

ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

PHILIPPE EYSSIDIEUX

Systemes linéaires adjoints L^2

Annales de l'institut Fourier, tome 49, n° 1 (1999), p. 141-176

http://www.numdam.org/item?id=AIF_1999__49_1_141_0

© Annales de l'institut Fourier, 1999, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'institut Fourier » (<http://annalif.ujf-grenoble.fr/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

SYSTÈMES LINÉAIRES ADJOINTS L^2

par Philippe EYSSIDIEUX

1. Introduction.

Cet article vise à étendre le champ d'application en géométrie algébrique complexe d'une technique introduite par M. Gromov [16] en construisant une version de la théorie d'indice L^2 d'Atiyah [2] étendant les techniques L^2 de la cohomologie des faisceaux cohérents sur les variétés algébriques lisses à leurs revêtements galoisiens non ramifiés infinis. Plus précisément, X désignant une variété algébrique lisse complexe et $\pi : \tilde{X} \rightarrow X$ un revêtement non ramifié galoisien infini de X de groupe de Galois G , nous associons à tout faisceau analytique cohérent \mathcal{F} défini sur X une famille indexée par l'indice entier $0 \leq q \leq \dim_{\mathbb{C}} X$ d'espaces vectoriels topologiques (non nécessairement séparés) munis d'une action de G et notée $H_2^q(\tilde{X}, \mathcal{F})$, de telle sorte que chaque suite exacte courte de faisceaux donne lieu à une suite exacte longue de cohomologie et, si \mathcal{F} est localement libre, $H_2^q(\tilde{X}, \mathcal{F})$ se calcule comme la cohomologie du complexe dont les chaînes sont les formes s à valeurs dans le fibré vectoriel sur \tilde{X} sous-jacent à $\pi^*\mathcal{F}$ telles que s et $\bar{\partial}s$ dont L^2 et dont la différentielle est l'opérateur de Dolbeault $\bar{\partial}$. La construction est inspirée par une observation de M. Farber [11].

Même si, potentiellement, la partie non séparée de l'espace vectoriel topologique $H_2^q(\tilde{X}, \mathcal{F})$ contient des renseignements non triviaux analogues aux invariants de Novikov-Shubin [21], nous utiliserons seulement pour les applications son Hausdorffisé qui est un G -espace de Hilbert réalisable

Mots-clés : Théorème d'indice L^2 d'Atiyah pour les faisceaux cohérents – Théorème d'annulation de Nadel – Applications de Shafarevich de Campana-Kollár - Fibré adjoint.
Classification math. : 14E20 – 14Fxx – 32J25 – 32L10 – 32L20.

comme sous-module de $L^2 G^{\oplus N}$. Pour contrôler de tels objets un invariant commode est leur dimension de Murray-Von Neumann qui dans le cas de la cohomologie L^2 d'un faisceau cohérent est atteignable par des formules de Riemann-Roch. Cette technique servira à attaquer deux questions posées par J. Kollár ([19], ch.18).

La formulation de la première application nécessite de décrire les résultats de [4] et [20] sur les sous-espaces analytiques compacts connexes maximaux des revêtements infinis des variétés algébriques. Soit X une variété kählérienne compacte connexe de revêtement universel \tilde{X} et de groupe fondamental Γ . Soit $\Delta \subset \Gamma$ un sous-groupe. Soit $\pi_\Delta : \tilde{X}_\Delta = \Delta \backslash \tilde{X} \rightarrow X$ le revêtement non ramifié associé. F. Campana, [4], Théorème 3.5, construit une application méromorphe $\rho_\Delta : \tilde{X}_\Delta \rightarrow \tilde{Z}_\Delta$ de lieu d'indétermination I , deux ouverts analytiques non vides $\tilde{X}_\Delta^0 \subset \tilde{X}_\Delta$ et $\tilde{Z}_\Delta^0 \subset \tilde{Z}_\Delta$ tels que $I \cap \tilde{X}_\Delta^0 = \emptyset$, $\rho_\Delta(\tilde{X}_\Delta^0) = \tilde{Z}_\Delta^0$, $\rho_\Delta : \tilde{X}_\Delta^0 \rightarrow \tilde{Z}_\Delta^0$ est propre à fibres connexes et, pour presque tout $p \in \tilde{X}_\Delta^0$, la fibre $\rho_\Delta^{-1}(\rho_\Delta(p))$ est le plus grand sous-espace analytique complexe compact et connexe de \tilde{X}_Δ^0 contenant p . Lorsque Δ est distingué, $G = \Gamma/\Delta$ agit proprement discontinûment sur \tilde{Z}_Δ , l'application $X \rightarrow G \backslash \tilde{Z}_\Delta^0$ déduite par passage au quotient coïncide avec l'application de Shafarevich sh^Δ construite par [20]. Nous prouvons le :

THÉORÈME 1. — *Soit X une variété projective algébrique et $\Delta \subset \pi_1(X)$ un sous-groupe distingué d'indice infini. Soit X_g une fibre générale de ρ_Δ et $i : X_g \rightarrow X$ le morphisme naturel. Soit L un fibré holomorphe linéaire sur X big et de négativité modérée près de $i(X_g)$ ⁽¹⁾. Si le diviseur $K_{X_g} \otimes i^*L$ est effectif, le diviseur $K_X \otimes L$ est également effectif.*

Un cas particulier de cet énoncé est que, si X est une variété algébrique à groupe fondamental génériquement gros au sens de [20] (i.e. : les sous-espaces analytiques complexes compacts du revêtement universel de X sont contenus dans un ensemble de mesure nulle) et L un fibré linéaire big, alors le diviseur $K_X \otimes L$ est effectif. L'énoncé analogue obtenu en demandant que X soit à groupe fondamental algébrique génériquement gros (même définition que ci-dessus en remplaçant \tilde{X} par $\tilde{X}_{\text{alg}} = \Sigma \backslash \tilde{X}$, où Σ désigne l'intersection des sous-groupes d'indice fini du groupe fondamental de X) est dû à J. Kollár ([19], théorème 14.5).

J. Kollár ([19], conjecture 18.9.1 p. 186) conjecture le théorème 1 sans la condition de négativité modérée de L près de X_g . Un travail récent et

⁽¹⁾ C'est le cas, par exemple, si L est big et nef. Se reporter à la définition 2.4.1 dans le présent texte.

indépendant de S. Takayama [24] prouve une variante du théorème 1 à l'aide du théorème d'indice L^2 d'Atiyah sous sa forme classique, les idées cruciales étant proches de celles de la section 4 du présent travail.

La deuxième application est un résultat partiel sur une conjecture de J. Kollár prédisant que, X étant une variété algébrique lisse de groupe fondamental génériquement gros, la caractéristique d'Euler du faisceau canonique de X est positive ou nulle ([19], p. 187 conjecture 18.21.1), ce qui serait une généralisation d'un résultat de Green et Lazarsfeld pour les variétés de dimension d'Albanese maximale [15]. Si T est un complexe simplicial, T possède une application simpliciale $n : T \rightarrow B\pi_1(T)$ où $B\pi_1(T)$ est un complexe simplicial asphérique de groupe fondamental $\pi_1(T)$. On a $H^*(\pi_1(T), \mathbb{R}) = H^*(B\pi_1(T), \mathbb{R})$. On dit qu'une classe de cohomologie $c \in H^*(T, \mathbb{R})$ provient du groupe fondamental si elle est contenue dans $n^*H^*(\pi_1(T), \mathbb{R})$.

THÉORÈME 2. — *Soit (X, ω) une variété kählérienne connexe compacte de dimension n , possédant une classe de cohomologie $c \in H^{1,1}(X, \mathbb{R})$ provenant de $\pi_1(X)$ et représentable par un courant strictement positif fermé $T^{(2)}$, alors $\chi(X, K_X) \geq 0$. Si, de plus, $\chi(X, K_X) > 0$, alors \tilde{X} porte un espace de dimension infinie de formes holomorphes L^2 de degré n . En particulier, le noyau de Bergmann de \tilde{X} est non nul.*

Ce résultat, prouvé dans la section 5, apporte une réponse partielle aux conjectures 18.8.1 p. 185 et 18.12.1 p. 187 de [19]. La preuve est inspirée directement de l'article de M. Gromov [16] et consiste à faire jouer au théorème d'annulation de Kawamata-Viehweg le rôle du théorème d'annulation sur les formes harmoniques L^2 de [16].

Un corollaire est que si X est une variété kählérienne telle que $\chi(X, K_X) < 0$, alors $\pi_2(X) \otimes \mathbb{Q}$ est non nul. Un autre corollaire est que X est de type général dans les conditions du théorème 2, si $\chi(X, K_X) \neq 0$. Si on suppose K_X nef, ce fait est un corollaire de la proposition 13.14 dans le livre de J. Kollár [19] ou encore du théorème 4.1 de [5] et résulte d'un argument de F. Campana [4] inspiré par l'article fondateur de M. Gromov [16]. Un avantage de l'approche ici suivie est qu'aucun usage n'y est fait de la théorie de Mori.

Cet article est organisé comme suit. La section 2 décrit brièvement les premiers éléments de la technique des métriques singulières de Demailly [7].

(2) i.e. : $\exists a > 0, T \geq a\omega$.

La section 3 donne une formulation primitive mais efficace de la théorie d'indice L^2 d'Atiyah pour les faisceaux cohérents sur les variétés projectives lisses et compactes, une théorie qui suffirait ici a été indépendamment développée par F. Campana et J.-P. Demailly [6]. La section 4 prouve le théorème 1 et discute quelques applications. La section 5 prouve le théorème 2.

Je remercie J. Carlson, L. Katzarkov, T. Pantev et C. Simpson pour d'utiles conversations. Je remercie le rapporteur pour d'utiles remarques concernant l'exposition.

2. Technique de Bochner-Kodaira pour des poids singuliers.

Rappelons quelques aspects de la technique de Bochner-Kodaira pour les métriques singulières développée par J.-P. Demailly et exposée dans [7].

2.1. Estimations L^2 singulières.

L'outil analytique principal de ce travail est le résultat suivant de [8] :

PROPOSITION 2.1.1. — *Soit (M, ω) une variété kählérienne complète et (\mathcal{L}, h) un fibré linéaire holomorphe hermitien de courbure $\Theta(\mathcal{L}, h)$. Soit ϕ une fonction presque psh⁽³⁾. Supposons que*

$$\exists a > 0, \quad i\Theta(\mathcal{L}, h) + i\partial\bar{\partial}\phi \geq a\omega.$$

Alors $\forall q \geq 1$, $\forall g \in L^2_{\text{loc}}(M, K_M \otimes \mathcal{L} \otimes \Omega^{0,q})$ tel que $\bar{\partial}g = 0$, $\int_M \|g\|^2 e^{-2\phi} < \infty$:

$$\exists f, \bar{\partial}f = g : \int_M \|f\|^2 e^{-2\phi} \leq \frac{1}{qa} \int_M \|g\|^2 e^{-2\phi}.$$

(3) Une fonction presque psh sur une variété complexe est une fonction à valeurs dans $\mathbb{R} \cup \{-\infty\}$, semi continue supérieurement, localement exprimable comme somme d'une fonction pluriharmonique et d'une fonction C^2 .

2.2. Faisceau multiplicateur de Nadel.

Le théorème d'annulation 2.1.1 est une version analytique du théorème d'annulation de Kawamata-Viehweg. Rappelons le lien entre les deux résultats qui est la construction due à A. Nadel d'un faisceau d'idéaux qui permet de formuler ce théorème en termes algébriques. Soit M une variété complexe et ϕ une fonction presque psh. On définit un faisceau d'idéaux sur M $I(\phi)$ par la formule

$$I(\phi)(U) = \left\{ f \in \mathcal{O}(U), \forall K \Subset U, \int_K |f|^2 e^{-2\phi} < \infty \right\}.$$

Pour les propriétés de ce faisceau d'idéaux cohérent, on consultera [7]. Soulignons que si le nombre de Lelong de ϕ en x vérifie $\nu(\phi, x) < \frac{1}{2}$, un résultat de H. Skoda [23] implique que $I(\phi)_x = \mathcal{O}_{M,x}$. Quand, sous les hypothèses de la proposition 2.1.1, la variété M est de plus supposée compacte, 2.1.1 se traduit en le théorème d'annulation de Demailly-Nadel : $H^q(M, K_M \otimes \mathcal{L} \otimes I(\phi)) = 0, q \geq 1$.

2.3. Métriques singulières à singularités algébriques.

Une *métrique singulière* sur un fibré en droites holomorphe L sur la variété complexe M est une application h de l'espace total de L vers $[0, \infty]$ pouvant s'écrire sous la forme $h = e^{-2\phi} h'$ où h' est une métrique hermitienne lisse et ϕ une fonction presque psh sur M . Soit h une métrique singulière. Comme ces deux objets ne dépendent que de h et non de sa représentation sous la forme $h = e^{-\phi} h'$, on notera par $I(h)$ le faisceau d'idéaux cohérents $I(\phi)$ et on notera $\Theta(\mathcal{L}, h) = \Theta(\mathcal{L}, h') + i\partial\bar{\partial}\phi$, la *courbure* de la métrique singulière h . Une métrique singulière sera dite de *courbure positive* (resp. de *courbure strictement positive*) si sa courbure est un courant positif fermé (resp. un courant positif fermé supérieur au courant défini par la $(1, 1)$ -forme associée à une métrique hermitienne sur M). Une métrique singulière $h = e^{-2\phi} h'$ est dite à *singularités algébriques* si et seulement si en tout point m de M existent des germes de fonctions holomorphes $(f_i)_{1 \leq i \leq n}$ et un nombre rationnel $\alpha > 0$ tels que $\phi - \alpha \log \left(\sum_{1 \leq i \leq n} |f_i|^2 \right)$ est C^∞ .

La classe des métriques à singularités algébriques est stable par de nombreuses opérations. Soit (\mathcal{L}, h_L) une métrique singulière à singularités

algébriques et $\phi : N \rightarrow M$ un morphisme dominant. ϕ^*h_L est une métrique singulière à singularités algébriques sur ϕ^*L . Soient $(\mathcal{L}, h_L), (\mathcal{M}, h_M)$ deux fibrés linéaires holomorphes munis d'une métrique singulière à singularités algébriques, $h_L \otimes h_M$ est une métrique à singularités algébriques sur $\mathcal{L} \otimes \mathcal{M}$. Soit N un entier strictement positif et soit h une métrique singulière à singularités algébriques sur $\mathcal{L}^{\otimes N}$, alors $h^{1/N}$ est une métrique singulière à singularités algébriques sur \mathcal{L} . Soit h et h' deux métriques singulières à singularités algébriques sur \mathcal{L} . Pour tout nombre rationnel β compris entre 0 et 1 $h^\beta(h')^{1-\beta}$ est une métrique singulière à singularités algébriques.

Moins triviale mais techniquement avantageuse est la propriété suivante :

LEMME 2.3.1. — *Soit h une métrique singulière sur \mathcal{L} à singularités algébriques. Soit h_0 une autre métrique singulière à singularités algébriques. Pour tout nombre rationnel positif assez petit ϵ , la métrique singulière $h^{1-\epsilon}(h_0)^\epsilon$ vérifie $I(h) \subset I(h^{1-\epsilon}(h_0)^\epsilon)$.*

Preuve. — C'est un corollaire immédiat de [7] p. 37. Détaillons-en les raisons. Soit $\mu : M' \rightarrow M$ une modification (i.e. un morphisme projectif biméromorphe). Par [Dem], prop. 5.8 p. 36, $K_M \otimes I(h) = \mu_*(K_{M'} \otimes I(\mu^*h))$. Soit h une métrique singulière à singularités algébriques. Utilisant [14], [7] construit une modification $\mu : M' \rightarrow M$ telle que en tout point m de M' existent des coordonnées locales (z_1, \dots, z_n) sur l'ouvert U dans lesquelles

$$\mu^*h = |z_1|^{-2a_1(\mu^*h, m)} \dots |z_n|^{-2a_n(\mu^*h, m)} h'$$

où h' est lisse et a_i sont des rationnels positifs. Un calcul aisé exhibe $I(\mu^*h)|_U$ comme l'idéal principal engendré par $z_1^{E(a_1(\mu^*h, m))} \dots z_n^{E(a_n(\mu^*h, m))}$, $E(x)$ étant le plus grand nombre entier inférieur ou égal à x . Si h et h_0 sont deux métriques singulières, on peut choisir une modification telle que μ^*h, μ^*h_0 et, par suite, $\mu^*(h_0^\epsilon h^{1-\epsilon})$ soient de cette forme. On a

$$a_i(\mu^*(h_0^\epsilon h^{1-\epsilon}), m) = \epsilon a_i(\mu^*h_0, m) + (1 - \epsilon)a_i(\mu^*h, m).$$

Pour $\epsilon > 0$ assez petit, $E(a_i(\mu^*(h_0^\epsilon h^{1-\epsilon}), m)) \leq E(a_i(\mu^*h, m))$. Donc, l'idéal $I(\mu^*(h^{1-\epsilon}(h_0)^\epsilon))$ contient $I(\mu^*h)$ pour $\epsilon > 0$ assez petit. Par suite, pour $\epsilon > 0$ assez petit $K_M \otimes I(h) = \mu_*(K_{M'} \otimes I(\mu^*h)) \subset \mu_*(K_{M'} \otimes I(\mu^*(h^{1-\epsilon}(h_0)^\epsilon))) = K_M \otimes I(h^{1-\epsilon}(h_0)^\epsilon)$. \square

2.4. Négativité modérée.

Soit $Y \subset X$ un sous-espace analytique d'une variété projective algébrique lisse. Soit ω une forme de Kähler sur X .

DÉFINITION 2.4.1. — *Le fibré holomorphe linéaire \mathcal{L} est dit de négativité modérée près de Y si et seulement s'il existe un voisinage U de Y , une métrique singulière à singularités algébriques h sur \mathcal{L} de courbure positive et vérifiant $I(h)|_U = O_U$.*

LEMME 2.4.2. — *Le fibré holomorphe linéaire \mathcal{L} est big et de négativité modérée près de Y si et seulement s'il existe un voisinage U de Y , une métrique singulière à singularités algébriques h sur \mathcal{L} de courbure strictement positive et vérifiant $I(h)|_U = O_U$.*

Preuve. — \mathcal{L} étant big, il possède par [7] p. 42 une métrique singulière à singularités algébriques h_0 de courbure strictement positive au sens des courants. Par 2.4.1, \mathcal{L} possède une métrique singulière h_1 de courbure positive avec $I(h_1) = O_U$ sur un voisinage U de Y . Pour $\epsilon > 0$ rationnel assez petit, $h_0^\epsilon h_1^{1-\epsilon}$ a les propriétés requises en raison de 2.3.1. La réciproque résulte également de [7] p. 42. \square

Pour la convenance du lecteur, formulons en termes algébriques une condition suffisante pour remplir les hypothèses du théorème 1. Cette condition est un corollaire immédiat de [19], 10.7, p. 118⁽⁴⁾ et est laissée au lecteur.

LEMME 2.4.3. — *Soit D un diviseur de Cartier sur X . Si D est numériquement équivalent à une somme de la forme $A + E + \Delta$ où A est un \mathbb{Q} -diviseur de Cartier ample, E est un \mathbb{Q} -diviseur de Cartier effectif dont le support est disjoint de Y et Δ est un \mathbb{Q} -diviseur de Cartier tel que (X, Δ) est klt, alors $O_X(D)$ est big et de négativité modérée près de Y .*

⁽⁴⁾ Pour la définition d'une paire (X, Δ) klt (=Kawamata log terminal), voir [19] chap. 10 p. 166.

3. Adaptation de la théorie d'indice L^2 d'Atiyah aux faisceaux analytiques cohérents.

La version expliquée ici de l'adaptation de la théorie d'indice L^2 d'Atiyah aux faisceaux analytiques cohérents sur l'espace complexe X nécessite que l'on suppose X lisse et algébrique, hypothèses peu naturelles. Une théorie plus satisfaisante est développée dans [10].

3.1. Une catégorie abélienne.

Décrivons une construction de M.S. Farber [11] qui fait rentrer la théorie des nombres de Betti L^2 de Von Neumann-Atiyah [2] et des invariants de Novikov-Shubin [21] dans le cadre de l'algèbre homologique.

DÉFINITION 3.1.1. — *Soit Γ un groupe dénombrable discret. On appelle Γ -module hilbertien projectif de type fini tout sous Γ -module de $L^2\Gamma \otimes \mathbb{C}^N$, $L^2\Gamma$ étant la représentation régulière gauche de Γ . Un morphisme de Γ -module hilbertien projectifs est une application linéaire continue commutant à Γ .*

PROPOSITION 3.1.2 [11]. — *La catégorie $E_f(\Gamma)$ suivante :*

- *Les objets sont les triplets (E_1, E_2, e) formés de deux modules hilbertiens projectifs E_1 et E_2 et d'un morphisme $e : E_1 \rightarrow E_2$, non nécessairement d'image fermée.*
- *Un morphisme $(E_1, E_2, e) \rightarrow (F_1, F_2, f)$ est un couple $\phi = (\phi_1 : E_1 \rightarrow F_1, \phi_2 : E_2 \rightarrow F_2)$ tel que $f\phi_1 = \phi_2e$, deux tels couples ϕ, ψ étant identifiés si et seulement si il existe une homotopie $T : E_2 \rightarrow F_1$ tel que $\phi_2 - \psi_2 = fT$.*

est une catégorie abélienne.

Il y a un foncteur d'oubli pleinement fidèle de $E_f(\Gamma)$ vers la catégorie des Γ -modules par $O((E_1, E_2, e)) = E_2/eE_1$. On appelle un objet de $E_f(\Gamma)$ un Γ -module hilbertien de type fini.

Soit W un sous-module hilbertien projectif de type fini contenu dans $L^2\Gamma \otimes \mathbb{C}^N$. La projection orthogonale sur W s'identifie à une matrice carrée (p_{ij}) à coefficients dans l'algèbre $W_r^*\Gamma$ qui est l'adhérence au sens de la topologie forte (et pas de la norme triple!) de l'algèbre d'opérateurs définie par la représentation régulière droite de Γ dans $L^2\Gamma$. Cette algèbre

s'identifie au commutant de la représentation régulière gauche de Γ . La trace naturelle de $C\Gamma$ donnée par $\tau\left(\sum_g a_g g\right) = a_e$ s'étend par continuité à $W_r^*\Gamma$ et donne une trace $(\tau(ab) = \tau(ba)!)^!$ finie normale sur cette algèbre. Le nombre réel $\dim_\Gamma W = \sum_i \tau(p_{ii})$ ne dépend pas du plongement choisi de W et s'appelle la dimension de Von Neumann de W . On définit la dimension de Von Neumann d'un Γ -module hilbertien comme la dimension de Von Neumann de $E_2/\overline{eE_1}$. C'est un nombre réel positif, nul si et seulement si eE_1 est dense dans E_2 . Les propriétés spectrales de $e : E_1 \rightarrow \overline{eE_1}$ fournissent des invariants du Γ -module hilbertien (E_1, E_2, e) (on récupère ainsi les invariants de Novikov-Shubin, voir [11]) mais il y a peu de techniques disponibles pour les contrôler, ce qui en limite sévèrement l'usage.

3.2. Théorème d'indice L^2 d'Atiyah.

On peut résumer la théorie d'indice L^2 d'Atiyah [2] en l'énoncé suivant :

THÉORÈME 3. — Soit $D : C^\infty(E) \rightarrow C^\infty(F)$ un opérateur différentiel elliptique entre fibrés linéaires hermitiens sur une variété compacte M . On note $i(D) = \dim \ker(D) - \dim \ker(D^*)$ son indice d'Atiyah-Singer. Soit $\tilde{M} \rightarrow M$ un revêtement non ramifié infini et galoisien de groupe de Galois G . Le noyau $\ker_2(D)$ de l'opérateur fermé induit par D sur les sections L^2 de E sur \tilde{M} est un G -module hilbertien projectif de type fini constitué exclusivement de sections lisses. Soit $K(x, y)$ le noyau (lisse) de la projection orthogonale sur $\ker_2(D)$. $\text{Tr}(K(x, x))$ est une forme volume G -invariante et descend à M . On a

$$\int_M \text{Tr}(K(x, x)) = \dim_G \ker_2(D).$$

Le principe de multiplicativité suivant a lieu :

$$\dim_G \ker_2 D - \dim_G \ker_2 D^* = i(D).$$

La formule d'indice L^2 qu'on en déduit

$$\dim_G \ker_2 D - \dim_G \ker_2 D = \int_M A_D$$

où A_D est la forme d'Atiyah-Patodi-Singer de D est valable dans le cas où un sous-groupe discret d'isométries opère proprement discontinûment

de façon cocompacte avec des stabilisateurs possiblement non triviaux sur une variété riemannienne en préservant l'opérateur elliptique D .

Soit $1 \rightarrow S^1 \rightarrow \tilde{G} \rightarrow G \rightarrow 1$ une extension centrale d'un groupe discret G par le groupe abélien S^1 . Un opérateur différentiel $D : C^\infty(E) \rightarrow C^\infty(F)$ sur une G -variété cocompacte est dit \tilde{G} -invariant s'il existe une action compatible de \tilde{G} sur les fibrés hermitiens E, F laissant D invariant. La théorie d'indice d'Atiyah s'adapte dans ce contexte et fournit les mêmes énoncés. C'est une conséquence de la théorie de l'indice local exposée dans [3]. Pour une preuve, on consultera [22] (ou encore [9]).

3.3. Cohomologie L^2 des faisceaux localement libres.

Soit X une variété algébrique lisse compacte et $\pi : \tilde{X} \rightarrow X$ un revêtement galoisien de groupe Γ .

À tout \mathcal{V} faisceau cohérent localement libre sur X , on associe $\pi^*\mathcal{V}$ qui est un faisceau analytique cohérent sur \tilde{X} muni d'une Γ -action. Soit (V, h) un fibré holomorphe hermitien Γ -invariant de faisceau de sections $\pi^*\mathcal{V}$. On pose

$$D_2^q(\tilde{X}, \mathcal{V}) = \left\{ s \in L^2(\tilde{X}, V \otimes \Omega^{0,q}) : \int_{\tilde{X}} \|s\|^2 + \|\bar{\partial}s\|^2 < \infty \right\}.$$

Prenant $D_2^q(\tilde{X}, \mathcal{V})$ comme q -ième groupe de cochaînes et l'opérateur de Dolbeault comme différentielle, on définit le complexe $D_2^*(\tilde{X}, \mathcal{V})$.

DÉFINITION 3.3.1. — *Les groupes de cohomologie de Dolbeault L^2 de \mathcal{V} sur \tilde{X} sont les espaces vectoriels topologiques définis par*

$$H_2^*(\tilde{X}, \mathcal{V})_{\text{Dolb}} = H^*(D_2^*(\tilde{X}, \mathcal{V})).$$

On voit aisément que $H_2^*(\tilde{X}, \mathcal{V})_{\text{Dolb}}$ provient d'un objet de $E_f(\Gamma)$. De plus, le théorème d'indice L^2 d'Atiyah se spécialise en la :

PROPOSITION 3.3.2.

$$\sum_q (-1)^q \dim_{\Gamma} H_2^q(\tilde{X}, \mathcal{V})_{\text{Dolb}} = \text{ch}(\mathcal{V}) \text{Todd}(T_X) \cdot [X].$$

La technique de Bochner-Kodaira avec des métriques lisses permet de voir tout de suite que :

LEMME 3.3.3. — Soit \mathcal{L} un faisceau inversible ample et \mathcal{V} un faisceau cohérent localement libre sur X . Il existe un entier $N_{\mathcal{V}}$ tel que pour tout $n \geq N_{\mathcal{V}}$ et tout $q \neq 0$, on ait $H_2^q(\tilde{X}, \mathcal{V} \otimes \mathcal{L}^n) = 0$.

3.4. Cohomologie L^2 des faisceaux cohérents.

Nous désirons prolonger la théorie d'indice L^2 d'Atiyah aux faisceaux analytiques cohérents. Soit \mathcal{F} un Γ -faisceau analytique cohérent sur \tilde{X} possédant une résolution globale finie R par des Γ -faisceaux localement libres

$$R^{-n} \xrightarrow{d_{-n}} R^{-n+1} \rightarrow \dots \rightarrow R^0 \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow 0.$$

Posons $D_2^{p,q}(\tilde{X}, R) = D^q(\tilde{X}, R^p)$ et définissons des différentielles

$$\begin{aligned} d &= d_p : D_2^{p,q} \rightarrow D_2^{p+1,q} \\ \delta &= (-1)^p \bar{\delta} : D_2^{p,q} \rightarrow D_2^{p,q+1} \end{aligned}$$

et formons le complexe simple associé $(D_2^*(\tilde{X}, R), d + \delta)$.

LEMME 3.4.1. — $H^*(D_2^*(\tilde{X}, R))$ provient d'un objet de $E_f(\Gamma)$.

Preuve. — Posons $D'' = d + \delta$. Notons \mathfrak{d}'' son adjoint formel et posons $\Delta_{D''} = (D'' + \mathfrak{d}'')^2$.

Définissons $L^2(\tilde{X}, D^N) = \bigoplus_{p+q=N} L^2(\tilde{X}, V^p \otimes \Omega^{0,q})$ et $L^2(\tilde{X}, D) = \bigoplus_N L^2(\tilde{X}, D^N)$. L'opérateur $\Delta_{D''}$ est un opérateur essentiellement autoadjoint positif dans $L^2(\tilde{X}, D)$. Par suite on peut appliquer le théorème spectral et il existe une famille $\{E(\lambda)\}_{\lambda \geq 0}$ de projecteurs spectraux avec

$$\Delta_{D''} = \int_0^\infty \lambda dE(\lambda).$$

Comme $\Delta_{D''}$ préserve la graduation $L^2(\tilde{X}, D) = \bigoplus_N L^2(\tilde{X}, D^N)$ la famille des projecteurs spectraux de cet opérateur la préserve également et on peut écrire $E(\lambda) = \bigoplus_N E^N(\lambda)$. Comme $\Delta_{D''}$ commute à l'action de Γ , ses projecteurs spectraux commutent à Γ . Rappelons la formule suivante :

$$\mathcal{E}^N(\lambda) = \text{Im}(E^N(\lambda)) = \{\phi \in L^2(\tilde{X}, D^N) \mid \forall k (\Delta_{D''}^k \phi, \phi) \leq \lambda^k (\phi, \phi)\}.$$

Soit ∇ une connexion sur le fibré $C^\infty \bigoplus_{p+q=N} V^p \otimes \Omega^{0,q} \rightarrow X$ et $\tilde{\nabla}$ son relèvement à \tilde{X} . Nous introduisons la norme de Sobolev $\|\cdot\|_1$ sur $L^2(\tilde{X}, D^N)$

définie par

$$\|\phi\|_1^2 = \int_{\tilde{X}} \|\phi\|^2 + \|\tilde{\nabla}\phi\|^2.$$

Comme $\Delta_{D''}$ est un opérateur elliptique, il existe $a, b > 0$ tels que tout $\phi \in E(\lambda)$ vérifie $\|\phi\|_1 \leq (a + b\lambda)\|\phi\|$. Par suite $\mathcal{E}^N(\lambda)$ est un Γ -module projectif de type fini grâce à une application standard du théorème de compacité de Sobolev (voir [17] Prop. 1.5 p. 566). La cohomologie du complexe de Γ -modules hilbertiens projectifs de type fini $D^\cdot(\lambda) : \dots \rightarrow \mathcal{E}^n(\lambda) \xrightarrow{D''} \mathcal{E}^{n+1}(\lambda) \rightarrow \dots$ provient d'un objet de $E_f(\Gamma)$ puisque ce complexe provient d'un complexe de cette catégorie abélienne. Par construction, $D_2(V^\cdot)$ est somme directe de $D^\cdot(\lambda)$ avec un complexe acyclique. D'où le lemme. \square

LEMME 3.4.2. — Soit R^\cdot un complexe acyclique fini de faisceaux localement libres. Alors, $H^\cdot(D_2(\tilde{X}, R^\cdot)) = 0$.

Preuve. — En effet un tel complexe de faisceaux donne lieu à un complexe de fibrés vectoriels C^∞ scindé dans la catégorie C^∞ . Il suit que le complexe

$$\dots \rightarrow \bigoplus_q D_2^{p,q} \xrightarrow{\bigoplus_q d_p} \bigoplus_q D_2^{p+1,q} \rightarrow \dots$$

est scindé donc acyclique. Ce complexe est le E_0 d'une suite spectrale dont la cohomologie aboutit à $H^\cdot(D_2(\tilde{X}, R^\cdot))$. \square

COROLLAIRE 3.4.3. — Soient R_1 et R_2 deux résolutions localement libres de \mathcal{F} , il existe un isomorphisme unique

$$I_{12} : H^*(D_2^*(\tilde{X}, R_1)) \rightarrow H^*(D_2^*(\tilde{X}, R_2))$$

fonctoriel pour les morphismes de résolution induisant l'identité sur \mathcal{F} .

Preuve. — Soit $R_3 \rightarrow R_4$ un morphisme de résolutions de \mathcal{F} induisant l'identité sur \mathcal{F} tel que $R_3^i \rightarrow R_4^i$ soit surjectif. K^\cdot le complexe noyau est un complexe acyclique de faisceaux localement libres et l'on a une suite exacte

$$0 \rightarrow D_2^*(\tilde{X}, K^\cdot) \rightarrow D_2^*(\tilde{X}, R_3) \rightarrow D_2^*(\tilde{X}, R_4) \rightarrow 0.$$

Passant à la suite exacte longue de cohomologie et utilisant le lemme précédent, nous voyons que le morphisme naturel $H^*(D_2^*(\tilde{X}, R_3)) \rightarrow H^*(D_2^*(\tilde{X}, R_4))$ est un isomorphisme.

On peut toujours trouver une résolution R_3 de \mathcal{F} et des morphismes de résolutions $R_3 \rightarrow R_i$, $i = 1, 2$ surjectifs sur chaque terme, d'où un

isomorphisme I_{12} . L'unicité de I_{12} provient du fait que pour toute paire de morphismes $F^\cdot \rightarrow G^\cdot$ de complexes de faisceaux cohérents sur la variété algébrique lisse X induisant le même morphisme en cohomologie, il existe un quasi-isomorphisme $E^\cdot \rightarrow F^\cdot$ et une homotopie entre les deux morphismes composés $E^\cdot \rightarrow G^\cdot$. Cette homotopie induit une homotopie entre les deux morphismes induits $D_2(X, E^\cdot) \rightarrow D_2(X, G^\cdot)$ qui sont par suite égaux en cohomologie. Ceci permet d'attacher à tout faisceau cohérent sur X un groupe de cohomologie L^2 , noté $H_2^q(\tilde{X}, \mathcal{F})$, bien défini, qui est un objet de $E_f(\Gamma)$ (muni, pour toute résolution R^\cdot de \mathcal{F} d'un isomorphisme fonctoriel $O(H_2^q(\tilde{X}, \mathcal{F})) \rightarrow H^\cdot(D_2(X, R^\cdot))$). Le complexe $D_2(X, R^\cdot)$ étant une déformation par opérateurs C^∞ -linéaires d'une somme de complexes de Dolbeault décalés, c'est un complexe elliptique. Utilisant [2], il vient donc :

COROLLAIRE 3.4.4.

$$\chi_2(\tilde{X}, \mathcal{F}) = \sum_q (-1)^q \dim_\Gamma H_2^q(\tilde{X}, \mathcal{F}) = \text{ch}(\mathcal{F}) \text{Todd}(T_X) \cdot [X].$$

Pour la notion de δ -foncteur, voir le livre de Hartshorne, [13] p. 205.

THÉORÈME 4. — *L'assignement $\mathcal{F} \rightarrow H_2(\tilde{X}, \mathcal{F})$ est sous-jacent à un δ -foncteur de la catégorie des faisceaux analytiques cohérents sur X vers $E_f(\Gamma)$.*

Preuve. — Pour tout morphisme de faisceaux cohérents $\phi : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ on peut construire deux résolutions localement libres de \mathcal{F} et \mathcal{G} telles que ϕ se relève à un morphisme entre résolutions, qui induit un morphisme entre les cohomologies L^2 . Que ce morphisme ne dépend pas des choix faits est laissé en exercice.

De la même manière, on associe à toute suite exacte courte dans la catégorie des faisceaux cohérents sur X une suite exacte courte de résolutions, ce qui induit une suite exacte longue en cohomologie L^2 dont l'unicité et la functorialité se prouvent sans difficulté. Ce n'est pas une conséquence directe de la définition que $H_2^i(\tilde{X}, \mathcal{F}) = 0$ pour $i < 0$ (cette annulation est en revanche claire si $i > \dim_{\mathbb{C}} X$) puisque le complexe qui calcule la cohomologie est concentré en degrés compris entre $-d$ et $\dim_{\mathbb{C}} X$ où d est la longueur de la résolution localement libre de \mathcal{F} choisie. Puisqu'il faudra une idée supplémentaire, nous repoussons, sans que cela ne crée de cercle vicieux, la preuve de ce fait au paragraphe suivant (corollaire 3.5.6).

□

LEMME 3.4.5. — Soit \mathcal{L} un faisceau inversible ample et \mathcal{F} un faisceau cohérent sur X . Il existe un entier $N_{\mathcal{F}}$ tel que pour tout $n \geq N_{\mathcal{F}}$ et tout $q > 0$, on ait $H_2^q(\tilde{X}, \mathcal{F} \otimes \mathcal{L}^n) = 0$.

Preuve. — Choisissons une résolution R^\cdot de \mathcal{F} de longueur $d \leq \dim_{\mathbb{C}} X$. Il y a une suite spectrale aboutissant à $H_2^*(\tilde{X}, \mathcal{F})$ de terme E_2 donné par $E_2^{pq}(\tilde{X}, R^\cdot) = H_2^q(\tilde{X}, R^{-p})_{\text{Dolb}}$ avec $0 \leq p, q \leq \dim_{\mathbb{C}} X$. Par 3.3.3, $E_2^{pq}(\tilde{X}, R^\cdot \otimes \mathcal{L}^N) = 0$ si $q \neq 0$ et $N \gg 0$. Par suite, \mathcal{L} désignant un faisceau inversible ample $E_2^{pq}(\tilde{X}, \mathcal{F} \otimes \mathcal{L}^N) = 0$ pour $N \gg 0$, $p \geq 0$ et $q > 0$. Donc, $H_2^i(\tilde{X}, \mathcal{F} \otimes \mathcal{L}^N) = 0$ pour $i > 0$ et $N \gg 0$.

3.5. Interprétation de la cohomologie L^2 des faisceaux cohérents.

Une autre interprétation de la cohomologie L^2 d'un faisceau est nécessaire. Cette interprétation ayant l'avantage de ne pas nécessiter d'hypothèse d'algèbricité est utilisée comme définition de la cohomologie L^2 d'un faisceau cohérent dans [10].

On définit sur X un préfaisceau de \mathcal{O}_X modules $l^2\pi_*\pi^*\mathcal{O}_{\tilde{X}}$ par la formule suivante, U désignant un ouvert de X :

$$l^2\pi_*\pi^*\mathcal{O}_{\tilde{X}}(U) = \left\{ f \in \mathcal{O}_{\tilde{X}}(\pi^{-1}(U)) : \forall K \Subset U \int_{\tilde{K}} |f|^2 < \infty \right\},$$

$l^2\pi_*\pi^*\mathcal{O}_{\tilde{X}}$ est en fait un faisceau. Pour \mathcal{V} un faisceau analytique cohérent localement libre on définit $l^2\pi_*\pi^*\mathcal{V}$ par $l^2\pi_*\pi^*\mathcal{V} = l^2\pi_*\mathcal{O}_{\tilde{X}} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{V}$. On voit que si (V, h) est un fibré vectoriel hermitien avec $\mathcal{O}_X(V) = \mathcal{V}$

$$l^2\pi_*\pi^*\mathcal{V}(U) = \left\{ s \in H^0(\pi^{-1}(U), V) : \forall K \Subset U \int_{\tilde{K}} |s|_h^2 < \infty \right\}.$$

L'assignement $\mathcal{V} \mapsto l^2\pi_*\pi^*\mathcal{V}$ est un foncteur de la catégorie des faisceaux analytiques cohérents sur X vers la catégorie des \mathcal{O}_X modules. On dispose d'une inclusion naturelle $l^2\pi_*\pi^*\mathcal{V} \subset \pi_*\pi^*\mathcal{V}$.

Le faisceau $l^2\pi_*\pi^*\mathcal{V}$ admet la résolution suivante par des faisceaux de C^∞ modules (qui, donc, sont mous) :

$$l^2\pi_*\pi^*\mathcal{V} \rightarrow \mathcal{D}_2^{0,0}(\mathcal{V}) \xrightarrow{\bar{\partial}} \mathcal{D}_2^{0,1}(\mathcal{V}) \rightarrow \dots,$$

où l'on a posé

$$\mathcal{D}_2^{0,q}(\mathcal{V})(U) = \left\{ s \in L_{\text{loc}}^2(\pi^{-1}(U), V \otimes \Omega^{0,q}) : \right. \\ \left. \forall K \Subset U \int_{\tilde{K}} \|s\|^2 + \|\bar{\partial}s\|^2 < \infty \right\}.$$

Or, si V^\cdot est un complexe de faisceaux localement libres, $H^q(D_2(V^\cdot))$ s'identifie à l'hypercohomologie du complexe de faisceaux en groupes abéliens $l^2\pi_*\pi^*(V^\cdot)$:

$$H^q(D_2(V^\cdot)) = \mathbb{H}^q(\dots l^2\pi_*\pi^*\mathcal{V}_i \rightarrow l^2\pi_*\pi^*\mathcal{V}_{i+1} \rightarrow \dots).$$

Or, on a la proposition suivante :

PROPOSITION 3.5.1. — Soit U un ouvert de X . Soit $R_{\mathcal{F}} \rightarrow \mathcal{F}$ une résolution localement libre du faisceau analytique cohérent sur U \mathcal{F} , alors le complexe concentré en degrés négatifs de faisceaux $l^2\pi_*\pi^*R_{\mathcal{F}}$ vérifie $\mathcal{H}^q(l^2\pi_*\pi^*R_{\mathcal{F}}) = 0$, $q < 0$.

Preuve. — Le problème est local et on peut supposer que U est le polydisque Δ^n . Dans ces conditions $\tilde{U} = U \times \Gamma$ et $\pi : \tilde{U} \rightarrow U$ est la projection sur le premier facteur et tous les faisceaux localement libres peuvent être supposés de la forme $O_U^{\oplus N}$. Le fait crucial est la proposition :

PROPOSITION 3.5.2. — Soit (g_1, \dots, g_r) des fonctions holomorphes sur Δ^n . Alors quel que soit R , $1 > R > 0$, il existe $C_R > 0$, tel que si f est une fonction holomorphe de carré sommable sur Δ^n et appartenant à l'idéal cohérent engendré par les g_i , il existe $(f_1, \dots, f_r) \in \mathcal{O}(R\Delta^n)$, telle que

$$f = \sum_{i=1}^r f_i g_i, \quad \int_{R\Delta^n} \sum_i |f_i|^2 \leq C_R \int_{\Delta^n} |f|^2.$$

Preuve de la proposition 3.5.2. — Considérons l'espace $\mathcal{O}(\Delta^n)$ des fonctions holomorphes sur Δ^n . Pour $0 < R < 1$ nous définissons une norme $\|\cdot\|_R$ sur $\mathcal{O}(\Delta^n)$ par la formule

$$\|f\|_R^2 = \int_{R\Delta^n} |f|^2.$$

Cette collection de normes induit sur $O(\Delta^n)$ une topologie d'espace de Fréchet⁽⁵⁾. L'espace $\mathcal{I}(\Delta) \subset O(\Delta^n)$ est alors un fermé, voir [12], p. 44⁽⁶⁾. L'application $G : O^r(\Delta) \rightarrow \mathcal{I}(\Delta)$ définie par $G(h_1, \dots, h_r) = g_1 h_1 + \dots + g_r h_r$ est une application linéaire continue et surjective (par le Théorème B de Cartan) entre espaces de Fréchet. Elle est par conséquent ouverte, voir [25], p. 75. De ce fait, l'ouvert

$$U_R = \{(h_1, \dots, h_r) \in O^r(\Delta), \int_{R\Delta^n} \sum_i |h_i|^2 < 1\} = B_{\|\cdot\|_R}(0, 1)$$

vérifie que $G(U)$ est un ouvert de $\mathcal{I}(\Delta)$. Par suite $\exists \rho_R, \epsilon_R > 0$ tel que $\{\phi \in \mathcal{I}(\Delta), \int_{\rho_R \Delta^n} |\phi|^2 < \epsilon_R\}$ soit contenu dans $G(U_R)$. Poser $C_R = 2/\epsilon_R$ établit la proposition 3.5.2 (avec une constante non-effective!). La proposition 3.5.2 se traduit immédiatement en le :

COROLLAIRE 3.5.3. — *Soit $g : O^r \rightarrow O$ un morphisme de faisceaux sur U d'image l'idéal cohérent \mathcal{I} . Alors l'image de $l^2 \pi_* \pi^* g : l^2 \pi_* \pi^* O^r \rightarrow l^2 \pi_* \pi^* O$ s'identifie sous l'inclusion naturelle $l^2 \pi_* \pi^* O \rightarrow \pi_* \pi^* O$ au sous-faisceau $l^2 \pi_* \pi^* O \cap \pi_* \pi^* \mathcal{I}$.*

Preuve. — Il est clair que $\text{Im}(l^2 \pi_* \pi^* g) \subset l^2 \pi_* \pi^* O \cap \pi_* \pi^* \mathcal{I}$. Prouvons la réciproque. Un élément ξ_x de $(\pi_* \pi^* \mathcal{I} \cap l^2 \pi_* \pi^* O)_x$ est le germe en x d'une section de ce faisceau définie sur un ouvert de la forme $x + r\Delta^n$, c'est-à-dire (comme $\tilde{U} = U \times \Gamma$) par la donnée d'une collection $(f_\gamma)_{\gamma \in \Gamma}$ de fonctions holomorphes sur $x + r\Delta^n$ vérifiant pour toute constante réelle $r' < r$, $\sum_\gamma \int_{x+r'\Delta^n} |f_\gamma|^2 < \infty$ et aussi que $f_\gamma \in \mathcal{I}(x + r\Delta^n)$. La proposition 3.5.2 assure que l'on peut choisir des fonctions holomorphes $h_\gamma^1, \dots, h_\gamma^r$ définies sur $x + r/4\Delta^n$ avec $f_\gamma = h_\gamma^1 g_1 + \dots + h_\gamma^r g_r$ et $\int_{x+r/4\Delta^n} \sum_i |h_\gamma^i|^2 \leq C_r \int_{x+r/2\Delta^n} |f_\gamma|^2$. La section η de $l^2 \pi_* \pi^* O^r$ sur $x + r/4\Delta^n$ définie par $((h_\gamma^1, \dots, h_\gamma^r))_{\gamma \in \Gamma}$. Et on a, par construction, $l^2 \pi_* \pi^* \eta_x = \xi_x$.

COROLLAIRE 3.5.4. — *Soit $g : O^r \rightarrow O^p$ un morphisme de faisceaux d'image \mathcal{J} . Alors l'image de $l^2 \pi_* \pi^* g : l^2 \pi_* \pi^* O^r \rightarrow l^2 \pi_* \pi^* O^p$ s'identifie sous l'inclusion naturelle $l^2 \pi_* \pi^* O^p \rightarrow \pi_* \pi^* O^p$ au sous-faisceau $l^2 \pi_* \pi^* O^p \cap \pi_* \pi^* \mathcal{J}$.*

(5) La même structure d'espace de Fréchet est induite par la topologie de la convergence uniforme sur les compacts, par la topologie de la convergence $L^p, p \geq 1$ sur les compacts.

(6) Il s'agit d'une application standard du lemme de Krull, combiné avec l'observation que la convergence L^2_{loc} force la convergence des coefficients du développement en série entière en tout point de Δ^n .

Preuve du corollaire 3.5.4. — Par récurrence sur p . Soit

$$\xi \in (\pi_* \pi^* \mathcal{J} \cap l^2 \pi_* \pi^* O^p)_x.$$

Soit $q_1 : O^p \rightarrow O$ la projection sur le premier facteur. Appliquant le lemme précédent à $q_1 g(O^r) \rightarrow q_1(\mathcal{J}) \subset O$ on trouve $\eta_x \in l^2 \pi_* \pi^* O^r$ tel que $q_1 g(\eta_x) = q_1(\xi_x)$. De sorte que

$$\xi'_x = \xi_x - g\eta_x \in (l^2 \pi_* \pi^* O^{p-1} \cap \pi_* \pi^* (O^{p-1} \cap \mathcal{J}))_x.$$

Soit $\mathcal{K} = \ker(q_1 g) \subset O^{r-1}$ et $m : O^s \rightarrow \mathcal{K}$ un morphisme surjectif. Il est clair que $\text{Im}(g \circ m) = \mathcal{J} \cap O^{p-1}$. Par suite nous pouvons appliquer l'hypothèse de récurrence à $g \circ m : O^s \rightarrow O^{p-1}$ et trouver $\eta'_x \in l^2 \pi_* \pi^* O^s_x$ tel que $g \circ m(\eta'_x) = \xi'_x$. Mais $\eta'_x = m\eta''_x \in l^2 \pi_* \pi^* O^r$ et vérifie $g\eta'_x = \xi'_x$. \square

COROLLAIRE 3.5.5. — Soit $O^n \xrightarrow{a} O^m \xrightarrow{b} O^p$ une suite exacte de faisceaux sur U alors $l^2 \pi_* \pi^* O^n \xrightarrow{l^2 \pi_* \pi^* a} l^2 \pi_* \pi^* O^m \xrightarrow{l^2 \pi_* \pi^* b} l^2 \pi_* \pi^* O^p$ est également exacte.

Preuve. — En effet $\ker(l^2 \pi_* \pi^* b) = l^2 \pi_* \pi^* O^m \cap \pi_* \pi^* \ker(b)$. Comme $\ker(b) = \text{Im}(a)$ on peut appliquer le lemme précédent pour conclure $\ker(l^2 \pi_* \pi^* b) = \text{Im}(l^2 \pi_* \pi^* b)$. \square

Ce dernier point achève de prouver la proposition 3.5.1. \square

Comme promis au paragraphe précédent, prouvons le :

COROLLAIRE 3.5.6. — Soit \mathcal{F} un faisceau analytique cohérent sur X . Alors $H_2^q(\tilde{X}, \mathcal{F}) = 0, q < 0$.

Preuve. — Soit $R_{\mathcal{F}} \rightarrow \mathcal{F}$ une résolution localement libre. Nous avons remarqué que $H_2^q(\tilde{X}, \mathcal{F}) = \mathbb{H}^q(l^2 \pi_* \pi^* R_{\mathcal{F}})$. Comme $\mathcal{H}^q(l^2 \pi_* \pi^* R_{\mathcal{F}}) = 0$, pour $q \neq 0$, la suite spectrale d'hypercohomologie fournit $H_2^q(\tilde{X}, \mathcal{F}) = H^q(X, \mathcal{H}^0(l^2 \pi_* \pi^* R_{\mathcal{F}}))$. Or, un faisceau en groupes abéliens n'a pas de cohomologie en degrés strictement négatifs. \square

Le faisceau $\mathcal{H}^0(l^2 \pi_* \pi^* R_{\mathcal{F}})$ utilisé ci dessus s'identifie grâce à 3.5.4 à un sous-faisceau de $\pi_* \pi^* \mathcal{F}$ ne dépendant pas de la résolution. On notera ce sous-faisceau de $\pi_* \pi^* \mathcal{F}$ par $l^2 \pi_* \pi^* \mathcal{F}$. Le foncteur $l^2 \pi_* \pi^*$ ainsi défini est covariant exact. On aurait pu définir $H_2^q(\tilde{X}, \mathcal{F})$ comme $H^q(X, l^2 \pi_* \pi^* \mathcal{F})$.

Le faisceau $l^2 \pi_* \pi^* \mathcal{F}$ n'est pas le produit tensoriel du faisceau \mathcal{F} par le système local sur X associé à la représentation régulière gauche de Γ , mais une 'complétion' de celui-ci en un sens qu'il n'est pas nécessaire d'explicitier.

Le procédé donné ici s'étend pour définir des groupes de cohomologie L^p pour $p \in [1, \infty]$. Cela étant, ces objets semblent n'offrir que peu de prise et paraissent bien difficiles à utiliser.

3.6. Théorème de Demailly-Nadel pour la cohomologie L^2 .

La proposition suivante, version L^2 du théorème de Kawamata-Viehweg est directement inspirée de la preuve du théorème 5.11 dans [7], p. 38, qui est le cas spécial où le groupe Γ est trivial :

PROPOSITION 3.6.1. — *Soit X une variété algébrique compacte lisse. Soit $\tilde{X} \rightarrow X$ un revêtement galoisien de groupe Γ . Soit \mathcal{L} un faisceau inversible sur X . Soit h_s une métrique singulière sur le fibré linéaire holomorphe sous-jacent. Soit $D_2^*(h_s)$ le sous-complexe du complexe de Dolbeault $D_2^*(\mathcal{L})$ obtenu en posant*

$$D_2^q(h_s) = \left\{ s \in L_{loc}^2(\tilde{X}, L), \forall K \Subset X \int_{\pi^{-1}(K)} \|s\|_{h_s}^2 + \|\bar{\partial}s\|_{h_s}^2 < \infty \right\}.$$

On a $H^*(D_2^*(h_s)) = H_2^*(\tilde{X}, \mathcal{L} \otimes I(h_s))$.

Si, de plus, la courbure de h_s est strictement positive au sens des courants, $H_2^q(\tilde{X}, K_{\tilde{X}} \otimes \mathcal{L} \otimes I(h_s)) = 0$, $q > 0$.

Preuve. — Soit U un ouvert de X . On pose

$$D_2^q(U, h_s) = \left\{ s \in L_{loc}^2(\pi^{-1}(U), L), \forall K \Subset U \int_{\pi^{-1}(K)} \|s\|_{h_s}^2 + \|\bar{\partial}s\|_{h_s}^2 < \infty \right\}.$$

Ceci définit un faisceau de C^∞ -modules D_2 . Si U est assez petit $\pi^{-1}U \simeq \Gamma \times U$. Par suite le complexe $D^*(U, h_s)$ une somme directe hilbertienne de complexes tous isomorphes au complexe de Dolbeault d'espace de cochaînes

$$d_2^q(U, h_s) = \left\{ s \in L_{loc}^2((U), L), \forall K \Subset U \int_K \|s\|_{h_s}^2 + \|\bar{\partial}s\|_{h_s}^2 < \infty \right\}.$$

Dans [7] p. 38, à l'aide du théorème ici cité comme le théorème 2.1.1, est démontré que, si U est de Stein, le complexe $(d_2^*(U, h_s), \bar{\partial})$ est acyclique en degrés > 0 et que son H^0 est précisément l'ensemble des section de $I(h_s)$ sur U . Par suite, le $H^0(D_2) \subset \pi_* \pi^* I(h_s)$. De plus $H^0(D_2)(U)$ est constitué de sections holomorphes de L telles que $\int_{\pi^{-1}(K)} \|s\|_{h_s^{sm}}^2 < \infty$ où h_s^{sm} est lisse en vertu du principe du maximum pour les fonctions psh qui implique $h_s^{sm} \leq h_s$.

Par suite $H^0(D_2(h_s)) = l^2\pi_*\pi^*\mathcal{L} \cap \pi_*\pi^*I(h_s) = l^2\pi_*\pi^*I(h_s)$, en vertu de la définition de $l^2\pi_*\pi^*I(h_s)$. \square

3.7.

Tous ces énoncés sont valables dans le contexte plus général où les faisceaux en question sont munis d'une action compatible d'un groupe $\bar{\Gamma}$ extension centrale de Γ par S^1 .

4. Preuve du théorème 1.

4.1. Un cas spécial.

Pour la convenance du lecteur, donnons une preuve d'un cas spécial du théorème 1. La preuve du cas général aura la même structure.

PROPOSITION 4.1.1. — *Soit X une variété algébrique lisse de groupe fondamental génériquement gros. Soit L un fibré ample sur X . Alors $H^0(X, K_X \otimes L) \neq 0$.*

Preuve. — Soit $\tilde{X} \rightarrow X$ le revêtement universel de X . Soit h une métrique lisse sur L de courbure strictement positive. Il résulte du lemme 3.4.5 qu'il existe $N > 0$ tel que $\pi^*L^{\otimes N}$ est engendré par ses sections globales L^2 . Soit $x \in \tilde{X}$, on définit $S(x)$ comme le carré de la norme de l'application linéaire d'évaluation $ev_x : H_2^0(\tilde{X}, L^{\otimes N}) \rightarrow (\pi^*L_x^{\otimes N}, h_x)$. La fonction S est strictement positive et $\pi_1(X)$ -invariante. S étant lisse, il existe une constante $s > 0$ telle que $S \geq s$. Si E est un sous-espace vectoriel de $H_2^0(\tilde{X}, L^{\otimes N})$, on définit de même $S^E(x)$ comme le carré de la norme de l'application linéaire d'évaluation $ev_x^E : E \rightarrow (\pi^*L_x^{\otimes N}, h_x)$. Le lieu $B^E = \{x \in \tilde{X} \mid S^E(x) = 0\}$ est intersection des lieux des zéros des sections holomorphes de $\pi^*L^{\otimes N}$ définies par les éléments de E et est de ce fait un sous-espace analytique de \tilde{X} . La fonction S^E peut être représentée comme la somme sur une base hilbertienne (e_i) quelconque de E des fonctions $h(e_i(x))$. Par suite, si E est de codimension finie $S - S^E$ est la somme d'un nombre fini de fonctions de la forme $\|\phi\|^2$ où ϕ est une section holomorphe L^2 de $L^{\otimes N}$. On a $\lim_{x \rightarrow \infty} \|\phi(x)\| = 0$, voir par exemple [16]. Par suite, il existe un compact K^E tel que $x \notin K^E \Rightarrow S^E(x) \geq s/2$ et B^E est un sous-espace analytique compact de \tilde{X} .

Soit P un point générique de \tilde{X} . Fixons $n \geq 0$ un entier. Appelons E_n le sous-espace de $H_2^0(\tilde{X}, L^{\otimes n})$ formé des sections s'annulant à l'ordre n en P . E_n est de codimension finie et $P \in B^{E_n}$. Le point crucial de la preuve est que comme, par hypothèse, P est maximal parmi les sous-espaces analytiques compacts connexes de \tilde{X} , P est un point isolé de B^{E_n} . De plus, par construction, il existe une constante $C > 0$, telle que, pour tout x , $S^{E_n}(x) \leq C \text{dist}(x, P)^{2n}$. Sur π^*L , on construit une métrique singulière de courbure $\geq \frac{\alpha}{2} \pi^* \omega$ par la formule $h'_n = (h \otimes h / S^{E_n})^{1/2N}$. Son nombre de Lelong en le point P qui est isolé dans son lieu singulier singulier est $\geq n/2N$. La proposition 2.1.1 implique de la même façon que dans [7] cor. 5.13 p. 38 que l'espace des sections holomorphes L^2 de $K_{\tilde{X}} \otimes \pi^*L$ engendre les s -jets de $K_{\tilde{X}} \otimes \pi^*L$ en P si $s \leq n/2N - \dim_{\mathbb{C}}(X)$. n étant arbitraire, il suit que les sections L^2 de $K_{\tilde{X}} \otimes L$ engendrent les s -jets en P pour tout $s \geq 0$. En particulier $H_2^0(\tilde{X}, K_X \otimes L) \neq 0$. Mais, il ressort du théorème d'annulation de Kodaira et du théorème 3 que $\dim H^0(X, K_X \otimes L) = \chi(X, K_X \otimes L) = \dim_{\pi_1(X)} H_2^0(\tilde{X}, K_X \otimes L) \neq 0$. \square

4.2. Métriques singulières associées à un système linéaire L^2 sans point base.

PROPOSITION 4.2.1. — Soit (N, g) une variété complexe hermitienne connexe et G un groupe infini proprement discontinu et cocompact de biholomorphismes g -isométriques. Soit (Λ, h) un fibré linéaire hermitien sur N auquel l'action de G se relève. On suppose que, pour tout point P de N , il existe une section holomorphe L^2 de Λ ne s'annulant pas en P . Soit $Z \subset N$ un sous-espace analytique compact. Alors, il existe une famille croissante $(h_s)_{s \geq 0}$ de métriques singulières⁽⁷⁾ sur Λ , et pour tout $s > 0$ une constante positive $C_s > 0$ et un compact K_s contenant Z tels que

1. h_s est de courbure semi-positive au sens des courants.
2. h_0 est une métrique lisse et les singularités de h_s sont concentrées sur un sous-espace analytique contenu dans K_s .
3. $h_0 \leq h_s \leq C_s h_0$ sur $N - K_s$.
4. Le nombre de Lelong de h_s en tout point $P \in Z$ vérifie $\nu(h_s, P) \geq s$.
5. Si, de plus, Z est un sous-ensemble analytique connexe maximal, Z est une composante connexe isolée du lieu singulier de h_s .

(7) Qui ne pourront pas être G -périodiques pour $s > 0$ assez grand.

Preuve. — La condition 5, cruciale, est une conséquence immédiate des conditions 2 et 4. Puisque nous l'utiliserons plusieurs fois, nous formulons le lemme suivant :

LEMME 4.2.2. — *Soit H un espace de Hilbert et f une forme linéaire continue sur H . Soit $(e_i)_i$ une base hilbertienne de H . Alors $\sum_i |f(e_i)|^2 = \|f\|^2$.*

Preuve. — En effet toute forme linéaire f s'identifie au produit scalaire avec un élément z_f de H et $\|f\| = \|z_f\|$. Le lemme résulte donc du théorème de Pythagore. \square

Toute section L^2 de Λ vérifie $\lim_{x \rightarrow \infty} \|s(x)\| = 0$. En effet, un argument de géométrie bornée standard assure qu'il existe une constante C telle que pour tout point P de N et toute section s de Λ $\|s(P)\|^2 \leq C \int_{B_P(r)} \|s\|^2$ où $B_P(r)$ est la boule g -riemannienne de centre P et de rayon r . Par suite si Q est un point fixé de N , $\|s(P)\|^2 \leq \int_{N-B_Q(d(P,Q)-1)} \|s\|^2$ pour toute section L^2 . D'où $\lim_{P \rightarrow \infty} \|s(P)\| = 0$.

L'espace $H = H_2^0(N, \Lambda)$ des sections holomorphes de carré intégrable sur N du fibré linéaire hermitien Λ est soit nul soit un espace de Hilbert de dimension infinie. Pour voir cela, posons

$$\sigma_0(P) = \sup_{s \in H_2^0(\tilde{N}, \Lambda), \int \|s\|^2 = 1} \|s(P)\|^2$$

σ_0 est une fonction positive G -invariante. Si l'espace H est de dimension finie on peut trouver m sections L^2 de norme 1 formant une base unitaire de H et toute section holomorphe s de norme L^2 égale à 1 s'écrirait $s = \sum U_j s_j$ avec $|U_j| \leq 1$. Ceci implique, pour tout P , $\sigma_0(P) \leq \sum_1^m \|s_j(P)\|^2$. Par suite, $\lim_{P \rightarrow \infty} \sigma_0(P) = 0$. Une fonction G -invariante sur N tendant vers 0 est identiquement nulle puisqu'aucune G -orbite n'est compacte. Par suite $\sigma_0 = 0$ et $H = 0$, si H est de dimension finie.

Comme il existe pour tout point P de N une section L^2 de Λ non nulle en P , $H_2^0(N, \Lambda)$ est un espace de Hilbert de dimension infinie et la fonction σ_0 est G -invariante, bornée supérieurement et nulle part égale à 0. Grâce à 4.2.2, pour toute base hilbertienne $\{s_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ de H , $\sigma_0(P) = \sum_i \|s_i(P)\|^2$. Par suite, σ_0 est continue. Comme G est cocompact, il existe deux constantes $C_0, c_0 > 0$ telles que $C \geq \sigma_0 \geq c$.

Soit I_Z le faisceau d'idéaux définissant Z . Posons

$$E_n(Z) = \ker(H_2^0(N, \Lambda) \rightarrow H^0(N, \Lambda \otimes O_N/I_Z^n)).$$

Comme Z est compact, le théorème de finitude de Cartan-Serre implique que $H^0(N, \Lambda \otimes O_N/I_Z^n)$ est de dimension finie. $E_n(Z)$ est un espace de Hilbert de dimension infinie mais de codimension finie dans H . Posons $\sigma_n^Z(Q) = \sup_{s \in E_n(Z), \int \|s\|^2 = 1} \|s(Q)\|^2$. Pour toute base hilbertienne $\{s_i^n\}_{i \in \mathbb{N}}$

de $E_n(Z)$, on a, en vertu de 4.2.2, $\sigma_n^Z(Q) = \sum_{i \in \mathbb{N}} \|s_i^n(Q)\|^2$. Fixons $Q \in N$.

Prenons une trivialisations de Λ sur la boule $B_Q(\delta)$ $\delta > 0$ assez petit et soit $x \rightarrow h(x)$ la fonction donnée par le carré de la norme de la section trivialisante s_x . Posons $s_i^n = (f_i^n)_x s_x$. $(f_i^n)_x$ est une fonction holomorphe définie localement en x , disons sur la boule $B_x(\delta)$. Par suite $\sigma_n^Z = h(x) \sum_{i \in \mathbb{N}} |(f_i^n)_x|^2$ est le produit de la fonction lisse h avec la fonction e^{ψ_x} où ψ_x est plurisousharmonique puisque l'ensemble $\{\psi_x = -\infty\}$ est contenu dans une intersection non vide de sous-espaces analytiques propres qui sont chacun de mesure nulle puisque N est connexe et que ψ_x est borne supérieure d'une famille de fonctions plurisousharmoniques. Par suite $h_n^Z = (\sigma_n^Z)^{-1} h$ est une métrique singulière de courbure semi positive au sens des courants. D'où la condition 1.

La fonction $\sigma_0 - \sigma_n^Z$ est la somme des carrés des normes d'un nombre fini de sections et tend vers 0 quand Q tend vers l'infini. Donc $C \geq \sigma_0 \geq \sigma_n^P$ et il existe un compact K_n tel que $\sigma_n^Z(Q) \geq c/2$ si $Q \notin K_n$. D'où les conditions 2 et 3.

Soit z un système de coordonnées locales en x définies sur la boule $B_x(\delta)$. Il existe une constante $C_x > 0$ telle que la famille de formes linéaires continues sur $E_n(Z)$, $\{s \mapsto f_y(s) = s/\sigma(y)\}_{y \in B_x(\delta/2)}$ vérifie $|||f_y||| \leq C_x$. Par la formule de Cauchy, pour tout indice $\alpha \in \mathbb{N}^{\dim N}$, il existe une constante C_x^α telle que la famille de formes linéaires (continues) sur $E_n(P)$ $\{s \mapsto D_y^\alpha s = \left(\frac{\partial^\alpha}{\partial z^\alpha} f_z(s)\right)_y\}_{y \in B_x(\delta/3)}$ vérifie $|||D_y^\alpha||| \leq C_x^\alpha$. Grâce à 4.2.2 la base hilbertienne $(s_i^n)_i$ de $E_n(P)$ vérifie

$$\forall y \in B_x(\delta/3), \quad \sum_i \left| \frac{\partial^\alpha}{\partial z^\alpha} f_i^n(y) \right|^2 = |||D_y^\alpha|||^2.$$

Utilisant la formule de Leibniz et l'inégalité de Cauchy-Schwarz, nous déduisons que la série $\sum_i |f_i^n|^2$ converge uniformément sur $B_x(\delta/3)$ ainsi

que toutes ses dérivées. Il suit que σ_n^Z est lisse et que pour tout opérateur différentiel D , $D\sigma_n^Z$ est la somme de la série $\sum_i D\|s_i^n\|^2$. Par construction, pour tout opérateur différentiel d'ordre $< 2n$, pour tout $P \in Z$, $D\|s_i^n\|^2(P) = 0$. Par suite la fonction lisse σ_n^Z a un jet d'ordre $2n - 1$ en P qui s'annule. Il suit, par la formule de Taylor, $\sigma_n^Z \leq C_n^P d(x, P)^{2n}$. En particulier

$$\liminf_{Q \rightarrow P} \frac{\log \sigma_n^Z(Q)}{\log d(Q, P)} \geq 2n$$

et le nombre de Lelong de h_n en P est supérieur ou égal à n . De ceci résulte la condition 4.

Notons que, comme dans le cas usuel d'un fibré linéaire engendré sur une variété compacte, la métrique $h_0 = \sigma_0^{-1}h$ est lisse de courbure semipositive. □

4.3. Théorème de prolongement.

4.3.1. Notations.

DÉFINITION 4.3.1. — Soit J un faisceau d'idéaux sur un espace complexe V définissant le sous-espace analytique (non nécessairement irréductible ni réduit) T . Soit N un faisceau analytique cohérent sur V . On note $H^0(T, N)_p$ l'ensemble des sections de $N \otimes O_V/J$ qui proviennent d'une section de N sur un ouvert U , tel que $T \subset U \subset V$ par le morphisme d'évaluation $H^0(U, K) \rightarrow H^0(V, K \otimes O_V/J)$.

DÉFINITION 4.3.2. — Soit T un sous-espace analytique complexe d'un espace complexe V . Soit I_T l'idéal cohérent définissant T et, pour $n \in \mathbb{N}$. On appelle n -ième voisinage infinitésimal de T le sous-espace analytique complexe T_n de V défini par l'idéal cohérent I_T^n .

4.3.2. La proposition 4.2.1 construit des situations dans lesquelles la proposition suivante s'applique :

PROPOSITION 4.3.3. — Soit (X, ω) une variété kählerienne compacte connexe. Soit L un fibré linéaire holomorphe sur X . Soit $\pi : \tilde{X} \rightarrow X$ un revêtement galoisien non ramifié connexe de groupe de Galois infini. Soit Z un sous-espace analytique complexe compact de \tilde{X} . On suppose que

1. L possède une métrique singulière h de courbure strictement positive.

2. L possède une métrique singulière h_0 de courbure positive.
3. π^*L possède une famille croissante de métriques singulières $(H_s)_{s \geq 0}$ de courbure positive avec $\pi^*h_0 = H_0$.
4. Pour tout point p de Z le nombre de Lelong de H_s en P est $\geq s$.
5. On peut décomposer la métrique singulière H_s en un produit $H_s = H_0 H'_s$, Z étant réunion (finie) de composantes connexes isolées du lieu singulier de H'_s

Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout nombre réel $\epsilon \in]0, 1[$, le morphisme d'évaluation

$$H_2^0(\tilde{X}, K_X \otimes L \otimes I(h_0^\epsilon h^{1-\epsilon})) \rightarrow H^0(Z_n, \pi^*(K_X \otimes L \otimes I(h_0^\epsilon h^{1-\epsilon})))_p$$

est surjectif.

Preuve. — On fixe les paramètres ϵ et n . On pose $h' = h_0^\epsilon h^{1-\epsilon}$. On écrira aussi $H'_s = H_s^\epsilon \pi^* h^{1-\epsilon}$. La condition 4 permet de choisir s tel que $I(H'_s) \subset I_Z^n \cdot I(\pi^* h')$, fixons un tel choix. Soit $l \in H^0(Z_n, \pi^*(K_X \otimes L \otimes I(h')))_p$. Par la définition 4.3.1, on peut trouver un ouvert U contenant Z et une section holomorphe α_0 de $\pi^*(K_X \otimes L \otimes I(h'))$ s'évaluant à l . Par définition α_0 est une section de $\pi^*(K_X \otimes L)$ vérifiant, pour tout compact K contenu dans U , $\int_K \|\alpha_0\|_{\pi^* h'}^2 < \infty$. La condition 5 permet d'imposer que U ne contienne pas d'autre pôle de H'_s que les points de Z .

Soit χ une fonction lisse et à support compact sur U égale à 1 dans un voisinage de Z . La section lisse à support compact $\chi \alpha_0$ de $\pi^*(K_X \otimes L)$ sur U se prolonge à une section lisse de $\pi^*(K_X \otimes L)$ sur \tilde{X} tout entier notée α .

La $(0, 1)$ forme $\beta = \bar{\partial} \alpha$ à valeurs dans $\pi^*(K_X \otimes L)$ est lisse et $\bar{\partial}$ fermée. Comme $\beta = \bar{\partial} \chi \wedge \alpha_0$ sur son support, $\int_{\tilde{X}} \|\beta\|_{\pi^* h'}^2 < \infty$. Le support compact K de β est disjoint du lieu singulier de H'_s puisque β est nulle près de Z et que K est contenu dans U . Par suite, il existe une constante $C_s > 0$ tel que $H'_s \leq C_s \pi^* h'$ sur K . Par suite $\int_{\tilde{X}} \|\beta\|_{H'_s}^2 < \infty$.

La métrique h ayant une courbure strictement positive, on peut trouver une constante $a > 0$ telle que $\Theta(\pi^* L, H_s) \geq a \pi^* \omega$ au sens des courants et nous pouvons appliquer la proposition 2.1.1 et trouver une section lisse γ de $K_{\tilde{X}} \otimes \pi^* L$ telle que $\bar{\partial} \gamma = \beta$ avec $\int_{\tilde{X}} \|\gamma\|_{H'_s}^2 \leq \frac{1}{a} \int_{\tilde{X}} \|\beta\|_{H'_s}^2$. La forme $\alpha_1 = \alpha - \gamma$ est une section $\bar{\partial}$ -fermée donc holomorphe de $K_{\tilde{X}} \otimes \pi^* L$. Comme $\int_{\tilde{X}} \|\gamma\|_{H'_s}^2 < \infty$ et $H'_s \geq \pi^* h'$, il vient a fortiori que $\int_{\tilde{X}} \|\gamma\|_{\pi^* h'}^2 < \infty$ puis que $\int_{\tilde{X}} \|\alpha_1\|_{\pi^* h'}^2 < \infty$. La forme α_1 définit donc un

élément de $H_2^0(\tilde{X}, K_X \otimes L \otimes I(h'))$. De plus, α_1 s'évalue à l . En effet, la restriction de γ à un voisinage ouvert suffisamment petit de Z est une section holomorphe L^2 vis-à-vis de la métrique singulière H'_s , c'est-à-dire une section de $K_{\tilde{X}} \otimes \pi^*L \otimes I(H'_s) \subset K_{\tilde{X}} \otimes \pi^*L \otimes I(h')I_Z^n$ et γ s'évalue donc trivialement sur Z_n . \square

4.4. Fin de la preuve du théorème 1.

Pour ce paragraphe, on se place dans les hypothèses du théorème 1 et on utilise les notations données dans l'introduction.

Par le lemme de Kodaira, le fibré linéaire big L peut s'écrire sous la forme $A \otimes E$ où A est un fibré linéaire ample et E est effectif. C'est un corollaire de 3.4.5 et du théorème 4 qu'il existe $N \in \mathbb{N} - \{0\}$ tel que $\pi_\Delta^*A^{\otimes N}$ soit engendré par ses sections globales L^2 sur \tilde{X}_Δ . Appliquons la proposition 4.2.1 avec $\Lambda = \pi_\Delta^*A^{\otimes N}$ et $Z = X_g$ pour produire une famille de métriques singulières $(h_s^A)_{s \geq 0}$ vérifiant les conditions 1-5 de 4.2.1. Soulignons que, par maximalité, X_g est une composante connexe du lieu singulier de h_s .

Par [7] 3.13 p. 25, le fibré E a une métrique singulière à singularités algébriques h^E de courbure égale au courant d'intégration sur E et donc semi positive au sens des courants. La famille de métriques sur π_Δ^*L donnée par $H_s = (h_s^A)^{1/N} \pi_\Delta^*h^E$ vérifie les conditions 2-5 de la proposition 4.3.3. Le lemme 2.4.2 fournit une métrique h singulière à singularités algébriques sur L vérifiant la condition 1 de 4.3.3 telle que, de plus, il existe un voisinage U de X_g tel que $I(\pi_\Delta^*h|_U) = O_U$. 4.3.3 implique que

$$H_2^0(\tilde{X}_\Delta, K_X \otimes L \otimes I(h_0^{1-\epsilon}h^\epsilon)) \rightarrow H^0(X_g, \pi_\Delta^*(K_X \otimes L \otimes I(h_0^{1-\epsilon}h^\epsilon)))_p$$

est surjectif.

Sur l'ouvert U contenant X_g on a $O_U = I(h_0)$ et comme les métriques h_0 et h sont à singularités algébriques, le lemme 2.3.1 implique que pour ϵ assez petit $O_U = I(h_0^{1-\epsilon}h^\epsilon)$ et donc que $H^0(X_g, \pi_\Delta^*(K_X \otimes L \otimes I(h_0^{1-\epsilon}h^\epsilon)))_p = H^0(X_g, \pi_\Delta^*(K_X \otimes L))_p$. Comme X_g est une fibre générale de ρ_Δ , le faisceau cohérent $\rho_{\Delta*}(K_{\tilde{X}_\Delta} \otimes \pi_\Delta^*L)$ est localement libre près du point $p = \rho_\Delta(X_g)$ et la fibre en p du fibré vectoriel sous-jacent s'identifie canoniquement à $H^0(X_g, i_g^*(K_X \otimes L))$. En particulier toute section de $H^0(X_g, i_g^*(K_X \otimes L))$ est prolongeable à un voisinage de X_g . De plus, par la formule d'adjonction, $i^*K_X = K_{X_g}$ d'où $H^0(X_g, \pi_\Delta^*(K_X \otimes L)) = H^0(X_g, K_{X_g} \otimes i^*L)$. Ce dernier espace étant non nul par hypothèse, il suit que pour $\epsilon > 0$ assez petit,

désormais fixé, $H_2^0(\tilde{X}_\Delta, K_X \otimes L \otimes I(h_0^{1-\epsilon} h^\epsilon)) \neq 0$. Comme la courbure de la métrique singulière $h_0^{1-\epsilon} h^\epsilon$ est strictement positive, il résulte de 3.6.1 et 3.4.4 que $\dim_\Delta H_2^0(\tilde{X}_\Delta, K_X \otimes L \otimes I(h_0^{1-\epsilon} h^\epsilon)) = \chi(X, K_X \otimes L \otimes I(h_0^{1-\epsilon} h^\epsilon)) > 0$.

La version de Demailly du théorème d'annulation de Kawamata-Viehweg permet de conclure que

$$\dim_{\mathbb{C}} H^0(X, K_X \otimes L \otimes I(h_0^{1-\epsilon} h^\epsilon)) = \chi(X, K_X \otimes L \otimes I(h_0^{1-\epsilon} h^\epsilon)) > 0.$$

En particulier $H^0(X, K_X \otimes L) \neq 0$. □

4.5. Positivité du faisceau canonique d'une variété à gros groupe fondamental.

Le théorème 1 implique des propriétés de positivité sur K_X qui sont certes conséquences de la théorie de Mori, puisque X ne contient aucune courbe rationnelle par le point générique, mais obtenues par voie essentiellement analytique. Voir [7] p. 42 pour la hiérarchie des notions de positivité pour les fibrés linéaires holomorphes.

PROPOSITION 4.5.1. — *Le faisceau canonique d'une variété de groupe fondamental génériquement gros est psef. Si, de plus, le revêtement universel ne contient aucune courbe compacte, K_X est nef.*

Preuve. — Soit $\pi : \tilde{X} \rightarrow X$ le revêtement universel de X . Soit L un diviseur de Cartier big. Il résulte de 4.3.3. que les sections L^2 de $K_{\tilde{X}} \otimes \pi^* L$ engendrent les 1-jets au point générique. Soit J le faisceau cohérent engendré par les sections L^2 de $K_{\tilde{X}} \otimes \pi^* L$. J est le produit tensoriel de $K_{\tilde{X}} \otimes \pi^* L$ par un idéal cohérent I , qui, étant invariant par l'action de $\pi_1(X)$, est de la forme $I = \pi^* \mathcal{I}$, \mathcal{I} désignant un faisceau d'idéaux cohérent sur X . Par [14], il existe une modification $\mu : X' \rightarrow X$, X' étant lisse, avec $\mu^{-1} \mathcal{I} \cdot \mathcal{O}_{X'}$ un idéal inversible, de la forme $\mathcal{O}(-E)$ avec E effectif. Soit $\pi' : \tilde{X}' \rightarrow X'$ le revêtement universel de X' . $\tilde{\mu} : \tilde{X}' \rightarrow \tilde{X}$ est une modification et l'espace des sections L^2 de $\pi^*(K_X \otimes L)$ se relève à un espace $\pi_1(X')$ -invariant de sections L^2 de $\pi'^*(\mu^*(K_X \otimes L)(-E))$, sans point base, et qui engendre les 1-jets au point générique. La construction de 4.2.1 fournit alors une métrique lisse de courbure positive, strictement positive au point générique sur $\mu^*(K_X \otimes L)(-E)$. Il suit que $\mu^*(K_X \otimes L)(-E)$ est nef et big et que $\mu^*(K_X \otimes L)$ est big. Donc $K_X \otimes L$ est big. Itérant le

processus $K_X^{\otimes N} \otimes L$ est big et K_X est limite de \mathbb{Q} -diviseurs big. Par suite, K_X est psef.

Si \tilde{X} ne contient pas de courbe compacte, on refait le raisonnement précédent avec un fibré L ample, en remarquant que $K_X + L$ est alors ample puisque les sections L^2 de $K_X + L$ sur \tilde{X} engendrent les 1-jets (et les s -jets!) en tout point du revêtement universel (ce qui ressort de la preuve de 4.1.1). Par suite K_X est nef. □

4.6. Comparaison avec la théorie de l'adjonction sur les variétés compactes.

Notons que par 4.3.3 ou la preuve de 4.1.1, si L désigne un fibré ample sur une variété X de groupe fondamental génériquement gros, l'espace des sections L^2 de $O(K_X + L)$ sur le revêtement universel \tilde{X} de X engendre tous les k -jets au point général P pour tout $k \geq 0$.

Ceci peut sembler étrange eu égard à la conjecture de Fujita qui prédit que $\dim(X) + 1$ est la meilleure constante possible telle $K_X + (\dim(X) + 1)L$ est sans point base si L est ample. Contrairement à ce qui se passe pour la conjecture de Fujita, il n'est pas nécessaire ici de supposer que L est une puissance d'un fibré ample.

Le point est que les constantes de Seshadri locales en P que l'on pourrait définir comme [7] p. 48 en utilisant le morphisme d'évaluation des sections L^2 sont toutes infinies.

Toutefois, le résultat de Anghern et Siu [1] a un analogue L^2 strict qui dit que les sections L^2 de $O(K_X + (1 + d(d + 1)/2)L)$ sur le revêtement universel $\pi : \tilde{X} \rightarrow X$ engendrent, pour $x \in X$, l'espace de Hilbert $L^2(\pi^{-1}(x), O(K_X + (1 + d(d + 1)/2)L))$. Pour voir cela, on relève les métriques singulières qu'ils construisent au revêtement universel de X et on utilise la proposition 3.6.1.

Notons enfin que l'on ne peut espérer que $K_X + L$ soit sans point base si le revêtement universel de X est de Stein et L est ample. Un contre exemple est évident : pour toute variété abélienne principalement polarisée (A, Θ) , $K_A + \Theta$ a Θ pour lieu de base.

5. Preuve du théorème 2.

5.1. Hypothèse de Carlson.

Soit (X, ω) une variété kählérienne compacte. Soit T un courant uniformément positif fermé sur X . Nous introduisons l'hypothèse suivante, inspirée d'une question de J. Carlson :

$C^+(X, [T])$: Le relèvement au revêtement universel \tilde{X} de X , de la classe de cohomologie de T est cohomologue à zéro.

Ceci est équivalent au fait que $[T]$ provienne du groupe fondamental de X . Une autre formulation est que $[T].H = 0$ pour toute classe d'homologie H dans l'image du morphisme d'Hurewicz rationnel $\text{Hur}_{\mathbb{Q}} : \pi_2(X) \otimes \mathbb{Q} \rightarrow H_2(X, \mathbb{Q})$.

5.2. Premières propriétés.

Cette hypothèse ne peut être réalisée que dans le cas où $\pi_1(X)$ est un groupe infini. Cela exclut les variétés X de dimension supérieure ou égale à 2 qui interviennent comme des intersections complètes dans une variété de groupe fondamental fini tel un espace projectif.

- Toute surface de Riemann S de genre non nul satisfait $C^+(S, [S])$.
- Tout tore complexe A satisfait $C^+(A, [\omega])$ pour toute classe de Kähler ω .
- Toute classe de Kähler d'une variété localement symétrique de type non-compact X vérifie $C^+(X, [\omega])$.
- Toute variété kählérienne X telle que $\pi_2(X) = 0$ satisfait $C^+(A, [\omega])$ pour toute classe de Kähler ω .
- Si $Y \xrightarrow{f} X$ est un morphisme dominant génériquement fini entre variétés projectives algébriques et \mathcal{L} est un fibré linéaire de dimension d'Iitaka-Kodaira maximale, $C^+(X, c_1(\mathcal{L})) \Rightarrow C^+(Y, c_1(f^*\mathcal{L}))$.
- Si, de plus, \mathcal{L} est ample, il n'est pas nécessaire de supposer f dominant.
- En particulier une variété algébrique de dimension d'Albanese maximale, c'est-à-dire admettant un morphisme génériquement fini sur son image vers une variété abélienne, vérifie l'hypothèse de Carlson pour toute polarisation de la variété abélienne. En termes algébriques, que

la variété $X^{(n)}$ possède un morphisme génériquement fini vers une variété abélienne est équivalent à la non-trivialité du morphisme naturel : $\Lambda^n H^0(X, \Omega_X^1) \rightarrow H^0(X, \Omega_X^n)$.

- $C^+(X, \mathcal{L}) \wedge C^+(Y, \mathcal{M}) \Rightarrow C^+(X \times Y, \mathcal{L} \otimes \mathcal{M})$.
- Toute variété projective algébrique est dominée par une variété de même dimension avec un fibré possédant cette propriété.

Même si j'avais affirmé fautivement dans ma thèse que c'était le cas, erreur rectifiée par J. Carlson, je ne sais pas si une base de Variation de Structure de Hodge à application de périodes génériquement finie sur son image satisfait l'hypothèse de Carlson.

5.3. Faisceau multiplicateur de Gromov.

La proposition suivante est dans [16], mais il est suggestif de la formuler ainsi :

PROPOSITION 5.3.1. — *Soit M une variété complexe lisse et connexe de groupe fondamental Γ et soit μ une $(1,1)$ -forme réelle lisse sur M fermée et se relevant à une forme exacte sur le revêtement universel \tilde{M} .*

Pour tout $\epsilon \in \mathbb{R}$, il existe un fibré linéaire holomorphe hermitien de géométrie bornée sur \tilde{M} noté $(\mathcal{L}_\epsilon, h_\epsilon^{sm})$ dont la forme de Chern-Weil vérifie

$$c_1(\mathcal{L}_\epsilon, h_\epsilon^{sm}) = \epsilon\mu$$

et un groupe $\bar{\Gamma}_\epsilon$, extension centrale de Γ par $U(1)$ agissant sur \tilde{M} par son quotient Γ , dont l'action se relève à une action i sur $(\mathcal{L}_\epsilon, h_\epsilon^{sm})$ qui respecte la structure hermitienne holomorphe.

De plus, si μ est cohomologue à un courant positif fermé T on peut construire une métrique singulière sur $\mathcal{L}_\epsilon, h_\epsilon, \bar{\Gamma}_\epsilon$ -invariante, dont la forme de Chern-Weil vérifie

$$c_1(\mathcal{L}_\epsilon, h_\epsilon) = \epsilon T.$$

Preuve. — Mis à part les structures complexes, le résultat est un résultat classique de topologie algébrique. Ce qu'il faut remarquer c'est qu'une connexion de courbure de type $(1,1)$ est intégrable. Pour plus de détails, voir [9]. L'énoncé sur les métriques singulières n'est pas dans [9], mais est immédiat.

DÉFINITION 5.3.2. — La donnée $(\mathcal{L}_\epsilon, h_\epsilon, \bar{\Gamma}_\epsilon, i)_{\epsilon > 0}$ est appelée le faisceau multiplicateur de Gromov associé à T .

5.4. Première partie du théorème 2.

PROPOSITION 5.4.1. — Soit X une variété kählérienne compacte portant un courant strictement positif fermé T dont la classe de cohomologie provient du groupe fondamental. Alors $\chi(X, K_X) \geq 0$.

Preuve. — Soit $(\mathcal{L}_\epsilon, h_\epsilon, \bar{\Gamma}_\epsilon, i)$ le faisceau multiplicateur de Gromov associé à T . La proposition 3.6.1 s'applique :

$$\forall \epsilon > 0 \quad H_2^q(\tilde{X}, K_{\tilde{X}} \otimes \mathcal{L}_\epsilon \otimes \mathcal{I}(h_\epsilon)) = 0, \quad q \geq 1.$$

Posons $M = \max_{x \in \tilde{X}} \nu(T, x)$. Pour $0 < \epsilon < \frac{1}{M}$, le nombre de Lelong $\nu(h_\epsilon, x) = \nu(\epsilon T, x) = \epsilon \nu(T, x)$ est strictement inférieur à 1. Et $\mathcal{I}(h_\epsilon) = \mathcal{O}_{\tilde{X}}$. De là,

$$\frac{1}{M} > \epsilon > 0 \implies H_2^q(\tilde{X}, K_{\tilde{X}} \otimes \mathcal{L}_\epsilon) = 0, \quad q \geq 1.$$

Puis,

$$\frac{1}{M} > \epsilon > 0 \implies \chi_{\bar{\Gamma}_\epsilon}(\tilde{X}, K_{\tilde{X}} \otimes \mathcal{L}_\epsilon) = \dim_{\bar{\Gamma}_\epsilon} H_{(2)}^0(\tilde{X}, K_{\tilde{X}} \otimes \mathcal{L}_\epsilon) \geq 0.$$

La formule de l'indice d'Atiyah donne enfin

$$\frac{1}{M} > \epsilon > 0 \implies \int_X \exp(\epsilon c_1(\mathcal{L}_1, h_1^{sm})) \exp(c_1(K_X)) \text{Todd}(T_X, \omega).$$

Faisant tendre ϵ vers 0, il vient : $\int_X \text{ch}(K_X) \text{Todd}(T_X) \geq 0$ ce qui est bien la conclusion recherchée. \square

5.5. Construction de n -formes holomorphes.

5.5.1. Première étape.

PROPOSITION 5.5.1. — Soit X une variété kählérienne compacte connexe de dimension n portant un courant strictement positif fermé T dont la classe de cohomologie provient du groupe fondamental.

Si $\chi(X, K_X) > 0$, il existe une forme holomorphe L^2 de degré n sur \tilde{X} (et donc un espace de Hilbert de dimension infini de telles formes).

Si $\chi(X, K_X) = 0$ et $[T]^n \cdot X \neq 0^{(8)}$, il existe des n -formes holomorphes bornées non triviales sur \tilde{X} .

Preuve. — Reprenant les notations du paragraphe précédent, le polynôme P suivant :

$$P(\epsilon) = \int_X \exp(\epsilon c_1(\mathcal{L}_1, h_1^{sm})) \exp(c_1(K_X)) \text{Todd}(T_X, \omega)$$

ne prend que des valeurs positives pour $\epsilon > 0$ petit. Son coefficient dominant étant $[T]^{\dim(X)} \cdot [X]/(\dim X)!$, P n'est pas le polynôme nul. Donc, on peut trouver une suite $(\epsilon_i)_{i \in \mathbb{N}}$ de nombres inférieurs à 1, convergeant vers 0 telle que

$$P(\epsilon_i) = \dim_{\Gamma_\epsilon} H_{(2)}^0(\tilde{X}, K_{\tilde{X}} \otimes \mathcal{L}_{\epsilon_i}) > 0$$

et donc une suite μ_i de n -formes holomorphes de norme L^2 égale à 1 à valeurs dans \mathcal{L}_{ϵ_i} .

Soit α une primitive réelle de $c_1(\mathcal{L}_1, h_1^{sm})$. La preuve de la proposition 5.3.1 dans [9] permet d'identifier μ_i à une $(n, 0)$ forme ϕ_i de norme L^2 égale à 1 vérifiant

$$\bar{\partial}\phi_i + \epsilon_i \alpha^{0,1} \wedge \phi_i = 0.$$

Le fibré $(\mathcal{L}_\epsilon, h_\epsilon^{sm})$ étant de géométrie bornée on déduit que $\forall i$, $\lim_{x \rightarrow \infty} \|\phi_i(x)\| = 0$. De là $x \mapsto \|\phi_i(x)\|$ atteint son maximum en un point $\tilde{x}_i \in \tilde{X}$. Comme l'action du groupe Γ est cocompacte, on peut toujours supposer que $\tilde{x}_i \in \mathcal{F}$, \mathcal{F} étant un domaine fondamental relativement compact pour l'action de Γ sur \tilde{X} . Posons $\psi_i = \phi_i/\|\phi_i(\tilde{x}_i)\|$ et $\tilde{\mu}_i = \mu_i/\|\phi_i(\tilde{x}_i)\|$, on a $\|\psi_i(\tilde{x}_i)\| = 1, \|\psi_i\|_{L^\infty} = 1$. Par une première extraction de sous-suite, on peut supposer que $\lim_{i \rightarrow \infty} \tilde{x}_i = \tilde{x}$. De plus, il existe $r > 0, M > 0, K > 0, k > 0, L > 0$ tel que pour tout $x \in \tilde{X}$ il existe une trivialisations holomorphe s_x de \mathcal{L} sur $B(x, r)$ vérifiant $1 \leq \|s_x\| \leq 2, \|\nabla s_x\| \leq M$ et $\|\nabla^2 s_x\| \leq M$ où ∇ désigne la dérivation covariante et un système de coordonnées holomorphes $Z = (z_1, \dots, z_n)$ sur $B(x, r)$ de distorsion contrôlée par (k, K) , c'est-à-dire vérifiant $k \leq |Z^* ds_{\text{eucl}}^2| \leq K$ et dont le Hessien est borné par L .

Si s est une section lisse de norme 1 qui correspond à la trivialisations topologique de \mathcal{L} induite par la primitive réelle α de $c_1(\mathcal{L}, h)$ et si on pose

(8) C'est automatique si T est non singulier, ou si c'est la classe de cohomologie d'un fibré nef et gros.

$s_x = f_x \cdot s$, la fonction f_x vérifie

$$|f_x| \leq 2, |df_x| \leq c(M + \sup_{y \in B(o, d(o, x) + r)} \|\alpha(y)\|),$$

$$|\text{Hess}(f_x)| \leq c(M + \sup_{y \in B(o, d(o, x) + r)} \|\alpha(y)\| + \|\nabla \alpha(y)\|).$$

Quitte à diminuer r , f_x possède un logarithme sur $B_x(r_x)$. La fonction $f_x^\epsilon = e^{\epsilon \log f_x}$ vérifie aussi ces estimations pour $0 \leq \epsilon \leq 1$ et la section $s_x^\epsilon = f_x^\epsilon s$ est une trivialisatation holomorphe locale de \mathcal{L}^ϵ de norme comprise entre 1 et 2. Posant $\mu_i = (f_i)_x s_x^\epsilon dz_1 \wedge \dots \wedge dz_n$, la fonction holomorphe $(f_i)_x$ sur $B(x, r)$ est majorée par 1 et la formule de Cauchy dans le système de coordonnées holomorphes Z permet de majorer ses dérivées partielles d'ordre 1 et 2 par une quantité indépendante de $y \in B_x(r_x/2)$.

En particulier, les dérivées covariantes d'ordre 1 et 2 des $(n, 0)$ -formes ψ_i sont uniformément localement bornées. Le théorème d'Ascoli permet d'extraire de (ψ_i) une sous-suite convergeant uniformément sur les compacts et dont le gradient converge également uniformément sur les compacts. La limite est une $(n, 0)$ -forme holomorphe bornée non nulle car de norme 1 en \tilde{x} . Si, de plus $\chi(X, K_X) > 0$, on a pour tout $\epsilon > 0$ assez petit,

$$\dim_{\Gamma_\epsilon} H_2^0(\tilde{X}, K_X \otimes \mathcal{L}_\epsilon) \geq 1/2\chi(X, K_X).$$

Soit $G_\epsilon(x, y)$ le noyau lisse de l'opérateur de projection orthogonale $L^2(\tilde{X}, \Omega^{n,0} \otimes L_\epsilon) \rightarrow H_2^0(\tilde{X}, K_X \otimes \mathcal{L}_\epsilon)^{(9)}$. $G_\epsilon(x, x)$ est une forme volume $\pi_1(X)$ -invariante sur \tilde{X} et, par définition,

$$\dim_{\Gamma_\epsilon} H_2^0(\tilde{X}, K_X \otimes \mathcal{L}_\epsilon) = \int_D G_\epsilon(x, x).$$

D désignant un domaine fondamental de l'action de $\pi_1(X)$ sur \tilde{X} . Or, par 4.2.2, $G_\epsilon(x, x) = \max_{\|s\|^2=1} \|s(x)\|^2$. Par suite il existe $x_\epsilon \in D$, $s_\epsilon \in H_2^0(\tilde{X}, K_X \otimes \mathcal{L}_\epsilon)$ tels que

$$\|s_\epsilon(x_\epsilon)\| \geq \frac{\chi(X, K_X)}{2\text{Vol}(X)}.$$

Le raisonnement précédent s'applique sans qu'il soit besoin de renormaliser s_ϵ , puisqu'il fournit une borne supérieure C_{loc}^2 indépendante de ϵ sur s_ϵ et

(9) Nous notons par L_ϵ le fibré holomorphe hermitien sous-jacent à \mathcal{L}_ϵ .

produit une forme holomorphe bornée non nulle C_{loc}^1 -adhérente à $\{s_\epsilon\}_{\epsilon>0}$. Toute valeur d'adhérence en zéro de la famille $\{s_\epsilon\}_{\epsilon>0}$ est une n -forme holomorphe L^2 de norme inférieure ou égale à 1. \square

5.5.2. On aura reconnu dans cette proposition un avatar du lemme de Kazhdan [18] et la discussion dans [9]. Le théorème 2 peut se déduire du théorème de Kawamata-Viehweg ordinaire et d'une variation du lemme de Kazhdan sous l'hypothèse qu'existe un fibré holomorphe de première classe de Chern égale à $d[T]$ possédant pour tout n une racine n -ième sur un revêtement galoisien étale fini $X_n \rightarrow X$. C'est ce mécanisme qui soutient la preuve donnée par J. Kollár de l'inégalité de Green et Lazarsfeld (i.e. $\chi(X, K_X) \geq 0$ si X est de dimension d'Albanese maximale), Th. 17.12 p. 179. La variation sur le lemme de Kazhdan est l'énoncé suivant :

LEMME 5.5.2. — Soit $(\Gamma_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite décroissante de sous-groupes distingués d'indice fini d'intersection nulle de $\pi_1(X)$ et $(E_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fibrés hermitiens holomorphes de rang fixé de courbure uniformément bornée dont les relevés au revêtement universel convergent localement au sens de la théorie de jauge vers un fibré holomorphe hermitien E . Si $\limsup_{n \rightarrow \infty} h^0(\Gamma_n \backslash \tilde{X}, E_n) / [\Gamma_n : \pi_1(X)] > 0$ alors E a des sections holomorphes L^2 sur \tilde{X} .

Je laisse cet énoncé en exercice (indication : la preuve de la proposition 5.5.1 s'applique encore). On peut formuler un résultat identique pour des opérateurs elliptiques du premier ordre (et même probablement pour des opérateurs différentiels elliptiques quelconques). Dans le même ordre d'idées, il est possible de prouver un théorème de semi-continuité des nombres de Betti L^2 qui, dans le contexte du théorème 2 fournit l'utile précision suivante :

$$\dim_{\pi_1(X)} H_2^0(\tilde{X}, K_X) \geq \chi(X, K_X).$$

5.5.3. Remarques sur les n -formes holomorphes bornées.

La notion de n -forme holomorphe bornée qui dépend de la métrique kählérienne, n'est pas un invariant biholomorphe.

Le théorème d'existence précédent fournit un critère pour vérifier qu'une variété kählérienne X de groupe fondamental infini n'a pas de forme de Kähler dans l'image de $H^2(\pi_1(X), \mathbb{R})$. Ce critère (qu'il n'y ait pas de n -forme holomorphe bornée sur le revêtement universel de X) est probablement assez peu maniable.

Une autre conséquence est que $H_{L^q}^0(\tilde{X}, E) \neq 0 \Rightarrow H_{L^q}^0(\tilde{X}, E \otimes K_X^p) \neq 0, p \geq 0$; le cas $q = 1$ semblant assez intéressant à cause des séries de Poincaré [19]. L'existence de n -formes holomorphes bornées sur \tilde{X} est claire quand X ou un revêtement étale de X en porte, donc dans tous les exemples à dimension d'Albanese maximale.

Quand l'espace vectoriel des n -formes holomorphes ainsi construit est de dimension finie, comme dans le cas des variétés abéliennes où l'on a $H^0 \cap L^\infty(\mathbb{C}^n, \Omega^n) = \mathbb{C} dz_1 \wedge \dots \wedge dz_n$, on obtient une représentation du groupe fondamental en dimension finie, conjuguée à une représentation unitaire (car elle préserve la norme L^∞ qui a un groupe d'isométrie compact comme toute norme sur un espace vectoriel normé de dimension finie).

5.5.4. Dernière étape.

PROPOSITION 5.5.3. — *Soit X une variété kählérienne compacte connexe de dimension n dont la classe de Kähler provient du groupe fondamental. Si $\pi_1(X)$ est de croissance sous exponentielle, zéro est dans le spectre de l'opérateur de Laplace-Beltrami sur les n -formes L^2 du revêtement universel de X .*

Preuve. — Fixons P dans \tilde{X} . Il existe une fonction ρ lisse strictement positive de gradient borné par 2 telle que $1 + d(x, P) \leq \rho \leq 2 + 2d(x, P)$. La fonction $\theta_\epsilon = \exp(-\epsilon\rho)$ vérifie $|\nabla\theta_\epsilon| \leq 2\epsilon\theta_\epsilon$. Le groupe $\pi_1(X)$ étant supposé de croissance sous exponentielle θ_ϵ est de carré intégrable. Soit α une n -forme holomorphe bornée sur \tilde{X} . Le produit $\theta_\epsilon\alpha$ est une $(n, 0)$ forme L^2 vérifiant

$$\int_{\tilde{X}} \|\bar{\partial}(\theta_\epsilon\alpha)\|^2 \leq 4\epsilon^2 \int_{\tilde{X}} \|\theta_\epsilon\alpha\|^2.$$

Ou encore, puisque $\theta_\epsilon\alpha$ est une $(n, 0)$ -forme,

$$\|\Delta_{\bar{\partial}}^{1/2}\theta_\epsilon\alpha\|^2 \leq 4\epsilon^2\|\theta_\epsilon\alpha\|^2.$$

Donc zéro est dans le spectre de $\Delta_{\bar{\partial}}$ sur les $(n, 0)$ -formes. Les identités kählériennes assurent que $\Delta_d = 2\Delta_{\bar{\partial}}$ et zéro est dans le spectre de l'opérateur de Laplace-Beltrami sur les n -formes.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] U. ANGEHRN et Y.T. SIU, Effective freeness and point separation for adjoint bundles, *Invent. Math.*, 122 (1995), 291-308.
- [2] M. ATIYAH, Elliptic operators, discrete groups and Von Neumann algebras *Soc. Math. Fr. Asterisque*, 32-33, 1976, 43-72.
- [3] N. BERLINE, E. GETZLER, M. VERGNE, Heat Kernels and Dirac Operators, *Grundlehren der mathematischen Wissenschaften*, 298, Springer, 1992.
- [4] F. CAMPANA, Remarques sur le revêtement universel des variété kähleriennes, *Bull. Soc. Math. Fr.*, 122 (1994), 255-284.
- [5] F. CAMPANA, Fundamental group and positivity of cotangent bundles of compact Kähler manifolds, *J. Alg. Geo.*, 4 (1995), 487-502.
- [6] F. CAMPANA et J.-P. DEMAILLY, Communication personnelle.
- [7] J.P. DEMAILLY, L^2 Vanishing theorems for Positive Line Bundles and Adjunction Theory, in *Transcendental Methods in Algebraic Geometry*, édité par F. Catanese et C. Ciliberto, LNM, 1646 (1996), Springer Verlag.
- [8] J.-P. DEMAILLY, Estimations L^2 pour l'opérateur $\bar{\partial}$ d'un fibré vectoriel holomorphe semi-positif au dessus d'une variété kählerienne complète, *Annales Scientifiques de l'Ecole Normale Supérieure*, 15 (1982), 457-511.
- [9] P. EYSSIDIEUX, La caractéristique d'Euler du complexe de Gauss-Manin, *J. für reine und angew. Math.*, 490 (1997) 155-212.
- [10] P. EYSSIDIEUX, Invariants de Von Neumann des faisceaux analytiques cohérents, Prépublication n. 124 du Laboratoire Emile Picard (Juin 1998), math. AG/9806159.
- [11] M. FARBER, Homological algebra of Novikov-Shubin invariants and Morse inequalities, *GAF*, Vol. 6, n° 4 (1996) 628-665.
- [12] H. GRAUERT et R. REMMERT, Coherent Analytic Sheaves, *Grundlehren der mathematischen Wissenschaften*, 265, Springer, 1984.
- [13] R. HARTSHORNE, Algebraic geometry, GTM 52, Springer, 1977.
- [14] H. HIRONAKA, Résolution of singularities over a field of characteristic zero, *Ann. of Math.*, 79 (1964), 109-326.
- [15] M. GREEN et R. LAZARSFELD, Deformation theory, Generic vanishing theorems and some conjectures of Enriques, Catanese and Beauville, *Inv. Math.*, 90 (1987), 389-407.
- [16] M. GROMOV, Kähler hyperbolicity and L^2 -Hodge theory, *Journal of Differential Geometry*, 33, 1991, 263-291.
- [17] M. GROMOV, G. HENKIN, M. SHUBIN, L^2 holomorphic functions on pseudoconvex coverings, *GAF*, Vol. 8, n° 3 (1998) 552-585.
- [18] D. KAZHDAN, On arithmetic varieties, in *Lie Groups and their representations*, Halsted, New York, 1975.
- [19] J. KOLLÁR, Shafarevich maps and Automorphic Forms, Princeton University Press, 1995.
- [20] J. KOLLÁR, Shafarevich maps and plurigenera of algebraic varieties, *Inv. Math.*, 113 (1993), 177-215.
- [21] S. NOVIKOV et M. SHUBIN, Morse inequalities and Von Neumann invariants of non simply connected manifolds, *Uspehi Matem. Nauk*, 41 (1986), 222.

- [22] P. PANSU, An introduction to L^2 Betti numbers, dans Riemannian Geometry, ed. Besson, Lokhamp, Pansu, Petersen, Fields Institute Monographs, AMS, 1996.
- [23] H. SKODA, Sous-ensembles analytiques d'ordre fini ou infini dans \mathbb{C}^n , Bull. Soc. Math. Fr., 100 (1972), 353-408.
- [24] S. TAKAYAMA, Nonvanishing Theorems on an algebraic Variety with large fundamental group, Prépublication, Naruto University of Education, (1997) à paraître J. Alg. Geom.
- [25] K. YOSIDA, Functionnal Analysis, Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, 123, 6^e édition, Springer, 1980.

Manuscrit reçu le 9 octobre 1997,
révisé le 19 mars 1998,
accepté le 11 septembre 1998.

Philippe EYSSIDIEUX,
Université Paul Sabatier
UFR MIG
CNRS-UMR 5580, Laboratoire Émile Picard
118, route de Narbonne
31062 Toulouse Cedex (France).
eyssi@picard.ups-tlse.fr