiée si toutes les fois qu'on a $\sum_{i=1}^{n} a_i f_i \in \underline{q}$ où les f_i sont dans $A[X_1, \ldots, X_n]$, ceci entraîne que $\sum_{i=1}^{n} X_i f_i \in \underline{q}$.

Exemple. — Supposons que les éléments $a_1, \ldots, a_n$ forment une A-suite, c'est-à-dire, que a_i ne soit pas diviseur de zéro dans le quotient $A/(a_1, \ldots, a_{i-1})A$ (où l'on pose $(a_1, \ldots, a_{i-1})A = (0)$ si $i = 1$) pour $i = 1, \ldots, n$. Alors nous verrons plus loin que l'idéal $\underline{a}$ de l'anneau A engendré par les a_i obéit à la condition (I).

Proposition 2. — *Soient* A *un anneau (non nécessairement intègre) et* $\underline{a}$ *un idéal de* A *de type fini. Les conditions suivantes sont équivalentes:* (i) $\overline{\varphi}$ *est injectif;* (ii) $\underline{q} = \underline{q}_\infty$; (iii) *la condition* (I) *est vérifiée;* (iv) $\underline{q} = \underline{q}_1$.

En effet, comme $\operatorname{Ker}(\overline{\varphi}) = \underline{q}_\infty/\underline{q}$, alors (i) $\Longleftrightarrow$ (ii) et d'autre part, il est trivial que (ii) $\Longrightarrow$ (iv). D'après la remarque faite ci-dessus, si $\underline{q} = \underline{q}_1$, la chaîne d'idéaux $\underline{q} = \underline{q}_1 \subset \cdots \subset \underline{q}_\infty$ est stationnaire et donc, $\underline{q} = \underline{q}_\infty$. Ceci nous montre que (iv) $\Longrightarrow$ (ii). Supposons maintenant que la condition (I) soit vérifiée et montrons (ii). Si $f \in \underline{q}_\infty$ est un polynôme homogène de degré m, alors on peut écrire que $f = \sum_{i=1}^{n} (X_i - a_i X) f_i$ où les f_i sont dans $A[X_1, \ldots, X_n, X]$ et sont homogènes de degré $m - 1$. Ceci nous permet d'écrire que

$$f_i = b_{0,i}X^{m-1} + b_{1,i}X^{m-2} + \cdots + b_{m-2,i}X + b_{m-2,i}$$

où chaque $b_{j,i} \in A[X_1, \ldots, X_n]$ est homogène de degré j. Comme f est dans $A[X_1, \ldots, X_n]$, alors on peut écrire les identités $f = \sum_i b_{m-1,i} X_i$, $\sum_i b_{m-1,i}\, a_i = \sum_i b_{m-2,i} X_i$,

$$\sum_i b_{m-2,i} a_i = \sum_i b_{m-3,i} X_i, \ \ldots, \ \sum_i b_{2,i} a_i = \sum_i b_{1,i} X_i,$$
$$\sum_i b_{1,i}\, a_i = \sum_i b_{0,i} X_i \quad \text{et} \quad \sum_i b_{0,i} a_i = 0.$$

D'après (iii) on voit que

$$\sum_i b_{0,i}\, a_i = 0 \in \underline{q} \Longrightarrow \sum_i b_{0,i} X_i \in \underline{q} \Longrightarrow \cdots \Longrightarrow f \in \underline{q}.$$

Supposons maintenant que la condition (I) ne soit pas vérifiée. Il existe alors des f_i dans $A[X_1, \ldots, X_n]$ pour $i = 1, \ldots, n$ tels que $\sum_i a_i f_i \in \underline{q}$ et $\sum_i X_i f_i \notin \underline{q}$. Étant donné que

$$\sum_i (X_i - a_i X) f_i \qquad \text{et} \qquad \sum_i a_i f_i$$

sont dans $\mathrm{Ker}(A[X_1, \ldots, X_n, X] \to A[X])$ alors il en est de même de $\sum_i X_i f_i = \sum_i (X_i - a_i X) f_i + X \sum_i a_i f_i$ et ceci nous montre qu'il existe un élément

$$\sum_i X_i f_i \in \mathrm{Ker}(A[X_1, \ldots, X_n, X] \to A[X]) \cap A[X_1, \ldots, X_n] = \underline{q}_\infty$$

tel que $\sum_i X_i f_i \notin \underline{q}$. Donc, $\underline{q} \neq \underline{q}_\infty$.

THÉORÈME 1. — *Soit* A *un anneau commutatif à élément unité. Pour tout idéal* $\underline{a}$ *de* A *engendré par une* A-*suite on a* $S(\underline{a}) = R(\underline{a})$.

En effet, d'après la proposition 2, il suffit de démontrer que la condition (I) est vérifiée et pour cela on emploie le lemme ci-dessus :

LEMME 2. — *Soient* $\underline{a}$ *un idéal de* A *engendré par des éléments* $a_1, \ldots, a_n$ *et* $S(\underline{a}) = A[X_1, \ldots, X_n]/\underline{q}$ *son algèbre symétrique. Si* $a_1, \ldots, a_n$ *est une* A-*suite, alors* $\underline{q}$ *est l'idéal de* $A[X_1, \ldots, X_n]$ *engendré par les* $a_i X_j - a_j X_i (i < j)$ *et réciproquement, si* A *est intègre et si* $\underline{q}$ *est l'idéal de* $A[X_1, \ldots, X_n]$ *engendré par les* $a_i X_j - a_j X_i (i < j)$, *alors* $a_1, \ldots, a_n$ *est une* A-*suite*.

En effet, $\underline{q}$ est engendré par les formes linéaires $b_1 X_1 + \cdots + b_n X_n$ telles que

$$b_1 a_1 + \cdots + b_n a_n = 0, \qquad \text{d'où}, \qquad b_n a_n \in (a_1, \ldots, a_{n-1})A$$

et comme a_n n'est pas diviseur de zéro dans $A/(a_1, \ldots, a_{n-1})A$, alors $b_n \in (a_1, \ldots, a_{n-1})A$. Il existe $c_{i,n} \in A (i = 1, \ldots, n-1)$ tels que $b_n = \sum_{i=1}^{n-1} c_{i,n} a_i$ et étant donné que a_{n-1} n'est pas diviseur de zéro dans $A/(a_1, \ldots, a_{n-2})A$ on obtient

$$b_{n-1} = - c_{n-1,n} a_n + \sum_{i=1}^{n-2} c_{i,n-1} a_i$$

avec

$$c_{i,n-1} \in \mathrm{A}(i = 1, \ldots, n-2).$$

Par récurrence sur n, on obtient

$$b_j = -\sum_{i=j+1}^{n} c_{j,i}a_i + \sum_{i=1}^{j-1} c_{i,j}a_i (j = 1, \ldots, n),$$

d'où, $\sum_{j=1}^{n} b_j \mathrm{X}_j = -\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=j+1}^{n} c_{j,i}a_i\mathrm{X}_j + \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{j-1} c_{i,j}a_i\mathrm{X}_j$ et en remplaçant i par j dans la première somme, on obtient

$$\sum_{j=1}^{n} b_j\mathrm{X}_j = \sum_{i<j} c_{i,j}(a_i\mathrm{X}_j - a_j\mathrm{X}_i).$$

Réciproquement, puisque A est intègre, alors a_1 n'est pas diviseur de zéro dans A (on prend $a_1 \neq 0$). Soit $a_2\bar{c}_2 = 0$ dans $\mathrm{A}/a_1\mathrm{A}$, où $\bar{c}_2 \in \mathrm{A}/a_1\mathrm{A}$. Il existe $c_1 \in \mathrm{A}$ tel que $c_1a_1 + c_2a_2 = 0$ et donc, $c_1\mathrm{X}_1 + c_2\mathrm{X}_2 \in \underline{q}$. On peut écrire

$$c_1\mathrm{X}_1 + c_2\mathrm{X}_2 = \sum_{i<j} d_{i,j}(a_i\mathrm{X}_j - a_j\mathrm{X}_i)$$

où les $d_{i,j} \in \mathrm{A}$ et ceci nous montre que $d_{i,j} = 0$ sauf pour $i = 1$ et $j = 2$. Donc, $c_1\mathrm{X}_1 + c_2\mathrm{X}_2 = d_{1,2}(a_1\mathrm{X}_2 - a_2\mathrm{X}_1)$, d'où, $c_1 = -d_{1,2}a_2$ et $c_2 = d_{1,2}a_1$. On a ainsi montré que $\bar{c}_2 = 0$. Démontrons qu'en général a_n n'est pas diviseur de zéro dans $\mathrm{A}/(a_1, \ldots, a_{n-1})\mathrm{A}$. Soit $a_n\bar{c}_n = 0$ dans

$$\mathrm{A}/(a_1, \ldots, a_{n-1})\mathrm{A}, \qquad \text{où} \qquad c_n \in \mathrm{A}/(a_1, \ldots, a_{n-1})\mathrm{A}.$$

Il existe des éléments $c_1, \ldots, c_{n-1}$ dans A tels que $\sum_{i=1}^{n} c_ia_i = 0$ et donc, $\sum_{i=1}^{n} c_i\mathrm{X}_i \in \underline{q}$, c'est-à-dire,

$$\sum_{i=1}^{n} c_i\mathrm{X}_i = \sum_{i<j} d_{i,j}(a_i\mathrm{X}_j - a_j\mathrm{X}_i)$$

avec les $d_{i,j} \in \mathrm{A}$. On obtient

$$c_i = -\sum_{j=i+1}^{n} a_jd_{j,i} + \sum_{j=1}^{i-1} a_jd_{i,j} (i = 1, \ldots, n)$$

et donc, $c_n = \sum_{j=1}^{n-1} a_jd_{j,n}$ d'où $\bar{c}_n = 0$.

Démonstration du théorème 1. — Soit $\sum_{i=1}^{n} a_i f_i \in \underline{q}$ avec

$$f_i \in A[X_1, \ldots, X_n] (i = 1, \ldots, n)$$

et montrons que $\sum_{i=1}^{n} X_i f_i \in \underline{q}$. D'après le lemme 2 on peut écrire

$$\sum_{i=1}^{n} X_i f_i = \sum_{i<j} f_{i,j}(a_i X_j - a_j X_i)$$

avec les $f_{i,j} \in A[X_1, \ldots, X_n]$ et comme a_n n'est pas diviseur de zéro dans $A[X_1, \ldots, X_n]/(a_1, \ldots, a_{n-1}).A[X_1, \ldots, X_n]$, alors $f_n = -\sum_{i=1}^{n-1} X_i f_{i,n} + \sum_{i=1}^{n-1} a_i g_{i,n}$ où les $g_{i,n} \in A[X_1, \ldots, X_n]$. Puisque a_i n'est pas diviseur de zéro dans

$$A[X_1, \ldots, X_n]/(a_1, \ldots, a_{i-1})A[X_1, \ldots, X_n]$$

pour $i = 1, \ldots, n$, par récurrence sur n on obtient $f_j = -\sum_{i=1}^{j-1} X_i f_{i,j} + \sum_{i=1}^{j-1} a_i g_{i,j} + \sum_{i=j+1}^{n} X_i f_{j,i} - \sum_{i=j+1}^{n} a_i g_{j,i}$ avec les

$$g_{i,j} \in A[X_1, \ldots, X_n].$$

Donc

$$\sum_{j=1}^{n} X_j f_j = -\sum_{i<j} X_i X_j f_{i,j} + \sum_{i<j} a_i X_j g_{i,j} + \sum_{i<j} X_i X_j f_{i,j} - \sum_{i<j} a_j X_i g_{i,j}$$

où l'on a changé i en j dans la 3e et 4e somme. Ceci nous donne $\sum_{j=1}^{n} X_j f_j = \sum_{i<j} (a_i X_j - a_j X_i) g_{i,j} \in \underline{q}$ et la condition (I) est vérifiée.

3. Un exemple.

Soient k un corps, $a_1, \ldots, a_n$ des éléments algébriquement indépendants sur k, $A = k[a_1, \ldots, a_n]$ et $\underline{a}$ l'idéal de A engendré par les a_i. Alors, $S(\underline{a}) = R(\underline{a})$.

En effet, on peut écrire que $S(\underline{a}) = A[X_1, \ldots, X_n]/\underline{q}$ est où $\underline{q}$ est l'idéal de l'anneau $A[X_1, \ldots, X_n]$ engendré par les formes linéaires $b_1 X_1 + \cdots + b_n X_n$ telles que $b_1 a_1 + \cdots + b_n a_n = 0$. Puisque les a_i sont algébriquement indépendants sur k, il existe des éléments $c_{i,j}$ dans A tels que l'on ait

$$\sum_{i=1}^{n} b_i X_i = \sum_{i<j} c_{i,j}(a_i X_j - a_j X_i).$$

Maintenant on montre que l'idéal $\underline{q}$ est premier et pour cela on va démontrer le lemme suivant :

LEMME 3. — *Soient k un corps, $x_1, \ldots, x_n, u, v$ des éléments algébriquement indépendants sur k, V la k-variété de point générique $(ux_1, \ldots, ux_n; vx_1, \ldots, vx_n)$ et $\underline{p}$ l'idéal de l'anneau $k[X_1, \ldots, X_n; Y_1, \ldots, Y_n]$ engendré par les déterminants $X_iY_j - X_jY_i (i < j)$. Alors $\underline{p}$ est l'idéal de la variété V et donc, $\underline{p}$ est premier.*

Soit $I_k(V)$ l'idéal de la variété V. Si f est dans $\underline{p}$, alors $f(ux; vx) = 0$ et par conséquent, f est dans $I_k(V)$. Soit maintenant f dans $I_k(V)$ et désignons par $f_{r,s}$ ses composantes homogènes de degré r en les X_i et de degré s en les Y_j. Puisque $f = \Sigma f_{r,s}$, alors $0 = f(ux; vx) = \Sigma f_{r,s}(x; x)u^r v^s$ et donc, $f_{r,s}(x; x) = 0$. On remarque que $f_{r,s}(x; x) = 0$ si et seulement si $f_{r,s}(ux; vx) = 0$. On est ainsi ramenés au cas où f est *homogène de degré* (r, s) et pour montrer que f est dans $\underline{p}$ on procède par récurrence sur le *degré total* $r + s$. Si $r + s = 1$ on a $f = 0$ et donc, f est dans $\underline{p}$. Supposons que r et s sont $\geqslant 1$. Dans $f(x; x)$, le terme en $x_1^{t_1} \ldots x_n^{t_n}$ provient des monomes $X_1^{i_1} \ldots X_n^{i_n} Y_1^{j_1} \ldots Y_n^{j_n}$ tels que $i_1 + j_1 = t_1, \ldots, i_n + j_n = t_n$ et si l'on désigne par $c_{i,j}$ le coefficient d'un tel monome dans f, alors $\Sigma c_{i,j} = 0$ (somme étendue aux systèmes $i = (i_1, \ldots, i_n)$ et $j = (j_1, \ldots, j_n)$ tels que $i_1 + j_1 = t_1, \ldots, i_n + j_n = t_n$). Il est clair que l'on a aussi $i_1 + \cdots + i_n = r$ et $j_1 + \cdots + j_n = s$. Fixons l'un de ces monomes qu'on va désigner par

$$X_1^{p_1} \ldots X_n^{p_n} Y_1^{q_1} \ldots Y_n^{q_n} (p_1 + q_1 = t_1, \ldots, p_n + q_n = t_n;$$
$$p_1 + \cdots + p_n = r, q_1 + \cdots + q_n = s).$$

Son coefficient $c_{p,q}$ vérifie la relation $c_{p,q} = -\Sigma c_{i,j}$ (somme étendue aux systèmes (i, j) tels que $i \neq p$ et $j \neq q$) et on peut donc écrire

$$f = -\Sigma c_{i,j}(X_1^{p_1} \ldots X_n^{p_n} Y_1^{q_1} \ldots Y_n^{q_n} - X_1^{i_1} \ldots X_n^{i_n} Y_1^{j_1} \ldots Y_n^{j_n})$$

pour $i \neq p$ et $j \neq q$. Le polynôme

$$g = X_1^{p_1} \dots X_n^{p_n} Y_1^{q_1} \dots Y_n^{q_n} - X_1^{i_1} \dots X_n^{i_n} Y_1^{j_1} \dots Y_n^{j_n}$$

vérifie la relation $g(x; x) = 0$ et il suffit donc de montrer que g est dans p. Si g est multiple d'une indéterminée, par exemple de X_1, alors on peut écrire que $g = X_1 h$ et h satisfait encore la relation $h(x; x) = 0$. D'après l'hypothèse de récurrence sur le degré total, h est dans $\underline{p}$ et donc, $g \in \underline{p}$. Supposons que g ne soit multiple d'aucune indéterminée et soient M et M′ deux parties de $\{1, \dots, n\}$ définies par $p_{i'} > 0$ et $q_{i'} > 0$ respectivement. Si $i' \in M$ on a $p_{i'} > 0$ et donc, $i_{i'} = 0$ (sinon $X_{i'}$ est en facteur) et si $i' \in M'$ on a $q_{i'} > 0$ et donc, $j_{i'} = 0$ (sinon $Y_{i'}$ est en facteur). Pour tout i' dans $\{1, \dots, n\}$ on a $p_{i'} + q_{i'} = i_{i'} + j_{i'}$, et donc $M \cap M' = \emptyset$. En effet, si $M \cap M' \neq \emptyset$, alors il existe un $i' \in M \cap M'$ et par conséquent on a $p_{i'} > 0$, $q_{i'} > 0$, $i_{i'} = 0$ et $j_{i'} = 0$. Ceci nous montre qu'on a $t_{i'} = p_{i'} + q_{i'} > 0$ et d'autre part $t_{i'} = i_{i'} + j_{i'} = 0$. Après rénumérotation on peut supposer que $M = \{1, \dots, m\}$ et $M' = \{m+1, \dots, m'\}$ où $1 \leqslant m < m' \leqslant n$. De plus, si $i' \notin M \cup M'$ alors on a $p_{i'} = q_{i'} = 0$ et donc, $0 = p_{i'} + q_{i'} = t_{i'} = i_{i'} + j_{i'}$. Ceci nous montre qu'on a $i_{i'} = j_{i'} = 0$ et le polynôme g peut s'écrire alors sous la forme

$$g = X_1^{p_1} \dots X_m^{p_m} Y_{m+1}^{q_{m+1}} \dots Y_{m'}^{q_{m'}} - Y_1^{j_1} \dots Y_m^{j_m} X_{m+1}^{i_{m+1}} \dots X_{m'}^{i_{m'}}$$

et en vertu des relations $p_{i'} + q_{i'} = t_{i'} = i_{i'} + j_{i'}$ on peut écrire g sous la forme

$$g = X_1^{t_1} \dots X_m^{t_m} Y_{m+1}^{t_{m+1}} \dots Y_{m'}^{t_{m'}} - Y_1^{t_1} \dots Y_m^{t_m} X_{m+1}^{t_{m+1}} \dots X_{m'}^{t_{m'}}.$$

On remarque ici que $r = s$, car

$$r = t_1 + \cdots + t_m = t_{m+1} + \cdots + t_{m'} = s$$

et comme $r \geqslant 1$ et $s \geqslant 1$, alors on peut supposer, par exemple, qu'on a $t_1 \geqslant 1$ et $t_{m'} \geqslant 1$. On peut finalement écrire que $g = (X_1 Y_{m'} - X_{m'} Y_1) g_1 + Y_1 X_{m'} g_2$ où

$$g_1 = X_1^{t_1 - 1} X_2^{t_2} \dots X_m^{t_m} Y_{m+1}^{t_{m+1}} \dots Y_{m'-1}^{t_{m'-1}} Y_{m'-1}^{t_{m'}-1}$$

et

$$g_2 = X_1^{t_1-1} X_2^{t_2} \dots X_m^{t_m} Y_{m+1}^{t_{m+1}} \dots Y_{m'-1}^{t_{m'-1}} Y_{m'}^{t_{m'}-1} \\ - Y_1^{t_1-1} Y_2^{t_2} \dots Y_m^{t_m} X_{m+1}^{t_{m+1}} \dots X_{m'-1}^{t_{m'-1}} X_{m'}^{t_{m'}-1}.$$

Puisque g_2 est homogène en les X_i et en les Y_j et vérifie la relation $g_2(x; x) = 0$, d'après l'hypothèse de récurrence sur le degré total on a $g_2 \in \underline{p}$. Ceci nous montre que $g \in \underline{p}$ et la démonstration du lemme est achevée.

On remarque que, puisque $X_1, \ldots, X_n$ est une

$$k[X_1, \ldots, X_n]\text{-suite},$$

alors

$$S((X_1, \ldots, X_n)) = k[X_1, \ldots, X_n; Y_1, \ldots, Y_n]/\underline{p}$$

et d'autre part, l'anneau des coordonnées de V sur k est

$$k[X_1, \ldots, X_n; Y_1, \ldots, Y_n]/I_k(V).$$

D'après le lemme ci-dessus, on voit que l'anneau des coordonnées de la variété V sur k n'est autre que l'algèbre symétrique de l'idéal $(X_1, \ldots, X_n)$ de l'anneau de polynômes $k[X_1, \ldots, X_n]$.

Finalement, on remarque que la dimension (dans le sens de Krull) de l'anneau de coordonnées de V sur k est $n + 1$. En effet, $\underline{p}$ est un idéal premier de hauteur $n - 1$ et la dimension de $k[X_1, \ldots, X_n; Y_1, \ldots, Y_n]$ est $2n$. Donc,

$$\begin{aligned} \dim(S((X_1, \ldots, X_n))) &= \dim(k[X_1, \ldots, X_n; Y_1, \ldots, Y_n]) \\ &\quad - h(\underline{p}) = 2n - (n - 1) = n + 1. \end{aligned}$$

4. Contre-exemples.

Dans ce numéro on va donner un certain nombre d'exemples pour montrer qu'en général l'algèbre symétrique d'un idéal n'est pas intègre.

1) Soient k un corps, $\underline{p}$ un idéal premier homogène de l'anneau de polynômes $k[U_1, \ldots, U_n]$ tel que

$$\underline{p} \subset (U_1, \ldots, U_n)^2, \qquad A = k[U_1, \ldots, U_n]/\underline{p} = k[u_1, \ldots, u_n]$$

où u_i est la classe de l'indéterminée U_i modulo l'idéal $\underline{p}$ et $\underline{a}$ l'idéal de A engendré par les u_i. On va montrer que $\mathrm{Ker}(S(a) \to R(\underline{a})) \neq (0)$ et donc, d'après le lemme 1,

$$\mathrm{Ker}(S(\underline{a}) \to R(\underline{a}))$$

est le sous-module de torsion de $S(\underline{a})$.

En effet, on peut écrire que $S(\underline{a}) = A[X_1, \ldots, X_n]/\underline{q}$ où $\underline{q}$ est l'idéal de l'anneau de polynômes $A[X_1, \ldots, X_n]$ engendré par les formes linéaires $b_1X_1 + \cdots + b_nX_n$ telles que $b_1u_1 + \cdots + b_nu_n = 0$. Comme chaque b_i peut se mettre sous la forme $b_i = \alpha(f_i)$ où $\alpha : k[U_1, \ldots, U_n] \to A$ est l'homomorphisme canonique et où chaque f_i est dans $k[U_1, \ldots, U_n]$, alors il en résulte que $\sum_i U_if_i \in \underline{p}$. Étant donné que $\underline{p} \subset (U_1, \ldots, U_n)^2$, alors chaque f_i n'a pas de terme constant et donc $b_i = \alpha(f_i) \in \underline{a}$ pour tout i. On a ainsi montré que $\underline{q} \subset \underline{a}[X_1, \ldots, X_n]$. Maintenant, à chaque polynôme $f = \Sigma a_{i_1, \ldots, i_n} U_1^{i_1} \ldots U_n^{i_n}$ de $k[U_1, \ldots, U_n]$ on associe le polynôme $\tilde{f} = \Sigma\alpha(a_{i_1, \ldots, i_n}) X_1^{i_1} \ldots X_n^{i_n}$ de $A[X_1, \ldots, X_n]$ et soit $\tilde{\underline{p}}$ l'ensemble des $\tilde{f}$ tels que f est dans $\underline{p}$. On vérifie que $\tilde{\underline{p}}$ est un idéal de $A[X_1, \ldots, X_n]$ et on va montrer que $\tilde{\underline{p}} \cap \underline{a}[X_1, \ldots, X_n] = (0)$. En effet, le quotient par $\underline{p}$ de la suite exacte

$$(0) \to (U_1, \ldots, U_n) \to k[U_1, \ldots, U_n] \to k \to (0)$$

nous donne la suite exacte $(0) \to \underline{a} \to A \to k \to (0)$ et il est clair que si l'on compose $A \to k$ avec la restriction de α à k on obtient l'identité dans k. Si l'on prend $\tilde{f}$ dans $\tilde{\underline{p}} \cap \underline{a}[X_1, \ldots, X_n]$, alors on peut écrire

$$\tilde{f} = \Sigma\alpha(a_{i_1}, \ldots, i_n)\, X_1^{i_1} \ldots X_n^{i_n}$$

où les $\alpha(a_{i_1, \ldots, i_n})$ sont dans $\underline{a} = \operatorname{Ker}(A \to k)$ et donc, $a_{i_1, \ldots, i_n} = 0$ pour tous les $(i_1, \ldots, i_n)$. Donc $\tilde{f} = 0$. On considère l'homomorphisme $\bar{\varphi} : S(\underline{a}) \to R(\underline{a})$ défini au $n.2$ et soit $f = \Sigma b_{i_1, \ldots, i_n} U_1^{i_1} \ldots U_n^{i_n} \neq 0$ dans $\underline{p}$ et homogène de degré $q(i_1 + \cdots + i_n = q)$. Puisque f est dans $\underline{p} = \operatorname{Ker}(\alpha)$, alors $\alpha(f) = 0$ et d'autre part, $\tilde{f} = \Sigma\alpha(b_{i_1, \ldots, i_n}) X_1^{i_1}, \ldots, X_n^{i_n} \neq 0$. Comme on a $\tilde{\underline{p}} \cap \underline{a}[X_1, \ldots, X_n] = (0)$ et $\tilde{f}$ est dans $\tilde{\underline{p}}$, alors $\tilde{f}$ n'est pas dans $\underline{a}[X_1, \ldots, X_v]$ et, à fortiori, $\tilde{f}$ n'est pas dans l'idéal $\underline{q}$. Ceci nous montre que $\tilde{f} \bmod \underline{q} \neq 0$ et comme $\bar{\varphi}(\tilde{f} \bmod \underline{q}) = \alpha(f)\, X^q = 0$, il s'ensuit que $\bar{\varphi}$ n'est pas injectif.

2) Soit k un corps et on considère l'anneau $A = k[u, v]$ avec la relation $u^3 + u^2 + v^2 = 0$. Il s'agit bien d'un

anneau intègre et soit $\underline{p}$ l'idéal de l'origine, c'est-à-dire, l'idéal de l'anneau A engendré par les éléments u et v. On va montrer que l'algèbre symétrique $S(\underline{p})$ du A-module $\underline{p}$ n'est pas intègre. En effet, on peut écrire que

$$S(\underline{p}) = A[X, Y]/\underline{q}$$

où $\underline{q}$ est l'idéal de l'anneau de polynômes $A[X, Y]$ engendré par les formes linéaires $aX + bY$ telles que $au + bv = 0$. On en déduit que $vX - uY$ et $u(u+1)X + vY$ sont dans $\underline{q}$ et donc, $u((u+1)X^2 + Y^2)$ est aussi dans $\underline{q}$. Comme $\underline{q} \subset \underline{p}[X, Y]$, il en résulte que $(u+1)X^2 + Y^2$ n'est pas dans $\underline{q}$ et donc, u est un élément de torsion de $S(\underline{p})$. De même, on montre que v est un élément de torsion de $S(\underline{p})$.

3) Plus généralement, soient k un corps, V une k-variété, $k[V]$ son anneau de coordonnées, p un point de V et $\underline{p}$ l'idéal du point p, c'est-à-dire, $\underline{p}$ est l'idéal premier de l'anneau $k[V]$ formé d'éléments qui s'annulent au point p. Il est facile de voir que si le point p n'est pas simple, alors $S(\underline{p})$ n'est pas intègre. On peut voir ceci directement en montrant qu'il y a dans $S(\underline{p})$ des éléments de torsion ou encore, à partir du th. 2 du paragraphe 5. En effet, si $S(\underline{p})$ est intègre, il en est de même de $(S(\underline{p}))_{\underline{p}} = S(\underline{p}A_{\underline{p}})$ et ceci nous montre que l'anneau local $A_{\underline{p}}$ est régulier, c'est-à-dire, que le point p est simple.

5. Une caractérisation des anneaux locaux réguliers.

On dira qu'un anneau noethérien A est un *anneau local* s'il a un seul idéal maximal $\underline{m}$. On vérifie aisément que $\underline{m}$ est l'ensemble des éléments non-inversibles de l'anneau A. Le corps quotient $A/\underline{m}$ s'appelle le *corps résiduel* de l'anneau local A. On désigne par dim(A) la *dimension* (dans le sens de Krull) de l'anneau local A et pour tout idéal $\underline{a}$ de A, on désigne par $h(\underline{a})$ la *hauteur* de l'idéal $\underline{a}$. Étant donné un idéal $\underline{a}$ de A, on sait que le quotient $\underline{a}/\underline{a}.\underline{m}$ est un espace vectoriel sur le corps résiduel $A/\underline{m}([\underline{a}/\underline{a}.\underline{m} : A/\underline{m}]$ est finie, car A est noethérien) et le nombre minimum d'éléments d'une base de $\underline{a}$ est $[\underline{a}/\underline{a}.\underline{m} : A/\underline{m}]$. Ceci nous montre que pour tout idéal $\underline{a}$ de l'anneau local A on a $h(\underline{a}) \leqslant [\underline{a}/\underline{a}.\underline{m} : A/\underline{m}]$

et en particulier, que $\dim(A) = h(\underline{m}) \leqslant [\underline{m}/\underline{m}^2 : A/\underline{m}]$. Si $\dim(A) = [\underline{m}/\underline{m}^2 : A/\underline{m}]$ on dira que A est un *anneau local régulier.*

Par la suite, A est un anneau local d'idéal maximal $\underline{m}$ et corps résiduel $k = A/\underline{m}$ et soit $a_1, \dots, a_n$ une base minimale de l'idéal $\underline{m}$ (c'est-à-dire, $n = [\underline{m}/\underline{m}^2 : k]$). On dira que des éléments $c_1, \dots, c_s$ de $\underline{m}$ sont *analytiquement indépendants* (cf. [21], ch. IV, § 4.4; il existe d'autres notions d'indépendance analytique (cf. [27], vol. II) qui ne coïncident pas avec celle là) si pour tout polynôme homogène f de l'anneau de polynômes $A[X_1, \dots, X_s]$ tel que

$$f(c_1, \dots, c_s) = 0,$$

alors tous les coefficients de f sont dans l'idéal $\underline{m}$, c'est-à-dire, f est dans $\underline{m}[X_1, \dots, X_s]$. On sait (cf. [21]) que A *est local régulier si et seulement si* $a_1, \dots, a_n$ *sont analytiquement indépendants.* On sait encore que si A est local régulier $a_1, \dots, a_n$ est une A-suite. Ceci étant, on peut donner le théorème suivant :

Théorème 2. — *L'anneau* A *est local régulier si et seulement si l'algèbre symétrique* $S(\underline{m})$ *du* A-*module* $\underline{m}$ *est intègre.*

En effet, si A est local régulier, alors $a_1, \dots, a_n$ est une A-suite et ceci nous montre (cf. th. 1) que $S(\underline{m}) = R(\underline{m})$. Puisque A est intègre, car il est local régulier, il en est de même de $S(\underline{m})$. Supposons que $S(\underline{m})$ soit intègre. On sait qu'on peut écrire $S(\underline{m}) = A[X_1, \dots, X_n]/\underline{q}$ où $\underline{q}$ est l'idéal de $A[X_1, \dots, X_n]$ engendré par les formes linéaires

$$b_1X_1 + \cdots + b_nX_n$$

telles que $b_1a_1 + \cdots + b_na_n = 0$. Il en résulte alors que $\underline{q} \subset \underline{m}[X_1, \dots, X_n]$ et d'autre part, puisque $\underline{q}$ est un idéal premier de $A[X_1, \dots, X_n]$, un polynôme homogène f de $A[X_1, \dots, X_n]$ est dans $\underline{q}$ si et seulement si $f(a_1, \dots a_n) = 0$. Ceci nous montre que $a_1, \dots, a_n$ sont analytiquement indépendantes et donc, que A est local régulier.

Soient maintenant A un anneau noethérien (non nécessairement local) et $\underline{p}$ un idéal premier de A. Puisque $(S(\underline{p}))_{\underline{p}} = S(\underline{p}A_{\underline{p}})$, alors si $S(\underline{p})$ est intègre il s'ensuit, d'après le th. 2, que $A_{\underline{p}}$ est local régulier. On peut se demander si la réciproque de ceci est vrai. On verra, par les exemples ci-dessous qu'il n'en est pas ainsi.

Exemples. — 1) Soient k un corps et $A = k[[x, y]]$ avec les relations $xy = y^2 = 0$. On considère l'idéal $\underline{p} = Ay$ et comme $A/\underline{p} = k[[x]]$ est intègre alors $\underline{p}$ est un idéal premier de A. On va montrer que $\underline{p}A_{\underline{p}} = (0)$. En effet si $z \in \underline{p}A_{\underline{p}}$, il en résulte que $xz = 0$ et comme $x \notin \underline{p}$, $1/x \in A_{\underline{p}}$ et donc, $0 = (1/x)(xz) = z$. On sait que $(A/\underline{p})_{\underline{p}} = A_{\underline{p}}/\underline{p}A_{\underline{p}} = A_{\underline{p}}$ est le corps de fractions de $A/\underline{p} = k[[x]]$, c'est-à-dire,

$$A_{\underline{p}} = k((x)).$$

Il en résulte que $A_{\underline{p}}$ est un anneau local régulier, mais comme $S(\underline{p})$ contient A en degré 0, alors $S(\underline{p})$ n'est pas intègre.

Dans le cas où l'anneau A est intègre, on a l'exemple ci-dessous dû à P. Salmon (cf. [25]).

2) Soient k un corps et $A = k[X_1, \ldots, X_n]$ l'anneau de polynômes en les indéterminées X_i à coefficients dans k.

Proposition 3. — *Soient $\underline{p}$ un idéal homogène de* A *et $a_1, \ldots, a_m$ un système minimal de générateurs homogènes de $\underline{p}$. Si l'algèbre symétrique $S(\underline{p})$ est intègre, alors $a_1, \ldots, a_m$ sont algébriquement indépendants sur k.*

En effet, on peut écrire $S(\underline{p}) = A[Y_1, \ldots, Y_m]/\underline{q}$ où $\underline{q}$ est l'idéal de l'anneau de polynômes $A[Y_1, \ldots, Y_m]$ engendré par les formes linéaires $\sum_{i=1}^{m} b_i Y_i$ telles que $\sum_{i=1}^{m} b_i a_i = 0$. Si l'on ordonne les a_i par les degrés, $1 < d^0 a_1 \leqslant \cdots \leqslant d^0 a_m$, alors $\underline{q} \subset (X_1, \ldots, X_n)[Y_1, \ldots, Y_m]$. En effet, suposons que $b_j \notin (X_1, \ldots, X_n)A$ pour un j, $1 \leqslant j \leqslant m$ et soit $s \geqslant j$ le plus grand entier tel que $d^0 a_j = d^0 a_s$. La relation $\sum_{i=1}^{m} b_i a_i = 0$ nous donne une relation $\sum_{i=1}^{s} c_i a_i = 0$ où $c_i \in A$ pour

$$i = 1, \ldots, j-1 \quad \text{et} \quad c_i \in k (i = j, j+1, \ldots, s).$$

Ceci nous montre que $a_j = -\sum_{i=1,\, i \neq j}^{s} (c_i/c_j) a_i$ car $c_j \neq 0$, ce qui contredit la minimalité de $a_1, \ldots, a_m$. Donc,

$$\underline{q} \subset (X_1, \ldots, X_n)\,[Y_1, \ldots, Y_m].$$

Puisque $S(\underline{p})$ est intègre, alors $\underline{q}$ est un idéal premier de $A[Y_1, \ldots, Y_m]$ et donc, si $f \in A[Y_1, \ldots, Y_m]$ est un polynôme homogène, $f \in \underline{q} \Longleftrightarrow f(a_1, \ldots, a_m) = 0$ (cf. Proposition 2). Ainsi, pour tout polynôme homogène $f \in A[Y_1, \ldots, Y_m]$ tel que $f(a_1, \ldots, a_m) = 0$, tous les coefficients de f sont dans

$$(X_1, \ldots, X_n)A.$$

Supposons qu'il existe un polynôme non nul

$$f = \Sigma c_{i_1, \ldots, i_m} Y_1^{i_1} \ldots Y_m^{i_m} \in k[Y_1, \ldots, Y_m]$$

tel que $f(a_1, \ldots, a_m) = 0$. Soit $(j_1, \ldots, j_m)$ une m-uple parmi les $(i_1, \ldots, i_m)$ telle que $j_1 + \cdots + j_m$ ait la plus petite valeur possible et considérons le polynôme homogène (de degré $j_1 + \cdots + j_m$)

$$g = c_{j_1, \ldots, j_m} Y_1^{j_1} \ldots Y_m^{j_m} + \Sigma c_{i_1, \ldots, i_m} a_s^{i_1 + \cdots + i_s - (j_1 + \cdots + j_m)} a_{s+1}^{i_{s+1}} \ldots a_m^{i_m} Y_1^{i_1} \ldots Y_{s-1}^{i_{s-1}} Y_s^{(j_1 + \cdots + j_m) - (i_1 + \cdots + i_{s-1})}$$

(somme étendue aux m-uples $(i_1, \ldots, i_m)$ telles que

$$(i_1, \ldots, i_m) \neq (j_1, \ldots, j_m) \quad \text{et} \quad i_1 + \cdots + i_m \geqslant j_1 + \cdots + j_m),$$

où

$$i_1 + \cdots + i_s$$

est le plus petit parmi les entiers i_1,

$$i_1 + i_2, i_1 + i_2 + i_3, \ldots, i_1 + \cdots + i_m$$

qui sont plus grands que $j_1 + \cdots + j_m$. Comme

$$g(a_1, \ldots, a_m) = f(a_1, \ldots, a_m) = 0,$$

alors $g \in \underline{q}$ et donc, tous ses coefficients sont dans

$$(X_1, \ldots, X_n)A, \text{ absurde.}$$

Donc, $a_1, \ldots, a_m$ sont algébriquement indépendants sur k.

Supposons maintenant que $\underline{p} = (a_1, \ldots, a_m)A$ soit un idéal premier homogène de A avec $m > n$ générateurs. Macaulay a démontré l'existence de tels idéaux, qui est d'ailleurs classique (cf. [16]). Alors, $a_1, \ldots, a_m$ ne sont pas algébriquement indépendants sur k et donc, d'après la proposition 3, $S(\underline{p})$ n'est pas intègre. D'autre part, on sait que $A_{\underline{p}}$ est un anneau local régulier, car A est régulier.

CHAPITRE II

LE PROBLÈME D'INJECTIVITÉ DANS LES ALGÈBRES UNIVERSELLES

Dans ce chapitre, tout anneau est commutatif à élément unité et tout A-module est unitaire. Certains résultats sont valables pour n'importe quelle algèbre universelle, mais notre étude portera sur l'algèbre symétrique.

1. Préliminaires.

Soient A un anneau et M un A-module. On considère les algèbres tensorielle, symétrique et extérieure du A-module M qu'on va noter respectivement par T(M), S(M) et E(M). On sait qu'il s'agit d'algèbres graduées dont le sous-module des éléments homogènes de degré q est indiqué par $T^q(M)$, $S^q(M)$ et $E^q(M)$ respectivement. Le lemme suivant est bien connu :

Lemme 1. — *Les foncteurs* T, S *et* E *sont covariants et exacts à droite, définis dans la catégorie des* A-*modules unitaires à valeurs dans la catégorie des* A-*algèbres, des A-algèbres commutatives et des A-algèbres anticommutatives respectivement.*

Nous entendons par « exact à droite » (resp. gauche) la propriété qu'a le foncteur de transformer une surjection (resp. injection) en une surjection (resp. injection).

Le foncteur S (ainsi que T et E) n'est pas exact à gauche. En effet, si l'on prend l'anneau $A = k[u, v]$ avec la relation $u^3 = v^2$, où k est un corps, et si on considère l'idéal premier $\underline{p} = (u, v)A$ de A, alors on peut écrire $S(\underline{p}) = A[X, Y]/\underline{q}$ où $\underline{q}$ est l'idéal de $A[X, Y]$ engendré par les formes linéaires $aX + bY$ telles que $au + bv = 0$. Ceci nous montre que $\underline{q} \subset \underline{p}[X, Y]$. Soit maintenant $i : \underline{p} \to A$ l'injection canonique et $S(i) : S(\underline{p}) \to A[Z]$ son prolongement aux algèbres symétriques. Pour tout polynôme homogène f de $A[X, Y]$ de degré q on a $S(i)\ (f \bmod \underline{q}) = f(u, v)Z^q$ et donc, $S(i)\ (uX^2 - Y^2 \bmod \underline{q}) = (u^3 - v^2)Z^2 = 0$. Puisque $uX^2 - Y^2$ n'est pas dans $\underline{q}$, il en résulte que $S(i)$ n'est pas injectif.

Le foncteur S n'est pas additif. En effet, soit A un anneau et on fixe deux éléments a, a' de A. On considère les endomorphismes de A définis par $\varphi(c) = ac$ et $\varphi'(c) = a'c$ pour tout c dans A, dont les prolongements aux algèbres symétriques sont les homomorphismes $S(\varphi) : A[X] \to A[X]$ et $S(\varphi') : A[X] \to A[X]$ respectivement. Puisque $\varphi(1) = a$, alors on a $S(\varphi)\ (X) = aX$ et donc, $S(\varphi)\ (X^q) = a^qX^q$ pour tout entier $q \geqslant 1$. De même, $S(\varphi')\ (X^q) = a'^qX^q$ et

$$S(\varphi + \varphi')\ (X^q) = (a + a')^qX^q$$

et étant donné qu'en général on a $(a + a')^q \neq a^q + a'^q$, il en résulte que $S(\varphi + \varphi') \neq S(\varphi) + S(\varphi')$.

On remarque qu'il ne sera pas question dans ce chapitre de problèmes d'algèbre homologique non-additive.

D'après le lemme 1, pour toute suite exacte

$$(0) \to M' \to M$$

de A-modules on a l'homomorphisme d'algèbres $S(M') \to S(M)$. Étant donné un A-module quelconque M sur un anneau intègre, on désigne par $t(M)$ le sous-module de torsion de M. Supposons donc que l'anneau A soit intègre. Si l'on suppose que $S(M)$ est un A-module sans torsion, c'est-à-dire, que $t(S(M)) = (0)$, alors on a $t(S(M')) \subset \operatorname{Ker}(S(M') \to S(M))$. Dans les cas qu'on va étudier par la suite, on tâchera d'imposer des conditions telles qu'on ait l'égalité $t(S(M')) = \operatorname{Ker}(S(M') \to S(M))$. Si ceci est vérifié, on dira que l'injection $M' \to M$ obéit à la *condition* (T) (de torsion) ou encore, que l'injection $M' \to M$ est une (T)-injection. Il en résulte alors que *étant donnée une* (T)-*injection* $M' \to M$, *une condition nécessaire et suffisante pour que l'homomorphisme* $S(M') \to S(M)$ *soit injectif est que* $S(M')$ *soit sans torsion.*

2. L'injectivité d'une forme linéaire et la x-condition.

Soient A un anneau, M un A-module et $\varphi : M \to A$ une forme linéaire sur M. On va définir un homomorphisme $\overline{\varphi}$ de $M \oplus A$ (somme directe externe) dans A en posant $\overline{\varphi}(x + a) = \varphi(x) + a$ pour tout élément (x, a) dans $M \oplus A$. Il est facile de voir que $\overline{\varphi}$ est surjectif, que $\mathrm{Ker}(\overline{\varphi})$ est le sous-module de $M \oplus A$ formé d'éléments $x + a$ tels que $a = -\varphi(x)$ pour x parcourant M et que si l'on désigne par $j : M \to M \oplus A$ l'injection canonique, alors on a $\overline{\varphi} \circ j = \varphi$. Il s'en suit que $S(\overline{\varphi})$ est aussi surjectif, que $\mathrm{Ker}(S(\overline{\varphi}))$ est l'idéal de $S(M)[X]$ engendré par les éléments $x - \varphi(x)X$, x parcourant M et que, de plus, $\mathrm{Ker}(S(\varphi)) = \mathrm{Ker}(S(\overline{\varphi})) \cap S(M)$. On considère la graduation de $S(M)$, $S(M) = \sum_{q=0}^{\infty} S^q(M)$, et tout élément u homogène de degré q de $\mathrm{Ker}(S(\varphi))$ peut s'écrire sous la forme suivante :

$$u = \sum_i (x_i - \varphi(x_i)X)(u_{0,i} + u_{1,i}X + \cdots + u_{q-1,i}X^{q-1})$$

avec $u_{i',i}$ dans $S^{q-1-i'}(M)$ pour tout i et $i' = 0, 1, \ldots, q-1$. Étant donné que u est dans $S(M)$, ou plus précisément dans $S^q(M)$, on a

$$u = \sum_i x_i u_{0,i}, \quad \sum_i x_i u_{1,i} = \sum_i \varphi(x_i) u_{0,i} \ldots, \quad \sum_i x_i u_{q-1,i} = \sum_i \varphi(x_i) u_{q-2,i}, \quad \sum_i \varphi(x_i) u_{q-1,i} = 0.$$

Supposons maintenant que $M \neq (o)$ et que φ soit injective. Alors, il existe un x dans M tel que $\varphi(x) \neq 0$. L'élément x est fixé par la suite et on voit que pour y dans M on a $\varphi(x)y - \varphi(y)x \in \mathrm{Ker}(\varphi) = (0)$, c'est-à-dire, $\varphi(x)y = \varphi(y)x$ pour tout y dans M. Il en résulte alors que

$$\varphi(x)\, u = \sum_i \varphi(x)\, x_i u_{0,i} = x \sum_i \varphi(x_i)\, u_{0,i} = x \sum_i x_i u_{1,i}$$

et par récurrence sur s, on a $\varphi(x)^s u = x^s \sum_i x_i u_{s,i}$ où x^s est le produit dans $S(M)$. Puisque $u_{q-1,i} \in S^0(M) = A$ pour tout i, alors on peut écrire $0 = \sum_i \varphi(x_i)\, u_{q-1,i} = \varphi\left(\sum_i x_i u_{q-1\,i}\right)$. Étant donné que φ est injective il en résulte que $\sum_i x_i u_{q-1,i} = 0$ et donc, $\varphi(x)^{q-1} u = x^{q-1} \sum_i x_i u_{q-1,i} = 0$. Ceci nous montre que si A est intègre, alors tout élément de $\operatorname{Ker}(S(\varphi))$ est de torsion et d'autre part, on avait déjà vu que si A est intègre, alors $t(S(M)) \subset \operatorname{Ker}(S(\varphi))$. Donc, $t(S(M)) = \operatorname{Ker}(S(\varphi))$. On a ainsi la proposition suivante :

Proposition 1. — *Soient* A *un anneau intègre,* M *un* A*-module et* φ *une forme linéaire sur* M*. Si* φ *est injective, alors* φ *est une* (T)*-injection.*

La proposition ci-dessus redonne le lemme 1 du chapitre I. En effet, soient $\underline{a} \neq (0)$ un idéal de A, $\varphi : \underline{a} \to A$ l'injection canonique, $S(\varphi) : S(\underline{a}) \to A[X]$ son prolongement aux algèbres symétriques et $R(\underline{a}) = \operatorname{Im}(S(\varphi))$ l'anneau de Rees de l'idéal $\underline{a}$. D'après la proposition 1, φ est une (T)-injection et donc, *pour tout idéal* $\underline{a}$ *de* A*, le noyau de l'épimorphisme* $S(\varphi) : S(\underline{a}) \to R(\underline{a})$ *est le sous-module de torsion de* $S(\underline{a})$.

On dit qu'une forme linéaire φ sur M obéit à la *x-condition* s'il existe un x dans M tel que $\varphi(x) \neq 0$ et $\varphi(x)\,y = \varphi(y)\,x$ pour tout y dans M. Il est clair que toute forme injective obéit à la x-condition (avec x dans M, x quelconque), mais si φ obéit à la x-condition, ceci n'entraîne nullement que φ est injective, mais seulement que $\operatorname{Ker}(\varphi) \subset (0) : \varphi(x)\,A$. On voit alors que si $(0) : \varphi(x)\,A = (0)$, les deux notions coïncident. Par la suite on donne un exemple de forme linéaire qui obéit à la x-condition mais qui n'est pas injective. Soient $A = \mathbf{Z}$ l'anneau des entiers rationnels, $M = \mathbf{Z} \times \mathbf{Z}/(2)$ (produit direct) et φ la forme linéaire sur M définie par $\varphi((m, \bar{n})) = 2m$ pour tout $(m, \bar{n})$ dans M. Il est clair que φ est une forme linéaire sur M et si l'on prend l'élément $x = (1, \bar{0}) \neq 0$ de M, on a, pour tout $y = (m, \bar{n})$ dans M, $\varphi(x)\,y = 2(m, \bar{n}) = (2m, \bar{0})$ et $\varphi(y)\,x = 2m(1, \bar{0}) = (2m, \bar{0})$. Donc, φ obéit à la $(1, \bar{0})$-condition. On remarque ici que le noyau de φ est le sous-module de $\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}/(2)$ formé des couples $(0, \bar{0})$ et $(0, \bar{1})$.

Si α est un homomorphisme de A dans un corps K tel que $\alpha(1) = 1$, alors K peut être muni d'une structure de A-module d'une façon évidente. Pour tout A-module M, on appelle *α-rang* de M la dimension du K-espace vectoriel $M \otimes_A K$ et on note $r_\alpha(M) = [M \otimes_A K : K]$. Si A est intègre et si $\alpha : A \to K$ est l'injection canonique de A dans le corps de fractions K de A, on parlera tout simplement du *rang* de M et l'on notera $r(M) = [M \otimes_A K : K]$.

Lemme 2. — *Soient* A *un anneau et*

$$(0) \to M' \to M \to M'' \to (0)$$

une suite exacte de A-*modules. Si* $\operatorname{Tor}_1^A(M'', K) = (0)$, *alors* $r_\alpha(M) = r_\alpha(M') + r_\alpha(M'')$.

En effet, puisqu'on a $\operatorname{Tor}_1^A(M'', K) = (0)$, alors on a la suite exacte d'espaces vectoriels

$$(0) \to M' \otimes_A K \to M \otimes_A K \to M'' \otimes_A K \to (0)$$

et donc, $r_\alpha(M) = r_\alpha(M') + r_\alpha(M'')$.

Corollaire. — *Soient* A *intègre et*

$$(0) \to M' \to M \to M'' \to (0)$$

une suite exacte de A-*modules. Alors* $r(M) = r(M') + r(M'')$.

Proposition 2. — *Soient* A *un anneau intègre et* M *un* A-*module. Les conditions suivantes sont équivalentes:* 1) *Il existe un élément* $x \neq 0$ *dans* M *tel que* $\operatorname{Ann}(\{x\}) = (0)$ *et* $\operatorname{Ann}(M/Ax) \neq (0)$; 2) *Il existe une forme linéaire* φ *sur* M *qui obéit à la* x-*condition*; 3) $r(M) = 1$.

En effet, puisque $\operatorname{Ann}(M/Ax) \neq (0)$, il existe un a dans A, $a \neq 0$ tel que $aM \subset Ax$ et donc, pour tout y dans M on peut écrire $ay = \varphi(y)x$ où $\varphi(y)$ est dans A et est fonction de y. Étant donné que $ax = \varphi(x)x$, alors

$$a - \varphi(x) \in \operatorname{Ann}(\{x\}) = (0)$$

et donc, $a = \varphi(x) \neq 0$. On a ainsi $\varphi(x)y = \varphi(y)x$ pour tout y dans M. Montrons que φ est une forme linéaire sur M. En effet, si l'on prend y_1 et y_2 dans M on a

$$\begin{aligned}\varphi(y_1 + y_2)x = \varphi(x)\,(y_1 + y_2) &= \varphi(x)y_1 + \varphi(x)y_2 \\ &= \varphi(y_1)x + \varphi(y_2)x = (\varphi(y_1) + \varphi(y_2))x\end{aligned}$$

et donc, $\varphi(y_1+y_2)-\varphi(y_1)-\varphi(y_2)\in \mathrm{Ann}(\{x\})=(0)$. Ceci nous montre que $\varphi(y_1+y_2)=\varphi(y_1)+\varphi(y_2)$. D'autre part, si c est dans A et y dans M, on a $\varphi(cy)x=\varphi(x)(cy)=c\varphi(y)x$ et donc, $\varphi(cy)-c\varphi(y)\in \mathrm{Ann}(\{x\})=(0)$. On a ainsi

$$\varphi(cy)=c\varphi(y).$$

On a montré de cette façon que φ est une forme linéaire sur M et donc, que 1) $\Longrightarrow$ 2). Soit maintenant φ une forme linéaire sur M qui obéit à la x-condition. Il est clair que $x\neq 0$, car $\varphi(x)\neq 0$ et si l'on prend c dans $\mathrm{Ann}(\{x\})$, alors $cx=0$ et donc, $0=\varphi(cx)=c\varphi(x)$ et comme $\varphi(x)\neq 0$, il s'ensuit que $c=0$. Donc, $\mathrm{Ann}(\{x\})=(0)$. Si l'on suppose que $\mathrm{Ann}(\mathrm{M}/\mathrm{A}x)=(0)$, comme $\varphi(x)y=\varphi(y)x$ pour tout y dans M, alors $\varphi(x)\in \mathrm{Ann}(\mathrm{M}/\mathrm{A}x)=(0)$ et donc $\varphi(x)=0$. On a ainsi montré que $\mathrm{Ann}(\mathrm{M}/\mathrm{A}x)\neq(0)$. Donc, 2) $\Longrightarrow$ 1). Supposons maintenant que $r(\mathrm{M})=1$ et soit K le corps de fractions de A. Alors $\mathrm{M}\otimes_{\mathrm{A}}\mathrm{K}$ est un K-expace vectoriel de dimension 1 et soit $x\otimes 1$ une base de $\mathrm{M}\otimes_{\mathrm{A}}\mathrm{K}$ sur K, où $x\neq 0$ est dans M. Comme $x\otimes 1\neq 0$ équivaut à x est libre dans M (cf. [2], § 2, n. 3, th. 2), il en résulte que $\mathrm{Ann}(\{x\})=(0)$. Si maintenant on prend y dans M, $y\neq 0$, alors il existe un élément a/b dans K, a et $b\neq 0$, tel que $y\otimes 1=(a/b)(x\otimes 1)$ et donc, $(ax-by)\otimes 1=0$. Ceci nous montre que $ax-by$ n'est pas libre dans M et donc, il existe un c dans A, $c\neq 0$ tel que $c(ax-by)=0$. On a ainsi $bc\in \mathrm{Ann}(\mathrm{M}/\mathrm{A}x)$ et comme A est intègre, $bc\neq 0$. On montre de cette façon que $\mathrm{Ann}(\mathrm{M}/\mathrm{A}x)\neq(0)$ et donc, que 3) $\Longrightarrow$ 1). Supposons que 1) soit vérifiée et par platitude, la suite exacte $(0)\to \mathrm{A}x\to \mathrm{M}\to \mathrm{M}/\mathrm{A}x\to(0)$ nous donne $r(\mathrm{M})=r(\mathrm{A}x)+r(\mathrm{M}/\mathrm{A}x)$. Puisque $x\neq 0$ et $\mathrm{Ann}(\{x\})=(0)$, alors x est libre dans M et donc, $(\mathrm{A}x)\otimes_{\mathrm{A}}\mathrm{K}$ est un K-espace vectoriel de dimension 1, c'est-à-dire, $r(\mathrm{A}x)=1$. Tout élément z dans $(\mathrm{M}/\mathrm{A}x)\otimes_{\mathrm{A}}\mathrm{K}$ s'écrit sous la forme $z=\sum_i z_i\otimes c_i$ où les z_i sont dans $\mathrm{M}/\mathrm{A}x$ et les c_i dans K (somme finie). Étant donné que $\mathrm{Ann}(\mathrm{M}/\mathrm{A}x)\neq(0)$, il existe un c dans A, $c\neq 0$ tel que $cz_i=0$ pour tout i et donc,

$$cz=\sum_i (cz_i)\otimes c_i=0.$$

Puisque $(M/Ax) \otimes_A K$ n'a pas de torsion, alors $z = 0$ et ceci nous montre que $(M/Ax) \otimes_A K = (0)$. On a ainsi

$$r(M) = r(Ax) = 1 \qquad \text{et donc,} \qquad 1) \Longrightarrow 3).$$

PROPOSITION 3. — *Soient* A *un anneau intègre,* M *un* A-*module,* $\varphi : M \to A$ *une forme linéaire sur* M *et* $S(\varphi) : S(M) \to A[X]$ *son prolongement aux algèbres symétriques. Si* φ *obéit à la* x-*condition, alors* $\operatorname{Ker}(S(\varphi))$ *est le sous-module de torsion de* $S(M)$.

En effet, comme A est intègre, on sait déjà que $t(S(M)) \subset \operatorname{Ker}(S(\varphi))$. Soit maintenant $u \in \operatorname{Ker}(S(\varphi))$ un élément homogène de degré q. Avec les mêmes notations que dans la proposition 1, on peut écrire $\varphi(x)^{q-1}u = x^{q-1} \sum_i x_i u_{q-1,i}$ et donc, $\varphi(x)^q u = x^{q-1} \sum_i \varphi(x) x_i u_{q-1,i} = x^q \sum_i \varphi(x_i) u_{q-1,i} = 0$. Puisque $\varphi(x) \neq 0$ et A est intègre, il en résulte que $u \in t(S(M))$ et donc, $t(S(M)) = \operatorname{Ker}(S(\varphi))$.

3. L'injectivité d'une famille finie de formes linéaires.

Soient A un anneau, M un A-module, $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ des formes linéaires sur M et $\varphi : M \to A^n$ l'homomorphisme de M dans le A-module libre A^n défini par $\varphi(x) = \sum_{n}^{i=1} \varphi_i(x) e_i$ pour tout x dans M, où $e_1, \dots, e_n$ est la base naturelle de A^n. On définit un homomorphisme $\overline{\varphi}$ de $M \oplus A^n$ (somme directe externe) dans A^n en posant

$$\overline{\varphi}\Big(x + \sum_{i=1}^{n} a_i e_i\Big) = \sum_{i=1}^{n} (\varphi_i(x) + a_i) e_i$$

pour tout x dans M et pour tout $(a_1, \dots, a_n)$ dans A^n. On vérifie aisément que $\overline{\varphi}$ est surjectif, que $\operatorname{Ker}(\overline{\varphi})$ est le sous-module de $M \oplus A^n$ formé des éléments $x - \sum_{i=1}^{n} \varphi_i(x) e_i$, x parcourant M et que si $j : M \to M \oplus A^n$ est l'injection canonique, alors $\overline{\varphi} \circ j = \varphi$. Il en résulte que $S(\overline{\varphi})$ est aussi surjectif et que $\operatorname{Ker}(S(\overline{\varphi}))$ est l'idéal de $S(M)[X_1, \dots, X_n]$ engendré par les éléments $x - \sum_{i=1}^{n} \varphi_i(x) X_i$, x parcourant M.

De plus, $\operatorname{Ker}(S(\overline{\varphi})) \cap S(M) = \operatorname{Ker}(S(\varphi))$. Si l'on suppose que $\varphi_1 \wedge \cdots \wedge \varphi_n \neq 0$ (si A est un corps et M un espace vectoriel sur A, ceci équivaut à dire que $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ sont des éléments du dual M^* de M linéairement indépendants sur A), alors il existe une suite $x_1, \ldots, x_n$ d'éléments de M telle que $(\varphi_1 \wedge \cdots \wedge \varphi_n)(x_1, \ldots, x_n) \neq 0$. Soit alors

$$d = (\varphi_1 \wedge \cdots \wedge \varphi_n)(x_1, \ldots, x_n) = \det(\varphi_i(x_j)) \neq 0 \, (d \in A)$$

et on considère les éléments de M

$$d_i = \begin{vmatrix} \varphi_1(x_1) & \ldots & \varphi_1(x_n) \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \varphi_{i-1}(x_1) & \ldots & \varphi_{i-1}(x_n) \\ x_1 & \ldots & x_n \\ \varphi_{i+1}(x_1) & \ldots & \varphi_{i+1}(x_n) \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \varphi_n(x_1) & \ldots & \varphi_n(x_n) \end{vmatrix} \quad (i = 1, \ldots, n)$$

On va montrer que $dx - \sum_{i=1}^{n} d_i\varphi_i(x) \in \bigcap_{i=1}^{n} \operatorname{Ker}(\varphi_i)$ pour tout x dans M. En effet, comme $\varphi_j(d_i) = d$ si $j = i$ et $= 0$ si $j \neq i$, alors $\varphi_j(dx - \sum_{i=1}^{q} d_i\varphi_i(x)) = d\varphi_j(x) - d\varphi_j(x) = 0$, d'où le résultat énoncé. Supposons maintenant que φ soit injectif, c'est-à-dire, que $\bigcap_{i=1}^{n} \operatorname{Ker}(\varphi_i) = (0)$. Alors on a $dx = \sum_{i=1}^{n} d_i\varphi_i(x)$ pour tout x dans M. Soit $u \in \operatorname{Ker}(S(\varphi))$ un élément homogène de degré q. On peut écrire $u = \sum_i \left(y_i - \sum_{j=1}^{n} \varphi_j(y_i)\, X_j\right) . u_i$ où les u_i sont dans $S^{q-1}(M)[X_1, \ldots, X_n]$ et où les y_i sont dans M. On a donc $u_i = \sum u^{(i)}_{i_1, \ldots, i_n} X_1^{i_1} \ldots X_n^{i_n}$ (somme étendue aux $(i_1, \ldots, i_n)$ tels que $i_1 + \cdots + i_n \leqslant q - 1$) où $u^{(i)}_{i_1, \ldots, i_n} \in S^{q-1-i_1-\cdots-i_n}(M)$ pour tout i. On va montrer que $d^s u = \sum d_1^{i_1} \ldots d_n^{i_n} \sum_i y_i u^{(i)}_{i_1, \ldots, i_n}$ pour $i_1 + \cdots + i_n = s$ et $0 \leqslant s \leqslant q - 1$, en faisant une récurrence sur s, le cas $s = 0$ donnant $u = \sum_i y_i u^{(i)}_{0, \ldots, 0}$ est trivial, du fait que $u \in S(M)$. Supposons que l'on ait

$$d^{s-1}u = \sum d_1^{i_1} \ldots d_n^{i_n} \sum_i y_i u^{(i)}_{i_1, \ldots, i_n} \quad (i_1 + \cdots + i_n = s - 1).$$

Alors on a

$$\begin{aligned} d^s u = d(d^{s-1}u) &= \Sigma d_1^{i_1} \dots d_n^{i_n} \sum_i u^{(i)}_{i_1,\dots,i_n} \sum_{j=1}^{n} d_j \varphi_j(y_i) \\ &= \Sigma d_1^{i_1} \dots d_n^{i_n} \sum_i y_i u^{(i)}_{i_1,\dots,i_n} \quad (i_1 + \cdots + i_n = s). \end{aligned}$$

La formule ci-dessus nous permet d'écrire

$$d^{q-1}u = \Sigma d_1^{i_1} \dots d_n^{i_n} \sum_i y_i u^{(i)}_{i_1,\dots,i_n} \quad (i_1 + \cdots + i_n = q - 1)$$

et comme on a $\sum_i \varphi_j(y_i) u^{(i)}_{i_1,\dots,i_n} = 0$ pour

$$i_1 + \cdots + i_n = q - 1 \; (j = 1, \dots, n),$$

alors on peut écrire $0 = \sum_i \varphi_j(y_i) u^{(i)}_{i_1,\dots,i_n} = \varphi_j\left(\sum_i u^{(i)}_{i_1,\dots,i_n} y_i\right)$ pour $j = 1, \dots, n$, car $u^{(i)}_{i_1,\dots,i_n} \in S^0(M) = A$ pour

$$i_1 + \cdots + i_n = q - 1.$$

On a ainsi montré que $\sum_i u^{(i)}_{i_1,\dots,i_n} y_i \in \bigcap_{j=1}^{n} \operatorname{Ker}(\varphi_j) = (0)$, c'est-à-dire, $\sum_i u^{(i)}_{i_1,\dots,i_n} y_i = 0$ pour $i_1 + \cdots + i_n = q - 1$. Il en résulte alors que $d^{q-1}u = 0$. Si A est intègre, ceci nous montre que $\operatorname{Ker}(S(\varphi)) \subset t(S(M))$ et d'autre part on sait déjà que $t(S(M)) \subset \operatorname{Ker}(S(\varphi))$ si A est intègre.

Maintenant, une question de notation. Soient A un anneau, M un A-module, $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ des formes linéaires sur M et φ l'homomorphisme de M dans A^n défini comme ci-dessus. Si $\varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_n \neq 0$, alors on notera l'homomorphisme φ par $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_n)$. On a ainsi démontré la proposition suivante :

Proposition 4. — *Soient* A *un anneau,* M *un* A-*module et* $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ *des formes linéaires sur* M. *Si* A *est intègre et l'homomorphisme* $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ *est injectif, alors* $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ *est une* (T)-*injection.*

Supposons maintenant que M soit un A-module de type fini et que M se plonge dans un A-module libre L aussi de type fini. Soient $e_1, \dots, e_n$ une base de L sur A et $e'_1, \dots, e'_n$ la base duale. On définit un homomorphisme φ de M dans le A-module libre $A[X_1, \dots, X_n]$, en posant $\varphi(x) = \sum_{i=1}^{n} e'_i(x) X_i$

pour tout x dans M. Puisque $\bigcap_{i=1}^{n} \operatorname{Ker}(e_i') = (0)$, alors φ est injectif et comme $(e_1' \wedge \ldots \wedge e_n')(e_1, \ldots, e_n) = 1$, alors $e_1' \wedge \ldots \wedge e_n' \neq 0$ et donc, $\varphi = (e_1', \ldots, e_n')$. Ceci étant, la proposition suivante est un cas particulier de la proposition 4 :

Proposition 5. — *Si* A *est intègre, alors* $(e_1', \ldots, e_n')$ *est une* (T)-*injection.*

Remarques. 1) On a supposé que le module libre L soit de type fini, mais cette hypothèse n'est nullement nécessaire.

2) Dans la proposition 5 on a supposé que le module M soit de type fini. Si M n'est pas de type fini, la proposition est encore vraie. En effet, on sait que pour tout élément u dans S(M), il existe un nombre fini d'éléments $x_1, \ldots, x_m$ dans M tels que si ρ est l'homomorphisme de $A[Y_1, \ldots, Y_m]$ dans S(M) défini par $\rho(Y_j) = x_j$ pour tout j, alors

$$u \in \operatorname{Im}(\rho) = \rho(A[Y_1, \ldots, Y_m]).$$

A ce moment-là on est ramené au cas d'un module de type fini.

4. Cas d'un homomorphisme quelconque.

Soient A un anneau, M et M′ deux A-modules et $\varphi : M \to M'$ un homomorphisme de M dans M′. On désigne par 1_M la 1-forme alternée définie dans M à valeurs dans M telle que $1_M(x) = x$ pour tout x dans M. Supposons maintenant qu'il existe une n-forme alternée $\alpha (n \geqslant 1)$ sur M′ telle que $1_{M'} \wedge \alpha = 0$ et $\alpha \circ \varphi \neq 0$, où $\alpha \circ \varphi$ est la n-forme alternée sur M définie par

$$(\alpha \circ \varphi)(x_1, \ldots, x_n) = \alpha(\varphi(x_1), \ldots \varphi(x_n))$$

pour tout élément $(x_1, \ldots, x_n)$ de M^n. On va définir un homomorphisme φ' de M′ dans M en posant

$$\varphi'(x') = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} \alpha(x', \varphi(x_1), \ldots, \varphi(x_i)^{\wedge}, \ldots, \varphi(x_n)) x_i$$

pour tout x' dans M′, où $x_1, \ldots, x_n$ est une suite d'éléments de M qu'on suppose fixée et où $\varphi(x_i)^{\wedge}$ indique, comme d'habitude, que $\varphi(x_i)$ n'y figure pas. Puisque $\alpha \circ \varphi \neq 0$, alors on choisira la suite $x_1, \ldots, x_n$ de telle façon que

$$(\alpha \circ \varphi)\,(x_1, \ldots, x_n) \neq 0.$$

On peut alors écrire

$$\varphi'(\varphi(x)) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1}(\alpha \circ \varphi)\,(x, x_1, \ldots, \hat{x}_i, \ldots, x_n)x_i$$

pour tout x dans M et comme

$$\begin{aligned}(1_M \wedge (\alpha \circ \varphi))(x, x_1, \ldots, x_n) &= (\alpha \circ \varphi)\,(x_1, \ldots, x_n)x \\ &+ \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i}(\alpha \circ \varphi)(x, x_1, \ldots, \hat{x}_i, \ldots, x_n)\,x_i\end{aligned}$$

alors on a

$$(1_M \wedge (\alpha \circ \varphi))(x, x_1, \ldots, x_n) = (\alpha \circ \varphi)(x_1, \ldots, x_n)x - \varphi'(\varphi(x))$$

pour tout x dans M. Étant donné que

$$\varphi \circ (1_M \wedge (\alpha \circ \varphi)) = \varphi \wedge (\alpha \circ \varphi) = (1_{M'} \wedge \alpha) \circ \varphi = 0,$$

si l'on suppose que φ soit injectif, alors on a $1_M \wedge (\alpha \circ \varphi) = 0$. Il en résulte alors que $\varphi'(\varphi(x)) = (\alpha \circ \varphi)(x_1, \ldots, x_n)x$ pour tout x dans M, c'est-à-dire, $\varphi' \circ \varphi$ est l'homothétie de M déterminée par l'élément $(\alpha \circ \varphi)(x_1, \ldots, x_n)$ de A.

On considère maintenant le prolongement de φ aux algèbres symétriques et soit $u \in \mathrm{Ker}\,(S(\varphi))$ un élément homogène de degré q. Puisque u est une combinaison linéaire de produits de q éléments homogènes de degré 1, alors on peut supposer que u soit un produit de q éléments homogènes de degré 1, à savoir, $u = u_1, \ldots u_q$ (produit dans S(M)), où les u_i sont dans $S^1(M) = M$. On a ainsi $0 = S(\varphi)(u) = \varphi(u_1) \ldots \varphi(u_q)$ et donc, $0 = \varphi'(\varphi(u_1)) \ldots \varphi'(\varphi(u_i))$. Comme, d'après ce qu'on vient de démontrer ci-dessus,

$$\varphi'(\varphi(u_i)) = (\alpha \circ \varphi)(x_1, \ldots, x_n)u_i,\; i = 1, \ldots, q,$$

alors il s'ensuit que $(\alpha \circ \varphi)(x_1, \ldots, x_n)^q u = 0$, Si A est intègre, il en résulte que u est dans $t(S(M))$ et donc,

$$\mathrm{Ker}\,(S(\varphi)) \subset t(S(M)).$$

On peut ainsi donner la proposition suivante :

PROPOSITION 6. — *Soient* A *un anneau,* M *et* M′ *deux* A-*modules,* φ *un homomorphisme de* M *dans* M′ *et supposons qu'il existe une* n-*forme alternée* α *sur* M′ *telle que* $1_{M'} \wedge \alpha = 0$ *et* $\alpha \circ \varphi \neq 0$. *Il existe alors un homomorphisme* φ' *de* M′ *dans* M *tel que, si* φ *est injectif, alors* $\varphi' \circ \varphi$ *est une homothétie de* M. *De plus, si* A *est intègre et* S(M′) *est sans torsion alors* φ *est une* (T)-*injection.*

Il est facile de donner des exemples où les conditions de la proposition 6 sont vérifiées. Nous en donnerons quelques-uns, que voici :

1) Soient A un anneau, $\underline{a} \neq (0)$ un idéal de A et $\varphi : \underline{a} \to A$ l'injection canonique. Si l'on prend $\alpha = 1_A$, alors il est clair que $1_A \wedge \alpha = 0$ et $\alpha \circ \varphi = \varphi \neq 0$. L'homomorphisme $\varphi' : A \to \underline{a}$ est donc défini par $\varphi'(a) = ac$ pour tout a dans A, où $c \neq 0$ est un élément fixé de l'idéal $\underline{a}$.

2) Soient A un anneau, M un A-module et $\varphi : M \to A$ une forme linéaire sur M. Si l'on prend $\alpha = 1_A$, alors il est clair que $1_A \wedge \alpha = 0$ et $\alpha \circ \varphi = \varphi \neq 0$. Il est intéressant de voir dans ce cas, comment l'homomorphisme $\varphi' : A \to M$ est défini. Pour cela on remarque que

$$(1_M \wedge \varphi)(x, y) = x\varphi(y) - y\varphi(x)$$

pour tout $(x, y) \in M^2$. Donc, $1_M \wedge \varphi = 0$, si l'on suppose que φ est injective. Maintenant on fixe un élément y dans M et on va poser $\varphi'(a) = ay$ pour tout a dans A. On voit que $\varphi'(\varphi(x)) = \varphi(x)y = \varphi(y)x$ pour tout x dans M, c'est-à-dire, $\varphi' \circ \varphi$ est l'homothétie de M déterminée par l'élément $\varphi(y)$ de A.

3) Plus généralement, soient A un anneau, M un A-module, φ un homomorphisme de M dans un A-module libre L de type fini, $e_1, \ldots, e_n$ une base de L sur A et $e'_1, \ldots, e'_n$ la base duale. Si l'on prend $\alpha = e'_1 \wedge \ldots \wedge e'_n$ il est facile de voir que $\alpha \circ \varphi \neq 0$ et que, d'autre part, $1_L \wedge \alpha = 0$. On peut alors définir un homomorphisme φ' de L dans M tel que si φ est injectif, alors $\varphi' \circ \varphi$ est une homothétie de M. Pour déterminer cette homothétie, on fixe une suite $x_1, \ldots, x_n$ d'éléments de M telle que l'on ait

$$(e'_1 \circ \varphi \wedge \ldots \wedge e'_n \circ \varphi)(x_1, \ldots, x_n) \neq 0$$

et à ce moment-là, on a

$$\varphi'(\varphi(x)) = (e'_1 \circ \varphi \wedge \ldots \wedge e'_n \circ \varphi)(x_1, \ldots, x_n)x$$

pour tout x dans M. On remarque encore que, puisque $\operatorname{Ker}(\varphi) = \bigcap_{i=1}^{n} \operatorname{Ker}(e'_i \circ \varphi)$, alors φ injectif équivaut à

$$\bigcap_{i=1}^{n} \operatorname{Ker}(e'_i \circ \varphi) = (0).$$

Remarque. Dans les trois exemples donnés ci-dessus, on remarque que si l'anneau A est intègre, et si φ est une injection, alors φ est une (T)-injection.

Note. — Sur le problème d'injectivité, voir la note de D. Lazard, sur les modules plats, *C. R. Acad. Sci.*, 258 (1964), 6313-6316.

CHAPITRE III

SUR L'ALGÈBRE DE REES D'UN MODULE UNITAIRE

Dans ce chapitre on tâchera d'étendre la notion d'anneau de Rees d'un idéal tel qu'il a été défini au chapitre I, § 1 au cas d'un module unitaire sur un anneau commutatif à élément unité.

1. L'algèbre de Rees d'un module unitaire.

Soient A un anneau, M un A-module, $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ des formes linéaires sur M, φ l'homomorphisme de M dans A^n défini par $\varphi(x) = \sum_{i=1}^{n} \varphi_i(x)e_i$ pour tout x dans M, où $e_1, \ldots, e_n$ est la base naturelle du A-module libre A^n, et $S(\varphi) : S(M) \to A[X_1, \ldots, X_n]$ le prolongement de φ aux algèbres symétriques. On appelle *algèbre de Rees de* M *par rapport* à $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ la sous-algèbre de $A[X_1, \ldots, X_n]$ définie par $R_{\varphi_1, \ldots, \varphi_n}(M) = \mathrm{Im}(S(\varphi))$. Si $\varphi'_1, \ldots, \varphi'_{n'}$ est un autre système de formes linéaires sur M et si $p : A^{n+n'} \to A^n$ est la projection, alors on a la suite exacte

$$(0) \to \mathrm{Ker}\,(S(p)) \to R_{\varphi_1, \ldots, \varphi_n, \varphi'_1, \ldots, \varphi'_{n'}}(M) \to R_{\varphi_1, \ldots, \varphi_n}(M) \to (0).$$

En effet, on considère l'homomorphisme $\varphi'' : M \to A^{n+n'}$ défini par $\varphi''(x) = \sum_{i=1}^{n} \varphi_i(x)e_i + \sum_{i=1}^{n'} \varphi'_i(x)e'_i$ pour tout x dans M, où $e_1, \ldots, e_n$ et $e'_1, \ldots, e'_{n'}$ sont les bases naturelles des A-modules libres A^n et $A^{n'}$ respectivement. Il est immédiat que $p \circ \varphi'' = \varphi$ et comme S est un foncteur covariant, alors on peut écrire que $S(p) \circ S(\varphi'') = S(\varphi)$. Donc, si ν est dans $R_{\varphi_1, \ldots, \varphi_n, \varphi'_1, \ldots, \varphi'_{n'}}(M)$, il existe un u dans $S(M)$ tel que $v = S(\varphi'')(u)$. Ceci nous montre que

$$S(p)(v) = S(\varphi)(u) \in R_{\varphi_1, \ldots, \varphi_n}(M).$$

D'autre part, l'homomorphisme $S(p)$:

$$R_{\varphi_1, \ldots, \varphi_n, \varphi'_1, \ldots, \varphi'_{n'}}(M) \to R_{\varphi_1, \ldots, \varphi_n}(M)$$

est surjectif. En effet, si l'on prend u dans $R_{\varphi_1, \ldots, \varphi_n}(M)$, alors il existe un v dans $S(M)$ tel que $u = S(\varphi)(v)$. Soit $w = S(\varphi'')(v) \in R_{\varphi_1, \ldots, \varphi_n, \varphi'_1, \ldots, \varphi'_{n'}}(M)$. Il est clair que l'on a $S(p)(w) = u$ et ceci nous montre que $S(p)$ est surjectif, quand on le considère sur les algèbres de Rees en question. Ceci nous donne la suite exacte ci-dessus.

Proposition 1. — *Soient* A *un anneau,* M *un* A-*module tel que le dual* M^* *soit de type fini. Si* $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ *et*

$$\varphi'_1, \ldots, \varphi'_{n'}$$

sont deux systèmes de générateurs de M^* *sur* A, *on a*

$$R_{\varphi_1, \ldots, \varphi_n}(M) = R_{\varphi'_1, \ldots, \varphi'_{n'}}(M).$$

En effet, si l'on montre que $R_{\varphi_1, \ldots, \varphi_n}(M) = R_{\varphi_1, \ldots, \varphi_n, \varphi'_1}(M)$, par récurrence on a $R_{\varphi_1, \ldots, \varphi_n}(M) = R_{\varphi_1, \ldots, \varphi_n, \varphi'_1, \ldots, \varphi'_{n'}}(M)$ et en échangeant les φ_i et les $\varphi'_{i'}$, on a la proposition. Puisque les φ_i forment un système de générateurs de M^* sur A, on peut écrire $\varphi'_1 = \sum_{i=1}^{n} c_i \varphi_i$ où les c_i sont dans A. Soit $e_1, \ldots, e_n$ la base naturelle de A^n sur A. On définit des homomorphismes $\varphi : M \to A^n$ et $\varphi' : M \to A^{n+1}$ en posant

$$\varphi(x) = \sum_{i=1}^{n} \varphi_i(x) e_i \qquad \text{et} \qquad \varphi'(x) = \varphi(x) + \varphi'_1(x) e_{n+1}$$

pour tout x dans M. On considère la projection

$$p : A^{n+1} \to A^n$$

et il est clair que $p(e_{n+1}) = 0$. D'autre part, on va définir un homomorphisme $p' : A^n \to A^{n+1}$ en posant

$$p'((a_1, \ldots, a_n)) = (a_1, \ldots, a_n, a_1 c_1 + \cdots + a_n c_n)$$

pour tout $(a_1, \ldots, a_n)$ dans A^n. Il est immédiat que $p'(e_i) = e_i + c_i e_{n+1}$ pour $i = 1, \ldots, n$ et donc, $p(p'(e_i)) = e_i$ pour tout i. Ceci nous montre que $p \circ p' = 1_{A^n}$ et comme S est un foncteur covariant, $S(p) \circ S(p') = 1_{A[X_1, \ldots, X_n]}$. On a ainsi que $S(p')$ est une injection. Maintenant on remarque que $p' \circ \varphi = \varphi'$ (on a aussi que $p \circ \varphi' = \varphi$) et donc, que $S(p') \circ S(\varphi) = S(\varphi')$. Puisque $S(p')$ est injectif, ceci nous donne $\mathrm{Ker}(S(\varphi)) = \mathrm{Ker}(S(\varphi'))$ et comme on a

$$R_{\varphi_1, \ldots, \varphi_n}(M) = S(M)/\mathrm{Ker}(\varphi) \quad \text{et} \quad R_{\varphi_1, \ldots, \varphi_n, \varphi'_i}(M) = S(M)/\mathrm{Ker}(\varphi')$$

on achève la démonstration.

D'après la proposition 1, on voit que si le dual M^* est de type fini, l'algèbre de Rees de M par rapport à un système de générateurs de M^* sur A est indépendante des formes linéaires prises sur M. Si ceci se vérifie, on notera l'algèbre de Rees du module M par R(M). Il existe beaucoup de modules M tels que le dual M^* soit de type fini. En effet, si A est noethérien et M est de type fini, donc noethérien, alors le dual M^* est aussi de type fini. Pour voir cela, on sait qu'il existe un A-module libre L de type fini tel que

$$L \to M \to (0)$$

soit une suite exacte et, par dualité, on a la suite exacte $(0) \to \mathrm{Hom}_A(M, A) \to \mathrm{Hom}_A(L, A)$, où $\mathrm{Hom}_A(M, A) = M^*$ et $\mathrm{Hom}_A(L, A) = L^*$. On sait que L^* est un module libre de type fini, donc noethérien. Comme M^* est un sous-module de L^*, il en résulte que M^* est aussi de type fini. En particulier, ceci nous montre que pour tout idéal $\underline{a}$ d'un anneau noethérien A, le dual $\underline{a}^*$ est de type fini.

Lemme 1. — *Soient* A *un anneau*, M *un* A-*module et* M^* *son dual. Alors on a* $M^* = \left(M/\bigcap_{\varphi \in M^*} \mathrm{Ker}(\varphi)\right)^*$.

La démonstration est facile et classique. Rappelons-la cependant.

Si l'on pose $N = \bigcap_{\varphi \in M^*} \mathrm{Ker}(\varphi)$, la suite exacte

$$M \to M/N \to (0)$$

nous donne la suite exacte $(0) \to (M/N)^* \to M^*$, c'est-à-dire, $(M/N)^*$ s'identifie à un sous-module de M^*. D'autre part, pour toute forme linéaire φ sur M, on a $\varphi(N) = (0)$ et donc, par passage au quotient, ceci définit une forme linéaire $\overline{\varphi}$ sur M/N telle que si $\alpha : M \to M/N$ est l'homomorphisme canonique, alors $\overline{\varphi} \circ \alpha = \varphi$. On a ainsi montré que

$$(M/N)^* \to M^*$$

est une bijection.

Proposition 2. — *Soient* A *un anneau et* M *un A-module tel que le dual* M^* *soit de type fini. Alors,*

$$R(M) = R(M/\bigcap_{\varphi \in M^*} \operatorname{Ker}(\varphi)).$$

On note encore ici, $N = \bigcap_{\varphi \in M^*} \operatorname{Ker}(\varphi)$. Puisque M^* est de type fini et, d'après le lemme 1, $M^* = (M/N)^*$, alors $(M/N)^*$ est aussi de type fini et on peut considérer son algèbre de Rees $R(M/N)$. Soit $\alpha : M \to M/N$ l'homomorphisme canonique. Si $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ est un système de générateurs de M^* sur A, il existe des formes linéaires $\overline{\varphi}_1, \ldots, \overline{\varphi}_n$ sur M/N telles que $\overline{\varphi}_i \circ \alpha = \varphi_i (i = 1, \ldots, n)$ et on va montrer que $\overline{\varphi}_1, \ldots, \overline{\varphi}_n$ est un système de générateurs de $(M/N)^*$ sur A. En effet, si $\overline{\varphi}$ est dans $(M/N)^*$, alors $\overline{\varphi} \circ \alpha$ est dans M^* et donc, on peut écrire $\overline{\varphi} \circ \alpha = \sum_{i=1}^{n} c_i \varphi_i$ où les c_i sont dans A. Étant donné que $\varphi_i = \overline{\varphi}_i \circ \alpha$ pour tout i, alors on peut écrire $\left(\overline{\varphi} - \sum_{i=1}^{n} c_i \overline{\varphi}_i\right) \circ \alpha = 0$ et comme α est surjectif, il en résulte que $\overline{\varphi} - \sum_{i=1}^{n} c_i \overline{\varphi}_i = 0$. Ceci nous montre que les $\overline{\varphi}_i$ engendrent $(M/N)^*$. Ceci étant, on va démontrer que $R(M) = R(M/N)$. Pour cela on définit des homomorphismes

$$\varphi : M \to A^n \text{ et } \overline{\varphi} : M/N \to A^n$$

en posant $\varphi(x) = \sum_{i=1}^{n} \varphi_i(x) e_i$ et $\overline{\varphi}(\overline{x}) = \sum_{i=1}^{n} \overline{\varphi}_i(\overline{x}) e_i$ pour tout x dans M et pour tout $\overline{x}$ dans M/N, où $e_1, \ldots, e_n$ est la base naturelle du A-module libre A^n. Il en résulte immédiatement que $\overline{\varphi} \circ \alpha = \varphi$ et comme S est un foncteur covariant, alors $S(\overline{\varphi}) \circ S(\alpha) = S(\varphi)$. Comme α est surjectif, alors $S(\alpha)$ l'est aussi et donc, $\mathrm{Im}(S(\overline{\varphi})) = \mathrm{Im}\,(S(\varphi))$.

Corollaire. — *Soient* A *un anneau noethérien et* M *un* A-*module de type fini. Alors* $R(M) = R\Big(M/\bigcap_{\varphi \in M^*} \mathrm{Ker}\,(\varphi)\Big)$.

Soient maintenant $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ des formes linéaires sur un A-module M telles que $\varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_n \neq 0$ et on considère l'homomorphisme $(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ tel qu'il a été défini au ch. II, § 3. D'après la proposition 4 du ch. II, si A est intègre et $(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ est injectif, alors $\mathrm{Ker}\,(S((\varphi_1, \ldots, \varphi_n)))$ est le sous-module de torsion $t(S(M))$ de $S(M)$ et ceci nous permet de donner la proposition suivante :

Proposition 3. — *Soient* A *un anneau intègre,* M *un* A-*module et* $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ *des formes linéaires sur* M *telles que* $\varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_n \neq 0$. *Si l'homomorphisme* $(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ *est injectif, une condition nécessaire et suffisante pour que l'on ait*

$$R_{\varphi_1, \ldots, \varphi_n}(M) = S(M)$$

est que l'algèbre symétrique $S(M)$ *soit un* A-*module sans torsion.*

Une dernière remarque dans ce paragraphe c'est que, en fait, la définition qu'on vient de donner d'algèbre de Rees généralise celle d'anneau de Rees donnée au chapitre I, § 1. En effet, soient A un anneau, $\underline{a}$ un idéal de A et $\varphi : \underline{a} \to A$ l'injection canonique. On sait que si l'on considère l'idéal $\underline{a}$ comme un A-module, alors l'injection φ est une forme linéaire sur $\underline{a}$. D'autre part, si $R(\underline{a})$ est l'anneau de Rees de l'idéal $\underline{a}$ tel qu'il a été défini au chapitre I, § 1, alors on sait (cf. ch. I, § 2) que $R(\underline{a})$ est l'image de l'homomorphisme $S(\varphi) : S(\underline{a}) \to A[X]$. Or, l'image de l'homomorphisme $S(\varphi)$ n'est autre que l'algèbre de Rees du A-module $\underline{a}$ par rapport à la forme linéaire φ et donc, $R(\underline{a}) = R_\varphi(\underline{a})$. On a :

Proposition 4. — *Soit* A *un anneau. Pour tout idéal* $\underline{a}$ *de* A, *l'algèbre de Rees du* A-*module* $\underline{a}$ *par rapport à l'injection canonique* $\varphi : \underline{a} \to A$ *est égale à l'anneau de Rees de l'idéal* $\underline{a}$.

2. Un exemple.

Soit k un corps et on considère l'anneau $A = k[x, y]$ avec les relations $x^2 = xy = y^2 = 0$. On prend l'idéal $\underline{a} = (x, y)A$ de l'anneau A et on va montrer que si $\underline{a}^*$ est le dual de $\underline{a}$, alors on a $\underline{a}^* = \mathrm{Hom}_A(\underline{a}, A) = \mathrm{Hom}_A(\underline{a}, \underline{a}) = \mathrm{Hom}_k(\underline{a}, \underline{a})$. On a trivialement les inclusions $\mathrm{Hom}_A(\underline{a}, \underline{a}) \subset \mathrm{Hom}_A(\underline{a}, A)$ et $\mathrm{Hom}_A(\underline{a}, \underline{a}) \subset \mathrm{Hom}_k(\underline{a}, \underline{a})$. Si α est dans $\mathrm{Hom}_A(\underline{a}, A)$ et c est dans $\underline{a}$, alors on a $xc = yc = 0$ et donc, $x\alpha(c) = y\alpha(c) = 0$. Ceci nous montre que $\alpha(c)$ est dans $\underline{a}$, c'est-à-dire, α est dans $\mathrm{Hom}_A(\underline{a}, \underline{a})$. On a montré ainsi que

$$\mathrm{Hom}_A(\underline{a}, \underline{a}) = \mathrm{Hom}_A(\underline{a}, A).$$

Soit maintenant α dans le k-module $\mathrm{Hom}_k(\underline{a}, \underline{a})$ et montrons que α est A-linéaire. En effet, en vertu des relations

$$x^2 = xy = y^2 = 0,$$

tout élément z dans A peut s'écrire sous la forme

$$z = ax + by + c$$

où a, b et c sont dans le corps k. Pour tout élément u dans $\underline{a}$ et en tenant compte que α est k-linéaire, on a

$$\alpha(zu) = \alpha(cu) = c\alpha(u) = (ax + by + c)\alpha(u) = z\alpha(u),$$

c'est-à-dire, α est A-linéaire. On a donc

$$\mathrm{Hom}_A(\underline{a}, \underline{a}) = \mathrm{Hom}_k(\underline{a}, \underline{a})$$

et ceci nous montre que $\underline{a}^*$ est un k-espace vectoriel. On va désigner les générateurs de $\underline{a}$ en tant que A-module par x_1 et x_2 et on considère les formes linéaires sur le A-module $\underline{a}$ définies par $\varphi_1(x_1) = x$ et $\varphi_1(x_2) = 0$, $\varphi_2(x_1) = 0$ et $\varphi_2(x_2) = y$, $\varphi_3(x_1) = y$ et $\varphi_3(x_2) = 0$, $\varphi_4(x_1) = 0$ et $\varphi_4(x_2) = x$. Si φ est dans $\underline{a}^*$, alors on peut écrire $\varphi(x_1) = a_1x + a_3y$ et $\varphi(x_2) = a_4x + a_2y$, où les a_i sont dans le corps k. D'autre part, pour tout u dans $\underline{a}$ on peut écrire $u = b_1x_1 + b_2x_2$ où les b_i sont dans A. On peut alors écrire

$$\begin{aligned}\varphi(u) = b_1\varphi(x_1) + b_2\varphi(x_2) = b_1a_1\varphi_1(x_1) + b_1a_3\varphi_3(x_1)\\ + b_2a_4\varphi_4(x_2) + b_2a_2\varphi_2(x_2) = a_1\varphi_1(b_1x_1 + b_2x_2) + a_2\varphi_2(b_1x_1 + b_2x_2)\\ + a_3\varphi_3(b_1x_1 + b_2x_2) + a_4\varphi_4(b_1x_1 + b_2x_2)\\ = (a_1\varphi_1 + a_2\varphi_2 + a_3\varphi_3 + a_4\varphi_4)(u)\end{aligned}$$

et ceci pour tout u dans le A-module $\underline{a}$. Ceci nous montre que $\alpha = a_1\varphi_1 + a_2\varphi_2 + a_3\varphi_3 + a_4\varphi_4$ où les a_i sont dans k, donc que le A-module $\underline{a}^*$ est un k-espace vectoriel de dimension 4. On considère l'algèbre de Rees du A-module $\underline{a}$ par rapport à $\varphi_1, \ldots, \varphi_4$ et d'autre part, l'anneau de Rees de l'idéal $\underline{a}$, c'est-à-dire, l'algèbre de Rees du A-module $\underline{a}$ par rapport à l'injection canonique $i : \underline{a} \to \mathrm{A}$. On voit facilement que si $\varphi : \underline{a} \to \mathrm{A}^4$ est l'homomorphisme défini par

$$\varphi(u) = \varphi_1(u)e_1 + \varphi_2(u)e_2 + \varphi_3(u)e_3 + \varphi_4(u)e_4$$

pour tout u dans $\underline{a}$, où $e_1, \ldots, e_4$ est la base naturelle du A-module libre A^4, et si $pr_1, pr_2, pr_3, pr_4 : \mathrm{A}^4 \to \mathrm{A}$ sont les quatre projections de A^4 sur A, alors $(pr_1 + pr_2) \circ \varphi = i$. Puisque S est un foncteur covariant, alors

$$\mathrm{S}(pr_1 + pr_2) \circ \mathrm{S}(\varphi) = \mathrm{S}(i).$$

Il en résulte alors que $\mathrm{S}(pr_1 + pr_2) : \mathrm{R}_{\varphi_1, \ldots, \varphi_4}(\underline{a}) \to \mathrm{R}_i(\underline{a})$ est un épimorphisme et donc, on a la suite exacte

$$(0) \to \mathrm{Ker}\,(\mathrm{S}(pr_1 + pr_2)) \to \mathrm{R}_{\varphi_1, \ldots, \varphi_4}(\underline{a}) \to \mathrm{R}_i(\underline{a}) \to (0).$$

3. Localisation de l'algèbre de Rees.

Soient A un anneau, M un A-module et φ un homomorphisme de A dans un anneau B tel que $\varphi(1) = 1$. On peut munir B d'une structure de A-module et donc, considérer le produit tensoriel $\mathrm{B} \otimes_{\mathrm{A}} \mathrm{M}$. On sait (cf. [2]) que $\mathrm{S}(\mathrm{B} \otimes_{\mathrm{A}} \mathrm{M})$ est canoniquement isomorphe au produit tensoriel $\mathrm{B} \otimes_{\mathrm{A}} \mathrm{S}(\mathrm{M})$. En particulier, si S est une partie multiplicative de l'anneau A et si l'on prend à la place de B l'anneau de fractions $\mathrm{S}^{-1}\mathrm{A}$ de l'anneau A à dénominateurs dans S, on obtient $\mathrm{S}(\mathrm{S}^{-1}\mathrm{A} \otimes_{\mathrm{A}} \mathrm{M}) = \mathrm{S}^{-1}\mathrm{A} \otimes_{\mathrm{A}} \mathrm{S}(\mathrm{M})$, d'où, $\mathrm{S}(\mathrm{S}^{-1}\mathrm{M}) = \mathrm{S}^{-1}(\mathrm{S}(\mathrm{M}))$. Celle-ci s'appelle la *formule de localisation de l'algèbre symé-*

trique. On rappelle ici qu'il existe un isomorphisme canonique $S^{-1}A \otimes_A M \to S^{-1}M$ qui fait correspondre à l'élément $(a/s) \otimes x$ l'élément $(ax)/s$ et l'isomorphisme réciproque, qui à x/s fait correspondre l'élément $(1/s) \otimes x$.

PROPOSITION 5. — *Soient* A *un anneau,* M *un* A-*module,* $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ *des formes linéaires sur* M *et* S *une partie multiplicative de* A. *Alors on a*

$$S^{-1}(R_{\varphi_1, \ldots, \varphi_n}(M)) = R_{1\otimes\varphi_1, \ldots, 1\otimes\varphi_n}(S^{-1}M).$$

On remarque tout d'abord que, puisque les φ_i sont des formes linéaires sur M, les $1 \otimes \varphi_i$ sont des formes linéaires sur $S^{-1}M$. On définit un homomorphisme φ de M dans le A-module libre A^n en posant $\varphi(x) = \sum_{i=1}^{n} \varphi_i(x)e_i$ pour tout x dans M et on considère l'algèbre de Rees

$$R_{\varphi_1, \ldots, \varphi_n}(M) = \operatorname{Im}(S(\varphi)).$$

Puisque $S^{-1}A$ est un A-module plat, la suite exacte

$$(0) \to \operatorname{Ker}(S(\varphi)) \to S(M) \to R_{\varphi_1, \ldots, \varphi_n}(M) \to (0)$$

nous donne la suite exacte

$$(0) \to S^{-1}(\operatorname{Ker}(S(\varphi))) \to S^{-1}(S(M)) \to S^{-1}(R_{\varphi_1, \ldots, \varphi_n}(M)) \to (0).$$

Maintenant on considère l'homomorphisme

$$1 \otimes \varphi : S^{-1}M \to (S^{-1}A)^n$$

défini par $(1 \otimes \varphi)(x/s) = \sum_{i=1}^{n} (1 \otimes \varphi_i)(x/s)e_i$ pour tout x/s dans $S^{-1}M$, où l'on note encore $e_1, \ldots, e_n$ la base naturelle du module libre $(S^{-1}A)^n$. Son prolongement aux algèbres symétriques est l'homomorphisme

$$S(1 \otimes \varphi) : S(S^{-1}M) \to (S^{-1}A)[X_1, \ldots, X_n]$$

et comme $1 \otimes S(\varphi)$ en est un autre prolongement, il en résulte que $S(1 \otimes \varphi) = 1 \otimes S(\varphi)$. On a ainsi la suite exacte

$$(0) \to \operatorname{Ker}(1 \otimes S(\varphi)) \to S(S^{-1}M) \to R_{1\otimes\varphi_1, \ldots, 1\otimes\varphi_n}(S^{-1}M) \to (0)$$

et d'après la formule de localisation de l'algèbre symétrique, il suffit de démontrer que l'on a $\operatorname{Ker}(1 \otimes S(\varphi)) = S^{-1}(\operatorname{Ker}(\varphi))$.

Si u est dans $\mathrm{Ker}\,(1 \otimes S(\varphi))$, alors on peut écrire que

$$u = \sum_i (a_i/s) \otimes u_i$$

où les a_i/s sont dans $S^{-1}A$ et les u_i sont dans M. On a ainsi $u = \left(\sum_i a_i u_i\right)\Big/ s$ et donc, $0 = (1 \otimes S(\varphi))(u) = S(\varphi)\left(\sum_i a_i u_i\right)\Big/ s$. Ceci veut dire qu'il existe un t dans S tel que

$$tS(\varphi)\left(\sum_i a_i u_i\right) = 0,$$

c'est-à-dire,

$$t\left(\sum_i a_i u_i\right) \in \mathrm{Ker}\,(S(\varphi)).$$

Il en résulte alors que

$$u = t\left(\sum_i a_i u_i\right)\Big/ ts \in S^{-1}A \otimes_A \mathrm{Ker}\,(S(\varphi)) = S^{-1}(\mathrm{Ker}\,(S(\varphi))).$$

Réciproquement, si u est dans $S^{-1}(\mathrm{Ker}\,(S(\varphi)))$, on peut écrire que $u = \sum_i (a_i/s_i) \otimes u_i$ où les a_i/s_i sont dans $S^{-1}A$ et les u_i sont dans $\mathrm{Ker}\,(S(\varphi))$. Ainsi,

$$(1 \otimes S(\varphi))(u) = \sum_i (a_i/s_i) \otimes S(\varphi)(u_i) = 0$$

et donc, u est dans $\mathrm{Ker}\,(1 \otimes S(\varphi))$.

Corollaire. — *Soient* A *un anneau,* $\underline{a}$ *un idéal de* A, $R(\underline{a})$ *l'anneau de Rees de l'idéal* $\underline{a}$ (cf. ch. I, § 1) *et* S *une partie multiplicative de* A. *Alors,* $S^{-1}(R(\underline{a})) = R(S^{-1}\underline{a})$.

En effet, soit $\varphi : \underline{a} \to A$ l'injection canonique. On sait que $R(\underline{a}) = \mathrm{Im}\,(S(\varphi))$, c'est-à-dire, $R(\underline{a})$ est l'algèbre de Rees $R_\varphi(\underline{a})$ du A-module $\underline{a}$ par rapport à la forme linéaire φ. D'après la proposition 5 on a

$$S^{-1}(R(\underline{a})) = S^{-1}(R_\varphi(\underline{a})) = R_{1\otimes\varphi}(S^{-1}\underline{a}).$$

Étant donné que $1 \otimes \varphi : S^{-1}\underline{a} \to S^{-1}A$ est une injection et que $S^{-1}\underline{a}$ est un idéal de l'anneau $S^{-1}A$, il en résulte que $R_{1\otimes\varphi}(S^{-1}\underline{a})$ est l'anneau de Rees (cf. ch. I, § 1) de l'idéal $S^{-1}\underline{a}$ et donc, $S^{-1}(R(\underline{a})) = R(S^{-1}\underline{a})$.

On remarque que si $\underline{p}$ est un idéal premier de l'anneau A, alors le corollaire ci-dessus nous donne $(R(\underline{a}))_{\underline{p}} = R(\underline{a}A_{\underline{p}})$. Si A est intègre et si $\underline{a} \neq (0)$ est un idéal de A, alors

$(R(\underline{a}))_{(0)} = K[X]$, où K est le corps de fractions de A. En effet, puisque $\underline{a} \neq (0)$ et A est intègre, alors $\underline{a}_{(0)} \neq (0)$ et donc, $\underline{a}_{(0)} = K$. Il en résulte alors que

$$(R(\underline{a}))_{(0)} = R(\underline{a}_{(0)}) = R(K) = K[X],$$

c'est-à-dire, pour tout idéal $\underline{a} \neq (0)$ de A, l'anneau localisé $(R(\underline{a}))_{(0)}$ s'identifie à l'anneau de polynômes $K[X]$ à coefficients dans le corps K.

Proposition 6. — *Soient* A *un anneau,* S *une partie multiplicative de* A *et* M *un* A-*module tel que* M^* *soit de type fini et* $S^{-1}(M^*) = (S^{-1}M)^*$. *Alors* $S^{-1}(R(M)) = R(S^{-1}M)$.

Puisque M^* est de type fini, alors $S^{-1}(M^*)$ l'est aussi et donc, il en est de même de $(S^{-1}M)^*$. D'autre part, si

$$\varphi_1, \ldots, \varphi_n$$

est un système de générateurs de M^* sur A, alors $1 \otimes \varphi_1, \ldots, 1 \otimes \varphi_n$ est un système de générateurs de $(S^{-1}M)^*$ sur $S^{-1}A$. Si φ est l'homomorphisme de M dans A^n défini par $\varphi(x) = \sum_{i=1}^{n} \varphi_i(x)e_i$ pour tout x dans M et si $R(M)$ est l'algèbre de Rees de M par rapport à $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ et $R(S^{-1}M)$ l'algèbre de Rees de $S^{-1}M$ par rapport à $1 \otimes \varphi_1, \ldots, 1 \otimes \varphi_n$, alors on a les suites exactes

$$(0) \to \operatorname{Ker}(\varphi) \to S(M) \to R(M) \to (0)$$

et

$$(0) \to \operatorname{Ker}(1 \otimes S(\varphi)) \to S(S^{-1}M) \to R(S^{-1}M) \to (0).$$

Puisque $S^{-1}A$ est un A-module plat et d'après la formule de localisation de l'algèbre symétrique d'un module, il en résulte que $\operatorname{Ker}(1 \otimes S(\varphi)) = S^{-1}(\operatorname{Ker}(\varphi))$, d'où,

$$S^{-1}(R(M)) = R(S^{-1}(M)).$$

Étant donné un anneau A, une partie multiplicative S de A et deux A-modules M et M', on peut considérer l'homomorphisme

$$S^{-1}(\operatorname{Hom}_A(M, M')) \to \operatorname{Hom}_{S^{-1}A}(S^{-1}M, S^{-1}M')$$

qui à l'élément φ/s fait correspondre l'homomorphisme $x/t \rightsquigarrow \varphi(x)/st$. Si le module M admet une *présentation finie*, c'est-à-dire, M est le conoyau d'un homomorphisme $A^p \to A^q$ et ceci veut dire qu'il existe une suite exacte

$$A^p \to A^q \to M \to (0),$$

alors l'homomorphisme ci-dessus est un isomorphisme et on peut donc écrire $S^{-1}(\mathrm{Hom}_A(M, M')) = \mathrm{Hom}_{S^{-1}A}(S^{-1}M, S^{-1}M')$ (cf. [14], ch. 0, § 1, n. 1. 3). Ceci est vérifié, par exemple, si A est noethérien et le module M est de type fini donc noethérien. En particulier, si l'on prend $M' = A$ on a la formule

$$S^{-1}(\mathrm{Hom}_A(M, A)) = \mathrm{Hom}_{S^{-1}A}(S^{-1}M, S^{-1}A)$$

et comme $\mathrm{Hom}_A(M, A) = M^*$ et

$$\mathrm{Hom}_{S^{-1}A}(S^{-1}M, S^{-1}A) = (S^{-1}M)^*,$$

il en résulte que $S^{-1}(M^*) = (S^{-1}M)^*$. On a ainsi le lemme suivant :

LEMME 2. — *Soient* A *un anneau et* S *une partie multiplicative de* A. *Pour tout* A-*module* M *qui admet une présentation finie, on a* $S^{-1}(M^*) = (S^{-1}M)^*$.

CHAPITRE IV

LES ALGÈBRES UNIVERSELLES D'UN MODULE PROJECTIF

Dans ce chapitre on va étudier les algèbres universelles d'un module projectif et, en particulier, le cas des idéaux d'un anneau de Dedekind.

1. Les algèbres universelles d'un module projectif.

On a déjà vu le caractère fonctoriel des algèbres tensorielle, symétrique et extérieure d'un module (cf. ch. II, § 1, lemme 1). Ceci nous permet de démontrer la proposition suivante :

PROPOSITION 1. — *Soient* A *un anneau et* M *un* A*-module. Une condition nécessaire et suffisante pour que* M *soit un* A*-module projectif est que son algèbre symétrique (resp. tensorielle, extérieure)* S(M) *(resp.* T(M), E(M)) *le soit, en tant que* A*-module.*

En effet, si S(M) est un A-module projectif, alors $S^q(M)$ est projectif pour tout $q \geqslant 0$ et donc, $M = S^1(M)$ est un A-module projectif. Si M est un A-module projectif, il existe un A-module libre L et deux homomorphismes $M \xrightarrow{\varphi} L \xrightarrow{\varphi'} M$ tels que $\varphi' \circ \varphi = 1_M$ et donc, $S(\varphi') \circ S(\varphi) = 1_{S(M)}$ (cf. ch. II, § 1, lemme 1). Ceci nous montre que $S(L) = S(M) \oplus \operatorname{Ker}(S(\varphi'))$ et comme S(L) est un A-module libre, car c'est un anneau de polynômes, alors S(M) est un A-module projectif. On a une démonstration analogue pour les algèbres tensorielle et extérieure. On remarque seulement que l'algèbre tensorielle d'un module libre est l'algèbre des mots de la base (cf. [8], ch. V, § 3, th. 7) et que l'algèbre extérieure d'un module libre est l'algèbre des polynômes anticommutatifs (cf. [15]). Donc, les algèbres tensorielle et extérieure d'un module libre sont encore des modules libres.

Corollaire. — *Soient* A *un anneau intègre et* M *un* A-*module projectif. Alors l'algèbre symétrique* S(M) *est intègre.*

En effet, S(M) se plonge dans un anneau de polynômes à coefficients dans l'anneau intègre A.

On voit que, étant donné un module M, si S(M) est projectif, alors $S^q(M)$ l'est aussi pour tout $q \geqslant 0$, où $S^q(M)$ est le sous-module des éléments homogènes de degré q de S(M). On peut alors se poser la question suivante : supposons qu'il existe un $q \geqslant 2$ tel que $S^q(M)$ soit projectif; on peut se demander si S(M) l'est aussi, ou encore, compte tenu de la proposition 1, si M est projectif. La même question peut être posée pour les algèbres tensorielle et extérieure. Plus précisément, on va démontrer le théorème suivant :

Théorème 1. — *Soient* A *un anneau et* M *un* A-*module de présentation finie.* (i) *S'il existe un entier* $q \geqslant 2$ *tel que* $T^q(M)$ (*resp.* $S^q(M)$) *soit un* A-*module projectif, alors* M *est un* A-*module projectif.* (ii) *Soit* m *le plus grand entier tel que* $E^m(M) \neq (0)$ *et supposons qu'il existe un entier* q, $2 \leqslant q \leqslant m$, *tel que* $E^q(M)$ *soit un* A-*module projectif. Alors* M *est un* A-*module projectif.*

On remarque tout d'abord que si M est de présentation finie, alors il est de type fini. En effet, dire que M est de *présentation finie* équivaut à dire qu'il existe une suite exacte $L_1 \to L_0 \to M \to (0)$, où les L_i sont libres de type fini. Il en résulte aussitôt que M lui même est de type fini. D'autre part, on peut supposer que $m \geqslant 2$. D'après la formule de localisation des algèbres universelles et le lemme 1, on se ramène au cas où l'anneau A est local. En effet, pour tout idéal maximal $\underline{m}$ de A, on a $(T^q(M))_{\underline{m}} = T^q(M_{\underline{m}})$ et comme $T^q(M)$ est un A-module projectif de type fini, il en résulte que $T^q(M)$ est un A-module de présentation finie et $T^q(M_{\underline{m}})$ est un $A_{\underline{m}}$-module libre pour tout idéal maximal $\underline{m}$ de A. D'après le *cas local*, le $A_{\underline{m}}$-module $M_{\underline{m}}$ est libre pour tout idéal maximal $\underline{m}$ de A et comme M est de présentation finie, alors M est un A-module projectif de type fini. Les mêmes remarques sont valables pour les algèbres symétrique et extérieure.

Cas local. Soient A local d'idéal maximal $\underline{m}$ et corps des restes $K = A/\underline{m}$, $x_1, \ldots, x_n$ un système minimal de générateurs de M sur A et L un A-module libre ayant une base $e_1, \ldots, e_n$ à n éléments. Si $\varphi : L \to M$ est l'épimorphisme défini par $\varphi(e_i) = x_i (i = 1, \ldots, n)$ et si $R = \operatorname{Ker}(\varphi)$, alors on a la suite exacte $(0) \to R \to L \to M \to (0)$ avec $R \subset \underline{m}L$. En effet, si l'on prend $x = \sum_{i=1}^{n} a_i e_i$ dans R, alors il en résulte que $0 = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i$ et si l'on suppose que, par exemple, $a_1 \notin \underline{m}$, alors $x_1 = \sum_{i=2}^{n} (-a_i/a_1) x_i$, ce qui contredit la minimalité de $x_1, \ldots, x_n$. Il en résulte alors que a_i est dans $\underline{m}$ pour tout i et donc, que $R \subset \underline{m}L$. Ceci nous donne $R \otimes_A K = (0)$ et donc, $L \otimes_A K = M \otimes_A K$. (i) La démonstration est exactement la même dans les deux cas (tensorielle et symétrique) et nous allons la faire pour l'algèbre symétrique. Soit alors $S(\varphi) : S(L) \to S(M)$ le prolongement de φ aux algèbres symétriques et pour chaque degré p, on considère l'épimorphisme induit $S^p(\varphi) : S^p(L) \to S^p(M)$. Étant donné que $S^q(M)$ est un A-module projectif, la suite exacte

$$(0) \to \operatorname{Ker}(S^q(\varphi)) \to S^q(L) \to S^q(M) \to (0)$$

nous donne la suite exacte

$$(0) \to \operatorname{Ker}(S^q(\varphi)) \otimes_A K \to S^q(L) \otimes_A K \to S^q(M) \otimes_A K \to (0).$$

D'autre part, étant donné que

$$S^q(L) \otimes_A K = S^q(L \otimes_A K),\ S^q(M) \otimes_A K = S^q(M \otimes_A K)$$

et que $L \otimes_A K = M \otimes_A K$, alors on a $\operatorname{Ker}(S^q(\varphi)) \otimes_A K = (0)$. Puisque $S^q(M)$ est projectif de type fini, alors $\operatorname{Ker}(S^q(\varphi))$ est de type fini (projectif) et donc, $\operatorname{Ker}(S^q(\varphi)) = (0)$. Soit maintenant $x = \sum_{i=1}^{n} a_i e_i$ dans L tel que $\varphi(x) = 0$ et fixons $q - 1$ éléments $y_1, \ldots, y_{q-1}$ de L. On voit que

$$S^q(\varphi)(x y_1 \ldots y_{q-1}) = \varphi(x)\varphi(y_1) \ldots \varphi(y_{q-1}) = 0$$

et donc, $xy_1 \ldots y_{q-1} = 0$ dans $S^q(L)$. Si l'on prend

$$y_1 = \cdots = y_{q-1} = e_1$$

on a $0 = \sum_{i=1}^{n} a_i e_i e_1^{q-1}$ et ceci nous montre que $a_i = 0$ pour tout i. On a ainsi $R = \mathrm{Ker}(\varphi) = (0)$ et donc, $M = L$, c'est-à-dire, M est un A-module libre. (ii) Les notations étant les mêmes à condition de remplacer le symbole S par E, on obtient $\mathrm{Ker}(E^q(\varphi)) = (0)$ et donc, $xy_1 \ldots y_{q-1} = 0$ dans $E^q(L)$. On prend pour $y_1, \ldots, y_{q-1}$ des éléments e_j tels que $y_1 \ldots y_{q-1} = e_J$ où J est une partie de $\{1, \ldots, q\}$ à $q - 1$ éléments. On voit alors que

$$0 = xy_1 \ldots y_{q-1} = \sum_{i=1}^{n} a_i(e_i \wedge e_J)$$

où les $e_i \wedge e_J$ sont nuls si $i \in J$ et linéairement indépendants sur A si $i \notin J$. On a ainsi $a_i = 0$ pour tout $i \notin J$ et comme ceci est vrai pour toute partie J de $\{1, \ldots, q\}$ à $q - 1$ éléments, il en résulte que $a_i = 0$ pour $i = 1, \ldots, n$. On a ainsi montré que φ est injectif et que $M = L$ est libre. Le lemme suivant achève la démonstration du théorème :

Lemme 1. — *Soient* A *un anneau et* M *un* A*-module. Les conditions suivantes sont équivalentes :* (i) M *est un* A*-module projectif de type fini;* (ii) M *est un* A*-module de présentation finie et pour tout idéal maximal* $\underline{m}$ *de* A *le* $A_{\underline{m}}$*-module* $M_{\underline{m}}$ *est libre* (cf. [3], ch. II, § 5, n. 2, th. 1).

Remarques. 1) Soient A un anneau et M un A-module. Si M est de présentation finie, il en est de même de $S^q(M)$ pour tout $q \geqslant 0$. En effet, si $A^m \to A^n \to M \to (0)$ est une présentation finie de M, $A^{\binom{m+q-1}{q}} \to A^{\binom{n+q-1}{q}} \to S^q(M) \to (0)$ en est une de $S^q(M)$. La même remarque est vraie pour les algèbres tensorielle et extérieure.

2) Le théorème 1 est encore vrai pour M de type fini, à condition de supposer que l'anneau A soit intègre. Pour cela, il suffit de voir que dans ces conditions le lemme 1 est vérifié (cf. [5], lemme 5 à la page 249).

3) Le théorème 1 est vrai si l'on suppose que A soit noethérien (non nécessairement intègre) et M de type fini,

car dans ces conditions le module M est de présentation finie. En effet, si M est de type fini, il existe une suite exacte

$$(0) \to R \to A^n \to M \to (0)$$

et comme A est noethérien et A^n est de type fini, il en résulte que le sous-module R de A^n est aussi de type fini. Il existe alors une suite exacte $(0) \to R_0 \to A^m \to R \to (0)$ et en composant $A^m \to R$ et $R \to A^n$ on obtient une présentation finie de M, à savoir, $A^m \to A^n \to M \to (0)$.

2. Cas d'un anneau de Dedekind.

Soient A un anneau intègre et K son corps de fractions. On appelle *idéal fractionnaire de* A à tout sous-A-module $\underline{a}$ de K tel qu'il existe un élément d dans A, $d \neq 0$ tel que $d\underline{a} \subset A$, c'est-à-dire, $d\underline{a}$ est un idéal de A dans le sens habituel. Les idéaux de A seront appelés alors *idéaux entiers de* A. On dira qu'un idéal fractionnaire $\underline{a}$ de A est *inversible* s'il existe un idéal fractionnaire $\underline{a}'$ de A tel que $\underline{a}.\underline{a}' = A$.

Les deux lemmes suivants sont bien connus :

Lemme 2. — *Soient* A *un anneau et* $M = (x_1, \ldots, x_n)$ A *un* A-*module de type fini. Les conditions suivantes sont équivalentes:* (i) M *est un* A-*module projectif;* (ii) *il existe* n *formes linéaires* $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ *sur* M *telles que* $x = \sum_{i=1}^{n} \varphi_i(x)x_i$ *pour tout* x *dans* M (cf. [1]).

Lemme 3. — *Soient* A *un anneau intègre et* $\underline{a}$ *un idéal fractionnaire de* A. *Les conditions suivantes sont équivalentes* : (i) $\underline{a}$ *est un* A-*module projectif de type fini;* (ii) $\underline{a}$ *est un idéal inversible* (cf. [3]).

Proposition 2. — *Soient* A *un anneau de Dedekind et* $\underline{a} \neq (0)$ *un idéal fractionnaire de* A. *Alors* $\underline{a}$ *est un* A-*module projectif de type fini.*

En effet, puisque tout idéal fractionnaire non nul de A est inversible (cf. [27], vol. I, ch. v, § 6, th. 12), il en résulte que tout idéal fractionnaire $\underline{a} \neq (0)$ de A est un A-module projectif de type fini.

Remarque. Dans un anneau de Dedekind, tout idéal entier a une base formée de deux éléments (cf. [27], vol. I, ch. V, § 7, th. 16, corollaire 2).

THÉORÈME 2. — *Soit* A *un anneau de Dedekind. Pour tout idéal entier* $\underline{a}$ *de* A *on a* $S(\underline{a}) = R(\underline{a})$.

En effet, il n'y a rien à démontrer si $\underline{a} = (0)$. Si $\underline{a} \neq (0)$, alors on sait que $\underline{a}$ est un A-module projectif de type fini et donc, $S(\underline{a})$ est intègre. D'après le lemme 1 du chapitre I il en résulte que $S(\underline{a}) = R(\underline{a})$. On remarque que, puisque $\underline{a}$ est engendré par deux éléments, $\underline{a} = (a_1, a_2)A$, alors

$$R(\underline{a}) = A[a_1X, a_2X].$$

On peut alors dire que pour tout idéal $\underline{a} = (a_1, a_2)A$ d'un anneau de Dedekind A, on a $S(\underline{a}) = A[a_1X, a_2X]$.

On peut généraliser le théorème ci-dessus de la manière suivante :

THÉORÈME 2'. — *Soient* A *un anneau intègre et* $\underline{a}$ *un idéal (entier) de* A. *Si* $\underline{a}$ *est un* A-*module projectif, alors on a* $S(\underline{a}) = R(\underline{a})$.

Pour cela, on n'a qu'à voir qu'on a toujours la suite exacte

$$(0) \to \operatorname{Ker}(S(\underline{a}) \to R(\underline{a})) \to S(\underline{a}) \to R(\underline{a}) \to (0)$$

et comme A est intègre, alors $\operatorname{Ker}(S(\underline{a}) \to R(\underline{a})) = t(S(\underline{a}))$ (cf. lemme 1, ch. I). D'autre part, si $\underline{a}$ est un A-module projectif, alors $t(S(\underline{a})) = (0)$ et le th. est démontré.

3. Un exemple.

Soient A un anneau et L un A-module libre. On sait (cf. [2]) que S(L) est une algèbre de polynômes et donc, un A-module libre. On peut se demander, compte tenu de la proposition 1, si la réciproque de ce résultat est vraie. On va montrer qu'il n'en est pas ainsi si l'on se place en dehors de la catégorie des A-algèbres graduées. Précisément, on va donner un exemple d'un A-module projectif de type fini et non libre et tel que son algèbre symétrique (où l'on ne tient pas compte de la structure d'algèbre graduée) soit un A-module libre.

Pour cela, on rappelle tout d'abord le lemme suivant :

LEMME 4. — *Soient* A *un anneau de Dedekind et* M *un* A-*module projectif.* (i) *Si* M *est de type fini et de rang* $n+1$, $n \geqslant 0$, *alors il existe un idéal entier* $\underline{a}$ *de* A *tel que* $M = A^n \oplus \underline{a}$. (ii) *Si* M *n'est pas de type fini, alors* M *est libre* (cf. [4]).

Soient alors A un anneau de Dedekind et M un A-module projectif (non libre) de type fini et de rang $n+1$, $n \geqslant 0$. Il existe un idéal entier $\underline{a} \neq (0)$ de A tel que $M = A^n \oplus \underline{a}$. On sait que $\underline{a}$ est engendré par deux éléments a_1, a_2 et donc, $S(\underline{a}) = A[a_1 X, a_2 X]$, sous-anneau de l'anneau de polynômes $A[X]$. D'autre part, si X_i est l'image de e_i par l'injection canonique $A^n \to S(A^n)$, alors $S(A^n)$ est l'anneau de polynômes $A[X_1, \ldots, X_n]$, où $e_1, \ldots, e_n$ est la base canonique de A^n. Ceci nous montre que

$$\begin{aligned} S(M) = A[X_1, \ldots, X_n] \otimes_A A[a_1 X, a_2 X] \\ = A[X_1, \ldots, X_n, a_1 X, a_2 X]. \end{aligned}$$

Comme M est un A-module projectif, il en est de même de S(M) et comme S(M) n'est pas de type fini, alors il est libre.

4. Factorialité de l'algèbre symétrique d'un module projectif.

Soient A un anneau et L un A-module libre de type fini ayant une base $e_1, \ldots, e_n$. Si X_i est l'image de e_i par l'injection canonique $L \to S(L)$, alors on sait que

$$S(L) = A[X_1, \ldots, X_n]$$

et d'après le théorème de Gauss, *si* A *est factoriel, il en est de même de* S(L). On peut alors penser à cette même question si l'on remplace L par un A-module projectif. Plus précisément, on va démontrer le résultat suivant :

THÉORÈME 3. — *Soient* A *un anneau factoriel et* M *un* A-*module projectif de type fini. L'algèbre symétrique* S(M) *est aussi un anneau factoriel.*

Soient $x_1, \ldots, x_n$ un système de générateurs de M sur A, $B = A[X_1, \ldots, X_n]$ et $R = S(M)$. On va montrer que R est un anneau factoriel. Pour cela on remarque que comme

M est projectif, il existe un A-module projectif M′ tel que $A^n = M \oplus M'$ et donc, $B = R \otimes_A S(M')$. Puisque $S(M')$ est projectif et $S^0(M') = A$ est un A-module fidèlement plat, alors $S(M') = A \oplus \sum_{q=1}^{\infty} S^q(M')$ est aussi un A-module fidèlement plat (cf. [3], ch. I, § 3, n. 1, proposition 3). Par extension des scalaires il en résulte que $B = R \otimes_A S(M')$ est un R-module fidèlement plat. Supposons maintenant que l'anneau A soit factoriel et soit $\underline{a} = Rb \cap Rc$ l'intersection de deux idéaux principaux. On va montrer que l'idéal $\underline{a}$ est principal. Comme B est un R-module fidèlement plat, alors $\underline{a}B = Bb \cap Bc$ et comme B est factoriel, alors $Bb \cap Bc = Bd$, où $d = \text{ppcm}$ (b, c) dans B. Étant donné que B/R est R-plat, alors $\underline{a} = \underline{a}B \cap R = Bd \cap R$. On remarque que l'on peut écrire $B = R \oplus \underline{q}$, où $\underline{q}$ est l'idéal de B donné par

$$\underline{q} = \sum_{q=1}^{\infty} (R \otimes_A S^q(M')).$$

Donc, $d \in B$ se décompose d'une façon unique

$$d = e + f, \qquad \text{où} \qquad e \in R \qquad \text{et} \qquad f \in \underline{q}.$$

On va montrer que $\underline{a} = Re$. En effet, comme b et c divisent d dans B, alors b et c divisent e dans R et donc, $Re \subset \underline{a}$. D'autre part, si $u \in Bd \cap R$, on peut écrire

$$u = (x + g)(e + f), \qquad \text{où} \qquad x \in R,\ g \in \underline{q}.$$

Ceci nous donne $u = xe$ et $xf + gd = 0$ et donc, $u \in Re$. Les inclusions $Re \subset \underline{a} = Bd \cap R \subset Re$ nous donnent $\underline{a} = Re$ et donc, R est factoriel.

Par la suite, on donnera une deuxième démonstration du théorème 3 et pour cela on va démontrer le lemme suivant :

Lemme 5 (P. Samuel). — *Soit* $B = \sum_{q=0}^{\infty} B_q$ *un anneau gradué factoriel. Alors* B_0 *est factoriel.*

En effet, dans un anneau gradué factoriel, tout élément homogène $\neq 0$ est produit d'éléments premiers homogènes. Donc, tout élément $\neq 0$ de B_0 est produit d'éléments de B_0 qui sont premiers dans B, donc aussi dans B_0.

Deuxième démonstration du théorème 2. — On considère sur B, qui est factoriel en tant qu'anneau de polynômes à coefficients dans A, la graduation $B = \sum_{q=0}^{\infty} B_q$ où $B_q = R \otimes_A S^q(M')$ pour tout $q \geqslant 0$. D'après le lemme 5, $B_0 = R \otimes_A A = R$ est aussi factoriel.

Théorème 4. — *Soient* A *un anneau et* $\underline{a}$ *un idéal de* A. *Si* $S(\underline{a})$ *est factoriel alors* A *est factoriel et* $\underline{a}$ *est principal.*

En effet, si l'on considère l'anneau gradué factoriel $S(\underline{a}) = \sum_{q=0}^{\infty} S^q(\underline{a})$, d'après le lemme 5, $S^0(\underline{a}) = A$ est aussi factoriel. Comme $S(\underline{a})$ est intègre, $S(\underline{a})$ s'identifie à l'anneau de Ress $R(\underline{a})$. Étant donné que A est factoriel, il existe un élément a dans $\underline{a}$ tel qu'aucun diviseur strict de a ne soit dans $\underline{a}$. Alors l'élément aX de $S(\underline{a})$ est irréductible dans $S(\underline{a})$, donc premier. Pour tout élément b dans $\underline{a}$, on a $b(aX) = a(bX)$ et comme aX ne divise pas a dans $S(\underline{a})$ (sinon, $0 = d^0(a) \geqslant d^0(aX) = 1$, où d^0 désigne le degré), alors il divise bX dans $S(\underline{a})$. Ceci nous montre qu'il existe un élément c dans $S(\underline{a})$, nécessairement de degré $0 (c \in S^0(\underline{a}) = A)$, tel que $bX = c(aX)$ et donc, $b = ca$. On a ainsi $\underline{a} = Aa$.

Finalement on va montrer que, en général, S(M) factoriel n'entraîne pas M projectif. D'après le lemme 5, on sait seulement que si S(M) est factoriel alors $S^0(M) = A$ est aussi factoriel. Soient, en effet, k un corps, A l'anneau local

$$k[t_1, \ldots, t_n]_{(t_1, \ldots, t_n)}, \quad \underline{m} = (t_1, \ldots, t_n)A$$

son idéal maximal et M un A-module de générateurs $e_1, \ldots, e_n$ liés par la relation $\sum_{i=1}^{n} t_i e_i = 0$. Comme les t_i sont dans $\underline{m}$, ils sont non inversibles dans A et donc, $e_1, \ldots, e_n$ est un système minimal de générateurs de M. Ceci nous montre que M n'est pas libre (ni projectif, car A est local). On voit facilement que $S(M) = A[x_1, \ldots, x_n]$ avec $\sum_{i=1}^{n} t_i x_i = 0$. On va montrer que S(M) est factoriel. En effet, on considère l'anneau $B = k[t_1, \ldots, t_n; x_1, \ldots, x_n]$ où $\sum_{i=1}^{n} t_i x_i = 0$. Si $n \geqslant 3$, B est factoriel car

$B[x_n^{-1}] = k[t_1, \ldots, t_{n-1};\ x_1, \ldots, x_n]\ [x_n^{-1}]$ est factoriel et d'après le théorème de Nagata, il en est de même de B. Puisque $S(M) = B_{\underline{m}}$, il en résulte que S(M) est factoriel.

Note. — Depuis la rédaction de ce papier, des progrès ont été faits sur la factorialité des algèbres symétriques (cf. P. Samuel, Anneaux gradués factoriels et modules réflexifs, Bull. Soc. Math. France 1964 et P. Samuel, Modules réflexifs et anneaux factoriels, Séminaire Dubreil 1963-1964, Exposé du 27 janvier 1964).

BIBLIOGRAPHIE

[1] N. Bourbaki, *Algèbre*, chap. II (Algèbre Linéaire), 3e édition, Hermann, Paris, 1962.

[2] N. Bourbaki, *Algèbre*, Chap. III (Algèbre Multilinéaire), 2e édition, Hermann, Paris, 1958.

[3] N. Bourbaki, *Algèbre Commutative*, chap. I et II, Hermann, Paris, 1961.

[4] N. Bourbaki, *Algèbre Commutative*, chap. VI, à paraître.

[5] P. Cartier, Questions de rationnalité des diviseurs en Géométrie Algébrique, Appendice, *Bull. Soc. Math. France* 86 (1958), 177-251.

[6] C. Chevalley, *Théorie des Groupes de Lie*, tome II (Groupes Algébriques), Hermann, Paris, 1951.

[7] C. Chevalley, The construction and study of certain important algebras, *The Mathematical Society of Japan*, Tokyo, 1955.

[8] C. Chevalley, Fundamental concepts of algebra, *Academic Press Inc.*, New York, 1956.

[9] A. Dold, Les foncteurs dérivés d'un foncteur non-additif, *Séminaire Bourbaki*, 1958-1959, Exposé 170.

[10] A. Dold, Homology of symmetric products and other functors of complexes, *Ann. of Math.* 68 (1958), 54-80.

[11] A. Dold and D. Puppe, Non-additive functors, their derived functors and the suspension homomorphism, *Proc. Nat. Ac. Sc.* USA 44 (1958), 1065-1068.

[12] A. Dold und D. Puppe, Homologie nicht-additiver Funktoren, Anwendungen, *Annales Inst. Fourier*, 11 (1961), 201-312.

[13] G. Glaeser, Théorie intrinsèque des polynômes et dualité, *Bull. Sc. Math.*, 85 (1961), 17-28.

[14] A. Grothendieck et J. Dieudonné, Éléments de Géométrie Algébrique I, *Publications Math. de l'IHES* n. 4, Paris, 1960.

[15] J. L. Koszul, Álgebra Multilinear, *Sociedade de Matemática de São Paulo*, São Paulo, 1956.

[16] F. S. Macaulay, The algebraic theory of modular systems, *Cambridge Tracts* n. 19, Cambridge University Press, 1916.

[17] A. Micali, Algèbre symétrique d'un idéal, *C.R. Acad. Sci.*, 251 (1960), 1954-1956.
[18] A. Micali, Algèbre symétrique d'un module unitaire, *C.R. Acad. Sci*, 252 (1961), 2658-2660 et 2803-2804.
[19] A. Micali, Algèbre de Rees d'un module unitaire, *C.R. Acad. Sci*, 252 (1961), 3181-3183.
[20] A. Micali, Sur les algèbres symétrique et extérieure d'un module projectif, *C.R. Acad. Sci*, 255 (1962), 2871-2873.
[21] D. G. Northcott, *Ideal Theory*, Cambridge University Press, 1953.
[22] D. G. Northcott, *An introduction to Homological Algebra*, Cambridge University Press, 1960.
[23] D. Rees, Two classical theorems of Ideal Theory, *Proc. Cambridge Phil. Soc.*, 52 (1956), 155-157.
[24] P. Ribenboim, Anneaux de Rees intégralement clos, *Journal R. und A. Math.* 204 (1960), 99-107.
[25] P. Samuel, P. Salmon et A. Micali, Intégrité et factorialité des algèbres symétriques, *Atas do 4º Coloquio Brasileiro de Matemática*, Poços de Caldas 1963, à paraître.
[26] P. Samuel, Sur les anneaux factoriels, *Bull. Soc. Math. France* 89 (1961), 155-173.
[27] O. Zariski and P. Samuel, *Commutative Algebra*, Van Nostrand, New York, vol. I (1958) and vol. II (1960).

(*Thèse, Fac. Sciences*, Paris, 1963.)

Artibano Micali,
81, rue Saint-Louis-en-l'île,
Paris (4e).