ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

O. EL-FALLAH

KARIM KELLAY

Sous-espaces biinvariants pour certains shifts pondérés

Annales de l'institut Fourier, tome 48, nº 5 (1998), p. 1543-1558

<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1998__48_5_1543_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
48, 5 (1998), 1543–1558

SOUS-ESPACES BIINVARIANTS POUR CERTAINS SHIFTS PONDÉRÉS

par O. EL-FALLAH et K. KELLAY

---

1. Introduction.

Soit $L^2(\mathbb{T})$ l'espace de Hilbert des fonctions à carré sommable sur le cercle unité $\mathbb{T}$. Dans ce travail, on étudie les sous-espaces biinvariants pour le shift à poids $S_\omega : f(e^{it}) \longrightarrow e^{it}f(e^{it})$ sur l'espace de Hilbert

$$L^2_\omega = \left\{ f \in L^2(\mathbb{T}) \, : \, \|f\|^2_\omega = \sum_{n\in\mathbb{Z}} |\, \hat{f}(n) \,|^2 \omega(n)^2 < +\infty \right\},$$

où $\hat{f}(n)$ est le $n^{\text{ième}}$ coefficient de Fourier et ω est un poids, c'est-à-dire une application de $\mathbb{Z} \longrightarrow [1, +\infty[$ telle que les suites $(\log \omega(n))_{n\geq 0}$ et $(\log \omega(-n))_{n\geq 0}$ sont croissantes et concaves. Puisque ω est un poids, les opérateurs S_ω et S_ω^{-1} sont bornés sur L^2_ω et le spectre de S_ω est $\mathbb{T}$.

On dira qu'un sous-espace fermé B de L^2_ω est biinvariant s'il est invariant par S_ω et par S_ω^{-1} i.e. $S_\omega B = B$.

Soit E un ensemble fermé de $\mathbb{T}$; on notera par $\mathcal{M}_\omega(E)$ le sous-espace fermé biinvariant de L^2_ω défini par

$$\mathcal{M}_\omega(E) = \{f \in L^2_\omega(\mathbb{T}) \, : \, \chi_E f = 0\},$$

où χ_E est la fonction indicatrice de E; de tels sous–espaces seront dits ensembles de type spectral.

Mots-clés : Sous-espace biinvariant – Hyperfonction – Ensemble de Carleson.
Classification math. : 47B37 – 46E20 –46J20.

Dans le cas où $\omega(n) \equiv 1$ ($n \in \mathbb{Z}$), le théorème classique de Wiener donne une caractérisation complète des sous-espaces biinvariants de $L^2(\mathbb{T})$; ils sont de type spectral :

THÉORÈME 1.1 [Wiener]. — *Soit B un sous-espace biinvariant non trivial de $L^2(\mathbb{T})$. Il existe alors un borélien E de $\mathbb{T}$ de mesure strictement positive tel que*

$$B = \{f \in L^2(\mathbb{T}) \; : \; f_{|E} = 0 \; p.p\}.$$

Soit $f \in L^2_\omega$; on désigne par $\mathcal{I}_\omega(f)$ l'adhérence de $\mathrm{span}(S^n_\omega f)_{n\in\mathbb{Z}}$ dans L^2_ω (notons que $\mathcal{I}_\omega(f)$ est le plus petit sous-espace biinvariant de S_ω contenant f).

Le sous-espace fermé de L^2_ω des fonctions f telles que $\hat{f}(n) = 0$ pour tout $n \leq -1$ sera noté $(L^2_\omega)^+$. Soit B un sous-espace biinvariant de L^2_ω; la trace analytique de B est définie par $B \cap (L^2_\omega)^+$ et elle est dite de type spectral lorsqu'il existe un Borelien E de $\mathbb{T}$ tel que $B \cap (L^2_\omega)^+ = \mathcal{M}_\omega(E) \cap (L^2_\omega)^+$.

Lorsque $\omega(n) = 1$ ($n \geq 0$), on a $(L^2_\omega)^+ = H^2$, l'espace de Hardy usuel. Esterle dans [E4], Théorème 5.7, a montré que la caractérisation de type Wiener n'est plus vraie pour le shift sur des espaces à poids dès que $\omega(-n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$. Plus précisément,

THÉORÈME 1.2 [E4]. — *Soit $\omega : \mathbb{Z} \to [1, +\infty[$ une application telle que $\omega(n) = 1$ pour $n \geq 0$ et $\omega(-n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$. Il existe une fonction intérieure singulière $U \in H^2$ telle que $\mathcal{I}_\omega(U) \cap H^2 = UH^2 \subsetneqq H^2$. En particulier $\mathcal{I}_\omega(U)$ n'est pas de type spectral.*

Dans le cas où $\omega(n) = (1+|n|)^p$ pour $n \in \mathbb{Z}$, où p est un entier, $p \geq 1$, L^2_ω (resp. $\mathcal{M}_\omega(E)$) sera noté L^2_p (resp. $\mathcal{M}_p(E)$). Khanin dans [Kh] a donné une caractérisation complète des sous-espaces biinvariants de L^2_p; ils sont de type spectral :

THÉORÈME 1.3 [Kh]. — *Soit B un sous-espace biinvariant fermé de L^2_p, alors*

$$B = \mathcal{M}_p(E_0, E_1, ..., E_{p-1}) := \{f \in L^2_p : f_{|E_0} = f'_{|E_1} = f^{(p-1)}_{|E_{p-1}} = 0\},$$

où $f^{(k)}$ désigne la dérivée $k^{\text{ième}}$ de la fonction f et $E_k = Z(B^{(k)})$ est l'ensemble des zéros communs de $B^{(k)} = \{f^{(k)} : f \in B\}$.

Notons que ce résultat s'obtient grâce au théorème sur l'approximation des fonctions de l'espace de Sobolev définies sur l'axe réel (voir [B]). La même méthode permet d'avoir le théorème 1.3. Mentionnons également que la suite $(E_k)_{0\leq k\leq p-1}$ est ordonnée ; certaines conditions sur $(E_k)_{0\leq k\leq p-1}$ ont été obtenues dans [N], elles garantissent la non-trivialité de

$$\mathcal{M}_p(E_0, E_1, ..., E_{p-1}).$$

Dans ce travail, nous étudions l'effet de la "dissymétrie" du poids ω sur l'apparition et la disparition des sous-espaces biinvariants générés par des fonctions intérieures singulières (qui ne sont pas de type spectral). Nous considérons des poids ω tels que $\omega(n) = (1+n)^p$ pour $n \geq 0$ et $\lim\inf_{n\to-\infty} \dfrac{\omega(n)}{|n|^p} > 0$. Donc $L^2_\omega \subset \mathcal{C}(\mathbb{T})$, où $\mathcal{C}(\mathbb{T})$ désigne l'algèbre des fonctions continues sur $\mathbb{T}$, et $(L^2_\omega)^+ = H^2_p = \{f \in H^2 : f', f'', ..., f^{(p)} \in H^2\}$. Contrairement à ce qui se passe pour $p = 0$ (théorème 1.2), nous montrons, sous certaines conditions de régularité sur la suite $(\omega(-n))_{n\geq 0}$, que dans le cas où $\sum_{n\geq 1} \dfrac{1}{n\log\omega(-n)}$ diverge, la trace analytique de tout sous-espace biinvariant B de L^2_ω est de type spectral : $B\cap H^2_p = \mathcal{M}_\omega(E_0, E_1, ..., E_{p-1})\cap H^2_p$, où $E_k = Z(B^{(k)})$. Si, de plus, $Z(B)$ est un ensemble d'interpolation pour les classes de fonctions de Lipschitz, nous montrons que $B = \mathcal{M}_\omega(E_0, E_1, ..., E_{p-1})$. Par contre, dans le cas où $\sum_{n\geq 1} \dfrac{1}{n\log\omega(-n)}$ converge, nous mettons en évidence un sous-espace fermé biinvariant B de L^2_ω tel que $B\cap H^2_p \subsetneqq \mathcal{M}_\omega(Z(B), Z(B^{(1)}), ..., Z(B^{(p-1)}))\cap H^2_p$. La méthode employée consiste à ramener le problème en un problème d'unicité pour certaines classes d'hyperfonctions dont le support est un ensemble de Carleson. Nous concluons ce travail par une application à la théorie des opérateurs.

2. Interprétation du dual de L^2_ω et hyperfonctions à spectre de Carleson.

On va maintenant décrire le dual de $L^2_\omega(\mathbb{T})$. Une hyperfonction est par définition une fonction analytique sur $\mathbb{C}\backslash\mathbb{T}$ telle que $\lim_{|z|\to\infty} \varphi(z) = 0$. On notera par $\mathcal{H}(\mathbb{T})$ l'ensemble de toutes les hyperfonctions.

Soit $\varphi \in \mathcal{H}(\mathbb{T})$, les coefficients de Fourier de φ sont définis par

$$\varphi(z) = \begin{cases} \sum_{n\geq 1} \hat{\varphi}(n) z^{n-1} & \text{pour } |z| < 1 \\ -\sum_{n\leq 0} \hat{\varphi}(n) z^{n-1} & \text{pour } |z| > 1. \end{cases}$$

On définit φ^+ et φ^- sur le disque unité $\mathbb{D}$ par

$$\varphi^+ = \varphi_{|\mathbb{D}}$$
$$\varphi^-(z) = \frac{1}{z}\overline{\varphi\left(\frac{1}{\bar{z}}\right)} \text{ pour } 0 < |z| < 1.$$

Il est clair que φ^- a une fausse singularité en 0.

Le support de $\varphi \in \mathcal{H}(\mathbb{T})$, noté $\operatorname{supp}\varphi$, est le plus petit fermé E de $\mathbb{T}$ tel que φ se prolonge analytiquement sur $\mathbb{C}\backslash E$. On désignera par $\mathcal{H}(E)$ l'ensemble de toutes les hyperfonctions dont le support est contenu dans E. On considère l'ensemble

$$\mathcal{H}_\omega(\mathbb{T}) = \left\{ \varphi \in \mathcal{H}(\mathbb{T}) : \|\varphi\| = \left(\sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{|\hat{\varphi}(n)|^2}{\omega(-n)^2} \right)^{\frac{1}{2}} < +\infty \right\},$$

et on note par

$$\mathcal{H}_\omega(E) = \{\varphi \in \mathcal{H}_\omega(\mathbb{T}) : \operatorname{supp}\varphi \subset E\}.$$

On peut identifier le dual de L^2_ω à $\mathcal{H}_\omega(\mathbb{T})$ grâce à la dualité donnée par la formule :

$$\langle f, \varphi \rangle = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{f}(n)\hat{\varphi}(-n), \ (f \in L^2_\omega,\ \varphi \in \mathcal{H}_\omega(\mathbb{T})).$$

Un calcul classique permet d'écrire cette dualité sous la forme :

$$\langle f, \varphi \rangle = \lim_{r\to 1^-} \frac{1}{2i\pi} \int_{\mathbb{T}} f(\xi) \left(\varphi(r\xi) - \varphi(\frac{\xi}{r}) \right) d\xi.$$

Pour $f \in L^2_\omega$ et $\varphi \in \mathcal{H}_\omega(\mathbb{T})$, on définit l'hyperfonction produit $f.\varphi$ par ses coefficients de Fourier donnés par la formule :

$$\widehat{f.\varphi}(n) = \sum_{m\in\mathbb{Z}} \hat{f}(m)\hat{\varphi}(n-m) \text{ pour tout } n \in \mathbb{Z}.$$

On désigne par $\mathcal{A}(\mathbb{D})$ l'algèbre des fonctions analytiques sur le disque unité ouvert $\mathbb{D}$ et continues sur $\overline{\mathbb{D}}$, et par $\mathcal{A}^\infty(\mathbb{D})$ l'algèbre des fonctions $f \in \mathcal{A}(\mathbb{D})$ telles que $f^{(n)} \in \mathcal{A}(\mathbb{D})$ pour tout $n \geq 0$.

Soit E un fermé de $\mathbb{T}$. On dira que E est un ensemble de Carleson [C] lorsque

$$\int_0^{2\pi} \log\left(\frac{2}{\operatorname{dist}(e^{it}, E)}\right) dt < +\infty.$$

Taylor et Williams [TW] ont montré que E est un ensemble de Carleson si et seulement s'il existe une fonction non nulle $f \in \mathcal{A}^\infty(\mathbb{D})$ extérieure plate sur E, c'est-à-dire $f^{(n)}_{|E} \equiv 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

On désigne par $\mathcal{N}$ la classe de Nevanlinna, c'est-à-dire l'ensemble des fonctions analytiques sur $\mathbb{D}$ vérifiant

$$\sup_{0 \leq r < 1} \int_0^{2\pi} \log^+ \mid f(re^{i\theta}) \mid d\theta < +\infty.$$

Soit $\mathcal{N}^+$ la classe de Smirnov, c'est-à-dire l'ensemble des fonctions $f \in \mathcal{N}$ telles que $f = \dfrac{h}{g}$ avec $h, g \in H^\infty(\mathbb{D})$ et g extérieure, *cf.* [D].

Soit $p \geq 1$ un entier. On dira que le poids ω vérifie la condition (R_p), s'il satisfait les conditions suivantes :

0. Les suites $(\log \omega(n))_{n \geq 0}$ et $(\log \omega(-n))_{n \geq 0}$ sont croissantes et concaves.

1. $\omega(n) = (1+n)^p$ pour $n \geq 0$.

2. $\liminf\limits_{n \to +\infty} \dfrac{\omega(-n)}{n^p} > 0$.

3. Il existe $n_0 \geq 1$ tel que la suite $\left(\dfrac{\log \omega(-n)}{n^\beta}\right)_{n \geq n_0}$ est décroissante pour une certaine constante $\beta < \dfrac{1}{2}$.

Notons que ω est sous-multiplicative i.e. $\omega(n+m) \leq \omega(n)\omega(m)$ pour tout $n, m \in \mathbb{Z}$.

On a la proposition suivante :

PROPOSITION 2.1. — *Soient $E \subset \mathbb{T}$ un ensemble de Carleson et $f \in \mathcal{A}^\infty(\mathbb{D})$ une fonction extérieure plate sur E, soit $\varphi \in \mathcal{H}_\omega(E)$, où ω est un poids vérifiant la condition (R_p). Alors on a les propriétés suivantes :*

(i) *$f\varphi^- \in H^\infty(\mathbb{D})$ et $\varphi^- \in \mathcal{N}^+$.*

(ii) *$(f.\varphi)^+ - f\varphi^+ \in \mathcal{A}^\infty(\mathbb{D})$.*

(iii) *$(f.\varphi)^- \in H^\infty(\mathbb{D})$.*

Si de plus $\sum_{n\geq 1} \dfrac{1}{n \log \omega(-n)} = +\infty$ *alors* $f.\varphi = 0$.

Preuve. — Pour la preuve de (i), (ii) et (iii) on va utiliser les même techniques que dans [E3].

(i) Soit $\psi \in \mathcal{H}(E)$ telle que $\sup_{n\leq 0} \dfrac{|\hat{\psi}(n)|}{(1+|n|)^p} < +\infty$ et $\sup_{n\geq 1} \dfrac{\log|\hat{\psi}(n)|}{\sqrt{n}} < +\infty$. Il découle de [A1] que

$$\log^+ |\psi(z)| = O\left(\frac{1}{1-|z|}\right) (|z| \to 1^-) \text{ et } \sup_{1<|z|\leq 2} (|z|-1)^{p+1}|\psi(z)| < +\infty.$$

D'après des estimations de Domar–Taylor–Williams [TW], Lemma 5.9, il existe des constantes C_1 et C_2 telles que

$$\log|\psi(z)| \leq \frac{C_1}{\operatorname{dist}(z,E)} \text{ pour } z \in \mathbb{D}$$

$$|\psi(z)| \leq C_2(\operatorname{dist}(z,E))^{-2(p+1)} \text{ pour } 1 \leq |z| \leq 2 \text{ et } z \notin E.$$

Donc pour $\dfrac{1}{2} \leq |z| \leq 1$ on a (voir [E3], Lemma 4.9)

$$\begin{aligned} |\psi^-(z)| &\leq 2|\psi(\tfrac{1}{\bar{z}})| \leq \text{const}\left(\operatorname{dist}\left(\frac{1}{\bar{z}}, E\right)\right)^{-2(p+1)} \\ &\leq \text{const}(\operatorname{dist}(z,E))^{-2(p+1)} \end{aligned}$$

et puisque $|f(z)| \leq \|f^{(n)}\|_\infty (\operatorname{dist}(z,E))^n$ pour tout n alors on a $f\psi^- \in H^\infty(\mathbb{D})$. La fonction f étant extérieure, on a $\psi^- = \dfrac{f\psi^-}{f} \in \mathcal{N}^+$. Ces résultats sont valables en particulier pour $\varphi \in \mathcal{H}_\omega(E)$ d'après ce qui précède.

Notons aussi que si $\varphi \in \mathcal{H}_\omega(E)$, alors $(f.\varphi)^- \in \mathcal{N}^+$. En effet, $f.\varphi \in \mathcal{H}(E)$ car $\operatorname{supp} f.\varphi \subset \operatorname{supp} f \cap \operatorname{supp}\varphi$ et pour $n \geq 1$ on a

$$\begin{aligned} |\widehat{f.\varphi}(n)| &\leq \sum_{i=0}^{\infty} |\hat{f}(i)| \frac{|\hat{\varphi}(n-i)|}{\omega(-n+i)} \omega(-n+i) \\ &\leq \sup_{i\geq 0} \frac{|\hat{\varphi}(n-i)|}{\omega(-n+i)} \sum_{i=0}^{\infty} |\hat{f}(i)|(1+i)^p \omega(-n) \\ &\leq \text{const}\,\omega(-n). \end{aligned}$$

Pour $n \leq 0$, on a

$$\begin{aligned} |\widehat{f.\varphi}(n)| &\leq \sum_{i=0}^{\infty} |\hat{f}(i)|(1+i-n)^p \\ &\leq (1+|n|)^p \sum_{i=0}^{\infty} |\hat{f}(i)|(1+i)^p \\ &\leq \text{const}(1+|n|)^p, \end{aligned}$$

et par conséquent $(f.\varphi)^- \in \mathcal{N}^+$ d'après ce qui précède.

(ii) Soit $g = (f.\varphi)^+ - f\varphi^+$. Le $n^{\text{ième}}$ coefficient de Fourier de la fonction g pour $n \geq 1$ vérifie pour $k \geq 1$

$$\begin{aligned}
|\hat{g}(n)| &= |\widehat{f.\varphi}(n) - \sum_{i=0}^{n} \hat{f}(i)\hat{\varphi}(n-i)| \\
&\leq \sum_{i=n+1}^{\infty} |\hat{f}(i)||\hat{\varphi}(n-i)| \\
&\leq \text{const} \sum_{i=n+1}^{\infty} i^{-(p+k+2)} \frac{|\hat{\varphi}(n-i)|}{(1+i-n)^p}(1+i-n)^p \\
&\leq \text{const} \sup_{m\leq 0} \frac{|\hat{\varphi}(m)|}{(1+|m|)^p} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(i+1)^p}{(i+n)^{p+k+2}} \\
&\leq \text{const}\, n^{-k}
\end{aligned}$$

donc $g = (f.\varphi)^+ - f\varphi^+ \in \mathcal{A}^\infty(\mathbb{D})$.

(iii) Puisque $(f.\varphi)^+ - f\varphi^+ \in \mathcal{A}^\infty(\mathbb{D})$ et $\operatorname{supp}\varphi \cup \operatorname{supp} f.\varphi \subset E$, les fonctions $(f.\varphi)^-$, $f\varphi^-$, $(f.\varphi)^+$ et $f\varphi^+$ ont un prolongement continu sur $\overline{\mathbb{D}}\backslash E$. Comme la fonction $f\varphi^-$ est bornée sur $\mathbb{D}$, les fonctions $f\varphi^+$ et $(f.\varphi)^+$ sont bornées sur $\mathbb{T}\backslash E$. Donc la fonction $(f.\varphi)^-$ est bornée sur $\mathbb{T}\backslash E$, mais on sait que $(f.\varphi)^- \in \mathcal{N}^+$; il découle alors que $(f.\varphi)^- \in H^\infty(\mathbb{D})$.

On a $(f.\varphi)^- \in H^\infty(\mathbb{D})$, $\sup\limits_{n\geq 1} \dfrac{|\widehat{f.\varphi}(n)|}{\omega(-n)} < +\infty$ et $\operatorname{supp} f.\varphi \subset E$ est un ensemble de Carleson. Donc d'après [Ke], Théorème 2.2, on a $f.\varphi = 0$ si $\sum\limits_{n\geq 1} \dfrac{1}{n \log \omega(-n)} = +\infty$.

Remarque 2.2. — Lorsque $\sum\limits_{n\geq 1} \dfrac{1}{n \log \omega(-n)} < +\infty$, où ω est un poids vérifiant la condition (R_p), il est montré dans [Ke] qu'il existe un ensemble parfait de Carleson E et une mesure positive μ portée par E telle que l'hyperfonction φ associée à la fonction intérieure singulière θ_μ donnée par

$$\varphi(z) = \frac{1}{\theta_\mu(z)} - \frac{1}{\theta_\mu(\infty)} \text{ pour } z \in \mathbb{C}\backslash E$$

où $\theta_\mu(z) = \exp\left(\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} \dfrac{z+e^{it}}{z-e^{it}} d\mu(t)\right)$ et $\theta_\mu(\infty) = \exp\left(\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} d\mu(t)\right)$ vérifie

$$|\hat{\varphi}(n)| = O(\omega(-n))(n \to +\infty) \text{ et } \sum_{n\leq 0} |\hat{\varphi}(n)|^2 < +\infty.$$

3. Trace analytique de sous-espaces biinvariants de L^2_ω.

Soit $H^2_p = (L^2_p)^+$; il est clair que H^2_p est l'ensemble des fonctions f de H^2 telles que les dérivées $f', f^{(2)}, ..., f^{(p)}$ sont dans H^2. Un ensemble E de $\mathbb{T}$ est dit un K-ensemble si pour une certaine constante $c > 0$, on a

$$\sup_{\xi \in L} \operatorname{dist}(\xi, E) \geq c|L|,$$

pour tout arc L fermé de $\mathbb{T}$ de longueur $|L|$. Notons que les K-ensembles sont des ensembles de Carleson et que par exemple les parfaits symétriques de rapport constant $\xi \in (0, 1/2)$ sont des K-ensembles.

Dynkin dans [Dy] a montré que E est un K-ensemble si et seulement si E est un ensemble d'interpolation pour H^2_p, c'est-à-dire que pour toute fonction $f \in L^2_p$ il existe une fonction $g \in H^2_p$ telle que $f^{(k)}_{|E} = g^{(k)}_{|E}$, pour $0 \leq k \leq p$.

On est en mesure maintenant d'énoncer les résultats principaux de ce travail.

THÉORÈME 3.1. — *Soit ω un poids vérifiant la condition (R_p). Soit B un sous-espace biinvariant fermé de L^2_ω. Si*

$$\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n \log \omega(-n)} = +\infty,$$

alors

$$B \cap H^2_p = \mathcal{M}_\omega(E_0, E_1, ..., E_{p-1}) \cap H^2_p,$$

où $E_k = Z(B^{(k)}) = Z(\{f^{(k)} : f \in B\})$.

Si, de plus, $Z(B)$ est un K-ensemble, alors

$$B = \mathcal{M}_\omega(E_0, E_1, ..., E_{p-1}).$$

Le théorème 3.1 n'est plus valable si $\sum_{n\geq 1} \dfrac{1}{n \log \omega(-n)} < +\infty$. On a en effet le résultat suivant.

THÉORÈME 3.2. — *Soit ω un poids vérifiant la condition (R_p). Si*

$$\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n \log \omega(-n)} < +\infty,$$

alors il existe un ensemble de Carleson E, une mesure μ positive non nulle concentrée sur E et un sous-espace biinvariant B fermé de L^2_ω tels que

$$B \cap H^2_p = \theta_\mu H^2 \cap H^2_p$$

où θ_μ est la fonction intérieure singulière associée à μ.

Preuve du théorème 3.1. — Soit B un sous-espace biinvariant fermé de L^2_ω et soit $E = E_0 = Z(B)$. Si $g \in B \cap H^2_p$, $g \neq 0$, on a pour tout $z_0 \in Z(g)$

$$|g(z)| = \left| \int_{z_0}^{z} g'(\xi) d\xi \right| \leq \|g'\|_{H^2_{p-1}} |z - z_0|^{\frac{1}{2}}.$$

Ainsi $|g(z)| = O((\mathrm{dist}(z, Z(g)))^{\frac{1}{2}})$, donc $Z(g)$ est un ensemble de Carleson. On peut supposer alors que E est un ensemble de Carleson, sinon $B \cap H^2_p = \{0\}$ et le résultat est évident. Puisque E est un ensemble de Carleson, il existe une fonction extérieure $f \in \mathcal{A}^\infty(\mathbb{D})$ telle que $Z(f) = E$ et $f^{(n)}_{|E} \equiv 0$ pour tout $n \geq 0$ [TW]. Soit $\varphi \in \mathcal{H}_\omega(\mathbb{T})$ tel que φ orthogonal à B, alors $\operatorname{supp} \varphi \subset E$ (voir [A2], Lemma 2.2) et d'après la proposition 2.1, on a $f.\varphi = 0$. Donc $f \in B$, $Z(B \cap H^2_p) = E$.

D'autre part, $B \cap H^2_p$ est un idéal fermé de H^2_p qui contient une fonction extérieure f. Il découle alors de la caractérisation des idéaux fermés de H^2_p obtenue par Korenblum dans [Ko2] (voir aussi [Ko1]) que

$$B \cap H^2_p = \left\{ f \in H^2_p : f_{|E} = f'_{|E_1} = \ldots = f^{(p-1)}{}_{|E_{p-1}} = 0 \right\},$$

où $E_k = Z((B \cap H^2_p)^{(k)})$ pour $k \leq p - 1$.

Dans le cas où $p = 1$, ceci achève la démonstration du théorème. Supposons $p \geq 2$.

Montrons maintenant que $E_k = Z(B^{(k)})$ pour $k \leq p - 1$. Il est clair que la suite $(E_k)_{1 \leq k \leq p-1}$ est ordonnée et $E_k \supset Z(B^{(k)})$ pour $k \leq p - 1$. Soit F l'ensemble des points d'accumulation de $E = Z(B) = Z(B \cap H^2_p)$. Alors $F \subset Z(B^{(k)}) \subset E_k$.

Soit maintenant ξ_0 un point isolé de E tel que $\xi_0 \notin Z(B^{(k)})$ avec $1 \leq k \leq p - 1$. Soit $u \in \mathcal{A}^\infty(\mathbb{D})$ telle que $u(\xi_0) = 1$ et $u^{(n)}_{|E \setminus \{\xi_0\}} = 0$ pour $n \geq 0$. On pose pour $m \geq 1$

$$u_1(\xi) = u(\xi) \left(1 - (\xi - \xi_0) u'(\xi_0) \right),$$

$$u_m(\xi) = u_{m-1}(\xi) \left(1 - \frac{(\xi - \xi_0)^m}{m!} u^{(m)}_{m-1}(\xi_0) \right).$$

Soit $v = u_{p-1}$. Il est facile de voir que $v(\xi_0) = 1$, $v_{|E \setminus \{\xi_0\}} = 0$ et $v^{(n)}_{|E} = 0$ pour $1 \leq n \leq p - 1$. Notons aussi que si $f \in L^2_\omega$, alors $fv \in L^2_\omega$. En effet, si on désigne par α l'application : $e^{it} \to e^{it}$, on a pour $n \geq 0$

$$\begin{aligned}
\|\alpha^n f\|_\omega^2 &= \|\sum_{m\in\mathbb{Z}} \hat{f}(m)\alpha^{n+m}\|_\omega^2 \\
&= \sum_{m\in\mathbb{Z}} |\hat{f}(m)|^2\omega(n+m)^2 \\
&\leq \|f\|_\omega^2 \sup_{m\in\mathbb{Z}} \left(\frac{\omega(n+m)}{\omega(m)}\right)^2 \\
&\leq ((1+n)^p\|f\|_\omega)^2,
\end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}
\|vf\|_{L^2_\omega} &= \|\sum_{n\geq 0} \hat{v}(n)\alpha^n f\|_\omega \\
&\leq \sum_{n\geq 0} |\hat{v}(n)|\|\alpha^n f\|_\omega \\
&\leq \|f\|_\omega \sum_{n\geq 0} |\hat{v}(n)|(1+n)^p < +\infty.
\end{aligned}$$

De plus l'application $f \to vf$ est un endomorphisme continu de L^2_ω.

On considère maintenant

$$B_v = \{f \in L^2_\omega : fv \in B\};$$

il est clair que B_v est un sous-espace biinvariant fermé de L^2_ω et que $B \subset B_v$. Par conséquent $Z(B_v) \subset E$. Posons $w = v^2 - v$. Alors $w^{(q)}_{|E} = 0$ pour $0 \leq q \leq p-1$, donc $w \in B \cap H^2_p$. On a $1 - v \in B_v$, donc $Z(B_v) \subset Z(1-v) \cap E = \{\xi_0\}$ et $Z(B_v^{(k)}) \subset Z(B^{(k)}) \subset E\backslash\{\xi_0\}$, donc $Z(B_v^{(k)}) = \emptyset$.

On définit maintenant sur L^2_ω/B_v l'opérateur $T : \pi(f) \longrightarrow \pi(\alpha f)$, où $\pi : L^2_\omega \to L^2_\omega/B_v$ est la surjection canonique. Soit $g \in \mathcal{A}^\infty(\mathbb{D})$ une fonction extérieure plate en ξ_0 et telle que $g(\xi) \neq 0$ pour $\xi \in \mathbb{T}\backslash\{\xi_0\}$. Il résulte de même que plus haut de la proposition 2.1 que $g \in B_v$. Soit $g(T) = \sum_{n\geq 0} \hat{g}(n)T^n$; l'opérateur $g(T)$ est bien défini car $\|T^n\| \leq (1+n)^p$ pour $n \geq 0$. On désigne par $\mathrm{Sp}(T)$ le spectre de T. On a $g(\mathrm{Sp}(T)) \subset \mathrm{Sp}(g(T))$ car pour tout $\xi \in \mathbb{T}$, il existe $g_\xi \in \mathcal{A}^\infty(\mathbb{D})$ tel que $g - g(\xi) = (\alpha - \xi)g_\xi$, d'où $g(T) - g(\xi)I = (T - \xi I)g_\xi(T)$. On a $g(\pi(\alpha^n)) = \pi(\alpha^n g) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$ donc $g(T) = 0$ et $\mathrm{Sp}(T) = \{\xi_0\}$. D'autre part $\|T^n\| = O(n^p)(n \to +\infty)$, $\|T^{-n}\| = O(\omega(-n))(n \to +\infty)$ et $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{\log\omega(-n)}{\sqrt{n}} = 0$. Il découle de [A1], Corollary 1 que $(T - \xi_0)^{p+1} = 0$. Donc $(\alpha - \xi_0)^{p+1} \in B_v$ et puisque $Z(B_v^{(k)}) = \emptyset$, $(\alpha - \xi_0)^k \in B_v$. D'où $(\alpha - \xi_0)^k v \in B \cap H^2_p$ et

$((\alpha-\xi_0)^k v)^{(k)}(\xi_0) = k! \neq 0$, ce qui montre que $\xi_0 \notin E_k$. Donc $E_k = Z(B^{(k)})$ $(0 \leq k \leq p-1)$.

Supposons maintenant que E est un K–ensemble. Soient les injections naturelles suivantes :

$$\theta_1 : H^2_p \longrightarrow L^2_\omega \quad \text{et} \quad \theta_2 : L^2_\omega \longrightarrow L^2_p,$$

et soient les surjections canoniques suivantes :

$$H^2_p \xrightarrow{\pi_1} H^2_p/\mathcal{M}_{H^2_p}(E_0, ..., E_{p-1}), \ L^2_\omega \xrightarrow{\pi_2} L^2_\omega/B$$

$$\text{et } L^2_p \xrightarrow{\pi_3} L^2_p/\mathcal{M}_2(E_0, ..., E_{p-1}).$$

On a $H^2_p \cap B = \mathcal{M}_{H^2_p}(E_0, ..., E_{p-1})$ et $B \subset \mathcal{M}_\omega(E_0, ..., E_{p-1}) \subset \mathcal{M}_p(E_0, ..., E_{p-1})$. Il existe alors $\tilde{\theta}_1$ et $\tilde{\theta}_2$ tels que le diagramme suivant soit commutatif :

$$\begin{array}{ccccc} H^2_p & \xrightarrow{\theta_1} & L^2_\omega & \xrightarrow{\theta_2} & L^2_p \\ \downarrow \pi_1 & & \downarrow \pi_2 & & \downarrow \pi_3 \\ H^2_p/\mathcal{M}_{H^2_p}(E_0, ..., E_{p-1}) & \xrightarrow{\tilde{\theta}_1} & L^2_\omega/B & \xrightarrow{\tilde{\theta}_2} & L^2_p/\mathcal{M}_p(E_0, ..., E_{p-1}). \end{array}$$

Comme E est un K-ensemble, $\tilde{\theta}_2 \circ \tilde{\theta}_1$ est un homomorphisme bicontinu. Donc $\tilde{\theta}_1$ est injective et d'image fermée.

Remarquons que $\tilde{\theta}_1$ est à image dense. En effet, soit $l \in (L^2_\omega/B)^*$ orthogonal à l'image de $\tilde{\theta}_1$, de sorte que l'hyperfonction $\varphi(z) = \langle(\pi_2[(\alpha - z)^{-1}], l\rangle$ est nulle pour $|z| > 1$. D'autre part l'opérateur T de multiplication par $\pi_2(\alpha)$ dans L^2_ω/B est annulé par les fonction $g \in \mathcal{A}^\infty(\mathbb{D})$ plates sur E telle que $Z(g) \supset E$. De même que plus haut ceci entraîne que $\mathrm{Sp}(T) \subset E$. La fonction $z \to \pi_2[(\alpha - z)^{-1}] = (T - z)^{-1}\pi_2(1)$ s'étend donc analytiquement à $\mathbb{C}\backslash E$, ce qui prouve que $\operatorname{supp} \varphi \subset E \subsetneq \mathbb{T}$. Donc φ est nulle , $\langle \pi(\alpha)^n, l\rangle = 0$ $(n \in \mathbb{Z})$ et $l = 0$.

Par conséquent $\tilde{\theta}_2$ est un isomorphisme. Donc $\tilde{\theta}_2$ est injective et $\mathcal{M}_\omega(E_0, ..., E_{p-1}) = \mathcal{M}_p(E_0, ..., E_{p-1}) \cap L^2_\omega \subset B$ et $B = \mathcal{M}_\omega(E_0, ..., E_{p-1})$.

Preuve du théorème 3.2. — Puisque $\sum_{k\geq 1} \dfrac{1}{k \log \omega(-k)} < +\infty$, il existe pour $q \geq 1$ un entier $n_0 > 0$ tel que pour $n \geq n_0$ on a

$$\sum_{n \geq k \geq n_0} \frac{1}{k \log \omega(-k)} \leq \frac{1}{q},$$

or $\dfrac{1}{\log \omega(-n)} \leq \dfrac{1}{\log \omega(-k)}$ pour tout $k \leq n$. Donc

$$\frac{1}{\log \omega(-n)} \sum_{n_0 \leq k \leq n} \frac{1}{k} \leq \frac{1}{q}.$$

Comme $\log(n+1) - \log(n_0) \leq \sum_{n_0 \leq k \leq n} \frac{1}{k}$,

$$\frac{\log\left(\frac{n+1}{n_0}\right)}{\log \omega(-n)} \leq \frac{1}{q} \text{ pour } n \geq n_0.$$

Donc $(n+1)^q \leq n_0^q \omega(-n)$ et $(n+1)^q = O(\omega(-n))(n \to +\infty)$.

On pose

$$\tilde{\omega}(n) = \begin{cases} (1+n)^p \text{ pour } n \geq 0 \\ (1+|n|)(\omega(n))^{\frac{1}{4}} \text{ pour } n \leq -1. \end{cases}$$

Il est facile de voir que $\tilde{\omega}$ est un poids vérifiant la propriété 1 et 3 de la condition (R_{p+1}) et 2 est satisfaite car $n^{2(p+1)} = O(\omega(-n))(n \to +\infty)$; de plus, $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n \log \tilde{\omega}(-n)} < +\infty$. Il découle de la remarque 2.2 qu'il existe un ensemble parfait de Carleson E, une mesure positive non nulle μ de support E telle que l'hyperfonction φ associée à la fonction singulière θ_μ donnée par

$$\varphi(z) = \frac{1}{\theta_\mu(z)} - \frac{1}{\theta_\mu(\infty)} \text{ pour } z \in \mathbb{C} \backslash E$$

vérifie

$$|\hat{\varphi}(n)| = O\left(\tilde{\omega}(-n)\right)(n \to +\infty) \text{ et } \sum_{n \leq 0} |\hat{\varphi}(n)|^2 < +\infty.$$

Donc $\varphi \in \mathcal{H}_\omega(E)$. Soit maintenant

$$B = \{g \in L^2_\omega : g.\varphi = 0\}.$$

Il est évident que B est un sous-espace fermé biinvariant de L^2_ω. On a

$$B \cap H^2_p = \{g \in H^2_p : g.\varphi = 0\}.$$

Comme $H^2_p \subset H^2$, il résulte immédiatement de [E4], Proposition 3.12 que

$$B \cap H^2_p = H^2_p \cap \theta_\mu H^2,$$

ce qui achève la démonstration du théorème 3.2.

Remarque 3.3. — En fait $H^2_p \cap \theta_\mu H^2 \subset \theta_\mu H^2_p$ (voir [Ko2], [Ko3]). Comme $H^2_p \subset \mathcal{A}(\mathbb{D})$ et comme $\operatorname{supp} \mu = E$ est un ensemble parfait on en déduit que

$$\theta_\mu H^2_p \subset \{g \in H^2_p : g_{|E} = \ldots = g^{(p-1)}_{|E} = 0\}.$$

L'inclusion est stricte puisque il existe des fonctions de $\mathcal{A}^\infty(\mathbb{D})$ non nulles et plates sur E. D'autre part si $f \in \mathcal{A}^\infty(\mathbb{D})$ est plate sur E, alors

$$\theta_\mu f \in \theta_\mu H^2 \cap \mathcal{A}^\infty(\mathbb{D}) \subset \theta_\mu H^2 \cap H^2_p.$$

Donc $E_0(B \cap H^2_p) = \ldots = E_{p-1}(B \cap H^2_p) = E$ et $\theta_\mu H^2 \cap H^2_p = B \cap H^2_p$ n'est pas de type spectral.

4. Applications aux opérateurs à spectre d'interpolation.

Soit $0 < s < 1$, on désigne par A^s l'algèbre définie par

$$A^s = \left\{ f \in \mathcal{A}(\mathbb{D}) : \|f\|_{A^s} = \|f\|_\infty + \sup_{h\neq 0, t\in\mathbb{R}} \frac{|f(e^{i(t+h)}) - f(e^{it})|}{|h|^s} < +\infty \right\}.$$

Soit p un entier positif, on désigne par $\mathcal{A}^p(\mathbb{D})$ l'algèbre des fonctions f telles que $f^{(k)} \in \mathcal{A}(\mathbb{D})$ pour tout $0 \le k \le p$. On considère l'algébre

$$\mathcal{A}^{p+s} = \left\{ f \in \mathcal{A}^p(\mathbb{D}) : f^{(p)} \in A^s \right\},$$

munie du produit ponctuel et de la norme

$$\|f\|_{\mathcal{A}^{p+s}} = \|f\|_\infty + \sup_{h\neq 0, t\in\mathbb{R}} \frac{|f^{(p)}(e^{i(t+h)}) - f^{(p)}(e^{it})|}{|h|^s} < +\infty,$$

$\mathcal{A}^{p+s}$ est une algèbre de Banach commutative unitaire.

On pose

$$\Lambda^{p+s} = \left\{ f \in \mathcal{C}^p(\mathbb{T}) : \|f\|_{\Lambda^{p+s}} = \|f\|_{\mathcal{C}^p(\mathbb{T})} + \sup_{h\neq 0, t\in\mathbb{R}} \frac{|f^{(p)}(e^{i(t+h)}) - f^{(p)}(e^{it})|}{|h|^s} < +\infty \right\}.$$

L'espace Λ^{p+s} muni du produit ponctuel et de la norme $\|.\|_{\Lambda^{p+s}}$ est une algèbre de Banach commutative unitaire.

Il est montré dans [Dy] que si E est un K-ensemble alors E est un ensemble d'interpolation pour $\mathcal{A}^{p+s}$, c'est-à-dire que pour toute fonction $f \in \Lambda^{p+s}$, il existe $g \in \mathcal{A}^{p+s}$ telle que $f^{(k)}_{|E} = g^{(k)}_{|E}$ pour $0 \le k \le p$.

THÉORÈME 4.1. — *Soit ω un poids vérifiant la condition (R_p). Soit T un opérateur borné sur un espace de Banach X tel que le spectre de T soit un K-ensemble. Si $\|T^n\| = O(\omega(n))(|n| \to +\infty)$ avec*

$$\sum_{n\ge 1} \frac{1}{n \log \omega(-n)} = +\infty,$$

alors pour tout $s > 1/2$ on a $\|T^{-n}\| = O(n^{p+s})(n \to +\infty)$.

Preuve. — Soient $x \in X$, $l \in X^*$, on pose

$$\varphi(z) = \langle (T - zI)^{-1}x, l\rangle \text{ pour } z \notin \mathrm{Sp}(T).$$

Il est clair que φ est une hyperfonction à support dans $\mathrm{Sp}(T)$ et $|\hat{\varphi}(n)| = O(\omega(n))(n \to \pm\infty)$. Soit $f \in \mathcal{A}^\infty(\mathbb{D})$ une fonction extérieure plate sur $\mathrm{Sp}(T)$. Un calcul classique montre que

$$g.\varphi(z) = \langle (T - zI)^{-1} g(T)x, l\rangle \quad \text{pour } z \notin \mathbb{T}.$$

Puisque $\sum\limits_{n\geq 1} \dfrac{1}{n\log\omega(-n)} = +\infty$ et $\operatorname{supp}\varphi \subset \operatorname{Sp}(T)$, il découle de la proposition 2.1 que $g.\varphi = 0$ et par suite $g(T) = 0$.

D'après l'inégalité de Bernstein [K], p. 13 on a l'injection continue suivante :

$$\mathcal{A}^{p+s} \hookrightarrow l_p^1 := \left\{ (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{C}^{\mathbb{N}} : \sum_{n\in\mathbb{N}} |a_n|(1+n)^p < +\infty \right\}.$$

Ceci permet de définir un calcul fonctionnel associé à l'opérateur T sur l'algèbre $\mathcal{A}^{p+s}$. En effet soit $\phi : \mathcal{A}^{p+s} \to \mathcal{L}(X)$ défini par $\phi(g) := g(T) = \sum\limits_{n\geq 0} \hat{g}(n)T^n$. Alors ϕ est un homomorphisme continu et $\operatorname{Ker}\phi$ est un idéal fermé de $\mathcal{A}^{p+s}$. Puisque $f \in \operatorname{Ker}\phi$, $Z(\operatorname{Ker}\phi) \subset \operatorname{Sp}(T)$. D'aprés la caractérisation des idéaux fermés de $\mathcal{A}^{p+s}$ obtenue par Shamoyan dans [S], on a

$$\mathcal{M}_{\mathcal{A}^{p+s}}(E_0, E_1, ..., E_p) \subset \operatorname{Ker}\phi,$$

où $E_0 = E_1 = ... = E_p = \operatorname{Sp}(T)$.

Soit la surjection canonique

$$\pi : \mathcal{A}^{p+s} \to \mathcal{A}^{p+s}/\mathcal{M}_{\mathcal{A}^{p+s}}(E_0, E_1, ..., E_p),$$

et soit $\tilde{\phi}$ tel que le diagramme suivant soit commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{A}^{p+s} & \xrightarrow{\phi} & \mathcal{L}(X) \\ \downarrow \pi & & \nearrow \tilde{\phi} \\ \mathcal{A}^{p+s}/\mathcal{M}_{\mathcal{A}^{p+s}}(E_0, E_1, ..., E_p). & & \end{array}$$

On a $\tilde{\phi}\circ\pi = \phi$. Comme $\operatorname{Sp}(T)$ est un K-ensemble, qui est un ensemble d'interpolation de $\mathcal{A}^{p+s}$, l'application

$$\theta : \mathcal{A}^{p+s}/\mathcal{M}_{\mathcal{A}^{p+s}}(E_0, E_1, ..., E_p) \longrightarrow \Lambda^{p+s}/\mathcal{M}_{\Lambda^{p+s}}(E_0, E_1, ..., E_p)$$

est un isomorphisme bicontinu. Donc

$$\tilde{\phi} \circ \theta^{-1} : \Lambda^{p+s}/\mathcal{M}_{\Lambda^{p+s}}(E_0, E_1, ..., E_p) \to \mathcal{L}(X)$$

est continue, d'où $\|T^{-n}\| = O\left(\|e^{-int}\|_{\Lambda^{p+s}}\right)$. Un calcul simple donne

$$\|e^{-int}\|_{\Lambda^{p+s}} = O(n^{p+s})(n \to +\infty)$$

et ceci achève la preuve du théorème.

D'autres types de résultat de même nature concernant les contractions dont le spectre est le Cantor triadique, les ensembles de Carleson et les ensembles dénombrables ont été obtenus dans [EZR], [E1], [E2], [Ke] et [Z].

BIBLIOGRAPHIE

[A1] A. ATZMON, Operators which are annihilated by analytic functions and invariant subspaces, Acta Math., 144 (1980), 27–63.

[A2] A. ATZMON, On the existence of hyperinvariants subspaces, J. Op. Theory, 11 (1984), 3–40.

[B] V.I. BURENKOV, On the approximation of functions in Sobolev spaces by functions of compact support in an arbitrary open set, Soviet Math. Dokl., 13 (1972), 60–64.

[C] L. CARLESON, Sets of uniqueness of functions regular in the unit circle, Acta Math., 87 (1952), 325–345.

[D] P.L. DUREN, Theory of H^p Spaces, Pure and Applied Math., Academic Press, New York-London, 1970.

[Dy] E.M. DYNKIN, Free interpolation set for Hölder classes, Mat. Sbornik, 109 (1979), 107–128.

[EZR] J. ESTERLE, M. ZARRABI and M. RAJOELINA, On contractions with spectrum contained in the Cantor set, Math. Proc. Camb. Phil. Soc., 177 (1995), 339–343.

[E1] J. ESTERLE, Distributions on Kronecker sets, strong forms of uniqueness, and closed ideals of A^+, J. für reine ang. Math., 450 (1994), 43–82.

[E2] J. ESTERLE, Uniqueness, strong forms of uniqueness and negative powers of contractions, Banach Center Publications, 30 (1994), 1–19.

[E3] J. ESTERLE, Closed ideals in certain Beurling algebras and synthesis of hyperdistributions, Studia Math., 120 (1996), 113–153.

[E4] J. ESTERLE, Singular inner functions and biinvariant subspaces for dissymetric weighted shifts, J. Func. Analysis, 144 (1997), 64–104.

[K] J.P. KAHANE, Séries de Fourier absolument convergentes, Ergebnisse der Maths, 50, Berlin–Heidelberg–New York, Springer, 1970.

[Ke] K. KELLAY, Contractions et hyperdistributions à spectre de Carleson, J. London. Math. Soc., to appear.

[Kh] L. KHANIN, Spectral synthesis of ideals in algebras of functions having generalized derivatives, Russian Math. Surveys, 39 (1984), 167–168.

[Ko1] B.I. KORENBLUM, Invariant subspace of the shift operator in weighted Hilbert space, Mat. Sbornik, 89 (1972), 112–138.

[Ko2] B.I. KORENBLUM, Invariant subspaces for a shift operator in some weighted Hilbert sequence spaces, Soviet Math. Dokl., 13 (1972), 272–275.

[Ko3] B.I. KORENBLUM, Functions holomorphic in a disc and smooth in its closure, Soviet Math. Dokl., 12 (1971), 1312–1315.

[N] N.K. NIKOLSKII, Lectures on the shift operator IV, J. Soviet Math., 16 (1981), 1118–1139.

[S] F.A. SHAMOYAN, Closed ideals in algebras of functions analytic in the disc and smooth up to its boundary, Mat. Sbornik, 79 (1994), 425–445.