Annales de l'institut Fourier

Laurent Schwartz

Un lemme sur la dérivation des fonctions vectorielles d'une variable réelle

Annales de l'institut Fourier, tome 2 (1950), p. 17-18

<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1950__2__17_0>

UN LEMME SUR LA DÉRIVATION DES FONCTIONS VECTORIELLES D'UNE VARIABLE RÉELLE

par **Laurent SCHWARTZ** (Nancy).

Soit E un espace vectoriel, muni de deux topologies distinctes $\mathfrak{T}_1$ et $\mathfrak{T}_2$, $\mathfrak{T}_1$ plus fine que $\mathfrak{T}_2$. Soit d'autre part $t \to f(t)$ une application de la droite réelle dans E, supposée continuement différentiable pour la topologie la moins fine $\mathfrak{T}_2$, mais telle que sa dérivée $f'(t)$ soit continue pour la topologie la plus fine $\mathfrak{T}_1$. Nous allons supposer que les topologies $\mathfrak{T}_1$ et $\mathfrak{T}_2$ vérifient la propriété suivante : (P) *Quel que soit le $\mathfrak{T}_1$-voisinage de* o, V_1, *de* E, *il existe un $\mathfrak{T}_1$-voisinage* W_1, *tel que l'enveloppe convexe $\mathfrak{T}_2$-fermée de tout $\mathfrak{T}_1$-compact* C_1 *de* W_1 *soit dans* V_1.

Alors *la dérivée $f'(t)$ est aussi la dérivée de $f(t)$ pour la topologie la plus fine $\mathfrak{T}_1$.*

En effet, en vertu de la $\mathfrak{T}_1$-continuité de $f'(t)$, quel que soit V_1, il existe un nombre $\varepsilon > 0$ tel que $|t - t_0| \leqslant \varepsilon$ entraîne

$$[f'(t) - f'(t_0)] \in W_1.$$

Mais alors on peut écrire

$$[f(t) - f(t_0)]/(t - t_0) = (t - t_0)^{-1} \int_{t_0}^{t} f'(\tau) d\tau,$$

l'intégrale étant valable pour la topologie $\mathfrak{T}_2$.

Quand τ parcourt l'intervalle (t_0, t), $f'(\tau)$ décrit un $\mathfrak{T}_1$-compact $C_1 \subset f'(t_0) + W_1$, et l'intégrale du second membre reste dans l'enveloppe convexe $\mathfrak{T}_2$-fermée de ce compact, donc dans $f'(t_0) + V_1$ en vertu de la propriété (P). Cela prouve bien que $f'(t)$ est la dérivée pour la topologie $\mathfrak{T}_1$ la plus fine.

Voici deux cas importants pour lesquels la propriété (P) est vérifiée :

1° $\mathfrak{T}_1$ possède un système fondamental de voisinages de o convexes qui sont $\mathfrak{T}_2$-fermés. Alors on peut prendre $W_1 = V_1$. En particulier $\mathfrak{T}_2$ pourra être la topologie faible associée à $\mathfrak{T}_1$.

2° Dans $\mathfrak{T}_1$, l'enveloppe convexe fermée de tout compact C_1 est faiblement compacte. Elle est alors aussi $\mathfrak{T}_2$-faiblement compacte, donc $\mathfrak{T}_2$-fermée, et on peut encore prendre $W_1 = V_1$. En particulier (P) sera toujours vérifiée si E est $\mathfrak{T}_1$-complet.

(Parvenu aux Annales en février 1951.)