ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

YVES COLIN DE VERDIÈRE

Déterminants et intégrales de Fresnel

Annales de l'institut Fourier, tome 49, nº 3 (1999), p. 861-881

<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1999__49_3_861_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
49, 3 (1999), 861–881

DÉTERMINANTS ET INTÉGRALES DE FRESNEL

par Yves COLIN DE VERDIÈRE

François a fortement marqué notre communauté scientifique grenobloise : sa générosité et sa modestie ont été appréciées de tous ceux qui comme moi ont eu la chance de travailler en sa compagnie et de profiter de sa grande culture. Il a su franchir les barrières traditionnelles entre nos différents instituts de mathématiques : l'IMAG et l'Institut Fourier.

Son influence sur mes propres travaux sur les invariants de graphes et sur les réseaux électriques a été décisive. Il m'a appris le B.A.BA dont j'avais besoin sur les graphes et, bien plus, m'a introduit il y a plus de 10 ans aux travaux de Robertson-Seymour sur les mineurs de graphes. C'est lui aussi qui a soumis ma conjecture sur les réseaux électriques planaires en juin 93 à ses visiteurs Isidoro Gitler et Dirk Vertigan qui ont eu l'immédiate intuition de la solution du problème (voir [7]*) : parfois les problèmes attendent juste pour être résolus d'être posés à la bonne personne...*

La maladie qui l'a atteint en janvier 96 n'a pas coupé sa curiosité scientifique, malgré son affaiblissement de plus en plus marqué qui ne laissait guère de doute sur l'issue finale, il a continué à s'intéresser à la vie scientifique (et à la vie tout court...) sans se replier sur sa maladie. Plus qu'un collègue et un maître, c'est un ami que nous avons perdu.

Mots-clés : Déterminant – Intégrale de Fresnel – Intégrale de Feynman – Opérateur de Schrödinger – Graphe – Dirichlet to Neumann – Lagrangien – Symplectique – Opérateur intégral de Fourier – Réseau électrique – Conditions au bord.
Classification math. : 05C50 – 15A15 – 34B24 – 35J10 – 35J25 – 35S30 – 58G20.

1. Introduction.

Soit A une matrice réelle $n \times n$, symétrique et non dégénérée de signature σ ($\sigma = n_+ - n_-$ où n_- (resp. n_+) est l'indice de Morse de $q_A(x) = \frac{1}{2}\langle Ax|x\rangle$ (resp. $-q_A(x)$)). L'intégrale de Fresnel (semi-convergente) associée à A est donnée par

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{2\pi i q_A(x)}|dx| = \frac{1}{|\det(A)|^{\frac{1}{2}}} e^{i\sigma\pi/4}.$$

Dans cet article, les calculs d'intégrales de Fresnel sont utilisés comme outil pour calculer des déterminants de matrices symétriques. On particularise le calcul symbolique des opérateurs intégraux de Fourier à ces intégrales. Le calcul des intégrales de Fresnel (et par suite des déterminants) peut alors se faire de façon purement symbolique (une version linéaire exacte du calcul des opérateurs intégraux de Fourier de [26], [13], voir aussi [14] et [22]). Cela donne une approche directe aux formules pour les déterminants de *laplaciens* sur les graphes et les variétés *à bord* et leur relation avec la *réponse* (voir [10], [7]) ou l'opérateur *Dirichlet to Neumann* (voir [19], [20], [29]). On peut passer du cas de la dimension finie à celui de la dimension infinie grâce à la définition des intégrales de Feynman par approximations de dimension finie ([17]). On obtient en particulier un calcul simple et direct des déterminants d'opérateurs de Sturm-Liouville discrets ou continus (formule de Levit-Smilansky [29]). Le terme associé à une trajectoire périodique dans la *formule de Gutzwiller* ([23], [1], [2], [8], [6], [16], [32], [24]) s'en déduit facilement. Il faut remarquer que, dans [4], les cas discrets et continus sont examinés, mais que la relation entre les deux n'est obtenue que comme corollaire des formules de déterminants discrètes et continues.

À chaque fonction d'onde classique (demi-densité) $T = ae^{2\pi i Q(x)}|dx|^{\frac{1}{2}}$ où Q est une forme quadratique sur un espace vectoriel réel X de dimension n, on associe le *sous-espace lagrangien* L_Q de $X \oplus X'$ graphe de l'application linéaire symétrique $A : X \to X'$ telle que $Q(x) = \frac{1}{2}\langle Ax|x\rangle$ et la *demi-densité* $\sigma(T) = q^\star(|a|\ |dx|^{\frac{1}{2}}) \in \Omega^{\frac{1}{2}}(L_Q)$ sur L_Q où $q : L \to X$ est la projection canonique. On peut prolonger par continuité (phase stationnaire) cette correspondance aux distributions du type $a\delta(Y)e^{2\pi i Q(y)}|dy|^{\frac{1}{2}}|dz|^{-\frac{1}{2}}$ où $Y \subset X$ est un sous-espace, $X = Y \oplus Z$ avec $x = (y, z)$ et Q une forme quadratique sur Y. On se focalisera sur deux opérations de base :

1. Le *produit scalaire* $\int_X T_1 \bar{T}_2$ qui est défini comme une mesure sur

$q(L_1 \cap L_2)$ et qui se calcule grâce à un produit noté $\omega_1 \star \omega_2$ de demi-densités.

2. L'image par un *opérateur intégral* de noyau
$$K(x,y) = ae^{2\pi i Q(x,y)}|dxdy|^{\frac{1}{2}}$$
associé à la relation canonique R_Q de fonction génératrice Q, i.e. dont le graphe est
$$\left\{\left(y, \eta = -\frac{\partial Q}{\partial y}\ ; x, \xi = \frac{\partial Q}{\partial x}\right)\right\}.$$

Les résultats principaux sont alors :

1. Le théorème 4 où est exprimé le déterminant d'un problème avec conditions au bord à partir du propagateur et de la condition au bord.
2. Le calcul du propagateur dans le cas d'un graphe linéaire en utilisant l'unitarité (théorème 5 et son corollaire 2).
3. Une démonstration directe de la formule de Levit et Smilansky couvrant des conditions au bord quelconques (section 9).

Nous n'avons pas détaillé ici la preuve de la formule de Gutzwiller qui en découle, ni l'utilisation de l'intégrale de Feynman pour les calculs semi-classiques (prolongeant le travail [9]).

2. Conventions et notations.

2.1. Phases.

On ne fera que des calculs d'amplitude, les phases seront correctes à un décalage de $k\frac{\pi}{4}$ près. En particulier, on n'insistera pas pour calculer le signe des déterminants.

2.2. Espaces de phases.

En général, X, Y désigneront des espaces vectoriels réels de dimension finie n; $\mathcal{X}$, $\mathcal{Y}$ seront les espaces de phases associés : si X' est le dual de X, $\mathcal{X} = X \oplus X'$ est muni de la structure symplectique canonique Ω_X (voir [14] p. 58 et suivantes). On notera x, y les vecteurs des espaces de configuration, ξ, η ceux de leurs duaux. Un sous-espace $L \subset \mathcal{X}$ sera dit *lagrangien* si $\dim L = \dim X$ et si Ω_X est nulle sur $L \times L$. On notera $\mathcal{L}_X$ la grassmannienne des sous-espaces lagrangiens de $\mathcal{X}$. On notera $|dx|$ une mesure de Lebesgue sur X et $|dxd\xi|$ la mesure de Liouville.

2.3. Demi-densités.

Si Z est un espace vectoriel de dimension finie, on note $\Omega^{\frac{1}{2}}(Z)$ le cône réel de dimension 1 des $a|dz|^{\frac{1}{2}}$, $a \geq 0$. Un élément de $\Omega^{\frac{1}{2}}(Z)$ sera appelé demi-densité sur Z. Si $L : X \to Z$ est un isomorphisme linéaire et que X (resp. Z) est muni d'une mesure $|dx|$ (resp. $|dz|$), on peut définir le déterminant de L et on a $L^\star(a|dz|^{\frac{1}{2}}) = a|\det(L)|^{\frac{1}{2}}|dx|^{\frac{1}{2}}$. Le carré d'une demi-densité est une densité (i.e. une mesure de Lebesgue).

2.4. Distributions.

On note $\mathcal{S}(X, \Omega^{\frac{1}{2}})$ l'espace des demi-densités $f(x)|dx|^{\frac{1}{2}}$ où f est une fonction de la classe de Schwartz sur X. Le dual est noté $\mathcal{S}'(X, \Omega^{\frac{1}{2}})$. On a

$$\mathcal{S}(X, \Omega^{\frac{1}{2}}) \subset \mathcal{S}'(X, \Omega^{\frac{1}{2}}).$$

On note $T = \delta(0)|dx|^{-\frac{1}{2}}$ la distribution de $\mathcal{S}'$ donnée par $\langle T \mid f|dx|^{\frac{1}{2}} \rangle = f(0)$.

Plus généralement si $Y \subset X$ est un sous-espace et $X = Y \oplus Z$, on introduit des distributions de Dirac

$$T = \delta(Y)|dy|^{\frac{1}{2}}|dz|^{-\frac{1}{2}}$$

définies par

$$\langle T \mid f(y,z)|dydz|^{\frac{1}{2}} \rangle = \int_Y f(y,0)|dy|.$$

2.5. Opérateurs symétriques et formes quadratiques.

Si $A : X \to X'$ est une application linéaire symétrique, on note $q_A(x) = \frac{1}{2}\langle Ax|x \rangle$ la forme quadratique associée et $\Gamma_A = L_{q_A} = \{(x, Ax)\} \subset \mathcal{X}$ son graphe. En particulier, le déterminant d'une forme quadratique est par définition celui de A. **Ce n'est pas la convention usuelle.**

DÉFINITION 1. — *Si $Y \subset X$ et $B : Y \to Y'$ est symétrique, le couple (Y, B) sera appelé* opérateur symétrique avec domaine. *On lui associe la forme $q_B(y) = \frac{1}{2}\langle By|y\rangle$ sur Y et le graphe*

$$\Gamma_{Y,B} = \{(y, \xi) \mid y \in Y,\ \xi_{|Y} = By\}.$$

On rappelle le :

THÉORÈME 1 ([11]). — *L'application $\Phi : (Y, B) \to \Gamma_{Y,B}$ est une bijection de l'ensemble des opérateurs symétriques avec domaine sur la grassmannienne lagrangienne $\mathcal{L}_X$.*

3. Distribution de Fresnel et leurs symboles.

Soit L un sous-espace lagrangien de $X \oplus X'$, on note q_L (resp. p_L) les projections de L sur X (resp. X'). On associe à chaque L un sous-espace complexe D_L de dimension 1 de $\mathcal{S}'(X, \Omega^{\frac{1}{2}})$. Si $L = \{(x, Ax)|x \in X\}$, $D_L = \{ae^{2\pi i q_A(x)}|dx|^{\frac{1}{2}} \mid a \in \mathbb{C}\}$.

Si $L = 0 \oplus X'$,

$$D_L = \{a\delta(0)|dx|^{-\frac{1}{2}} \mid a \in \mathbb{C}\}.$$

Si $L = \Gamma_{Y,B}$ et $X = Y \oplus Z$ (noté $x = (y, z)$)

$$D_L = \{ae^{2i\pi q_B(y)}\delta(Y)|dy|^{\frac{1}{2}}|dz|^{-\frac{1}{2}} \mid a \in \mathbb{C}\}.$$

La collection des D_L est un fibré vectoriel de rang 1 sur la grassmannienne lagrangienne. Pour le voir au voisinage de $\Gamma_{(Y,B)}$, on utilise une transformée de Fourier partielle par rapport à la variable z.

On va définir, pour tout $T \in D_L$, son symbole $\sigma(T) \in \Omega^{\frac{1}{2}}(L)$. On aura

$$\sigma(\lambda T) = |\lambda|\sigma(T).$$

DÉFINITION 2 (Voir [38], [14]). — *À la distribution*

$$T = ae^{2\pi i q_A(x)}|dx|^{\frac{1}{2}}$$

de D_{Γ_A} on associe son symbole, *la demi-densité $\sigma(T)$ sur Γ_A définie par*

$$\sigma(T) = q^{\star}_{\Gamma_A}(|a|\ |dx|^{\frac{1}{2}}).$$

Si $T = ae^{2i\pi q_B(y)}|dy|^{\frac{1}{2}}|dz|^{-\frac{1}{2}}$, et $\Pi : \Gamma_{Y,B} \to Y \oplus Z'$ est la projection canonique, $\sigma(T) = \Pi^\star(|a||dy|^{\frac{1}{2}}|d\zeta|^{\frac{1}{2}})$ où $|d\zeta|$ est telle que $|dzd\zeta|$ est la mesure de Liouville sur $\mathcal{Z}$.

La méthode de la phase stationnaire montre que

$$T_\varepsilon = |(\det(Q/\varepsilon)|^{\frac{1}{2}} e^{2\pi i Q(x)/\varepsilon}|dx|^{\frac{1}{2}} \to e^{ik\pi/4}\delta(0)|dx|^{-\frac{1}{2}},$$

dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n, \Omega^{\frac{1}{2}})$ lorsque $\varepsilon \to 0$. Or

$$\sigma(T_\varepsilon) = p^\star_{L_\varepsilon}(|d\xi|^{\frac{1}{2}}),$$

d'où l'on déduit la continuité du calcul symbolique.

L'application $T \to \sigma(T)$ est une application continue fibrée du fibré $(D_L \to \mathcal{L})$ sur le fibré $(\Omega^{\frac{1}{2}}(L) \to \mathcal{L})$.

4. Le produit scalaire.

4.1. Produit de demi-densités.

Soient L_1 et L_2 deux espaces lagrangiens et $\omega_i \in \Omega^{\frac{1}{2}}(L_i)$, $i = 1, 2$, on leur associe une densité $\omega_1 \star \omega_2$ sur $L_1 \cap L_2$. Si $L_1 \cap L_2 = 0$, $L_1 \oplus L_2 = \mathcal{X}$ et on a ainsi une demi-densité $\omega_1 \otimes \omega_2$ sur $\mathcal{X}$. On pose

$$\omega_1 \star \omega_2 = \frac{\omega_1 \otimes \omega_2}{|dxd\xi|^{\frac{1}{2}}},$$

qui est un élément de $\Omega^1(\{0\})$ qui s'identifie canoniquement à $\mathbb{R}$.

Si $L_1 \cap L_2 = K$, soit $W = K^o/K$ l'espace symplectique réduit associé et M_i les images des L_i par la réduction. On a les isomorphismes $L_i = K \oplus M_i$,

$$\Omega^{\frac{1}{2}}(L_i) = \Omega^{\frac{1}{2}}(K) \otimes \Omega^{\frac{1}{2}}(M_i)$$

ce qui permet de se ramener au cas précédent : si $\omega_i = k_i \otimes \mu_i$, on pose $\omega_1 \star \omega_2 = (k_1 k_2) \otimes (\mu_1 \star \mu_2)$ où le produit $k_1 k_2$ est le produit de 2 demi-densités dans K qui est une densité sur K. On a ainsi construit dans tous les cas $\omega_1 \star \omega_2$ qui est un élément de $\Omega^1(L_1 \cap L_2)$.

PROPOSITION 1. — *Supposons X muni d'une mesure de Lebesgue $|dx|$, on peut alors définir le déterminant d'une application linéaire de X dans X', car X' est muni d'une mesure de Lebesgue $|d\xi|$ associée à $|dx|$, on demande à $|dxd\xi|$ d'être la mesure de Liouville.*

Si $L_1 \cap L_2 = \{0\}$ et que $L_i = \{(x, A_i x)\}$, le produit $p = q^\star_{L_1}(|dx|^{\frac{1}{2}}) \star q^\star_{L_2}(|dx|^{\frac{1}{2}})$ vaut

$$p = \frac{1}{|\det(A_1 - A_2)|^{\frac{1}{2}}}.$$

Preuve. — On doit calculer le déterminant de l'application

$$C : X \oplus X \to X \oplus X'$$

définie par

$$C(x, y) = (x + y, A_1 x + A_2 y).$$

Il est clair que

$$|\det(C)| = |\det(A_1 - A_2)|,$$

d'où l'on déduit le résultat. □

4.2. Produit scalaire de distributions.

Si on souhaite calculer $\int T_1 \bar{T}_2$, on obtient une intégrale de Fresnel si $L_1 \cap L_2 = 0$ dont la valeur absolue est $\sigma(T_1) \star \sigma(T_2)$.

En général cette intégrale n'est calculable que transversalement à $Z = \pi(L_1 \cap L_2)$ et donne lieu à une mesure sur Z.

THÉORÈME 2. — *Si $f : x \to z$ est une projection linéaire de X sur Z et $\varphi \in C^\infty_o(Z)$, $\varphi \geq 0$, on a :*

$$|\int_X T_1 \bar{T}_2 \varphi(f(x))| = \int_Z \varphi(z) d\mu(z)$$

où $d\mu = \sigma(T_1) \star \sigma(T_2)$.

Preuve. — Soit, pour $j = 1, 2$, $T_j = a_j e^{2\pi i Q_j(x)} |dx|^{\frac{1}{2}}$ et supposons $Q_j(x) = \frac{1}{2}\langle A_j x | x\rangle$ avec $\ker(A_1 - A_2) = 0$, on a :

$$|\int T_1 \bar{T}_2| = \frac{|a_1 \bar{a}_2|}{|\det(A_1 - A_2)|^{\frac{1}{2}}}.$$

C'est exactement le produit $\sigma(T_1) \star \sigma(T_2)$ d'après la proposition 1. Le cas général s'obtient par continuité du calcul symbolique et par produits tensoriels. □

5. Opérateurs unitaires.

Soit $\mathcal{X} = X \oplus X'$ et $\mathcal{Y} = Y \oplus Y'$.

DÉFINITION 3. — *Soit $\chi : \mathcal{Y} \to \mathcal{X}$ un isomorphisme canonique, i.e. tel que $\chi^\star(\Omega_X) = \Omega_Y$. Le graphe de χ est muni d'une demi-densité canonique, notée ω_χ transportée des racines carrées des mesures de Liouville sur $\mathcal{X}$ ou sur $\mathcal{Y}$.*

Si la projection canonique $\pi : \Gamma_\chi \to X \oplus Y$ est un isomorphisme, la demi-densité canonique ω_χ s'exprime en terme de x et y par

$$\omega_\chi = \pi^\star(|\theta|^{-\frac{1}{2}}|dx|^{\frac{1}{2}}|dy|^{\frac{1}{2}})$$

où θ s'interprète comme le déterminant des *applications exponentielles*

$$\alpha : (x,\xi) \to (x,y) \text{ ou } \beta : (y,\eta) \to (y,x),$$

définies par la condition que si $(x,\xi) = \chi(y,\eta)$

$$\alpha(x,\xi) = (x,y).$$

DÉFINITION 4. — *Soit χ la transformation canonique de fonction génératrice $Q(x,y)$, i.e.*

$$\chi\Big(y, -\frac{\partial Q}{\partial y}\Big) = \Big(x, \frac{\partial Q}{\partial x}\Big).$$

L'opérateur unitaire associé à χ est l'opérateur dont le noyau (au sens de l'intégrale de Fresnel) est

$$K_\chi(x,y)|dxdy|^{\frac{1}{2}} = |\theta|^{-\frac{1}{2}} e^{2\pi i Q(x,y)}|dxdy|^{\frac{1}{2}}.$$

On a alors le :

THÉORÈME 3. — *Si $T_0|dy|^{\frac{1}{2}} \in D_{L_0}$ et $\sigma(T_0|dy|^{\frac{1}{2}}) = \omega_0$,*

$$\int K_\chi(x,y)T_0(y)|dy|\,.|dx|^{\frac{1}{2}} = T_1(x)|dx|^{\frac{1}{2}}$$

où $T_1(x)|dx|^{\frac{1}{2}} \in D_{\chi(L_0)}$ et $\sigma(T_1(x)|dx|^{\frac{1}{2}}) = \chi^\star\big(\sigma(T_0(y)|dy|^{\frac{1}{2}})\big)$.

COROLLAIRE 1.

$$\int K_{\chi_1}(x,y)K_{\chi_2}(y,z)|dy| = K_{\chi_1\circ\chi_2}(x,z),$$

à une phase près.

Preuve. — Soit

$$Q(x,y) = \frac{1}{2}\langle Ax|x\rangle + \langle Dx|y\rangle + \frac{1}{2}\langle Cy|y\rangle,$$

on a alors

$$\theta = |\det(D)|^{-1}.$$

On doit évaluer

$$I = \int a\theta^{-\frac{1}{2}} e^{2\pi i(Q(x,y)+Q_0(y))}|dy|\ |dx|^{\frac{1}{2}}.$$

Par la phase stationnaire, on trouve :

$$I = \theta^{-\frac{1}{2}} e^{2\pi i Q_1(x)} |\det(C + A_0)|^{-\frac{1}{2}} |dx|^{\frac{1}{2}}.$$

La demi-densité

$$\theta^{-\frac{1}{2}} |\det(C + A_0)|^{-\frac{1}{2}} |dx|^{\frac{1}{2}}$$

est bien l'image de $a|dy|^{\frac{1}{2}}$ par $y \to x = -D^{-1}(A_0+C)y$ qui est l'application résultant des flèches évidentes :

$$X \to L_0 \xrightarrow{\chi} L_1 \to X.$$

□

6. Problèmes à bord.

On suppose maintenant que $X = X_{\text{bord}} \oplus X_{\text{int}}$ et on écrit $x = (y, z)$. On suppose X_{int} muni d'une mesure de Lebesgue et X_{bord} d'une structure euclidienne. On se donne une forme quadratique $Q = Q(y,z)$ sur X. On pose

$$\frac{\partial Q}{\partial z} = Az + Cy,\ \frac{\partial Q}{\partial y} = C^\star z + Dy.$$

On supposera (bien que ce ne soit pas nécessaire) que A est inversible.

DÉFINITION 5. — *L'application* réponse $R_Q : X_{\text{bord}} \to X'_{\text{bord}}$, *est l'application linéaire symétrique définie par* $R_Q(y) = C^\star z + Dy$ *où* z *vérifie* $Az + Cy = 0$.

Si $L = L_Q \subset \mathcal{X}$, $R = L_{R_Q}$ *est la réduite symplectique de* L *par rapport à l'espace coisotrope* $\zeta = 0$. *Dans le langage de Hörmander* ([14], [26]) Q *est une* fonction phase *de* R. *Dans le langage des EDP,* R_Q *est* *l'application* Dirichlet to Neumann*(voir* [35]*). Dans le langage des réseaux électriques* ([10]*),* R_Q *est la* réponse.

DÉFINITION 6. — *On définit le* propagateur *associé à* Q *comme la distribution* $\mathcal{P} \in D_R$ *définie par l'intégrale de Fresnel*

$$\mathcal{P} = \left(\int_{X_{\text{int}}} e^{2i\pi Q(y,z)} |dz| \right) |dy|^{\frac{1}{2}},$$

et son symbole $\sigma(\mathcal{P}) \in \Omega^{\frac{1}{2}}(R)$.

Soit maintenant (W, B) un opérateur symétrique sur $W \subset X_{\text{bord}}$. On lui associe la forme quadratique de domaine $W \oplus X_{\text{int}}$ définie par : $Q_B(y, z) = Q(y, z) + q_B(y)$. Comme $W \oplus X_{\text{int}}$ est muni de la mesure de Lebesgue $|dw| \otimes |dz|$ ($|dw|$ est la mesure euclidienne), on peut définir le déterminant de la forme quadratique Q_B.

DÉFINITION 7. — *La distribution* $\mathcal{B} \in D_{W,B}$ *appelée* distribution limite *est définie par*

$$\mathcal{B}(y) = e^{-2i\pi q_B(w)} \delta(W) |dw|^{\frac{1}{2}} |dv|^{-\frac{1}{2}},$$

où $y = (v, w) \in X_{\text{bord}}$.

On s'intéresse au calcul de $|\det(Q_B)|$; on aimerait en particulier connaître sa dépendance par rapport à B.

Avec les notations précédentes, on a :

THÉORÈME 4. — *Si* $Q_B = Q + q_B$ *est non dégénérée,*

$$|\det(Q_B)| = |\sigma(\mathcal{P}) \star \sigma(\mathcal{B})|^{-2}$$

est le produit $\star$ *des symboles du propagateur et de la distribution limite. On convient dans cette formule et dans la suite de poser* $\sigma(\mathcal{P}) \star \sigma(\mathcal{B}) = \infty$ *si les 2 variétés lagrangiennes* R *et* $L_{W,B}$ *ne se coupent pas transversalement.*

Preuve. — En effet

$$I = |\det(Q_B)|^{-\frac{1}{2}} = \int_X e^{2\pi i (Q(y,z) + q_B(y))} |dy|\ |dz|$$

et cette intégrale I se calcule en intégrant d'abord par rapport à z, ce qui donne

$$I = \langle \mathcal{P} | \mathcal{B} \rangle$$

et donc I est le produit $\star$ des symboles. □

L'objectif de ce qui suit est de calculer le symbole du propagateur dans un contexte géométrique (graphes ou opérateurs de Sturm-Liouville).

7. Déterminants d'opérateurs différentiels sur un graphe fini.

Le formalisme précédent peut s'appliquer au cas d'un graphe fini $G = (V, E)$; V désigne l'ensemble (fini) des sommets de G et E l'ensemble (fini) des arêtes (paires de sommets). On introduit un espace euclidien $X_G = \bigoplus_{j \in V} X_j$ où les X_j sont des espaces euclidiens de dimension n que l'on identifie une fois pour toutes à un unique espace euclidien X_0. Soit $V_0 \subset V$ (le bord de G) et $V_1 = V \setminus V_0$. On note E_1 l'ensemble des arêtes dont au moins un des sommets est dans V_1. On pose $X_{\text{int}} = \bigoplus_{j \in V_1} X_j$ et $X_{\text{bord}} = \bigoplus_{j \in V_0} X_j$. On note z (resp. y) le vecteur générique de X_{int} (resp. X_{bord}) et $x = (x_i) = (y, z)$ le vecteur générique de X_G.

7.1. Le propagateur.

DÉFINITION 8. — *La forme quadratique*

$$Q(x) = \sum_{\{i,j\} \in E_1} c_{i,j}(x_i, x_j) + \sum_{j \in V} q_j(x_j)$$

où les q_j sont des formes quadratiques sur X_j et les $c_{i,j}$ des formes bilinéaires non dégénérées sur $X_i \times X_j$ est dite subordonnée à G.

On définit alors comme au paragraphe 6 la réponse R (voir aussi [10] et [7]) et le propagateur $\mathcal{P} \in D_R$ par

$$\mathcal{P} = \left(\int_{X_{\text{int}}} e^{2i\pi Q(y,z)} |dz| \right) |dy|^{\frac{1}{2}}.$$

On s'intéressera plus bas aux calculs de propagateurs, mais on peut déjà noter la formule de composition suivante. Si G' et G'' sont deux graphes disjoints et qu'on a identifié une partie W du bord de G' à une partie du bord de G'' : $V_0' = W_0' \cup W$, $V_0'' = W_0'' \cup W$. On a alors 3 propagateurs naturels $\mathcal{P}'(y_0', z)$, $\mathcal{P}''(z, y_0'')$ et $\mathcal{P}(y', y'')$ qui sont reliés par

$$(1) \qquad \mathcal{P}(y', y'') = \int_{X_W} \mathcal{P}'(y', w) \mathcal{P}''(w, y'') |dw|,$$

avec $X_W = \sum_{j \in W} X_j$.

7.2. Les distributions limites.

Donnons quelques exemples de distributions limites.

Exemple 1 : problème de Dirichlet. — On prend $W = \{0\}$ et $\mathcal{B} = \delta(0)|dy|^{-\frac{1}{2}}$.

Exemple 2 : problème périodique. — Soit $V_0 = A \cup B$ une partition du bord en 2 sous-ensembles de mêmes cardinaux et $\sigma : A \to B$ une bijection. On prend $W = \{y = (\cdots, y_a, \cdots ; \cdots, y_b, \cdots) \mid \forall a \in A,\ y_{\sigma(a)} = y_a\}$. Si $X_{\text{bord}} = W \oplus W'$ est une décomposition orthogonale, on pose

$$\mathcal{B} = \delta(W)|dw'|^{-\frac{1}{2}}|dw|^{\frac{1}{2}}.$$

Exemple 3 : problème de Neumann. — On prend $W = X_{\text{bord}}$ et $\mathcal{B} = 0$.

7.3. Les déterminants.

Le déterminant de Q_B se calcule à partir du propagateur et de la distribution $\mathcal{B}$ comme dans le théorème 4.

Le but est de calculer exactement les propagateurs, mais on a en tout cas une formule relative :

PROPOSITION 2. — *Supposons $Q(y, z)$ donnée; soient $\omega_0 \in \Omega^{\frac{1}{2}}(R)\setminus 0$, et $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$ deux distributions limites, on a :*

$$\frac{|\det(Q_{\mathcal{B}_1})|}{|\det(Q_{\mathcal{B}_2})|} = \left|\frac{\omega_0 \star \sigma(\mathcal{B}_1)}{\omega_0 \star \sigma(\mathcal{B}_2)}\right|^{-2}. \tag{2}$$

8. Propagateurs d'opérateurs de Sturm-Liouville discrets.

8.1. Le cas d'un graphe linéaire.

On considère le cas où $G = P_N$ est un chemin à $N+1$ sommets : $V = \{0, 1, \cdots, N\}$, $V_0 = \{0, N\}$ et $E = \{\{i, i+1\} | i = 0, \cdots, N-1\}$. Soit

$$Q(x_0, \cdots, x_N) = \sum_{i=0}^{N-1} c_i(x_i, x_{i+1}) + \sum_{i=0}^{N} q_i(x_i),$$

avec $q_i(x) = \dfrac{1}{2}\langle A_i x | x\rangle$ et $c_i(x_i, x_{i+1}) = \langle x_i | C_i x_{i+1}\rangle = \langle C_i^\star x_i | x_{i+1}\rangle$. On pose $\gamma_i = |\det(c_i)| > 0$.

8.2. Réponse et application de Poincaré.

La réponse R est liée de façon simple à l'application de Poincaré. On définit pour $0 \leq i \leq N-2$

$$\chi_i : \mathcal{X}_i \rightarrow \mathcal{X}_{i+1}$$

comme la transformation canonique de fonction génératrice $S_i(x_i, x_{i+1}) = q_i(x_i) + c_i(x_i, x_{i+1})$. On définit χ_{N-1} à l'aide de la fonction génératrice $S_{N-1}(x_{N-1}, x_N) = q_{N-1}(x_{N-1}) + c_{N-1}(x_{N-1}, x_N) + q_N(x_N)$. On a donc, pour $0 \leq i \leq N-2$:

$$\chi_i(x_i, -A_i x_i - C_i x_{i+1}) = (x_{i+1}, C_i^\star x_i),$$

et

$$\chi_{N-1}(x_{N-1}, -A_{N-1}x_{N-1} - C_{N-1}x_N) = (x_N, C_{N-1}^\star x_N + A_N x_N).$$

Soit $\chi = \chi_{N-1} \circ \cdots \circ \chi_0 : \mathcal{X}_0 \rightarrow \mathcal{X}_N$ la transformation canonique (application de Poincaré) qui, à $(x_0, -A_0 x_0 - C_0 x_1)$, associe $(x_N, C_{N-1}^\star x_{N-1} + A_N x_N)$ où x_i satisfait pour $1 \leq i \leq N-1$:

$$C_{i-1}^\star x_{i-1} + A_i x_i + C_i x_{i+1} = 0. \tag{3}$$

La réponse R est l'ensemble des

$$(x_0, x_N; A_0 x_0 + C_0 x_1, C_{N-1}^\star x_{N-1} + A_N x_N)$$

tels que (x_i) satisfait l'équation (3) et aussi l'ensemble des

$$(x_0, x_N; -\xi_0, \xi_N)$$

tels que

$$\big((x_0, \xi_0), (x_N, \xi_N)\big)$$

soit dans le graphe de χ.

8.3. Le propagateur de Sturm-Liouville.

L'énoncé qui suit est un des principaux résultat de cet article. Il a été utilisé sous une forme à peine différente par C. Morette [33] (information tirée de [21] page 13) pour calculer les intégrales de Feynman grâce à la propriété d'unitarité. Il a comme conséquence, via le théorème 4, une version discrète du théorème de Levit-Smilansky [29].

THÉORÈME 5. — *Le propagateur de Sturm-Liouville a pour symbole*

$$\sigma(\mathcal{P}) = \prod_{i=0}^{N-1} |\gamma_i|^{-\frac{1}{2}} \omega_{\text{can}}, \tag{4}$$

où ω_{can} est la demi-densité canonique sur le graphe de l'application de Poincaré χ.

Preuve. — Pour $0 \leq j \leq N-1$ les opérateurs de noyaux

$$\mathcal{P}_j(x_j, x_{j+1}) = \gamma_j^{\frac{1}{2}} e^{2i\pi\left(q_j(x_j)+c_j(x_j,x_{j+1})\right)} |dx_j dx_{j+1}|^{\frac{1}{2}}$$

sont unitaires et l'opérateur $\mathcal{R}$ est $|\prod \gamma_j|^{-\frac{1}{2}}$ fois le composé des unitaires $\mathcal{P}_j$. Le théorème résulte donc du théorème 3. □

COROLLAIRE 2. — *Le déterminant de l'opérateur de Sturm-Liouville est donné par*

$$|\det(Q_{W,B})| = \left|\prod_{j=0}^{N-1} \gamma_j\right| \frac{1}{|\omega_\chi \star \sigma(\mathcal{B})|^2}. \tag{5}$$

8.4. Le cas des arbres.

On se place dans le cas où le graphe $T = (V, E)$ est un arbre et $V_0 = \{1, \cdots, p\}$ est l'ensemble des sommets de degré 1. Cela contient aussi le cas d'un graphe arbitraire en prenant pour G un arbre maximal. On pose

$$Q(x) = \sum_{\{i,j\}\in E} c_{i,j}(x_i, x_j) + \sum_{j\in V} q_j(x_j).$$

THÉORÈME 6. — *Soit $\mathcal{P} = ae^{2\pi i R(y)}|dy|^{\frac{1}{2}}$ le propagateur associé à Q avec*

$$R(y) = \sum_{1\leq i<j\leq p} r_{i,j}(x_i, x_j) + \sum_{1\leq j\leq p} t_j(x_j),$$

et $\gamma_{i,j} = |\det(c_{i,j})|$. On a, pour toute paire $i_0, j_0 \in V_0,\ i_0 \neq j_0$:

$$a = \left(\prod_{k=0}^{N-1} |\gamma_{i_k,i_{k+1}}|^{-\frac{1}{2}}\right) |\det(r_{i,j})|^{\frac{1}{2}},$$

où $\Gamma = \{i_0 = i, i_1, \cdots, i_N = j\}$ est le chemin de i_0 à j_0 dans l'arbre T.

Preuve. — On fait le calcul pour les $x_j = 0$ sauf x_{i_0} et x_{j_0}. On se ramène au cas de Sturm-Liouville en calculant d'abord l'intégrale par rapport aux sommets non situés sur le chemin Γ de i_0 à j_0. □

8.5. Le cas des cylindres.

C'est le cas d'un produit cartésien d'un graphe Γ par le chemin P_N. On se ramène au cas du chemin. Cela permet de traiter le cas des rectangles et des tores.

8.6. Transformations élémentaires des graphes.

Il s'agit de contrôler l'action au niveau du propagateur des transformations électriques élémentaires : série, parallèle, étoile-triangle (voir [7]). L'idée est que ces transformations n'agissent pas sur la réponse, mais uniquement sur l'amplitude du propagateur suivant des formules simples.

9. Déterminants régularisés.

9.1. Opérateurs de Sturm-Liouville.

Soit $A : [0,T] \to \mathrm{Sym}(\mathbb{R}^n)$ une application de classe C^1. On lui associe le Lagrangien

$$\mathcal{L}(x,x',t) = \frac{1}{2}\|x'\|^2 + \frac{1}{2}\langle A(t)x|x\rangle$$

dont l'équation d'Euler-Lagrange est $Sx = 0$ où S est l'opérateur de Sturm-Liouville formellement symétrique suivant :

$$S = -\frac{d^2}{dt^2} + A(t).$$

On introduit aussi l'Hamiltonien dépendant du temps associé qui est donné par

$$H(x,p,t) = \frac{1}{2}\|p\|^2 - \frac{1}{2}\langle A(t)x|x\rangle.$$

L'application de Poincaré (ou résolvante) χ est le difféomorphisme canonique de $\mathcal{X}_0 = T^\star\mathbb{R}^n$ dans $\mathcal{X}_T = T^\star\mathbb{R}^n$ défini par

$$\chi(x_0,p_0) = (x_T,p_T)$$

où (x_t,p_t) est solution des équations canoniques associées à H :

$$(6)\qquad \begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = \dfrac{\partial H}{\partial p} = p \\ \dfrac{dp}{dt} = -\dfrac{\partial H}{\partial x} = A(t)x. \end{cases}$$

La transformation de Legendre étant ici, avec l'identification de $\mathbb{R}^n$ à son dual, l'identité, χ est aussi donnée en termes des solutions de $Sx = 0$:

$$\chi(x_0, x_0') = (x_T, x_T').$$

Une extension autoadjointe $S_{W,B}$ de S est donnée par une forme quadratique avec domaine (W, B) sur $\mathbb{R}^n \oplus \mathbb{R}^n = X_0 \oplus X_T$. On pose $l = \dim(W)$.

$S_{W,B}$ est l'extension de Friedrichs de la forme quadratique

$$2Q_{W,B}(x) = \int_0^T (|x'|^2 + \langle A(t)x(t)|x(t)\rangle)dt + B(x(0), x(T))$$

définie sur $H^1([0,T], \mathbb{R}^n) \cap \{(x(0), x(T)) \in W\} = H^1_W$.

Le spectre de $S_{W,B}$ est de la forme

$$\lambda_1 \leq \cdots \leq \lambda_k \leq \cdots$$

avec

$$A_- k^2 + B_- \leq \lambda_k \leq A_+ k^2 + B_+. \tag{7}$$

DÉFINITION 9. — *On définit le déterminant régularisé* au sens de Feynman *par*

$$\det{}_F(S_{W,B}) = \pm|\omega_\chi \star \sigma(\mathcal{B})|^{-2} \tag{8}$$

où $\pm$ est donné par la parité de l'indice de Morse (nombre de valeurs propres négatives de $S_{W,B}$).

J'adopte cette terminologie, car cette régularisation est celle que l'on doit utiliser pour calculer par la méthode de la phase stationnaire le comportement asymptotique des intégrales de Feynman (voir [17])

$$I = \int_\Omega^\star e^{\frac{i}{\hbar}\int_0^T \mathcal{L}(\gamma(t),\gamma'(t),t)dt}|d\gamma| , \tag{9}$$

ici Ω est un espace de lacets sur l'espace de configuration, par exemple les lacets $\gamma : [0,T] \to \mathbb{R}^n$ d'extrémités fixées ou périodiques et $\int^\star$ signifie que l'intégrale est définie par le procédé de Feynman comme limite d'intégrales sur des espaces de dimension de plus en plus grande : les lacets géodésiques par morceaux (voir [17], [8] et [9]). Elle permet de faire de l'intégrale de Feynman un outil raisonnable pour les calculs semi-classiques, par exemple les formules dites de Van-Vleck et de Gutzwiller (voir [23]).

La régularisation de Feynman ne coïncide pas avec la ζ-régularisation (voir [34] et aussi [36]). Par exemple, si $A = 0$ et qu'on considère le problème de Dirichlet sur $[0,T]$, on a $\det_F(S_{\mathrm{dir}}) = T$ alors que $\det_\zeta(S_{\mathrm{dir}}) = 2\sqrt{2}T$.

Je n'ai pas réussi à déterminer l'éventuelle formule générale qui relie ces 2 régularisations.

On a en particulier :

THÉORÈME 7. — *Si*

$$\chi = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \tag{10}$$

on a, pour les problèmes de Dirichlet, Neumann et périodique, les formules :

$$\begin{aligned} |\det_F(S_{\mathrm{dir}})| &= |\det(b)|, \\ |\det_F(S_{\mathrm{neu}})| &= |\det(c)|, \\ |\det_F(S_{\mathrm{per}})| &= |\det(\mathrm{Id} - \chi)|. \end{aligned} \tag{11}$$

Les formules correspondantes pour $\det_\zeta$ *sont données avec les signes dans* [5].

Le problème est maintenant de relier $\det_F(S_{W,B})$ aux discrétisations de $S_{W,B}$.

9.2. Déterminants discrétisés.

On va rappeler comment on définit la discrétisation par éléments finis de $S_{W,B}$. Les discrétisations obtenues sont données en termes de formes quadratiques sur des espaces euclidiens.

On définit l'espace A_N des fonctions continues affines par morceaux sur la subdivision régulière de $[0,T]$ en N intervalles à valeurs dans $\mathbb{R}^n$ ($\dim A_N = n(N+1)$).

Posons $\delta = \frac{T}{N}$, $t_i = \delta i$ et $Y_i = \mathbb{R}^n$. La structure euclidienne induite par l'espace $L^2([0,T])$ sur A_N que l'on identifie à $Y_0 \oplus Y_1 \oplus \cdots \oplus Y_N$ (en considérant les valeurs aux points t_i) est équivalente sur les parties bornées de l'espace de Sobolev $H^1([0,T])$ à la métrique

$$\|(x_0, \cdots, x_N)\|_g^2 = \delta \sum_{i=0}^{N} \|x_i\|^2.$$

On reprend alors les notations associées au graphe linéaire à $N+1$ sommets. La métrique euclidienne précédente g induit une métrique euclidienne sur $W \oplus X_{\mathrm{int}}$ dont l'élément de volume peut être comparé à celui induit par la métrique canonique g_0 : on a

$$dv_g = \delta^{-\frac{nN+l}{2}} dv_{g_0}.$$

La restriction de $Q_{W,B}$ à A_N, notée $Q^N_{W,B}$, s'écrit

$$Q^N_{W,B}(x_0,\cdots,x_N)=\sum_{i=0}^{N-1}\frac{\|x_{i+1}-x_i\|^2}{2\delta}$$
$$+\frac{1}{2}\sum_{i=0}^{N-1}\int_{t_i}^{t_{i+1}}\langle A(t)x(t)|x(t)\rangle dt+B(x_0,x_N),$$

avec $(x_0,x_T)\in W$ et x est la fonction de A_N telle que $x(t_i)=x_i$. On peut réécrire, en remplaçant $A(t)$ par $A(t_i)$ sur l' intervalle $[t_i,t_{i+1}]$

$$\begin{aligned}Q^N_{W,B}(x_0,\cdots,x_N)=&\frac{1}{2\delta}\sum_{i=0}^{N-1}\|x_{i+1}-x_i\|^2\\ &+\frac{\delta}{6}(\langle A(0)x_0|x_0\rangle+\langle A(0)x_0|x_1\rangle+2\langle A(t_1)x_1|x_1\rangle\\ &+\langle A(t_1)x_1|x_2\rangle+\cdots+\langle A(t_{N-1}x_{N-1}|x_N\rangle)\\ &+B(x_0,x_N)+O(\delta)\|x\|^2_g.\end{aligned}\tag{12}$$

Il est facile de montrer que les valeurs propres de $Q^N_{W,B}$ par rapport à la structure euclidienne g convergent simplement (et uniformément en A si la norme L^∞ de A reste bornée) vers celles de $S_{W,B}$; c'est une conséquence du fait que tout sous-espace de dimension finie de H^1_W est approchable à ε près au sens H^1 par un A_N et du principe de minimax.

On a le :

THÉORÈME 8. — *Si d_N est le déterminant de $2Q^N_{W,B}$ par rapport à la structure euclidienne g, on a : $d_N=\delta^{-(2nN+l)}\det_F(S_{W,B})(1+o(1))$ quand $N\to\infty$.*

Preuve. — On applique le corollaire 2 à $Q^N_{W,B}$ avec $c_i(x_i,x_{i+1})=-\dfrac{x_ix_{i+1}}{\delta}+O(\delta)$. On obtient ainsi

$$d_N=\delta^{-(nN)}|\omega_{\chi_N}\star\sigma(\mathcal{B})|^{-2}(1+O(\delta))$$

où χ_N est l'application de Poincaré pour Q^N. Il suffit de remarquer que $\chi_N\to\chi$ lorsque N tend vers l'infini; en effet l'application χ_N est définie par composition des χ_j définies par

$$\chi_j(x_j,p_j)=(x_j+\delta p_j+O(\delta^2),\ p_j+\delta A(t_j)x_j+O(\delta^2))$$

et correspond donc à une discrétisation de type Euler de l'équation (6). □

THÉORÈME 9. — *Soient S_1 et S_2 2 opérateurs de Sturm-Liouville sur $[0,T]$ avec la même condition au bord (W,B). On a*

$$\Big|\prod_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda_k(S_1)}{\lambda_k(S_2)}\Big|=\Big|\frac{\det_F(S_1)}{\det_F(S_2)}\Big|.$$

On aura besoin du :

LEMME 1. — *Supposons $A_j(t)$, $j = 1,2$ et (W,B) fixés. Si $\lambda^j_{k,N}$, $k = 1,\cdots,n_N$ sont les valeurs propres des formes quadratiques $Q^{N,j}_{W,B}$ discrétisées de S_j à l'ordre N, il existe $\alpha > 0$ et β tels que, uniformément en N, on ait :*

$$\lambda^j_{k,N} \geq \alpha k^2 + \beta.$$

Et on a :

$$\prod_{k=m_o+1}^{n_N} \frac{\lambda^1_{k,N}}{\lambda^2_{k,N}} = 1 + O\Big(\frac{1}{m_o}\Big).$$

Preuve du lemme 1. — Dans la méthode des éléments finis, il résulte du principe de minimax que les $\lambda^i_{k,N}$ sont supérieures ou égales aux valeurs propres du problème continu limite. Il suffit donc d'appliquer l'estimation (7).

La deuxième estimation provient du minimax qui implique

$$|\lambda^1_{k,N} - \lambda^2_{k,N}| = O(1).$$

□

Preuve du théorème 9.

$$P = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda_k(S_1)}{\lambda_k(S_2)} = \left(\prod_{k=1}^{m_o} \frac{\lambda_k(S_1)}{\lambda_k(S_2)}\right)\Big(1 + O(\frac{1}{m_o})\Big).$$

Puis par la convergence simple des valeurs propres des $Q^{N,j}_{W,B}$ vers celles de S_j :

$$P = \left(\lim_{N\to\infty} \prod_{k=1}^{m_o} \frac{\lambda^1_{k,N}}{\lambda^2_{k,N}}\right)\Big(1 + O(\frac{1}{m_o})\Big).$$

Et d'après le lemme 1

$$P = \left(\lim_{N\to\infty} \prod_{k=1}^{n_N} \frac{\lambda^1_{k,N}}{\lambda^2_{k,N}}\right)\Big(1 + O\Big(\frac{1}{m_o}\Big)\Big).$$

Et donc,

$$|P| = \lim_{N\to\infty} \left|\frac{d^1_N}{d^2_N}\right|\Big(1 + O\Big(\frac{1}{m_o}\Big)\Big),$$

et par définition de $\det_F(S_j)$:

$$|P| = \left|\frac{\det_F(S_1)}{\det_F(S_2)}\right|\Big(1 + O\Big(\frac{1}{m_o}\Big)\Big).$$

La preuve se termine en prenant la limite quand m_o tend vers l'infini. □

BIBLIOGRAPHIE

[1] R. BALIAN, C. BLOCH, Distribution of Eigenfrequencies for the Wave Equation in a finite Domain I, II et III, Ann. of Physics, 60, 64, 69 (1970, 1971, 1972), 401, 271, 76.

[2] R. BALIAN, C. BLOCH , Solution of the Schrödinger Equation in Terms of classical Paths, Ann. Phys., 85 (1974), 514–···.

[3] D. BURGHELEA, L. FRIEDLANDER et T. KAPPELER , Meyer-Vietoris type Formula for Determinants of elliptic differential Operators, J. Funct. Anal., 107, No.1 (1992), 34–65.

[4] D. BURGHELEA, L. FRIEDLANDER et T. KAPPELER , On the determinant of elliptic differential and difference finite operators in vector bundles over S^1, Commun. Math. Phys., 138 (1991), 1–18.

[5] D. BURGHELEA, L. FRIEDLANDER et T. KAPPELER , On the determinant of elliptic boundary value problems on a line segment, Proc. AMS, 123 (1995), 3027–3038.

[6] J. CHAZARAIN, , Formule de Poisson pour les variétés riemanniennes, Invent. Math., 24 (1974), 65–82.

[7] Yves COLIN DE VERDIÈRE, I. GITLER, D. VERTIGAN, Réseaux électriques planaires II, Comment. Math. Helvetici, 71 (1996), 144–167.

[8] Y. COLIN DE VERDIÈRE, Spectre du Laplacien et longueurs des géodésiques périodiques I et II, Compositio Mathematica, 27 (1973), 80–106 et 159–184.

[9] Y. COLIN DE VERDIÈRE, Paramétrix de l'équation des ondes et intégrales sur l'espace des chemins, Séminaire Goulaouic-Schwartz (1974–1975).

[10] Y. COLIN DE VERDIÈRE, Réseaux électriques planaires I, Commentarii Math. Helv., 69 (1994), 351–374.

[11] Y. COLIN DE VERDIÈRE, Multiplicities of Eigenvalues and Tree-width of Graphs, J. Comb. Theory, ser. B, 74 (1998), 121–146.

[12] T. DREYFUS et H. DYM, Product formulas for the eigenvalues of a class of boundary problems, Duke Math. Journal, 45 (1978), 15–37.

[13] J. DUISTERMAAT, L. HÖRMANDER, Fourier Integral Operators II, Acta Math., 128 (1972), 183–269.

[14] J. DUISTERMAAT, Fourier Integral Operators, Birkhäuser, 1996.

[15] J. DUISTERMAAT, Oscillatory Integrals,..., Comm. Pure Appl. Math., 27 (1974), 207–281.

[16] J. DUISTERMAAT, V. GUILLEMIN, The Spectrum of Positiv Elliptic Operators and Periodic Geodesics, Invent. Math., 29 (1975), 39–79.

[17] R. FEYNMAN, A. HIBBS, Quantum Mechanics and Path Integrals, McGraw-Hill, New-York, 1965.

[18] G. FOLLAND, Harmonic Analysis in Phase Space, Princeton, 1989.

[19] R. FORMAN, Determinants, Finite-Difference Operators and Boundary Value Problems, Commun. Math. Phys., 147 (1992), 485–526.

[20] R. FORMAN, Functional Determinants and Geometry, Invent. Math., 88 (1987), 447–493.

[21] C. GROSCHE, F. STEINER, Handbook of Feynman Path Integrals, Springer, 1997.

[22] V. GUILLEMIN, S. STERNBERG, Symplectic Techniques in Physics, Cambridge University Press, 1984.

[23] M. GUTZWILLER, Chaos in Classical and Quantum Mechanics, Springer, New-York, 1990.

[24] M.J. GIANNONI, A. VOROS, J. ZINN-JUSTIN, Chaos and Quantum Physics (école des Houches 1989), North-Holland, 1991.

[25] D. HEJHAL, The Selberg Trace Formula and the Riemann ζ Function, Duke Math. J., 43 (1976), 441–482.

[26] L. HÖRMANDER, Fourier Integral Operators I, Acta Math., 127 (1971), 79–183.

[27] L. LANDAU, E. LIFSHITZ, Mécanique quantique non relativiste, Mir, Moscou, 1974.

[28] J. LERAY, Analyse lagrangienne et mécanique quantique, IRMA, Strasbourg, 1978.

[29] S. LEVIT, U. SMILANSKY, A Theorem on infinite Products of Eigenvalues of Sturm Type Operators, Proc. AMS, 65 (1977), 299–303.

[30] G. MACKEY, The Mathematical Foundations of Quantum Mechanics, Benjamin, 1963.

[31] V. MASLOV, Théorie des perturbations et méthodes asymptotiques, Dunod, Gauthiers-Villars, Paris, 1972.

[32] E. MEINRENKEN, Semi-classical principal Symbols and Gutzwiller's Trace Formula, Rep. Math. Phys., 31 (1992), 279–295.

[33] C. MORETTE-DE WITT, On the Definition and Approximation of Feynman's Path Integrals, Phys. Rev., 81 (1951), 848–852.

[34] D.B. RAY et I.M. SINGER, R-torsion and the Laplacian on Riemannian Manifolds, Advances Math., 7 (1971), 145–210.

[35] J. SYLVESTER, G. UHLMANN, A global uniqueness Theorem for an inverse boundary Value Problem, Ann. Math., 125 (1987), 153–169.

[36] A. VOROS, Analyse semi-classique de la formule des traces de Selberg, Séminaire de théorie spectrale et géométrie (Grenoble), 5 (1986–1987), 57–66.

[37] A. VOROS, Spectral function, special functions and Selberg zeta function, Commun. Math. Phys., 110 (1987), 439–465.

[38] A. WEINSTEIN, Lectures on Symplectic Manifolds, Conference Board of the Mathematical Sciences Regional Conference Series in Mathematics. No. 29, American Mathematical Society, (1977).

Yves COLIN DE VERDIÈRE,
Institut Fourier
(UMR CNRS-UJF 5582)
B.P. 74
38402 St Martin d'Hères Cedex (France).
yves.colin-de-verdiere@ujf-grenoble.fr